

УДК 519.6

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СХЕМЫ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ПОПРАВКИ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ДЛЯ 3-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

© 2024 г. В.П. Жуков^{1,*}¹630090 Новосибирск, пр-т Акад.Лаврентьева, 6, Федеральный исследовательский центр
информационных и вычислительных технологий, Россия

*e-mail: zukov@ict.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.12.2023 г.

Переработанный вариант 25.12.2023 г.

Принята к публикации 14.01.2024 г.

Принято считать, что схема стабилизирующей поправки с центральными разностями по пространственным переменным для уравнения переноса в 3-мерном случае является условно устойчивой. В настоящей работе показано, что, строго говоря, эта схема абсолютно неустойчива. Однако область неустойчивых гармоник в пространстве волновых векторов и величина их инкрементов быстро стремятся к нулю при стремлении параметра Куранта к нулю, что позволяет успешно использовать эту схему. Поэтому правильнее говорить о практически условной устойчивости данной схемы. Библ. 3. Фиг. 4.

Ключевые слова: устойчивость конечно-разностных схем в многомерном случае, метод дробных шагов, схема стабилизирующей поправки, гиперболические уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466924050118, EDN: YCZKUW

1. ВВЕДЕНИЕ

Оператор, соответствующий уравнению переноса $\frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, входит во многие уравнения, описывающие сплошные среды (гидро-, газо-, гео-, плазмодинамика). Поэтому выбор конечно-разностных схем для успешного решения уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \quad (1)$$

и знание свойств этих схем очень важен. Уравнения, в которые входит оператор переноса, могут быть очень сложными и нелинейными, и связаны с другими уравнениями. Поэтому на практике часто ограничиваются первым порядком аппроксимации по времени $\partial u / \partial t \approx (u^{n+1} - u^n) / \tau$ (обозначения стандартные). Однако по пространственным переменным первого порядка обычно недостаточно. Так использование простейшей условно-устойчивой явной схемы с учетом знака скорости первого порядка по пространственной переменной зачастую дает плохие результаты, так как эта схема обладает большой схемной вязкостью и конечно-разностное решение подвержено сильной нефизической диффузии. Явная схема с аппроксимацией пространственных производных центральной разностью с порядком аппроксимации $O(\tau, h^2)$

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\tau} + V_1 \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2h_1} + V_2 \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2h_2} + V_3 \frac{u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k-1}^n}{2h_3} = 0 \quad (2)$$

абсолютно неустойчива. Использование абсолютно устойчивой полностью неявной схемы наталкивается на известные сложности реализации, которые преодолеваются с помощью схем с дробными шагами [3]. При этом, если в двумерном случае абсолютной устойчивостью обладают различные варианты метода дробных шагов, то в трехмерном случае проблемы сохраняются [3]. Потеря безусловной устойчивости схем в трехмерном случае

имеет место для всех схем, приводимых к канонической форме: схемы приближенной факторизации, стабилизирующей поправки и предиктор-корректор [1, 2]. Более того, например, трехмерный аналог схемы продольно-поперечной прогонки для (1) оказывается абсолютно неустойчивым. В классических работах [1, 2] утверждается, что класс схем приближенной факторизации

$$(I + \alpha\tau V_3 \Lambda_3)(I + \alpha\tau V_2 \Lambda_2)(I + \alpha\tau V_1 \Lambda_1) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -(V_1 \Lambda_1 + V_2 \Lambda_2 + V_3 \Lambda_3)u^n, \quad (3)$$

$$\Lambda_1 u^n = (u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n)/(2h_1) \approx \partial u / \partial x_1, \quad \Lambda_2 u^n = (u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n)/(2h_2) \approx \partial u / \partial x_2,$$

$$\Lambda_3 u^n = (u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k-1}^n)/(2h_3) \approx \partial u / \partial x_3.$$

при параметре $\alpha > 1/2$ обладает условной устойчивостью. Ниже будет показано, что это неправильно и схема (3) абсолютно неустойчива. В (2), (3) индексы i, j, k и пространственные шаги h_1, h_2, h_3 относятся к переменным x_1, x_2, x_3 соответственно.

