

УДК 519.634

О СТРУКТУРЕ ВИНТОВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ¹⁾

© 2024 г. В.А. Галкин^{1,2,*}

¹628408 ХМАО–Югра, Сургут, ул. Энергетиков, 4, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

²628400 ХМАО–Югра, Сургут, пр-т Ленина, 1, Сургутский государственный университет, Россия

*e-mail: val-gal@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.11.2023 г.

Переработанный вариант 29.12.2023 г.

Принята к публикации 14.01.2024 г.

Получен класс точных решений уравнений Навье–Стокса для осесимметричного вихревого течения несжимаемой жидкости. Выделены инвариантные многообразия течений, обладающих вращательной симметрией относительно заданной оси в трехмерном координатном пространстве, приведено описание структуры решений. Установлено, что типичными инвариантными областями таких течений являются фигуры вращения, гомеоморфные тору, образующие структуру топологического расслоения, например, в шаре, цилиндре и в общих комплексах, составленных из таких фигур. Полученные результаты распространяются на подобные решения системы уравнений МГД, уравнения электродинамики Максвелла, обладающие в \mathbb{R}_3 аналогичными свойствами. Приведены примеры осесимметричных вихревых векторных полей и порожденных ими топологических расслоений на многообразиях в \mathbb{R}_3 , инвариантных относительно динамических систем, задаваемых этими полями. Библиография: 23. Фиг. 3.

Ключевые слова: уравнения несжимаемой жидкости, точные решения, точные решения системы Навье–Стокса, МГД, уравнения Максвелла, инвариантные многообразия, топологическое расслоение.

DOI: 10.31857/S0044466924050076, EDN: YDGAQB

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является развитием круга идей о построении поля с универсальной динамикой, появившихся у автора настоящей статьи во время участия в международных проектах по физике высоких энергий в 2000–2010 гг.: HERA-B (DESY, Hamburg, Germany), OPERA (INFN, Gran-Sasso, Italy) в составе российской группы от Обнинского государственного технического университета атомной энергетики (ИАТЕ), (см. [1–6]).

В [7–23] даны содержательные результаты, относящиеся к теме настоящей работы.

В координатном пространстве $\mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$ рассматривается динамика во времени $t \in \mathbb{R}$ гладкого поля скоростей $V : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_3$ ($V \in C^2$), удовлетворяющего системе Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P(x, t) = G(x, t) + \varepsilon^2 \Delta V, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad (1.2)$$

где $P : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — давление жидкости, $\bar{\rho}$ и ε^2 — постоянные, характеризующие плотность и вязкость жидкости, $G(x, t)$ — плотность объемных сил. В настоящей работе рассматривается класс решений $\{\mathbf{V}, P\}$, обладающих свойством симметрии относительно некоторой оси \mathcal{L} , которую без потери общности направим вдоль вектора $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$, $(\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3)$ — ортонормированный базис в \mathbb{R}_3 . Проекцию вектора x на ось \mathcal{L} обозначим

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (НИЦ «Курчатовский институт») — Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме No 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

в дальнейшем $z = (x, \bar{e}_3)$, положим $x_i \stackrel{\text{def}}{=} (x, \bar{e}_i)$. Предположение об осевой симметрии функции u относительно оси \mathcal{L} означает, что ее зависимость от пространственных аргументов x_1, x_2 осуществляется через величину $\rho(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$. Для этого класса задач наряду с декартовыми координатами удобно использовать цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) . Для функции u , обладающей осевой симметрией, положим $u(x) \equiv \bar{u}(\rho, z)$, и в этом случае оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u(x) = \Delta_\rho \bar{u} + \bar{u}_{zz}, \quad \Delta_\rho \bar{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{u}_\rho).$$

Осесимметричные однородно-винтовые решения системы Навье–Стокса уже изучались в научной литературе. Одними из первых были работы [7, 8]. Анализ свойств этого класса решений проводился и другими авторами, см., например, [9–11].

2. ВИХРЕВЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ

Пусть множество $M = \mathbb{R}_3 \setminus \mathcal{L}$ и функция $F \in C^4(M)$ при некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta F(x) + \lambda^2 F(x) = 0, \quad x \in M. \tag{2.1}$$

Определение 2.1. Предположим, что функция F удовлетворяет соотношению (2.1) при некотором $\lambda \neq 0$ и обладает на M осевой симметрией: $F(x) \equiv \bar{F}(\rho, z)$. Назовем осесимметричным вихревым полем, порожденным функцией F на множестве M , отображение $U : M \rightarrow \mathbb{R}_3$, заданное соотношением

$$U(x) = \lambda^{-2} \rho^{-1} \left[(\bar{F}_{\rho,z} x_1 + \lambda \bar{F}_\rho x_2) \bar{e}_1 + (-\lambda \bar{F}_\rho x_1 + \bar{F}_{\rho,z} x_2) \bar{e}_2 - (\rho \Delta_\rho \bar{F}) \bar{e}_3 \right], \quad \rho = \rho(x_1, x_2), \quad x \in M. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Отметим, что произвольные линейные комбинации осесимметричных полей вида (2.1), (2.2) сохраняют это свойство для результирующего поля.

