

## ТОЖДЕСТВА ДЛЯ МЕР ОТКЛОНЕНИЙ ОТ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. С.И. Репин<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>191023 С.-Петербург, Фонтанка, 27, СПб отд. Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН, Россия

<sup>2</sup>195251 С.-Петербург, Политехническая, 29, СПб Политехнический ун-т Петра Великого, Россия

\*e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 19.11.2023 г.

Переработанный вариант 19.11.2023 г.

Принята к публикации 14.01.2024 г.

В статье получены интегральные тождества, которые выполняются для разности между точным решением начально-краевой задачи для парабологиперболического уравнения и любой функцией из соответствующего энергетического класса. Тожества позволяют получать двусторонние апостериорные оценки для приближенных решений соответствующей задачи Коши. Левая часть оценки представляет собой естественную меру отклонения от решения, а правая зависит только от данных задачи и самого приближенного решения и поэтому может быть явно вычислена. Полученные оценки используются для сравнения решений задач Коши для параболического уравнения и парабологиперболического уравнения с малым параметром при второй производной по времени. Также оценки позволяют количественно оценить эффекты, возникающие из-за неточности начальных данных и коэффициентов уравнения. Библ. 16. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** задача Коши для параболо-гиперболических уравнений, контроль точности приближенных решений, апостериорные оценки функционального типа.

DOI: 10.31857/S0044466924050101, EDN: YDBSXC

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega$  является открытой, ограниченной областью в  $\mathbb{R}^d$  с липшицевой границей  $\Gamma$ ,  $T > 0$ ,  $I := (0, T)$ , а  $Q_T := \Omega \times I$  обозначает пространственно-временной цилиндр с боковой поверхностью  $S_T := \Gamma \times I$ . Мы рассматриваем задачу нахождения функции  $u(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\delta u_{tt} + u_t - \operatorname{div} A \nabla u + \nu u = f \quad \text{в } Q_T \quad (1.1)$$

с условиями

$$u = 0 \quad \text{на } S_T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (1.3)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (1.4)$$

Предполагается, что  $\delta$  и  $\nu$  это вещественные функции, зависящие только от  $x$  и такие, что

$$0 < \delta_1 \leq \delta(x) \leq \delta_2 \leq 1, \quad 0 \leq \nu_1 \leq \nu(x) \leq \nu_2. \quad (1.5)$$

Далее,  $A = A(x)$  это симметричная матрица, удовлетворяющая условию

$$c_1 |\xi|^2 \leq A \xi \cdot \xi \leq c_2 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (1.6)$$

где  $c_1 > 0$ , точка обозначает скалярное произведение векторов, а  $|\xi|$  обозначает евклидову норму вектора  $\xi$ . Также предполагается, что

$$f, f_t \in L_{2,1}(Q_T), \quad (1.7)$$

$$\phi \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \psi \in \mathring{H}^1(\Omega). \quad (1.8)$$

Здесь  $L_{2,1}(Q_T)$  обозначает пространство функций  $g \in L_1(Q_T)$  с конечной нормой  $\|g\|_{2,1,Q_T} := \int_0^T \|g(\cdot, t)\|_{\Omega} dt$ , а  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$  является подпространством  $H^1(\Omega)$ , состоящим из функций, обращающихся в ноль на границе. В статье используются стандартные обозначения пространств Лебега и Соболева  $L^p(\Omega)$  и  $W_p^l(\Omega)$ ,  $l, p \geq 1$ ,  $H^k(\Omega) := W_2^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ , а символ  $\circ$  означает, что функции обращаются в ноль на  $S_T$ .  $L^2$  — нормы функций в  $\Omega$  и  $Q_T$  обозначаются  $\|\cdot\|_{\Omega}$  и  $\|\cdot\|_{Q_T}$  соответственно. Также используются нормы

$$\|\nabla w\|_{A,\Omega}^2 := \int_{\Omega} A \nabla w \cdot \nabla w dx, \quad \|\nabla w\|_{A,Q_T}^2 := \int_0^T \|\nabla w\|_{A,\Omega}^2 dt$$

и

$$\|y^*\|_{A^{-1},\Omega}^2 := \int_{\Omega} A^{-1} y^* \cdot y^* dx, \quad \|y^*\|_{A^{-1},Q_T}^2 := \int_0^T \|y^*\|_{A^{-1},\Omega}^2 dt.$$

Для разности значений функции при  $t = t_1$  и  $t = t_2 \geq t_1$  используется обозначение

$$\left[ g(t) \right]_{t_1}^{t_2} := g(t_2) - g(t_1),$$

а  $z_+ := \max\{0, z\}$ . Производные функции  $v$  по пространственным переменным  $x_i$  обозначаются  $v_{,i}$ , а  $v_t$  обозначает производную по времени. Операторы  $\nabla$  и  $\operatorname{div}$  означают градиент и дивергенцию по пространственным переменным. Замыкание (в норме  $H^1(Q_T)$ ) множества гладких функций, которые обращаются в ноль вблизи  $S_T$  обозначается  $\mathcal{H}(Q_T)$ . Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}} := \int_{Q_T} (uv + u_t v_t + \nabla u \cdot \nabla v) dx dt$$

и нормой  $\|v\|_{\mathcal{H}} := (v, v)_{\mathcal{H}}^{1/2}$ . Также мы будем использовать пространство векторно-значных функций  $\Sigma(Q_T) := L^2(Q_T, \mathbb{R}^d)$  и его подпространства

$$Y^*(Q_T) := \{y^* \in \Sigma(Q_T), y_t^* \in \Sigma(Q_T)\} \text{ и } Y_{\operatorname{div}}^*(Q_T) := \{y^* \in \Sigma(Q_T), \operatorname{div} y^* \in L^2(Q_T)\},$$

которые снабжены нормами

$$\|y^*\|_{Y^*}^2 := \|y^*\|^2 + \|y_t^*\|^2 \quad \text{и} \quad \|y^*\|_{\operatorname{div}}^2 := \|y^*\|^2 + \|\operatorname{div} y^*\|^2$$

соответственно.

Математические свойства уравнений типа (1.1) изучались многими авторами (см., например, [1–4]). Обобщенное решение определяется как функция  $u \in V_0(Q_T)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (\delta u_{tt} w + u_t w + A \nabla u \cdot \nabla w + v u w) dx dt = \int_{Q_T} f w dx dt \quad \forall w \in V_0(Q_T) := \mathcal{H}(Q_T) \cap H^2(Q_T) \quad (1.9)$$

и условиям (1.3) и (1.4).

Если  $d = 1$ , то (1.1) совпадает с хорошо известным телеграфным уравнением, которое описывает распространение электрического сигнала. При  $d > 1$  рассмотрение (1.1)–(1.4) мотивировано рядом физических соображений [5]. При моделировании процессов переноса в теории жидкости и газа уравнения подобного вида имеют ряд преимуществ по сравнению с соответствующими параболическими уравнениями [6], поскольку первый член уравнения играет роль регуляризатора и улучшает свойства конечномерных задач, возникающих при аппроксимации системы.

Точное решение задачи (1.1)–(1.4), как правило, построить не удастся и оно замещается некоторым приближением  $v$ . Неизбежно возникает вопрос: насколько  $v$  отличается от  $u$ ? Нас интересует ответ на этот вопрос не в асимптотическом смысле, т.е. не априорные оценки погрешности (как, например, те что показывают скорость, с которой галеркинская аппроксимация  $u_h$  на сетке с характерным размером ячейки  $h$  стремится к  $u$  в некоторой метрике при  $h \rightarrow 0$ ). Асимптотические оценки устанавливают принципиальную правильность избранного метода аппроксимации при выполнении ряда дополнительных условий (обычно это регулярность решения,

ограничения на структуру сетки и требование абсолютной точности вычислений). Кроме того, эти оценки содержат константы, зависящие от точного решения. Значения констант как правило неизвестны, а возможные их оценки часто являются весьма грубыми и могут сильно переоценивать истинную величину.