Для выяснения условий устойчивости схемы (3) ищем ее решение в виде (\bar{i} — мнимая единица, k_m — волновые числа)

$$u_{i,j,k}^n = u_0 \lambda^n \exp(\bar{i}(k_1 h_1 i + k_2 h_2 j + k_3 h_3 k)). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), в согласии с [1], имеем

$$(1 + \bar{i}\alpha d_1)(1 + \bar{i}\alpha d_2)(1 + \bar{i}\alpha d_3)(\lambda - 1) + \bar{i}d = 0,$$

$$d_m = \tau h_m^{-1} V_m \sin(k_m h_m), \quad m = 1, 2, 3, \quad d = d_1 + d_2 + d_3.$$

Это дает

$$\lambda = \frac{A + \bar{i}(B - d)}{A + \bar{i}B}, \quad (5)$$

$$A = 1 - \alpha^2(d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_3), \quad B = \alpha(d - \alpha^2 d_1 d_2 d_3).$$

Условие устойчивости $|\lambda| \leq 1$ дает $(B - d)^2 \leq B^2$. Это неравенство можно переписать в нескольких эквивалентных формах

$$((1 - \alpha)d + \alpha^3 d_1 d_2 d_3)^2 \leq (\alpha d - \alpha^3 d_1 d_2 d_3)^2, \quad (6)$$

$$(\alpha^3 d_1 d_2 d_3 + (1 - \alpha)d)^2 \leq (\alpha^3 d_1 d_2 d_3 - \alpha d)^2, \quad (7)$$

$$2\alpha^3 d_1 d_2 d_3 d \leq (2\alpha - 1)d^2. \quad (8)$$

В [1, 2] рассмотрен только случай $d_1 d_2 d_3 \geq 0$ и отмечены следующие свойства схемы, вытекающие из (6)–(8).

1. Если хотя бы одно из d_m равно нулю, то эти условия выполняются. В частности, в 2-мерном случае схема абсолютно устойчива.
2. Из (6) видно, что для устойчивости при малых d_m необходимо, чтобы α было больше $1/2$.
3. При положительных d_1, d_2, d_3 и $d_3 \gg d_1, d_2$ условие (8) дает

$$d_1 d_2 \leq (2\alpha - 1)/(2\alpha^3). \quad (9)$$

То есть в этом случае устойчивость определяется меньшими d_m . Условие (9) верно и для разных знаков при $|d_3| \gg |d_1|, |d_2|$. Это свойство важно, например, при получении решения в окрестности оси при использовании цилиндрической и сферической систем координат.

4. При $d_1 = d_2 = d_3 = d_0$ формулы (6)–(8) дают

$$d_0^2 \leq \frac{3(2\alpha - 1)}{2\alpha^3}. \quad (10)$$

При $\alpha > 1/2$ условие (10) может быть удовлетворено. Причем максимальное $d_0 = 4/3$ достигается при $\alpha = 3/4$. При $\alpha = 1$ имеем $d_0 \leq \sqrt{3/2} \approx 1.225$.

На основании пп. 1–4, изложенных выше, в [1, 2] предполагается условная устойчивость (3) в 3-мерном случае при $\alpha > 1/2$. Но в [1, 2] есть принципиальная ошибка. Она состоит в том, что величины d_1, d_2, d_3 могут иметь разные знаки. Поэтому их сумма может быть малой, а произведение — значительным. Если знаки суммы и произведения разные, то правая часть (7) будет заведомо меньше левой и условие устойчивости выполняться не будет. Покажем это.