С векторным полем (2.2) свяжем динамическую систему в цилиндрических координатах, определенную при $\lambda \neq 0$ в области $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \lambda^{-2} \bar{F}_{\rho,z}, \\ \dot{\varphi} &= -\lambda^{-1} \rho^{-1} \bar{F}_\rho, \\ \dot{z} &= -\lambda^{-2} \Delta_\rho \bar{F}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Будем полагать, что система (2.3) порождает однопараметрическую группу преобразований $T_t : M \rightarrow M, t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1. Пусть векторное поле U задано соотношениями (2.1), (2.2). Тогда на M справедливы тождества

$$\operatorname{div} U = 0, \tag{2.4}$$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0, \tag{2.5}$$

$$(U \cdot \nabla) U = \frac{1}{2} \nabla(U, U). \tag{2.6}$$

Доказательство. Соотношения (2.4)–(2.6) являются прямым следствием тождества

$$\nabla \times U = \lambda U, \quad x \in M, \tag{2.7}$$

которое получается из формул (2.1) и (2.2).

Лемма доказана.

Замечание 2.2. Решения уравнения Бельтрами (2.7) вида (2.2) могут быть построены из решений уравнения Гельмгольца (2.1) методом Чандрасекара–Кендала [12, 13].

Лемма 2.2. Динамическая система (2.3) имеет инвариант движения

$$\bar{\Phi}(\rho, z) = \rho \bar{F}_\rho(\rho, z), \quad \rho > 0, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Вычисление полной производной по времени функции $\overline{\Phi}(\rho(t), z(t))$ с учетом соотношений (2.3) приводит к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Следствие 2.1. Область M является расслоением с базой \mathbb{R} и слоями $\Phi^{-1}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_3^{\Phi}(x) = c\} \forall c \in \mathbb{R}$, где $\Phi(x) \equiv \overline{\Phi}(\rho(x_1, x_2), z)$:

$$M = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \Phi^{-1}(c), \quad (2.9)$$

при этом в силу утверждения леммы 2.2 группа преобразований $T_t : M \rightarrow M$ динамической системы

$$\dot{x} = U(x) \quad (2.10)$$

оставляет инвариантными слои $\Phi^{-1}(c)$:

$$T_t : \Phi^{-1}(c) \rightarrow \Phi^{-1}(c) \quad \forall c, t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Следствие 2.2. Каждая компонента связности открытого множества $M \setminus (\Phi^{-1}(0) \cup \mathcal{L})$ является фигурой вращения вокруг оси \mathcal{L} .

Действительно, поскольку множество $(\Phi^{-1}(0) \cup \mathcal{L})$ является замкнутым, а M — открытое подмножество в \mathbb{R}_3 , то $M \setminus (\Phi^{-1}(0) \cup \mathcal{L})$ открытое. Таким образом, $M \setminus (\Phi^{-1}(0) \cup \mathcal{L})$ является объединением непересекающихся открытых компонент связности, границы которых принадлежат многообразию $(\Phi^{-1}(0) \cup \mathcal{L})$. На многообразии $\Phi^{-1}(0)$ выполнено соотношение $\overline{F}_\rho(\rho, z) = 0$ при $\rho > 0$, и, значит, для динамической системы (2.3), являющейся представлением системы (2.10) в цилиндрической системе координат при $\rho > 0$ на $\Phi^{-1}(0)$ выполняется тождество $\dot{\phi} \equiv 0$, т.е. линии тока систем (2.3), (2.10) на многообразии $\Phi^{-1}(0)$ инвариантны относительно поворотов относительно оси \mathcal{L} . Поскольку эти линии тока образуют $\Phi^{-1}(0)$, то границы компонент связности инвариантны относительно поворотов вокруг оси \mathcal{L} .

Ниже в качестве примеров таких областей рассматриваются комбинации цилиндров, шаров, торообразных и воронкообразных фигур.

Следствие 2.3. Группа T_t оставляет инвариантной каждую компоненту связности множества

$$M_{c,d} = \{x \in M : c < \Phi(x) < d\} \quad \forall c, d \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Лемма 2.3. Пусть $Q_{c,d}$ является открытой компонентой связности множества $M_{c,d}$, $c < d$, определенного в (2.12), $\partial Q_{c,d}$ — граница $Q_{c,d}$. Тогда группа T_t оставляет инвариантными $Q_{c,d}$ и $\partial Q_{c,d}$. В точках $q \in \partial Q_{c,d}$, где определен вектор $\nabla \Phi(q) \neq 0$, выполнено соотношение

$$(U(q), n(q)) = 0, \quad n(q) = \|\nabla \Phi(q)\|^{-1} \nabla \Phi(q). \quad (2.13)$$

Доказательство. Инвариантность $Q_{c,d}$ и $\partial Q_{c,d}$ следует из соотношения (2.11). Поскольку $U(q) = \frac{d}{dt} T_t(q)|_{t=0}$, то $\frac{d}{dt} \Phi(T_t(q))|_{t=0} = (U(q), \nabla \Phi(q)) = 0$, так как значения $\Phi(T_t(q))$ на траектории постоянны. Тем самым устанавливается справедливость соотношения (2.13). Лемма доказана.