Априорные оценки важны в теоретическом плане, но малоприменимы для оценки точности конкретного приближенного решения, полученного в реальных вычислениях. Для этой цели используются так называемые апостериорные оценки. Существует несколько подходов к построению таких оценок (см., например, монографии [7–10]). Часто апостериорный анализ сводится к получению просто вычисляемого индикатора погрешности, главная цель которого состоит в предоставлении информации, необходимой для адаптации конечномерного подпространства используемого для аппроксимации решения. В частности, индикаторы основанные на усреднении градиента (gradient averaging) или на анализе невязки уравнения (residual based), широко используются для адаптации сетки в методе конечных элементов. Работоспособность этих методов существенно зависит от ряда условий, которые предъявляются к приближенному решению (галеркинская ортогональность), точному решению (регулярность) и вычислительной сетке. Аналогичные условия возникают при использовании других индикаторов. Как правило, индикаторы дают некоторое представление о распределении ошибки в области, но не могут гарантированно оценить величину отклонения приближенного решения от точного. Для получения полностью гарантированных и вычисляемых оценок необходимо несколько иначе сформулировать саму задачу контроля точности и использовать для ее решения другие (более общие) методы. Это привело к возникновению класса так называемых функциональных апостериорных оценок (a posteriori estimates of the functional type), которые выполняются для любых функций из функционального класса, содержащего обобщенное решение задачи. Подробное изложение соответствующей теории можно найти в монографии [9].

Основой для получения апостериорных оценок функционального типа являются тождества, которые устанавливают равенство между мерами отклонения произвольной функции от точного решения и некоторым функционалом, зависящим от этой функции и данных задачи. Для эллиптических и параболических уравнений такие тождества и вытекающие из них оценки были ранее исследованы в [11–16] и ряде других работ, ссылки на которые даны в указанных публикациях.

В данной статье тождества для мер отклонений произвольных функций от точного решения получены для начально–краевой задачи (1.1)–(1.4) (Теорема 1). Их левые части представляют собой некоторые меры отклонения функций от решения задачи, а правые содержат комплексы, которые можно трактовать как невязки в соотношениях, которые определяют уравнение и начальные условия рассматриваемой задачи. Важно отметить, что эти меры имеют вполне определенный вид. Они автоматически возникают при преобразовании соотношений, определяющих обобщенное решение задачи. Фактически меры индуцируются самим дифференциальным уравнением и в этом смысле являются наиболее естественными характеристиками точности приближенных решений. Правые части тождеств также содержат неизвестные функции  $\epsilon$  и  $\epsilon^*$ , которые, однако, можно оценить и подчинить упомянутым мерам. Это можно сделать различными способами. Один из вариантов подробно рассмотрен в § 3. Здесь же показано как оценки можно использовать для учета ошибок, связанных с неточностью в данных задачи. Заключительный § 4 содержит несколько примеров, целью которых является численная проверка тождеств (2.4) и (2.5), а также работоспособности оценок, полученных в § 3.

## 2. ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)–(1.4)

Уравнение (1.1) удобно записать в виде

$$\delta u_{tt} + u_t - \operatorname{div} p^* + vu = f \quad \text{в } Q_T, \tag{2.1}$$

$$p^* = A \nabla u, \tag{2.2}$$

введя в рассмотрение вектор-функцию  $p^*$  (поток). Пусть  $v(x, t)$  является приближением функции  $u(x, t)$ , а вектор функция  $y^*(x, t)$  рассматривается в качестве приближения точного потока  $p^*(x, t)$  и

$$v \in V_0(Q_T), \quad y^* \in \mathcal{Q}^*(Q_T) := Y^*(Q_T) \cap Y_{\operatorname{div}}^*(Q_T). \tag{2.3}$$

Функции  $\epsilon := v - u$  и  $\epsilon^* := y^* - p^*$  являются отклонениями от решения  $u$  и соответствующего потока  $p^*$ . Определим функционалы

$$\mu_1(\epsilon, T) := 2 \int_0^T \left( \|\nabla \epsilon\|_{A, \Omega}^2 + \|\epsilon\|_{v, \Omega}^2 + \|\epsilon_t\|_{1-\delta, \Omega}^2 \right) dt + \mathcal{E}(T)$$

и

$$\mu_2(e, e^*, T) := \int_0^T \left( \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + 2\|e\|_{v, \Omega}^2 + 2\|e_t\|_{1-\delta, \Omega}^2 \right) dt + \mathcal{E}(T),$$

где

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\Omega} \left( (1 + v - \delta)|e|^2 + \delta|e + e_t|^2 + A^{-1}e^* \cdot e^* \right) dx.$$

Нетрудно видеть, что  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\mu_i = 0$  в том и только том случае, когда  $v$  совпадает с  $u$ , а  $y^*$  с  $p^*$ . Таким образом,  $\mu_i(e, e^*)$  можно рассматривать как меры отклонения  $v$  и  $y^*$  от  $u$  и  $p^*$ . Фактически  $\mu_1(e, T)$  образована квадратом энергетической нормы, естественной для задачи (2.1), (2.2), а  $\mu_2(e, e^*, T)$  отличается от нее введением слагаемого, контролирующего норму отклонения в терминах потока.

Определим функции

$$\mathcal{S}(v, y^*) := A\nabla v - y^* \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(v, y^*) := f - \delta v_{tt} - v_t + \operatorname{div} y^* - \nu v,$$

которые можно рассматривать как невязки в соотношениях (2.1) и (2.2). Следующая теорема устанавливает интегральное тождество, связывающее эти функции с мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**Теорема 1.** При выполнении условий (1.5), (1.6) и (2.3) имеют место тождества

$$\mu_1(e, T) = \mathcal{E}(0) + \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \left( (\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*)) \cdot \nabla e - \mathcal{R}(v, y^*)(e + e_t) \right) dx dt \quad (2.4)$$

и

$$\mu_2(e, e^*, T) = \mathcal{E}(0) + \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, Q_T}^2 - 2 \int_{Q_T} \left( \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot A^{-1}e^* + \mathcal{R}(v, y^*)(e + e_t) \right) dx dt. \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Преобразуем интегральное тождество (1.9) к виду

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (\delta(u-v)_{tt}w + (u-v)_t w + A\nabla(u-v) \cdot \nabla w + \nu(u-v)w) dx dt = \\ = \int_{Q_T} \left( (f - \delta v_{tt} - v_t - \nu v)w - A\nabla v \cdot \nabla w \right) dx dt \quad \forall w \in V_0(Q_T) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и используем тот факт, что

$$\int_{\Omega} (w \operatorname{div} y^* + \nabla w \cdot y^*) dx = \int_{\Gamma} w(y^* \cdot n) ds = 0. \quad (2.7)$$

Тогда для  $w = u - v$  тождество (2.6) можно записать в виде

$$\int_{Q_T} (\delta e_{tt}e + e_t e + A\nabla e \cdot \nabla e + \nu e^2) dx dt = \int_{Q_T} \mathcal{S}(v, y^*) \cdot \nabla e dx dt - \int_{Q_T} \mathcal{R}(v, y^*) e dx dt. \quad (2.8)$$

Поскольку

$$\int_{Q_T} e_t e dx dt = \frac{1}{2} \left[ \|e\|_{\Omega}^2 \right]_0^T$$

и

$$\int_{Q_T} \delta e_{tt}e = \int_{Q_T} \delta \left( \frac{1}{2}(e^2)_{tt} - e_t^2 \right) dx dt = \left[ \int_{\Omega} \delta e_t e \right]_0^T - \|e_t\|_{\delta, Q_T}^2,$$