Без ограничения общности можно положить, что $d_1, d_2 > 0, d_3 < 0$. В случае $|d_3| \leq d_1 + d_2$ величина $d \geq 0$ и условие устойчивости (7) выполняется. При $|d_3| > d_1 + d_2$ удобно ввести обозначение $d_3 = -(d_1 + d_2)(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В этом случае $d = -(d_1 + d_2)\varepsilon < 0$ и (7) дает $2\alpha^3 d_1 d_2 (d_1 + d_2)^2 \varepsilon (1 + \varepsilon) \leq (2\alpha - 1)(d_1 + d_2)^2 \varepsilon^2$ или

$$((2\alpha - 1) - 2\alpha^3 d_1 d_2) \varepsilon \geq 2\alpha^3 d_1 d_2.$$

Это условие может быть выполнено только если выполняется условие (9), т.е. d_1, d_2 достаточно малы. При этом для устойчивости необходимо, чтобы ε было достаточно велико. В диапазоне

$$\varepsilon \in \left(0 : \frac{2\alpha^3 d_1 d_2}{(2\alpha - 1) - 2\alpha^3 d_1 d_2} \right)$$

условие устойчивости не выполняется. При $d_1, d_2 \rightarrow 0$ ширина диапазона неустойчивости по ε уменьшается пропорционально $d_1 d_2$, а соответственно, по d_3 — как $d_1 d_2 (d_1 + d_2)$. Таким образом, неустойчивыми являются возмущения с волновыми векторами близкими к вектору $(d_1, d_2, -(d_1 + d_2))$, который направлен поперек вектора скорости. Для превышения квадрата модуля множителя перехода (5) над единицей имеем

$$|\lambda|^2 - 1 = \frac{d(d - 2B)}{A^2 + B^2} = \frac{(d_1 + d_2)\varepsilon \left((d_1 + d_2)\varepsilon - 2\left(\alpha \left((d_1 + d_2)\varepsilon + \alpha^2 d_1 d_2 d_3 \right) \right) \right)}{A^2 + B^2} = \frac{(d_1 + d_2)^2 \varepsilon (2\alpha^3 d_1 d_2 - (2\alpha - 1 - 2\alpha^3 d_1 d_2) \varepsilon)}{A^2 + B^2}.$$

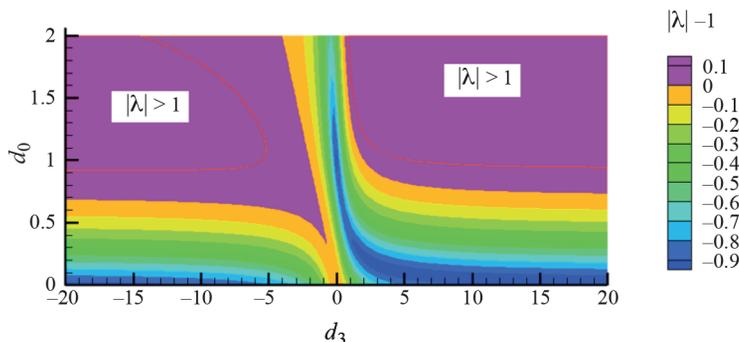
Так как $A^2 + B^2 \approx 1$ при $d_1, d_2 \rightarrow 0$, то в этом пределе максимум $|\lambda|^2 - 1$ достигается в точке $\varepsilon = \frac{\alpha^3 d_1 d_2}{(2\alpha - 1) - 2\alpha^3 d_1 d_2}$ и равен

$$(|\lambda|^2 - 1)_{\max} = \frac{(\alpha^3 d_1 d_2 (d_1 + d_2))^2}{2\alpha - 1}.$$