Замечание 2.3. На подмножествах границы компонент связности, где нормаль (2.13) не определена, условие непротекания (скольжения) по определению означает, что группа T_t оставляет инвариантной эту часть границы.

Замечание 2.4. Отмеченный в лемме случай, когда вектор нормали не определен, является типичным для цилиндрических областей [17] на участках границы, состоящих из пересечения боковых образующих цилиндра и его торцов.

Замечание 2.5. Пусть векторные поля U_α определены формулами (2.1), (2.2) при фиксированном значении параметра $\lambda \neq 0$. Если U_α являются достаточно гладкими на M , то произвольные конечные линейные комбинации осесимметричных полей U_α

$$\tilde{U} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} U_{\alpha}$$

удовлетворяют соотношениям (2.4)–(2.6) на M . При надлежащих требованиях на слагаемые в правой части этого выражения это утверждение распространяется на бесконечные наборы U_α посредством интегрирования по параметру α .

3. РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.1), (1.2) НА КОМПОНЕНТАХ СВЯЗНОСТИ

Свойство инвариантности подобластей в $D \subset \mathbb{R}_3$ относительно действия группы $T_t : D \rightarrow D$, выделенных в лемме 2.3, позволяет рассматривать решения системы Навье–Стокса (1.1), (1.2) только на этих множествах с дополнительным условием непротекания (скольжения):

$$(V(q, t), \mathbf{n}(q))|_{q \in \partial D} = 0, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{n}(q)$ — поле единичных нормалей к кусочно-гладкой границе ∂D области D .

Теорема 3.1. Пусть $D = Q_{c,d}$ является открытой компонентой связности множества $M_{c,d}$, $c < d$, определенного в (2.12), $\partial Q_{c,d}$ — граница $Q_{c,d}$, в точках $\forall a \in \partial Q_{c,d}$ которой определено поле единичных нормалей $\mathbf{n}(q)$. Предположим, что объемные силы $G(x, t) = \nabla g(x, t)$ с гладким потенциалом в области $M = \mathbb{R} \setminus \mathcal{L}$. Тогда система уравнений Навье–Стокса (1.1), (1.2) имеет в области $Q_{c,d}$ решение, удовлетворяющее условию непротекания (скольжения) (3.1):

$$V(x, t) = U(x) \exp(-\lambda^2 \varepsilon^2 t), \tag{3.2}$$

$$P(x, t) = -\frac{\bar{\rho}}{2} (V(x, t), V(x, t)) + g(x, t) + \beta(t), \tag{3.3}$$

где $\beta(t)$ — произвольная функция, зависящая от времени $t \in \mathbb{R}$. Если в формулах (3.2), (3.3) заменить поле U на \tilde{U} , определенное в замечании (2.5), то эти выражения определяют гладкое решение системы уравнений Навье–Стокса (1.1), (1.2) на множестве аргументов $x \in \mathbb{R}_3, t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Утверждение теоремы является прямым следствием соотношений (2.4)–(2.6) из леммы 2.1 и свойства инвариантности границы области относительно группы T_t , заданной соотношением (2.10).

Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть рассматривается произвольная линейная комбинация

$$U(x) = \sum_k \alpha_k U_k(x) \tag{3.4}$$

осесимметричных полей $U_k(x)$, заданных формулами (2.1), (2.2) при помощи функций $F_k = \bar{F}_k(\rho, z)$, соответствующих в уравнении (2.1) фиксированному значению параметра. Тогда инвариантные многообразия (2.8) для динамической системы T_t , порожденной полем (3.4), удовлетворяют соотношению

$$\bar{\Phi}(\rho, z) \equiv \rho \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{F}_k(\rho, z) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим динамическую систему (2.3) с полем (3.4) и сопутствующую ей группу преобразований T_t . Производная по времени на траекториях этой системы удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\Phi}(\rho(t), z(t)) &= \bar{\Phi}_\rho(\rho(t), z(t)) \dot{\rho}(t) + \bar{\Phi}_z(\rho(t), z(t)) \dot{z}(t), \\ \dot{\rho}(t) &= \lambda^{-2} \bar{F}_{\rho,z}, \\ \dot{z} &= -\lambda^{-2} \Delta_\rho \bar{F}, \end{aligned}$$

где функция $\bar{F} \equiv \sum_k \alpha_k \bar{F}_k$, и для каждой \bar{F}_k в силу определения полей U_k посредством соотношений (2.1), (2.2) справедливы соотношения

$$\Delta_\rho \bar{F}_k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{F}_k + \lambda^2 \bar{F}_k = 0, \quad \rho > 0, z \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, для функции \bar{F} имеем

$$\Delta_\rho \bar{F} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{F} + \lambda^2 \bar{F} = 0, \quad \rho > 0, z \in \mathbb{R}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} \bar{\Phi}(\rho(t), z(t)) \equiv \dot{\rho} (\bar{F}_\rho + \rho \bar{F}_{\rho\rho}) + \rho \bar{F}_{\rho z} \dot{z},$$

то

$$\frac{d}{dt} \bar{\Phi}(\rho(t), z(t)) \equiv \lambda^2 \rho \bar{F}_{\rho, z} \left[\bar{F}_{\rho, \rho} + \frac{1}{\rho} \bar{F}_{\rho} - \Delta_{\rho} \bar{F} \right].$$

Так как последний множитель в правой части этого тождества равен нулю, то функция $\bar{\Phi}$ является инвариантом группы преобразований T_t . Теорема доказана.