где  $\|e_t\|_{\delta, Q_T}^2 := \int_{Q_T} \delta |e_t|^2 dxdt$ , то из (2.8) следует что для любых  $v$  и  $y^*$  имеет место равенство

$$\int_0^T \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \|e\|_{v, Q_T}^2 + \frac{1}{2} \left[ \|e\|_{\Omega}^2 \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} \delta e_t e \right]_0^T - \|e_t\|_{\delta, Q_T}^2 = \int_{Q_T} \mathcal{S}(v, y^*) \cdot \nabla e dxdt - \int_{Q_T} \mathcal{R}(v, y^*) e dxdt. \quad (2.9)$$

Положим в (2.6)  $w = -e_t$  и используем тождество, аналогичное (2.7). В результате имеем тождество

$$\int_{Q_T} (\delta e_{tt} e_t + e_t e_t + A \nabla e \cdot \nabla e_t + v e_t e) dxdt = \int_{Q_T} \mathcal{S}(v, y^*) \cdot \nabla e_t dxdt - \int_{Q_T} \mathcal{R}(v, y^*) e_t dxdt. \quad (2.10)$$

Первое слагаемое в правой части (2.10) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (A \nabla v - y^*) \cdot \nabla e_t dxdt &= \int_{Q_T} A^{-1} (A \nabla v - y^*) \cdot A \nabla (v_t - u_t) dxdt = \\ &= \int_{Q_T} A^{-1} (A \nabla v - y^*) \cdot (A \nabla v - y^*)_t dxdt + \int_{Q_T} (\nabla v - A^{-1} y^*) \cdot (y_t^* - p_t^*) dxdt. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^t \int_{\Omega} A^{-1} \mathcal{S}(v, y^*) \cdot \mathcal{S}_t(v, y^*) dxdt = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} A^{-1} \mathcal{S}(v, y^*) \cdot \mathcal{S}(v, y^*) dxdt = \frac{1}{2} \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^t, \quad (2.11)$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (A \nabla v - y^*) \cdot \nabla e_t dxdt &= \frac{1}{2} \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T + \\ &+ \int_{Q_T} (\nabla v - A^{-1} p^*) \cdot (y_t^* - p_t^*) dxdt - \int_{Q_T} A^{-1} (y^* - p^*) \cdot (y_t^* - p_t^*) dxdt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (\nabla v - A^{-1} p^*) \cdot (y_t^* - p_t^*) dxdt &= \int_{Q_T} \nabla e \cdot (y_t^* - A \nabla v_t) dxdt + \int_{Q_T} \nabla e \cdot (A \nabla v_t - p_t^*) dxdt = \\ &= \int_{Q_T} \nabla e \cdot (y_t^* - A \nabla v_t) dxdt + \int_{Q_T} A \nabla e \cdot \nabla e_t dxdt = \\ &= - \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot \nabla e dxdt + \int_{Q_T} A \nabla e \cdot \nabla e_t dxdt, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$\int_{Q_T} A^{-1} (y^* - p^*) \cdot (y_t^* - p_t^*) dxdt = \int_{Q_T} A^{-1} e^* \cdot e_t^* dxdt = \frac{1}{2} \left[ \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T, \quad (2.14)$$

представляем (2.12) в виде

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (A \nabla v - y^*) \cdot \nabla e_t dxdt &= \frac{1}{2} \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T - \\ &- \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot \nabla e dxdt + \int_{Q_T} A \nabla e \cdot \nabla e_t dxdt - \frac{1}{2} \left[ \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{Q_T} \delta e_{tt} e_t dx dt = \frac{1}{2} \left[ \|e_t\|_{\delta, Q_T}^2 \right]_0^T \quad \text{и} \quad \int_{Q_T} v e_t e dx dt = \frac{1}{2} \left[ \|e\|_{v, \Omega}^2 \right]_0^T,$$

мы теперь можем записать (2.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \|e_t\|_{\delta, Q_T}^2 + \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \|e\|_{v, \Omega}^2 \right]_0^T + \|e_t\|_{Q_T}^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, Q_T}^2 \right]_0^T - \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot \nabla e dx dt - \int_{Q_T} \mathcal{R}(v, y^*) e_t dx dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Суммируя (2.9) и (2.15), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} \|\nabla e\|_{A, Q_T}^2 + \|e\|_{v, Q_T}^2 + \|e_t\|_{1-\delta, Q_T}^2 + \frac{1}{2} \left[ \|e\|_{\Omega}^2 + \int_{\Omega} \delta e_t dx + \|e_t\|_{\delta, Q_T}^2 + \|e\|_{v, \Omega}^2 + \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T = \\ = \int_{Q_T} (\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*)) \cdot \nabla e dx dt - \int_{Q_T} \mathcal{R}(v, y^*) (e + e_t) dx dt + \frac{1}{2} \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, Q_T}^2 \right]_0^T. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \left( \left[ \|e\|_{\delta, \Omega}^2 + 2 \int_{\Omega} \delta e_t dx + \|e_t\|_{\delta, Q_T}^2 \right]_0^T \right) = \frac{1}{2} \left[ \|e + e_t\|_{\delta, \Omega}^2 \right]_0^T,$$

левая часть (2.16) совпадает с  $\frac{1}{2} \mathbf{u}_1(e, T)$ . Умножив обе части на 2, получаем (2.4). Для доказательства тождества (2.5) заметим, что

$$2 \int_{\Omega} \mathcal{S}(v, y^*) \cdot \nabla e dx dt = \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 - \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2. \quad (2.17)$$

Кроме того (см. (2.11)),

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot (\nabla e - A^{-1} e^*) dx dt &= \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot (\nabla(v - u) - A^{-1}(y^* - p^*)) dx dt = \\ &= \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot A^{-1} \mathcal{S}(v, y^*) dx dt = \frac{1}{2} \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^t, \end{aligned}$$

Поэтому

$$2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot \nabla e dx dt = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot A^{-1} e^* dx dt + \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^t. \quad (2.18)$$

С учетом (2.17) и (2.18) получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_{Q_t} (\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*)) \cdot \nabla e dx dt = \\ = \int_0^t \left( \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 - \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right) dt - 2 \int_{Q_t} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot A^{-1} e^* dx dt - \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^t \end{aligned}$$

и тождество (2.4) преобразуется в (2.5).

**Замечание 1.** Если  $\delta = 0$ , то  $\mathcal{E}(T) := \|e(x, T)\|_{1+v, \Omega}^2 + \|e^*(x, T)\|_{A^{-1}, \Omega}^2$  и тождества (2.4) и (2.5) принимают вид

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( 2\|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + 2\|e\|_{v, \Omega}^2 + 2\|e_t\|_{\Omega}^2 \right) dt + \mathcal{E}(T) = \\ & = \mathcal{E}(0) + \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \left( \mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*) \right) \cdot \nabla e - \mathcal{R}(v, y^*)(e + e_t) dx dt \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + 2\|e\|_{v, \Omega}^2 + 2\|e_t\|_{\Omega}^2 \right) dt + \mathcal{E}(T) = \\ & = \mathcal{E}(0) + \int_0^T \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 dt - 2 \int_0^T \int_{\Omega} \left( \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot A^{-1}e^* + \mathcal{R}(v, y^*)(e + e_t) \right) dx dt, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{R}(v, y^*) = \operatorname{div} y^* + f - v_t - vv$ . Для  $v = 0$  и единичной матрицы  $A$  такие тождества были ранее получены в [16].