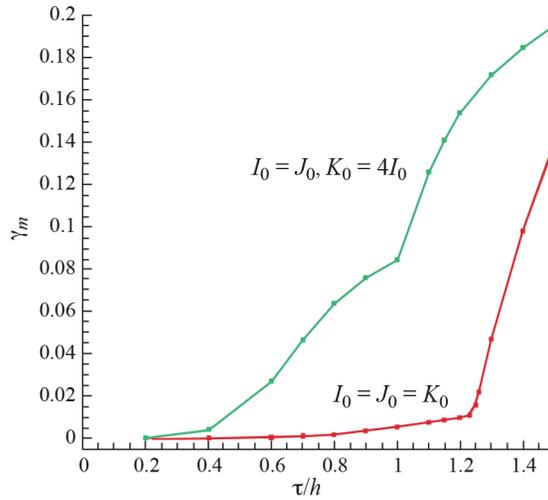
Заметим, что при уменьшении α в диапазоне $\alpha \in (1/2 : 1)$, в отличие от случая положительных d_1, d_2, d_3 , инкремент неустойчивости монотонно возрастает при уменьшении α . Таким образом, область неустойчивости существует всегда (абсолютная неустойчивость), но при уменьшении d_1, d_2 ее ширина по d_3 уменьшается как куб, а превышение инкремента над 1 — как шестая степень d_1, d_2 . Сказанное иллюстрирует фиг. 1, где показано распределение превышения модуля множителя перехода над единицей $|\lambda| - 1$ при $d_1 = d_2 = d_0$ в зависимости от d_0 и d_3 .

Для еще одной иллюстрации рассмотрим решения разностного аналога (3) уравнения (1) при $\alpha = 1$ и $V_1 = V_2 = V_3 = 1$ в единичном кубе с периодическими граничными условиями на равномерной сетке в виде плоской волны

$$u_{i,j,k}^n = \lambda_{N,M,L}^n \exp(i(2\pi N i / I_0 + 2\pi M j / J_0 + 2\pi L k / K_0)).$$



Фиг. 1. $|\lambda| - 1$ как функция d_3 и d_0 ($d_1 = d_2 = d_0$) при $\alpha = 1$. Область неустойчивости при $d_3 < 0$ простирается до нуля.



Фиг. 2. Зависимость инкремента γ_m от τ/h в случае расчетной области в виде единичного куба и равномерной сетки с одинаковыми шагами по всем направлениям (красная кривая) и в случае когда по одному из направлений число узлов в 4 раза больше.

Величины d_m в рассматриваемом случае имеют вид

$$d_1 = (\tau/h_1) \sin(2\pi N/I_0), \quad d_2 = (\tau/h_2) \sin(2\pi M/J_0), \quad d_3 = (\tau/h_3) \sin(2\pi L/K_0).$$

Изучим зависимость максимального инкремента $\gamma_m = \max_{N, M, L} |\lambda_{N, M, L}| - 1$ от шагов сетки (фиг. 2). Величина γ_m определялась численно перебором всех значений N, M и L . Рассмотрим случай $I_0 = J_0 = K_0, h_1 = h_2 = h_3 = h = 1/I_0$. При $\tau/h \geq 1.2$ инкремент γ_m уменьшается с уменьшением τ/h в соответствии с формулами работ [1, 2]. При этом γ_m соответствует гармоникам с $d_1 = d_2 = d_3$. Но при $\tau/h < 1.2$, в отличие от [1, 2], γ_m не равен нулю, а изменяется в соответствии с развитыми выше представлениями. Он больше нуля, но резко падает при уменьшении τ/h . При этом максимальный инкремент соответствует гармоникам с $d_3 \approx -(d_1 + d_2)$.