Представление области M в виде расслоения (2.9) и инвариантность открытых компонентов связности области M относительно группы T_t позволяет рассматривать их как независимые структуры гидродинамического течения (1.1), (1.2). Это дает возможность расширить класс задач для системы уравнений Навье–Стокса на случай многокомпонентных систем, рассматривая величину $\bar{\rho}$ как кусочно-постоянную функцию в M с участками постоянства на открытых компонентах связности, инвариантных относительно группы T_t . Очевидно, что поле скоростей $V(x, t)$ на M определяется формулой (3.2), а давление в этом случае является кусочно-непрерывной функцией пространственных переменных, удовлетворяющей на каждой компоненте соотношению (3.3). Тем самым появляется возможность рассмотрения многофазных нереагирующих жидкостей, обладающих различными плотностями. На компонентах, где $\bar{\rho} = 0$, течение считаем не определенным, хотя формально поле $V(x, t)$ имеет гладкое продолжение на эту область.

Замечание 3.1. Решения (3.2), (3.3) при различных значениях параметра $\lambda \neq 0$ топологически эквивалентны случаю $\lambda = 1$, к которому приводит масштабирование пространственно-временных координат

$$(x', t') = (\lambda x, \lambda^2 t). \quad (3.6)$$

Замечание 3.2. Все результаты настоящей работы переносятся на специальный класс решений системы МГД (магнитной гидродинамики)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P(x, t) = -\frac{1}{4\pi\bar{\rho}} [\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{H}] + \nabla g + \varepsilon^2 \Delta V, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[V, \mathbf{H}] + \mu^2 \Delta \mathbf{H}, \quad (3.8)$$

$$\text{div } V = 0, \quad (3.9)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{H}(x, t)$ — напряженность магнитного поля, постоянная величина μ — магнитная вязкость жидкости. Указанный класс решений системы МГД (3.7)–(3.10) определяется следующими соотношениями:

$$V(x, t) = V_0 \exp(-\lambda^2 \varepsilon^2 t) U(x), \quad \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}_0 \exp(-\lambda^2 \mu^2 t) U(x), \quad (3.11)$$

$$P(x, t) = -\frac{\bar{\rho}}{2} (V(x, t), V(x, t)) + g(x, t) + \beta(t), \quad (3.12)$$

с векторным полем U на M , заданным формулами (2.1), (2.2), V_0 и \mathbf{H}_0 — произвольные постоянные. Особо следует выделить случай нетривиальных стационарных магнитных полей $\mathbf{H}(x, t) \equiv \mathbf{H}_0 U(x)$ при $\mu = 0$, указывающий на возможность существования решений системы МГД типа “геодинамо”. В частности, в работе [16] рассмотрено векторное поле $U : \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ в классе вещественно-аналитических функций на \mathbb{R}_3 с инвариантными многообразиями на шарах и шаровых слоях:

$$U(x) = \frac{\bar{u}'(\lambda r)}{r} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ -2\lambda^{-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \left(\bar{u}''(\lambda r) - \frac{\bar{u}'(\lambda r)}{\lambda r} \right) \begin{bmatrix} x_1 z \\ x_2 z \\ -(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \quad (3.13)$$

где

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} r^{-1} \sin(r), & r > 0, \\ 1, & r = 0. \end{cases} \quad r(x) \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2} > 0. \quad (3.14)$$

Это поле удовлетворяет условию регулярности

$$U(x) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r(x)}\right) \rightarrow 0, \quad r(x) \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

В силу теоремы 3.2 такими же свойствами обладают линейные комбинации полей (3.13), (3.14) вида

$$\tilde{U}(x) = \sum_k A_k U(x + z_k \bar{e}_3), \tag{3.16}$$

определяющие симметричные решения относительно оси \mathcal{L} . Более общий класс решений системы (3.7)–(3.10) порождают поля \tilde{U} из замечания 2.5.

Примеры решений системы МГД (3.7)–(3.10) с инвариантными многообразиями, имеющих форму цилиндров, симметричных относительно оси \mathcal{L} , дают векторные поля (2.2), соответствующие функциям F в соотношении (2.1), определенных формулами

$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \sum_k \left\{ A_k J_0(a_k \rho) \sin[b_k(z - z'_k)] + B_k J_0(c_k \rho) \cos[d_k(z - z''_k)] \right\}, \tag{3.17}$$

где J_0 — функция Бесселя, постоянные $A_k, B_k, a_k, b_k, c_k, d_k, z'_k, z''_k$ подчинены условию достаточно быстрой сходимости ряда (3.15), обеспечивающей его гладкость в классе $C^4(M)$ для выполнения дифференциальных операций в формулах (2.2), (2.6), и выполняются соотношения

$$a_k^2 + b_k^2 = \lambda^2, \quad c_k^2 + d_k^2 = \lambda^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0. \tag{3.18}$$

В силу замечания 2.1 линейные комбинации вышеупомянутых осесимметричных полей, определяемых формулами (3.16) и (3.17) позволяют рассматривать широкий класс бесконечно гладких решений системы МГД (3.7)–(3.10) вида (3.11), (3.12), имеющих структуру расслоения (2.9) на \mathbb{R}_3 .