**Замечание 2.** Подстановка  $\widehat{u}(x, t) = e^{-\frac{t}{2}}u(x, t)$  преобразует гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \operatorname{div} A \nabla u + vu = f \tag{2.19}$$

с условиями (1.2)–(1.4) в уравнение

$$\widehat{u}_{tt} + \widehat{u}_t - \operatorname{div} A \nabla \widehat{u} + \widehat{v} \widehat{u} = \widehat{f}, \quad \widehat{v} = \frac{1}{4} + v, \quad \widehat{f} = fe^{-\frac{t}{2}} \tag{2.20}$$

с начальными условиями  $\widehat{u}(x, 0) = \phi(x)$ ,  $\widehat{u}_t(x, 0) = -\frac{1}{2}\phi(x) + \psi(x)$  и краевым условием  $\widehat{u}(x, t) = 0$  на  $S_T$ . Пусть  $v(x, t)$  и  $y^*(x, t)$  являются приближениями функций  $u(x, t)$  и  $p^*(x, t) := A \nabla u$ . Функции  $\widehat{v}(x, t) := e^{-\frac{t}{2}}v(x, t)$  и соответствующий поток  $\widehat{y}^*(x, t) := e^{-\frac{t}{2}}y^*(x, t)$  можно рассматривать как приближенные решения задачи Коши для уравнения (2.20), для которых выполняются тождества (2.4) и (2.5). При этом  $\widehat{\delta} = 1$ ,

$$\widehat{e}(x, t) = e^{-\frac{t}{2}}e(x, t), \quad \widehat{e}^*(x, t) = e^{-\frac{t}{2}}e^*(x, t), \quad \widehat{e}_t = e^{-\frac{t}{2}} \left( e_t - \frac{1}{2}e \right), \quad \widehat{e} + \widehat{e}_t = e^{-\frac{t}{2}} \left( \frac{1}{2}e + e_t \right),$$

а меры  $\widehat{\mu}_1(e, T)$  и  $\widehat{\mu}_2(e, e^*, T)$  для уравнения (2.20) имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1(\widehat{e}, T) & := 2 \int_0^T \left( \|\nabla \widehat{e}\|_{A, \Omega}^2 + \|\widehat{e}\|_{v, \Omega}^2 \right) dt + \widehat{\mathcal{E}}(T), \\ \widehat{\mu}_2(\widehat{e}, \widehat{e}^*, T) & := \int_0^T \left( \|\nabla \widehat{e}\|_{A, \Omega}^2 + \|\widehat{e}^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + 2\|\widehat{e}\|_{v, \Omega}^2 \right) dt + \widehat{\mathcal{E}}(T), \end{aligned}$$

где

$$\widehat{\mathcal{E}}(t) := \int_{\Omega} \left( |\widehat{e} + \widehat{e}_t|^2 + A^{-1} \widehat{e}^* \cdot \widehat{e}^* + \widehat{v} |\widehat{e}|^2 \right) dx.$$

Таким образом, для (2.19) меры преобразуются в

$$\begin{aligned} \mu_1(e, T) & := 2 \int_0^T e^{-t} \left( \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \|e\|_{v, Q_T}^2 \right) dt + \mathcal{E}(T), \\ \mu_2(e, e^*, T) & := \int_0^T e^{-t} \left( \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + 2\|e\|_{v, Q_T}^2 \right) dt + \mathcal{E}(T), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{E}(t) := e^{-t} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \mathbf{e} + \mathbf{e}_t \right)^2 + A^{-1} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^* + \widehat{\mathbf{v}} |\mathbf{e}|^2 dx.$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}(\widehat{v}, \widehat{y}^*) &= e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{R}(v, y^*), & \widehat{\mathcal{S}}(\widehat{v}, \widehat{y}^*) &= e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{S}(v, y^*), \\ \widehat{\mathcal{S}}_t(\widehat{v}, \widehat{y}^*) &= e^{-\frac{t}{2}} \left( \mathcal{S}_t(v, y^*) - \frac{1}{2} \mathcal{S}(v, y^*) \right), \end{aligned}$$

получаем тождества для задачи Коши, связанной с гиперболическим уравнением (2.19):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{e}, T) &= \mathcal{E}(0) + \left[ e^{-t} \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} e^{-t} \left( (3\mathcal{S}(v, y^*) - 2\mathcal{S}_t(v, y^*)) \cdot \nabla \mathbf{e} - \mathcal{R}(v, y^*) (\mathbf{e} + 2\mathbf{e}_t) \right) dx dt \quad (2.21) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{e}, \mathbf{e}^*, T) &= \mathcal{E}(0) + \|e^{-t/2} \mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, Q_T}^2 + \\ &+ \int_{Q_T} e^{-t} \left( (\mathcal{S}(v, y^*) - 2\mathcal{S}_t(v, y^*)) \cdot A^{-1} \mathbf{e}^* - \mathcal{R}(v, y^*) (\mathbf{e} + 2\mathbf{e}_t) \right) dx dt. \quad (2.22) \end{aligned}$$

### 3. ОЦЕНКИ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ТОЖДЕСТВ (2.4) И (2.5)

Тождества установленные в разд. 2 позволяют получать апостериорные оценки точности приближенных решений. Также они позволяют сравнивать решения различных задач, которые могут отличаться коэффициентами или начальными условиями. Эти два случая рассматриваются ниже.

#### 3.1. Апостериорные оценки

Для того чтобы получить полностью вычисляемые оценки для мер отклонения от решения необходимо в тождествах (2.4) и (2.5) оценить интегралы, которые стоят в правых частях и содержат неизвестные величины  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}_t$  и  $\mathbf{e}^*$ . Это можно сделать разными способами. Рассмотрим наиболее простой, основанный на использовании интегральных неравенств Юнга. Определим вектор  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ , где

$$\alpha_i \in L^{\infty}_+(0, T) := \left\{ \alpha(t) \in L^{\infty}(0, T), \alpha(t) > 0, \forall t \in [0, T] \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$2 \left| \int_{Q_T} (\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*)) \cdot \nabla \mathbf{e} dx dt \right| \leq \int_0^T \left( \frac{1}{\alpha_1} \|\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \alpha_1 \|\nabla \mathbf{e}\|_{A, \Omega}^2 \right) dt, \quad (3.1)$$

$$2 \left| \int_{Q_T} \mathcal{S}_t(v, y^*) \cdot A^{-1} \mathbf{e}^* dx dt \right| \leq \int_0^T \left( \frac{1}{\alpha_2} \|\mathcal{S}_t(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \alpha_2 \|\mathbf{e}^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right) dt, \quad (3.2)$$

$$2 \left| \int_{Q_T} \mathcal{R}(v, y^*) (\mathbf{e} + \mathbf{e}_t) dx dt \right| \leq \int_0^T \left( \varkappa \|\mathcal{R}(v, y^*)\|_{\Omega}^2 + \alpha_3 \|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 + \alpha_4 \|\mathbf{e}_t\|_{\Omega}^2 \right) dt, \quad (3.3)$$

где  $\varkappa = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_4}$ . Также заметим, что

$$\int_0^T \alpha_3 \|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 dt \leq \int_0^T (\alpha_3 - 2\nu)_+ \|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 dt + \int_0^T 2\nu \|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 dt \leq \int_0^T (\alpha_3 - 2\nu)_+ C_{\Omega}^2 c_1^{-1} \|\nabla \mathbf{e}\|_{A, \Omega}^2 dt + \int_0^T 2\nu \|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 dt. \quad (3.4)$$

Из тождеств (2.4) и (2.5) с учетом (3.1)–(3.4) следуют оценки

$$\|e\|_1^2 \leq M_1(v, y^*), \tag{3.5}$$

$$\|e; e^*\|_2^2 \leq M_2(v, y^*). \tag{3.6}$$

Функционалы, стоящие в правых частях (3.5) и (3.6), задаются соотношениями

$$M_1(v, y^*) := \mathcal{E}(0) + \left[ \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 \right]_0^T + \int_0^T \left( \frac{1}{\alpha_1} \|\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \varkappa \|\mathcal{R}(v, y^*)\|_{\Omega}^2 \right) dt$$

и

$$M_2(v, y^*) := \mathcal{E}(0) + \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, Q_T}^2 + \int_0^T \left( \frac{1}{\alpha_2} \|\mathcal{S}_t(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \varkappa \|\mathcal{R}(v, y^*)\|_{\Omega}^2 \right) dt.$$

Они зависят только от известных функций и легко вычисляются. Левые части задаются комбинированными нормами

$$\|e\|_1 := \left( \mathcal{E}(T) + \int_0^T (\lambda_1 \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \lambda_3 \|e_t\|_{\Omega}^2) dt \right)^{1/2}$$

и

$$\|e; e^*\|_2 := \left( \mathcal{E}(T) + \int_0^T (\tilde{\lambda}_1 \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \lambda_2 \|e^*\|_{A^{-1}, \Omega}^2 + \lambda_3 \|e_t\|_{\Omega}^2) dt \right)^{1/2},$$

где

$$\lambda_1 := 2 - \alpha_1 - (\alpha_3 - 2\nu)_+ C_{FC_1}^2, \tilde{\lambda}_1 := \lambda_1 - 1, \lambda_2 := 1 - \alpha_2, \lambda_3 := 2(1 - \delta) - \alpha_4, \tag{3.7}$$

а параметры выбираются так, чтобы весовые функции  $\lambda_i(t)$  были неотрицательны.