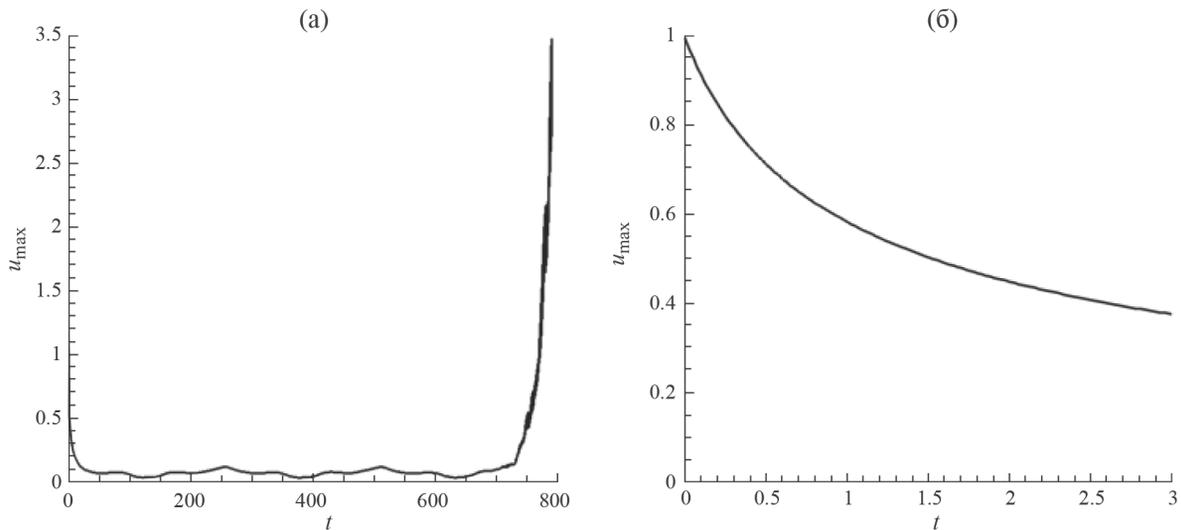
Если в одном из направлений величины $\tau V/h$ намного превышают эти величины в других направлениях, то γ_m больше, чем в рассмотренном случае. На фиг. 2 зеленая кривая соответствует $I_0 = J_0, K_0 = 4I_0, h = 1/I_0$. Заметим, что дальнейшее увеличение отношения K_0/I_0 не оказывает существенного влияния на γ_m .

2. ЗАДАЧА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим решение уравнения (1) с помощью схемы (3) с $\alpha = 1$ в единичном кубе при периодических граничных условиях и $V_1 = V_2 = V_3 = 1$. Начальное условие соответствовало локализованному вблизи центра расчетной области возмущению с гауссовым распределением $u = \exp(-((x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 + (x_3 - 0.5)^2)/R^2)$, единичной амплитудой и $R = 1/8$. Если отношение $\tau/h < 1$ (условие устойчивости [1, 2] выполнено), то наблюдается ожидаемая картина: возмущение переносится вдоль главной диагонали куба с постоянной скоростью, исчезая на одной границе и появляясь на другой. В отличие от точного решения амплитуда возмущения $u_{\max} = \max_{i,j,k} u_{i,j,k}$ уменьшается со временем (фиг. 3). Это ожидаемо, так как большинство гармоник имеет $|\lambda| < 1$. Со временем также происходит изменение формы решения. На временах, когда решение конечно-разностной задачи совсем не соответствует решению дифференциальной задачи u_{\max} испытывает колебания. Затем происходит бурный рост наиболее неустойчивых гармоник и u_{\max} устремляется к бесконечности.

Характерное время, в течении которого конечно-разностное решение еще примерно соответствует решению дифференциальной задачи (в качестве этого времени может выступать, например, момент времени, когда амплитуда возмущения уменьшается на 20% от начальной) увеличивается при уменьшении шагов сетки в соответствии с порядком аппроксимации схемы $o(\tau, h^2)$. Если по одному из направлений взять намного более мелкую сетку, например, $K_0 = 4I_0$, то эти результаты изменяться слабо, что ожидаемо.

Время яркого проявления неустойчивости в сотни раз превышает время, в течении которого конечно-разностное решение еще приблизительно соответствует точному даже при $\tau/h \approx 1$. Поскольку максимальное $|\lambda|$ зависит от τ/h , а необходимое для достижения определенного времени число шагов по времени пропорционально τ^{-1} , то время развития неустойчивости уменьшается с уменьшением шагов по пространству при постоянном τ/h . При уменьшении τ/h время развития неустойчивости резко увеличивается. Например, в рассмат-



Фиг. 3. Зависимость u_{\max} от t , б — более подробно при малых временах. Вариант $I_0 = J_0 = K_0 = 100, \tau/h = 0.5$.