Множество векторных полей, порожденных функциями (3.17), (3.18), которые естественно называть цилиндрическими, можно расширить, добавив к ним линейные комбинации полей, порожденных функциями с особенностями на оси \mathcal{L} :

$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \sum_k \left\{ A'_k N_0(a'_k \rho) \sin[b'_k(z - \tilde{z}'_k)] + B'_k N_0(c'_k \rho) \cos[d'_k(z - \tilde{z}''_k)] \right\}, \tag{3.19}$$

$$(a'_k)^2 + (b'_k)^2 = \lambda^2, \quad (c'_k)^2 + (d'_k)^2 = \lambda^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0, \tag{3.20}$$

где N_0 — функция Неймана. Требования к сходимости рядов (3.19), (3.20) аналогичны вышеупомянутому случаю рядов (3.17).

В случае стационарных решений системы уравнений Эйлера для уравнений гидродинамики, когда в системе (1.1), (2.1) параметр вязкости $\varepsilon = 0$, решения аналогичные классам вида (3.17)–(3.20), иными методами получены в [11].

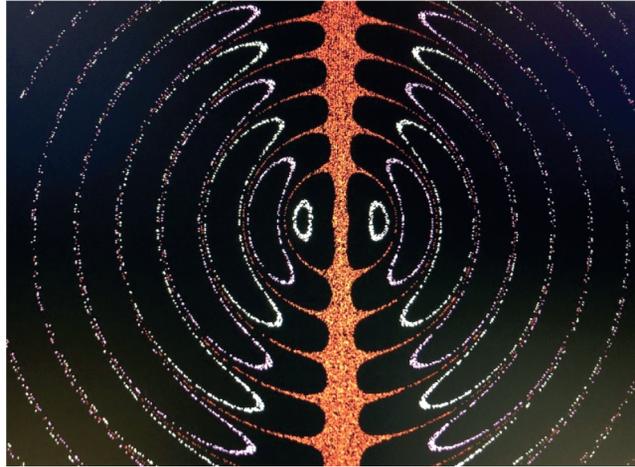
Расслоение \mathbb{R}_3 на инвариантные многообразия для решений системы МГД, порожденных приведенными выше функциями $F = \bar{F}(\rho, z)$, получается на основании формулы (2.8) вращением вокруг оси \mathcal{L} семейства многообразий

$$\begin{aligned} & \rho \sum_k \left\{ A_k J_1(a_k \rho) \sin[b_k(z - z'_k)] + B_k J_1(c_k \rho) \cos[d_k(z - z''_k)] + \right. \\ & \left. + A'_k N_1(a'_k \rho) \sin[b'_k(z - \tilde{z}'_k)] + B'_k N_1(c'_k \rho) \cos[d'_k(z - \tilde{z}''_k)] \right\} = c. \end{aligned} \tag{3.21}$$

с произвольными постоянными $c \in \mathbb{R}$. Эти семейства естественным образом можно расширить за счет использования аналогичных комбинаций функций Бесселя и Неймана мнимого аргумента в сочетании с гиперболическими синусами и гиперболическими косинусами.

Замечание 3.3. Наличие вращательной симметрии относительно оси \mathcal{L} для рассматриваемых гидродинамических течений позволяет выделить инвариантные компоненты, диффеоморфные торам, для решений вида (3.1), (3.2), (3.3) в шаре и цилиндре [16, 17]. Более того, таким свойством обладают произвольные линейные комбинации этих решений при одинаковых значениях параметра $\lambda \neq 0$ в областях, составленных из шаров и цилиндров, для которых оси симметрии течений совпадают с \mathcal{L} . Пример осевого сечения семейства инвариантных многообразий, диффеоморфных шарам и торам, для решения из [16, 17] приведен на фиг. 1 (структура сечения инвариантных многообразий, приведенная на рисунке, соответствует формулам (3.13)–(3.18)). Инвариантные слои течения в этом случае удовлетворяют в \mathbb{R} уравнению

$$\left[\cos(\sqrt{\rho^2 + z^2}) - \frac{\sin(\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right] \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} = c, \quad \rho(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$



Фиг. 1. Осевое сечение семейства вложенных инвариантных сфер $\Phi^{-1}(0)$ (красный цвет) и торов $\Phi^{-1}(c)$, $c \neq 0$ (белый цвет) для гладкого решения в шаре (3.13), (3.14). Инвариант Φ определяется формулой (2.8).