**Замечание 3.** Если  $\delta > 1$ , то сделав замену переменной  $\tilde{t} = \frac{1}{\rho}t$ , с  $\rho > \delta$  для  $\tilde{u}(x, \tilde{t}) = u(x, \frac{1}{\rho}t)$  получаем уравнение

$$\tilde{\delta} \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{u}_{\tilde{t}} - \rho \operatorname{div} A \tilde{\nabla} \tilde{u}_{xx} + \nu \tilde{u} = f,$$

где  $\tilde{\delta} := \frac{\delta}{\rho} < 1$ ,  $\tilde{t} \in [0, \tilde{T}]$  и  $\tilde{T} := \frac{1}{\rho}T$ . Для начально-краевой задачи с условиями  $\tilde{u}(x, 0) = \phi$ ,  $\tilde{u}_{\tilde{t}}(x, 0) = \rho\psi$  полученные выше оценки применимы.

### 3.2. Оценки ошибок, связанных с данными задачи

Тождества, установленные в теореме 1, позволяют сравнить решение задачи (1.1)–(1.4) с решением  $\hat{u}$ , которое удовлетворяет такому же уравнению, но с другими начальными условиями:

$$\hat{u}(x, 0) = \hat{\phi}(x), \quad \hat{u}_t(x, 0) = \hat{\psi}(x).$$

Функции  $e_{\phi} := \hat{\phi} - \phi$  и  $e_{\psi} := \hat{\psi} - \psi$  характеризуют разницу в начальных данных.

Нетрудно видеть, что для  $v = \hat{u}$  и  $y^* = A \nabla \hat{u}$  имеют место равенства  $\mathcal{S}(v, y^*) = 0$  и  $\mathcal{R}(v, y^*) = 0$ . Поэтому из (2.4) следует, что при любом  $T$  выполняется тождество

$$\int_0^T \left( \|\nabla e\|_{A, \Omega}^2 + \|e\|_{\nu, \Omega}^2 + \|e_t\|_{1-\delta, \Omega}^2 \right) dt + \frac{1}{2} \mathcal{E}(T) = \tag{3.8}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( (1 + \nu - \delta) |e_{\phi}|^2 + \delta |e_{\phi} + e_{\psi}|^2 + A \nabla e_{\phi} \cdot \nabla e_{\phi} \right) dx = \mathcal{E}(0).$$

Поскольку с ростом  $T$  интеграл в левой части (3.8) может только возрастать, а  $\mathcal{E}(0)$  не зависит от  $T$ , это тождество показывает, что  $\mathcal{E}(T)$  монотонно убывает. При этом  $\mathcal{E}(T)$  не может стремиться к положительной величине (так как в этом случае интеграл в (3.8) будет неограниченно возрастать с ростом  $T$ ). Таким образом,  $\mathcal{E}(T)$  стремится к нулю. В частности, если  $f = 0$ , то при любых начальных данных решение затухает и стремится к нулю при  $T \rightarrow +\infty$ . Из (2.5) следует аналогичная оценка, которая отличается от (3.8) заменой первого слагаемого в левой части на сумму  $\frac{1}{2}\|\nabla e\|_{A,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|e^*\|_{A^{-1}}^2$ .

С помощью (3.5) и (3.6) можно оценить разность между решениями двух задач с разными коэффициентами. В частности, такая ситуация возникает, если надо оценить насколько серьезно изменится решение при упрощении данных, например при сглаживании незначительных осцилляций коэффициентов. Для широкого класса линейных и нелинейных эллиптических уравнений этот вопрос подробно рассматривается в монографии [12]. Аналогичная проблема возникает при анализе погрешностей индуцированных неточной (неполной) информацией о данных (так называемая Uncertain Input Data Problem). Поскольку оценки (3.5) и (3.6) не требуют каких-либо особых свойств (ортогональности относительно некоторого множества, дополнительной регулярности и т.п.) их нетрудно использовать и для решения таких вопросов.

Пусть  $\hat{u}$  и  $\hat{y}^*$  определяют решение с матрицей  $\hat{A}$  вместо  $A$ ,  $\hat{\nu}$  вместо  $\nu$  и  $\hat{\delta}$  вместо  $\delta$ . В этом случае

$$\mathcal{R}(\hat{u}, \hat{y}^*) = \varepsilon_\delta \hat{u}_{tt} + \varepsilon_\nu \hat{u}, \quad \|\mathcal{S}(v, y^*)\|_{A^{-1}, \Omega}^2 = \int_{\Omega} B \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} dx,$$

где  $B := A^{-1}(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)$ ,  $\varepsilon_\nu := \hat{\nu} - \nu$  и  $\varepsilon_\delta := \hat{\delta} - \delta$ . Поскольку

$$\mathcal{S}(v, y^*) - \mathcal{S}_t(v, y^*) = (A - \hat{A})\nabla(\hat{u} - \hat{u}_t) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(\hat{u}, \hat{p}^*) = \varepsilon_\delta \hat{u}_{tt} + \varepsilon_\nu \hat{u},$$

то для  $e = \hat{u} - u$  и  $e^* = \hat{p}^* - p^*$  с помощью (3.5) и (3.6) получаем оценки

$$\|e\|_1^2 \leq \mathcal{E}(0) + \left[ \|\nabla \hat{u}\|_{B, \Omega}^2 \right]_0^T + \int_0^T \left( \frac{1}{\alpha_1} \|\nabla(\hat{u} - \hat{u}_t)\|_{B, \Omega}^2 + \varkappa \|\varepsilon_\delta \hat{u}_{tt} + \varepsilon_\nu \hat{u}\|_{\Omega}^2 \right) dt \quad (3.9)$$

и

$$\|e, e^*\|_2^2 \leq \mathcal{E}(0) + \int_0^T \left( \|\nabla \hat{u}\|_{B, \Omega}^2 + \frac{1}{\alpha_2} \|\nabla \hat{u}_t\|_{B, \Omega}^2 + \varkappa \|\varepsilon_\delta \hat{u}_{tt} + \varepsilon_\nu \hat{u}\|_{\Omega}^2 \right) dt, \quad (3.10)$$

которые позволяют оценить насколько может измениться решение при изменении коэффициентов.