риваемой задаче при изменении τ/h от 1 до 0.5 оно увеличивается более чем в 10 раз. При различающихся в различных направлениях шагах сетки, например при $J_0 = I_0, K_0 = 4I_0 (h = 1/I_0)$, время развития неустойчивости уменьшается в несколько раз, но по-прежнему намного превышает время соответствия конечно-разностного решения точному решению. Заметим, что время проявления неустойчивости зависит не только от инкрементов гармоник, но и от амплитуд этих гармоник, присутствующих в начальный момент времени.

Из представленных результатов можно сделать вывод, что для рассмотренной задачи можно считать схему (3) практически условно устойчивой, но с условием более жестким, чем предсказывает [1, 2]. Рассматриваемая неустойчивость присутствует и при малых τ/h , но она не успевает развиваться: намного раньше решение теряет смысл из-за потери точности.

3. ЗАДАЧА НА УСТАНОВЛЕНИЕ

Рассмотрим задачу, отличающуюся от предыдущей задачи граничными условиями по x_1 , которые имели вид

$$i = 1 : u = \exp\left(-((x_2 - 0.5)^2 + (x_3 - 0.5)^2)/R^2\right), \quad i = I_0 : \frac{u_{I_0,j,k}^{n+1} - u_{I_0,j,k}^n}{\tau} + V_1 \frac{u_{I_0,j,k}^{n+1} - u_{I_0-1,j,k}^{n+1}}{h_1} = 0,$$

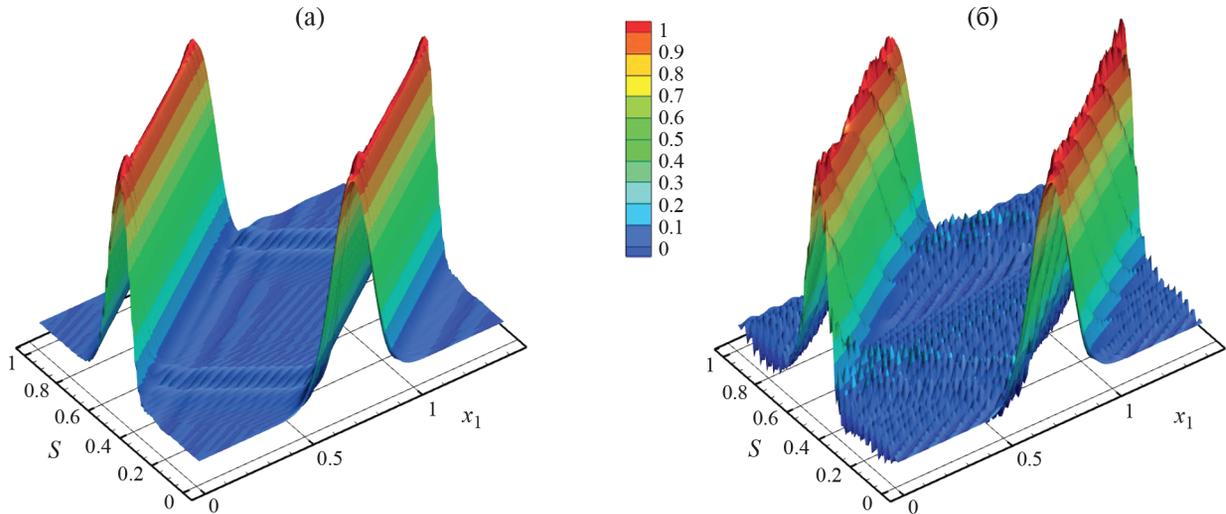
и нулевыми начальными условиями. Для более правильной передачи граничных условий дробный шаг с поправкой вдоль координаты x_1 при реализации (3) производился в последнюю очередь.

Расчеты говорят о том, что, например, при $I_0 = J_0 = K_0 = 100$ и 200 и $\tau/h = 1$ решение неустойчиво. Причина этой неустойчивости, которая возникает у границы $i = I_0$, связана с несовершенным граничным условием на этой границе, целью которого является беспрепятственный вынос возмущения из расчетной области.