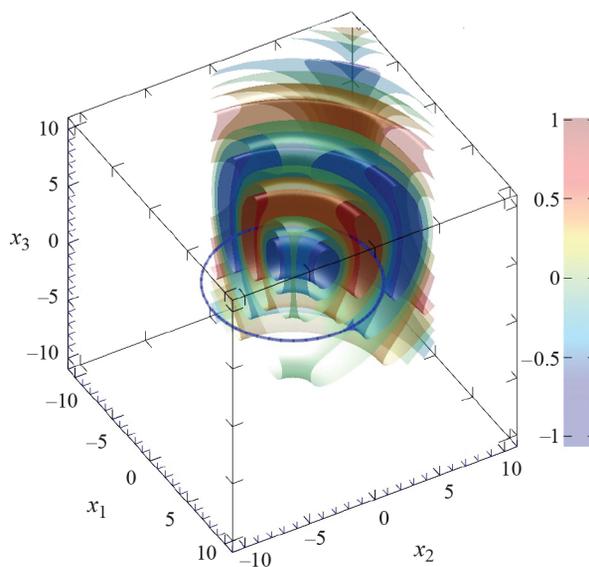
где c — произвольная постоянная. 3-D визуализация структуры этого решения в шаре приведена ниже на фиг. 2.

Течение, двойственное к (3.13)–(3.15), с аналогичной сферической структурой, но с особенностью в начале координат, порождается по формулам (2.1), (2.2) функцией

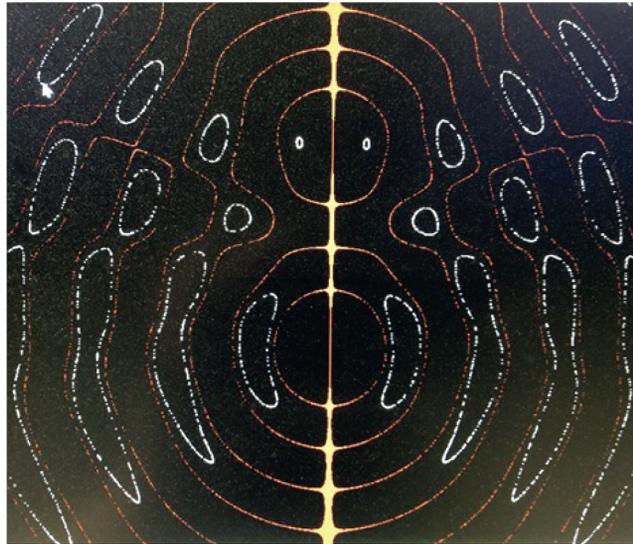
$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \frac{\cos(\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \rho(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \lambda = 1.$$

Пример визуализации осевого сечения течения, порожденного линейной комбинацией вида (3.16) $\tilde{U}(x) = A_1 U(x + z_1 \bar{e}_3) + A_2 U(x + z_2 \bar{e}_3)$ для двух сферических течений (3.13), (3.14) с центрами, расположенными на оси \mathcal{L} в точках $z_k \bar{e}_3$, где $z_1 = -8$, $z_2 = 8$, и коэффициентами “смешивания” $A_1 = 1$, $A_2 = -2$, приведен ниже на фиг. 3.

Отметим, что сечения инвариантных многообразий, выделенные на фиг. 1, 2 красным цветом, соответствуют траекториям динамической системы (2.3), движущимся вдоль оси симметрии \mathcal{L} , и для них выполняются соотношения $\dot{\varphi}(t) \equiv 0$, $\Phi(x(t)) \equiv 0$. Соответственно, на этих сечениях в силу тождеств (2.3) справедливы соот-



Фиг. 2. 3-D визуализация структуры гладкого решения в шаре (3.13), (3.14).



Фиг. 3. Осевое сечение инвариантных многообразий для течения (3.16), возникающих при “смешивании” двух сферических течений (3.13)–(3.14), смещенных симметрично относительно начала координат вдоль оси \mathcal{L} , окрашенной желтым цветом. Многообразия $\Phi^{-1}(0)$ выделены красным цветом, белый цвет соответствует многообразию $\Phi^{-1}(1)$, где инвариант Φ определяется формулой (3.5).

ношения

$$\dot{\rho} = \lambda^{-2} \bar{F}_{\rho,z}(\rho, z), \quad \dot{z} = -\lambda^{-2} \Delta_{\rho} \bar{F}(\rho, z), \quad \bar{\Phi}(\rho(0), z(0)) = 0, \quad \varphi(t) \equiv \varphi(0).$$

Многообразия, сечения которых окрашены белым цветом, диффеоморфны двумерным торами $T^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_3 : \Phi(x) = c\}$, $c \neq 0$, и траектории динамической системы $T_t(x(0)) \equiv x(t)$ образуют их “обмотку”. Трехмерные фигуры $D^{(c)}$, ограниченные торами $T^{(c)}$, получающиеся вращением этих сечений вместе с их внутренней частью вокруг оси симметрии \mathcal{L} , вложены друг в друга, а их пересечение $S = \bigcap_{c \neq 0} D^{(c)}|_{D^{(c)} \neq \emptyset}$ является набором

окружностей, лежащих в плоскостях, ортогональных оси \mathcal{L} . На этих окружностях располагаются периодические траектории динамической системы (2.3). Пример такой круговой орбиты в экваториальной плоскости выделен синим цветом в 3-D визуализации динамики в шаре на фиг. 2. Координаты таких окружностей в плоских сечениях, параллельных оси симметрии \mathcal{L} , выделяются как решения (ρ_*, z_*) системы уравнений