#### 4. ПРИМЕРЫ

Выполнение тождеств (2.4) и (2.5), а также эффективность оценок (3.5) и (3.6) проверялось численно в серии тестов. В качестве (1.1), (1.2) рассматривалась задача

$$\delta u_{tt} + u_t - \rho u_{xx} = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0 \quad (4.1)$$

в области  $Q_T = [0, T] \times (0, \pi)$  при различных положительных  $\delta$  и  $\rho$ . Решение этой задачи можно представить в виде

$$u(x, t) = e^{-\frac{t}{2\delta}} \sum_{j=1}^{\infty} \sin(jx) T_j(t), \quad (4.2)$$

где

$$T_j(t) = \begin{cases} a_j e^{\omega_j t} + b_j e^{-\omega_j t}, & j \leq N_\delta, \\ a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t), & j > N_\delta, \end{cases}$$

$$\omega_j := \frac{1}{2\delta} \sqrt{|1 - 4\rho\delta j^2|},$$

а  $N_\delta$  это целая часть  $\frac{1}{2\sqrt{\delta\rho}}$ . Начальные условия для (4.1) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sin(jx), & q_j &= \begin{cases} a_j + b_j, & j \leq N_\delta, \\ b_j, & j > N_\delta \end{cases} \\ \psi(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sin(jx)(r_j - \frac{1}{2\delta}q_j), & r_j &= \begin{cases} \omega_j(a_j - b_j), & j \leq N_\delta, \\ \omega_j a_j, & j > N_\delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Левые части оценок (3.5) и (3.6) приобретают вид

$$\begin{aligned} \|e\|_1^2 &= \int_0^T \int_0^\pi (\lambda_1 \rho |e_x|^2 + \lambda_3 |e_t|^2) dx dt + \mathcal{E}(T), \\ \|e, e^*\|_2^2 &= \int_0^T \int_0^\pi (\tilde{\lambda}_1 \rho |e_x|^2 + \frac{\lambda_2}{\rho} |e^*|^2 + \lambda_3 |e_t|^2) dx dt + \mathcal{E}(T), \end{aligned}$$

где в соответствии с (3.7)

$$\lambda_1 = 2 - \alpha_1 - \alpha_3 C_F^2(\Omega), \quad \tilde{\lambda}_1 := \lambda_1 - 1, \quad \lambda_2 := 1 - \alpha_2, \quad \lambda_3 := 2 - \alpha_4,$$

а параметры удовлетворяют условиям  $\alpha_2 \leq 1, \alpha_1 + \alpha_3 C_F^2(\Omega) \leq 1, \alpha_4 \leq 2$ .

Функции  $v$  выбираются в виде

$$v(x, t) = u(x, t) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \chi_j(x) \tau_j(t) + e_0(x) + t g_0(x), \tag{4.3}$$

где  $e_0, g_0, \lambda_j$  и  $\chi_i$  – некоторые заданные функции такие, что  $\chi_j(0) = \chi_j(\pi) = 0$  и  $\tau(0) = 0$ . В зависимости от выбора  $e_0$  и  $g_0$  функция  $v$  может удовлетворять или не удовлетворять условиям (1.3) и (1.4). Выбирая величину параметров  $\lambda_j$  можно получать как весьма близкие аппроксимации решения, так и функции, которые сильно от него отклоняются. Функции  $y^*(x, t)$  выбирались в виде

$$y^* = \rho v_x - \varphi(x, t). \tag{4.4}$$

В этом случае

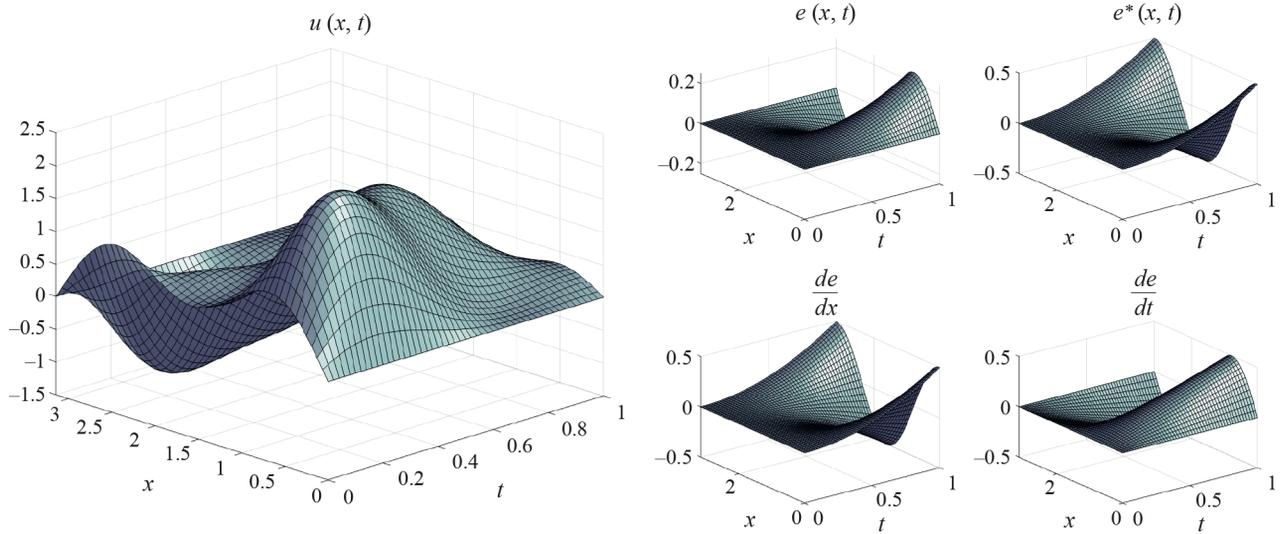
$$\begin{aligned} \mathcal{S}(v, y^*) &= \varphi(x, t), & \mathcal{S}_t(v, y^*) &= \varphi_t(x, t), \\ \mathcal{R}(v, y^*) &= \mathcal{R}(v) - \varphi_x(x, t), & \mathcal{R}(v) &= -\delta v_{tt} - v_t + \rho v_{xx}. \end{aligned}$$

В частности, если  $\varphi(x, t) = 0$ , то  $y^*$  определяется с помощью равенства (2.2) (что соответствует нередко применяемому в вычислительной практике варианту, когда поток реконструируется с помощью определяющего физического закона и градиента приближенного решения). Функция  $\varphi$  позволяет рассмотреть и другие варианты, например она может рассматриваться как корректор. Заметим, что левая часть оценки (3.5) не зависит от  $y^*$ , поэтому оценку можно улучшить за счет минимизации мажоранты по  $\varphi$ . Оптимальная реконструкция  $y^*$  на основе приближенного решения  $v$  достигается, если  $\varphi$  минимизирует функционал

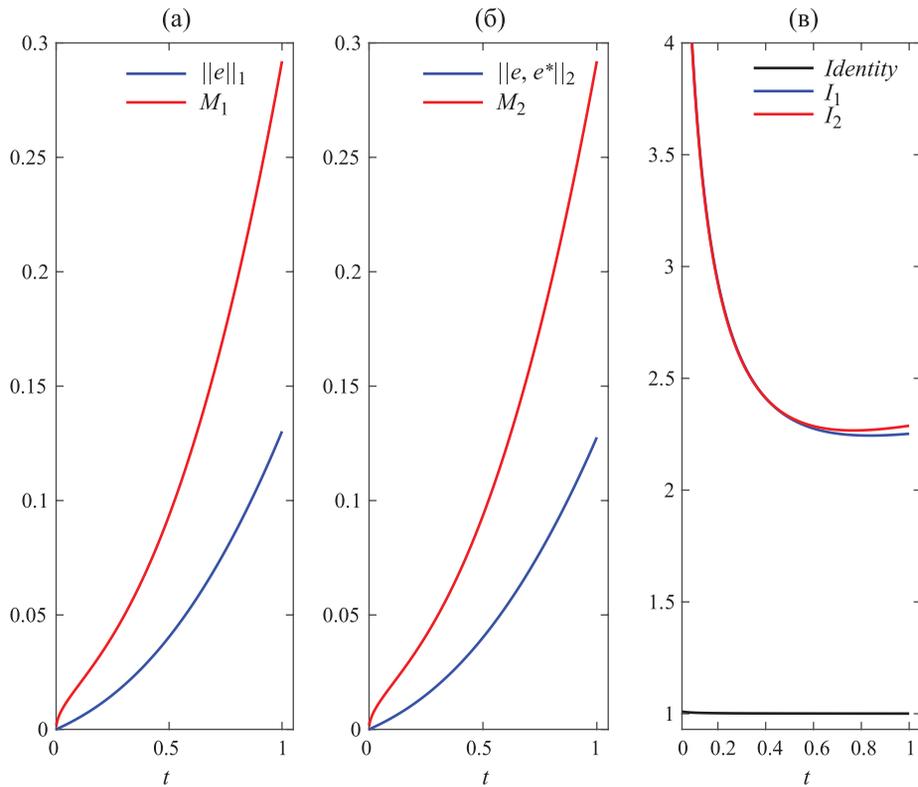
$$J_{\text{corr}}(\varphi) := \int_0^T \int_0^\pi \left( \frac{1}{\rho} |\varphi|^2 + \frac{1}{\alpha_2 \rho} |\varphi_t|^2 + \varkappa |\varphi_x|^2 - 2\varkappa \mathcal{R}(v) \varphi_x + \varkappa |\mathcal{R}(v)|^2 \right) dx dt,$$