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\rho,z}(\rho_*, z_*) &= 0, \\ \Delta_{\rho} \bar{F}(\rho_*, z_*) &= 0. \end{aligned}$$

Каждая точка $(\rho_*, z_*) \in \mathbb{R}$ задает вышеуказанную окружность, на которой динамика системы (2.3) определяется следующими тождествами:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_*, \quad \varphi(t) = \varphi(0) - \lambda^{-1} \rho_*^{-1} \bar{F}_{\rho}(\rho_*, z_*) t, \\ z &= z_*. \end{aligned}$$

В работе [16] приведены координаты таких окружностей, лежащих в плоскости $z_* = 0$, для течения (3.13), (3.14) при значении $\lambda = 1$. В этом случае их радиусы ρ_* являются счетным набором положительных корней уравнения $\text{tg}(\rho_*) = \frac{\rho_*}{1-\rho_*^2}$.

Пересечение $\mathcal{L} \cap \Phi^{-1}(0)$ состоит из стационарных точек динамической системы (2.3).

Экспериментальные данные показывают, что аналогичная топологическая структура наблюдается в высокоинтенсивных газодинамических потоках.

Замечание 3.4. Осесимметричные решения системы МГД, порождающее расслоение на \mathbb{R}_3 со слоями в форме вложенных друг в друга “воронков”, ориентированных вдоль оси \mathcal{L} , порождаются векторным полем

$$U(x) = J_0(\rho) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} - J_1(\rho) \rho^{-1} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 z \\ x_2 - x_1 z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1. \tag{3.22}$$

Структура инвариантных слоев для поля (3.22) в осевом сечении в координатах (ρ, z) задается формулой

$$z = \frac{c}{\rho J_1(\rho)}, \quad \rho > 0, \quad (3.23)$$

где c — произвольная постоянная, задающая инвариантный слой в \mathbb{R}_3 , который получается вращением кривой (3.23) вокруг оси \mathcal{L} .

Замечание 3.5. Отметим, что классы вихревых векторных полей $U(x)$, задаваемых формулами (2.1), (2.2), позволяют построить в \mathbb{R}_3 решения системы уравнений электродинамики Дж.К. Максвелла в случае отсутствия свободных зарядов и токов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \operatorname{rot} B, & \frac{\partial B}{\partial t} &= -\operatorname{rot} E, \\ \operatorname{div} E &= 0, & \operatorname{div} B &= 0, \\ x &\in \mathbb{R}_3, & t &\in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $E(x, t)$ — напряженность электрического поля, $B(x, t)$ — вектор магнитной индукции. Положим

$$E(x, t) = \sin(\lambda t)U(x), \quad B(x, t) = \cos(\lambda t)U(x), \quad (3.25)$$

с векторным полем $U(x)$, которое определяем по формулам (2.1), (2.2), либо из замечания 2.5. При заданном значении параметра $\lambda \neq 0$, устанавливаем, что формулы (3.25) являются решением системы (3.24).

Учитывая линейность системы (3.24), инвариантность операций rot , div относительно группы поворотов SO_3 и сдвигов, формулы (3.25) позволяют конструировать решения системы (3.24) в виде линейных комбинаций (рядов)

$$E(x, t) = \sum_k A_k \sin(\lambda_k(t - t_k))U_k(x), \quad B(x, t) = \sum_k A_k \cos(\lambda_k(t - t_k))U_k(x)$$

с произвольными $A_k, t_k \in \mathbb{R}$, параметрами $\lambda_k \neq 0$, и полями U_k , построенными по формулам (2.1), (2.2) для осей симметрии $\mathcal{L}_k \in \mathbb{R}_3$, которые получатся произвольными поворотами в \mathbb{R}_3 выделенной оси \mathcal{L} и соответствующего поля U .

Широкий набор примеров $U(x)$ приведен выше в следствиях 3.2–3.4 и замечании 2.5.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована структура топологического расслоения для одного класса вихревых нестационарных осесимметричных точных решений уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости. На основе единого подхода результаты распространены на специальные случаи системы МГД и уравнения электродинамики Дж.К. Максвелла.

Автор выражает благодарность за обсуждение работы и участие в исследованиях по визуализации построенных решений сотрудникам Сургутского филиала ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН Т.В. Гавриленко, Д.А. Моргуну, А.О. Дубовику, А.Д. Смородинову, Т.Н. Садыкову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galkin V. A. et al.* The detection of neutrino interactions in the emulsion/lead target of the OPERA experiment // J. of Instrumentation. 2009. V. 4. № 1.
2. *Galkin V. A. et al.* The OPERA experiment in the CERN to Gran Sasso neutrino beam // J. of Instrumentation. 2009. V. 4. № 1.
3. *Галкин В. А.* Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ, 2009. 408 с.
4. *Галкин В. А., Савельев В. И.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы (Серия «Б», том VII-1 «Математическое моделирование в низкотемпературной плазме». Гл. 6. Математическое моделирование переходного излучения в средах с быстропеременными электромагнитными свойствами (Ч. III). М.: Янус-К, 2009. С. 348–364.
5. *Galkin V. A. et al.* Study of the effects induced by lead on the emulsion films of the OPERA experiment // J. of Instrumentation. 2008. V. 3. № 1.