на некотором множестве функций (в качестве последнего можно взять например функции вида  $\varphi(x, t) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n d_{ij}(x - \frac{\pi}{2})^j t^k$ ). В большом количестве тестов с различными функциями  $u$  вида (4.2) и функциями  $v$  и  $y^*$  вида (4.3) (4.4) было проверено, что тождества (2.4) и (2.5) для мер отклонений от точных решений выполняются, а оценки (3.5) и (3.6) дают правильное представление о величине отклонения. Некоторые результаты обсуждаются ниже.

**Пример 1.** В первом примере  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_4 = 1, b_1 = 1, b_3 = 0.5, \delta = 0.3, \rho = 1$ . Функции  $e_0$  и  $g_0$  выбраны так, что начальные условия выполняются. Решение задачи в области  $(0, \pi) \times (0, 1)$  и функции  $e,$



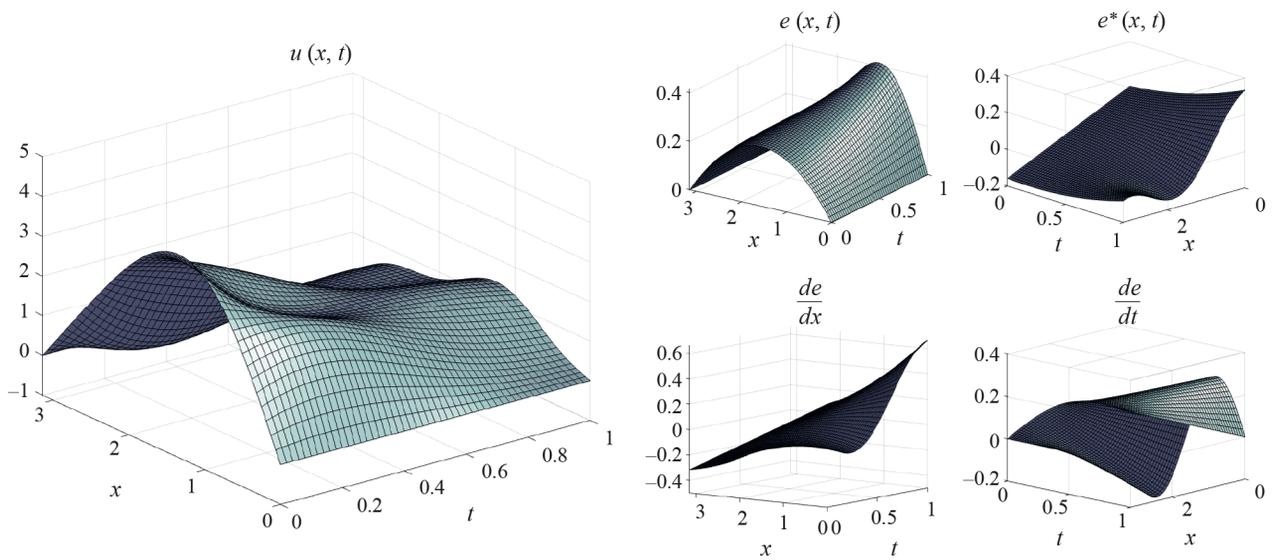
Фиг. 1. Решение  $u$  и функции  $e$  и  $e^*$ .



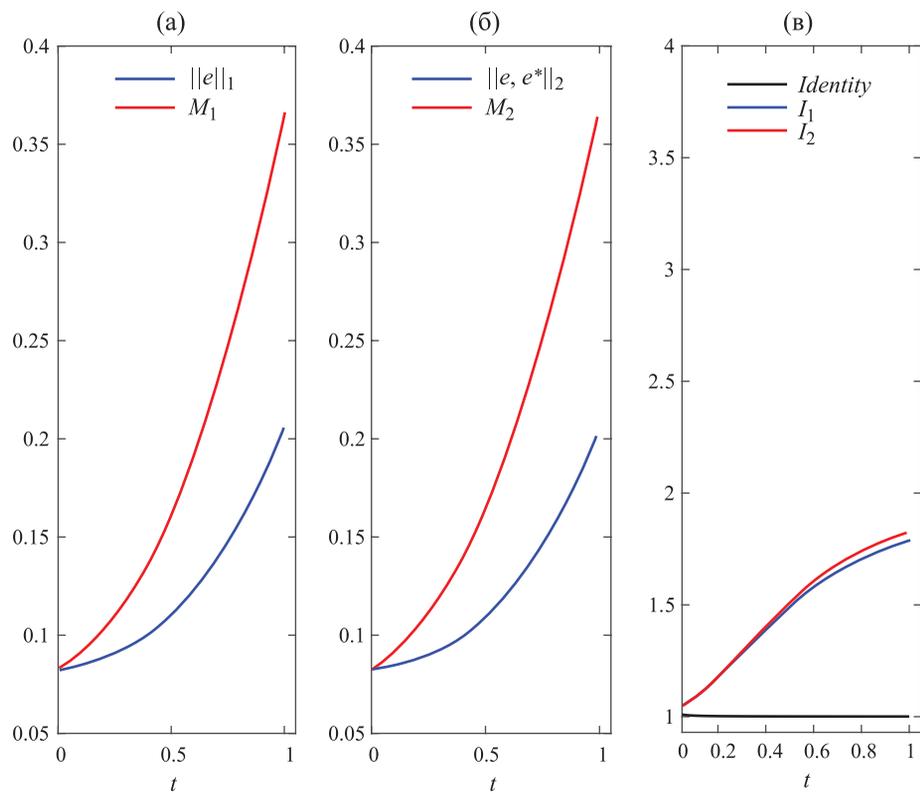
Фиг. 2. Пример 1. Меры  $\|e\|$  и  $\|e, e^*\|$  и их оценки.

$e_t$ ,  $e_x$  и  $e^*$  представлены на фиг. 1. Функция  $\phi$  равна нулю. Этот пример соответствует достаточно хорошей аппроксимации, которая удовлетворяет начальным и краевым условиям.

Тождества (2.4) и (2.5) выполняются при всех  $t \in (0, 1)$ . На фиг. 2в горизонтальная прямая показывает отношение правой части (2.4) к левой. Для (2.5) такое отношение также равно 1 при всех  $t$ . На фиг. 2а и 2б показано как изменяются нормы  $\|e\|_1$  и  $\|e, e^*\|_2$  с ростом  $t$  (нижние кривые). Также показаны значения соответствующих мажорант  $M_1$  и  $M_2$  (верхние кривые). Поскольку абсолютные значения отклонений недостаточно инфор-



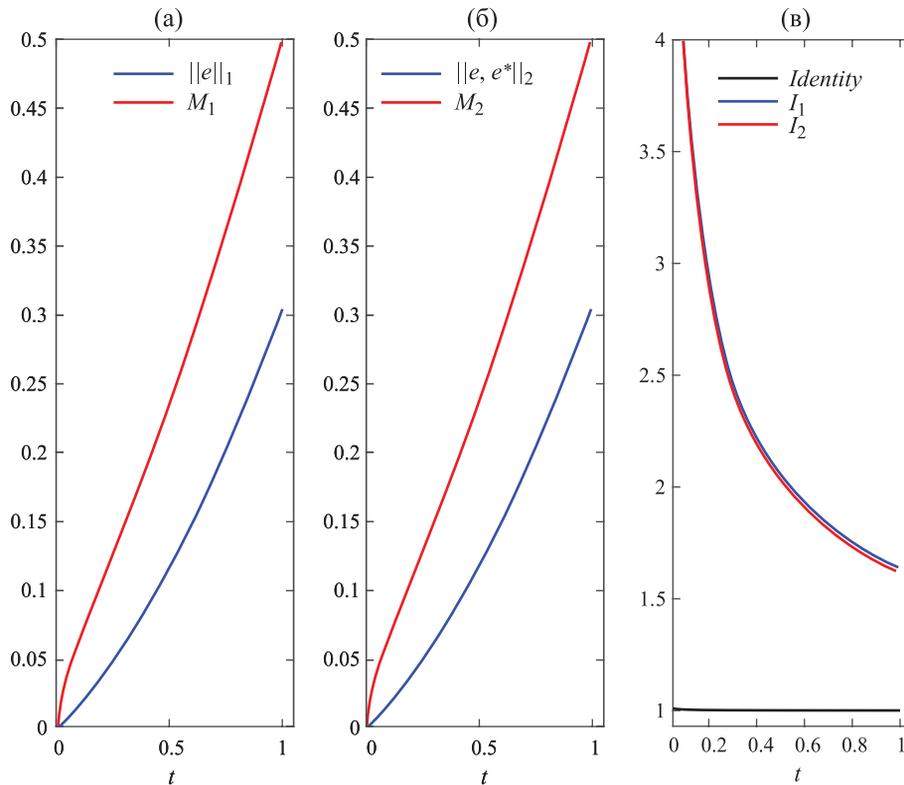
Фиг. 3. Решение  $u$  и функции  $e$  и  $e^*$ .



Фиг. 4. Пример 2. Меры  $\|e\|$  и  $\|e, e^*\|$  и их оценки.

мативны, на графиках представлены нормализованные значения, которые соотносят все данные величиной

$$\|u\| := \left( \int_0^T \int_0^\pi (\rho |u_x|^2 + \frac{1}{\rho} |p^*|^2 + |u_t|^2) dx dt \right)^{1/2},$$



Фиг. 5. Пример 3. Меры  $\|e\|$  и  $\|e, e^*\|$  и их оценки.

которая характеризует само решение. Графики показывают, что для таких (достаточно близких к решению) аппроксимаций оценки работают хорошо. Величины  $I_1 = \frac{M_1}{\|e\|_1}$  и  $I_2 = \frac{M_2}{\|e, e^*\|_1}$  (так называемые индексы эффективности) характеризуют точность оценок. Чем ближе эти значения к 1 тем лучше оценка. Значения индексов эффективности для мажорант  $M_1$  и  $M_2$  представлены двумя кривыми на фиг. 2в. Видно что они переоценивают истинную меру отклонения не более чем в 2–3 раза.

**Пример 2.** В этом примере  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_4 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0.5, \delta = 0.3, \rho = 0.5$  а функции  $v$  и  $y^*$  представляют собой весьма грубые аппроксимации, которые не удовлетворяют начальным условиям задачи, так что  $\mathcal{E}(0) > 0$ . Соответствующие функции  $e$  и  $e^*$  изображены на фиг. 3. Фиг. 4 показывает поведение мер отклонений и соответствующих мажорант. Поскольку функция  $v$  нарушает начальные условия, соответствующие кривые не равны нулю при  $t = 0$ . Мажоранты правильно отражают это обстоятельство и в целом качество оценок очень хорошее.

**Пример 3.** Данные в этом примере отличаются от примера 1 тем, что здесь  $\rho = 0.01$ . Тождества (2.4) и (2.5) выполняются при любых  $\rho > 0$ , однако эффективность оценок (3.5) и (3.6) может зависеть от величины этого коэффициента. Данный пример показывает, что даже при малых значениях  $\rho$  оценки могут оставаться работоспособными (см. фиг. 5).

В заключение отметим, что оценки (3.5) и (3.6) были получены из тождеств весьма простым способом. Они обеспечивают гарантированную мажоранту меры отклонения, но можно ожидать, что в определенных ситуациях эта мажоранта будет сильно переоценивать истинное значение. Эта трудность преодолима поскольку тождества (2.4) и (2.5) позволяют получать и более точные оценки. В контексте уравнений эллиптического типа этот вопрос подробно рассмотрен в работах [13] и [15].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики// Матем. сб. 1958. Т. 87. № 2. Р. 123–158.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.: Наука, 1967.

3. Бубнов Б. А. Смешанная задача для некоторых параболо-гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения 1976. Т. 12. № 3. Р. 494–501.
4. Ларькин Н. А. Краевые задачи в целом для одного класса гиперболических уравнений // Сиб. Матем. ж. 1977. Т. XVIII. № 6. Р. 1414–1419.
5. Четверушкин Б. Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 11. Р. 33–52.
6. Давыдов А. А., Б. Н. Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. N. 50. № 12. Р. 2275–2284.
7. Aithworth M., Oden J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis, Wiley, New York, 2000.
8. Babuška I., Strouboulis T. The finite element method and its reliability. Claderon Press, Oxford, 2001.
9. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations, volume 4 of Radon Series on Computational and Applied Mathematics. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
10. Verfurth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques Wiley, Teubner, New-York, 1996.
11. Repin S. Estimates of deviations from exact solutions initial-boundary value problem for the heat equation // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 2002. V. 13. № 2. Р. 121–133.
12. Repin S., Sauter S. Accuracy of Mathematical Models. Dimension Reduction, Homogenization, and Simplification, volume 33 of EMS Tracts Math. European Mathematical Society (EMS), Berlin, 2020.
13. Repin С.И. Тождество для отклонений от точного решения задачи  $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$  и его следствия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021 Т. 61. № 12 Р. 1986–2009.
14. Repin С. И. Апостериорные тождества для мер отклонений от точных решений нелинейных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 6. Р. 896–919.
15. Repin С. И. Контроль точности приближенных решений одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. Р. 1822–1839.
16. Repin S. Error identities for parabolic initial boundary value problems // Zap. Nauchn. Sem. POMI. 2021. V. 508. Р. 147–172.

# IDENTITIES FOR MEASURES OF DEVIATIONS FROM SOLUTIONS OF PARABOLO-HYPERBOLIC EQUATIONS

S.I. Repin<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup>St. Petersburg Branch of the V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Fontanka 27, 191023, Russia

<sup>b</sup>St. Petersburg Polytechnic University, Polytechnicheskaya 29, St. Petersburg, 195251, Russia

\*e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Received 19 November, 2023

Revised 19 November, 2023

Accepted 14 January, 2024

**Abstract.** The article presents integral identities that hold for the difference between the exact solution of the initial-boundary value problem for a parablo-hyperbolic equation and any function from the corresponding energy class. These identities allow for the derivation of two-sided a posteriori estimates for approximate solutions to the corresponding Cauchy problem. The left side of the estimate provides a natural measure of deviation from the solution, while the right side depends only on the problem data and the approximate solution itself, making it computable. The obtained estimates are utilized to compare solutions of Cauchy problems for both the parabolic equation and the parablo-hyperbolic equation with a small parameter in the second time derivative. Additionally, the estimates enable a quantitative assessment of the effects arising from inaccuracies in initial data and coefficients of the equation.