6. *Galkin V. A. et al.* Emulsion sheet doublets as interface trackers for the OPERA experiment // *J. of Instrumentation*. 2008. V. 3. № 1.
7. *Caldonazzo D.* Moti helicoidali, simmetrici ad un asse, di liquidi viscosi // *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend A*. 1926. Vol. 59. P. 657–665.
8. *Mattei G.* Sui moti di Beltrami- Caldonazzo in magnetofluidodinamica // *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*. 1982. Vol. 68. P. 11–15.
9. *Богоявленский О. И.* О задаче Кельвина 1880 года и точных решениях уравнений Навье–Стокса // *Общественный семинар «Математика и ее приложения» Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук 21 мая 2015 г. Москва, конференц-зал МИАН (ул. Губкина, 8). Электронный ресурс: www.mathnet.ru*
10. *Bogoyavlenskij O.* New exact axisymmetric solutions to the Navier–Stokes equations // *Zeitschrift Naturforschung A*. 2020. Vol. 75. № 1. P. 29–42.
11. *Ковалев В.П., Сизых Г.Б.* Осесимметричные винтовые течения идеальной жидкости // *Тр. МФТИ*. 2016. Т. 8. № 3. С. 171–178.
12. *Chandrasekhar, Subrahmanyan.* On force-free magnetic fields // *Proc. of the National Academy of Sciences*. 1956. 42 (1): 1–5.
13. *Chandrasekhar, Subrahmanyan; Kendall, P. C.* On Force-Free Magnetic Fields // *The Astrophysical Journal*. September 1957. 126 (1): 1–5.
14. *Бетелин В.Б., Галкин В.А.* Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // *Докл. АН*. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–51.
15. *Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О.* Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // *Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления*. 2020. Т. 495. № 1. С. 13–6.
16. *Галкин В. А.* Об одном классе точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре и сферическом слое // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 6. С.1000–005.
17. *Галкин В. А., Дубовик А. О.* Об одном классе точных решений системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости // *Матем. моделирование*. 2023. Т. 35. № 8. С. 3–3.
18. *Галкин В. А., Смородинов А. Д., Моргун Д. А.* Решение уравнения Навье–Стокса для сталкивающихся потоков // *Успехи кибернетики*. 2023. Т. 4. № 2. С. 8–5.
19. *Галкин В. А., Дубовик А. О.* Моделирование трехмерного потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 7. С. 1180–1186.
20. *Trkal V.* A note on the hydrodynamics of viscous fluids // *Czechoslovak Journal of Physics*. 1994. Vol. 44. № 2. P. 97–106.
21. *Шеретов Ю.В.* О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2020. № 1. С. 84–96. <https://doi.org/10.26456/vtprmk557>
22. *Arnold V.I.* Sur la topologie des ecoulements stationnaires des fluides parfaits. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965. 261:17–20.
23. *Галкин В.А., Дубовик А.О.* О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени // *Матем. моделирование*. 2020. Т. 32. № 4. С. 31–42.

ON THE STRUCTURE OF HELICAL AXISYMMETRIC SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES SYSTEM FOR INCOMPRESSIBLE FLUIDS¹⁾

V. A. Galkin^{a,b,*}

^a *Surgut Branch of the Federal Research Center "NIISI" of the Russian Academy of Sciences, Energetikov St. 4, Surgut, Khanty-Mansi Autonomous Okrug-Yugra, 628408, Russia*

^b *Surgut State University, Lenin Ave. 1, Surgut, Khanty-Mansi Autonomous Okrug-Yugra, 628400, Russia*

**e-mail: val-gal@yandex.ru*

Received 13 November, 2023

Revised 29 December, 2023

Accepted 14 January, 2024

Abstract. A class of exact solutions to the Navier-Stokes equations for axisymmetric vortex flows of incompressible fluids is obtained. Invariant manifolds of flows with rotational symmetry relative to a given axis in three-dimensional coordinate space are identified, and the structure of the solutions is described. It is established that typical invariant regions of such flows are rotational figures homeomorphic to a torus, forming a structure of topological fibration, such as in a sphere, cylinder, and more complex configurations composed of such figures. The results are extended to similar solutions of the magnetohydrodynamics (MHD) system and Maxwell's electrodynamics equations, which possess \mathbb{R}_3 analogous properties. Examples of axisymmetric vortex vector fields and the topological fibrations they generate on manifolds invariant \mathbb{R}_3 under the dynamical systems defined by these fields are provided.

Keywords: incompressible fluid equations, exact solutions, Navier-Stokes system exact solutions, MHD, Maxwell's equations, invariant manifolds, topological fibration.

¹⁾ The work was financially supported under the state assignment of the Federal Research Center "NIISI" RAS (Kurchatov Institute Research Center) — Implementation of fundamental scientific research GP 47) on the topic No 0580-2021-0007 "Development of methods for mathematical modeling of distributed systems and corresponding computational methods".