При $\tau/h = 0.5$ на временах больше 1 устанавливается практически стационарное ожидаемое распределение u (фиг. 4). Наблюдаемая небольшая рябь связана с несовершенством граничных условий при $i = I_0$. Она появляется по достижении возмущением этой границы и уменьшается при уменьшении шагов сетки. Решение, формирующееся на временах порядка 1, долгое время сохраняет свою форму без изменений. Но ко времени $t \approx 456$ для $I_0 = 100$ и $t \approx 270$ для $I_0 = 200$ постепенно возникает описанная выше неустойчивость, приводящая к развалу решения, что соответствует развитым выше представлениям.

Подчеркнем, что в реальных задачах расчет до таких больших времен бессмыслен: стационар достигается намного раньше.

Заметим следующее: 1) введение вязкого члена $\chi \Delta u$ в правую часть (1) при малом $\chi = 10^{-4}$ сильно уменьшает мелкомасштабную рябь и не дает развиваться неустойчивостям, не влияя на главные гармоники; 2) применение явной схемы первого порядка с учетом знака скорости при тех же шагах сетки и при выполнении условия устойчивости явной схемы ($\tau/h < 0.3$) приводит к сильному нефизическому затуханию решения; 3) замена в (3) даже одного оператора Λ_m на оператор направленной с учетом знака скорости разности первого порядка сильно повышает устойчивость (3), но приводит к сильной, только что упомянутой, потере точности решения; 4) немонотонность конечно-разностного решения в рассмотренных задачах (при $\alpha = 1$) не является сильной. Напомним, что рябь на фиг. 4 связана с граничным условием.



Фиг. 4. Распределение u в сечении $x_2 = x_3$ в стационаре ($t < 400$ — (а)) и в начале яркого проявления неустойчивости ($t = 500$ — (б)). Величина s соответствует расстоянию по x_2, x_3 : $x_2 = s/\sqrt{2}$, $x_3 = s/\sqrt{2}$. Вариант $I_0 = J_0 = K_0 = 100$, $\tau/h = 0.5$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, схема (3) строго говоря абсолютно неустойчива, но область неустойчивых гармоник в пространстве d_1, d_2, d_3 узкая и сужается при $d_1, d_2, d_3 \rightarrow 0$ (при уменьшении τ/h) как $(\tau/h)^3$, а инкремент уменьшается пропорционально $(d_1 d_2 (d_1 + d_2))^2 \sim (\tau/h)^6$. Поэтому неустойчивость зачастую не успевает развиваться за время расчета. Существуют другие обстоятельства, которые при решении более сложных задач подавляют обсуждаемую неустойчивость.

1. Наличие даже небольшой физической вязкости, диффузии и т.п.
2. Схемы для решения более сложных задач могут иметь запас устойчивости, связанный с аппроксимацией других членов, компенсирующий обсуждаемую неустойчивость.
3. Во многих случаях скорость не является постоянной величиной во времени и пространстве.
4. Наличие градиентов часто приводит к возникновению скорости вдоль этих градиентов и прекращению неустойчивости, так как в обсуждаемой неустойчивости возбуждаются возмущения с волновыми векторами, направленными поперек вектора скорости.
5. Для развития неустойчивости все 3 компоненты скорости должны быть отличны от нуля. При решении физических задач как правило координаты выбирают так, чтобы скорость была направлена преимущественно вдоль одного из направлений.

В итоге можно заключить, что схему стабилизирующей поправки можно считать “практически условно устойчивой” с условием устойчивости вида $V\tau/h < C$ или (в случае сильно отличающихся скоростей) (9), но величина C может быть ощутимо меньше, чем предсказывает [1, 2]. Также необходимо соблюдать осторожность при расчетах на установление. При возникновении проблем рекомендуется уменьшить шаг по времени или ввести очень малую вязкость.

Автор выражает благодарность В. М. Ковеня за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Яненко Н. Н., Неявная разностная схема для численного решения пространственных уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1465–1482.
2. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1967.

ON THE STABILITY OF A STABILIZING CORRECTION SCHEME WITH CENTRAL DIFFERENCES FOR SPATIAL VARIABLES IN THE 3D TRANSPORT EQUATION

V. P. Zhukov*

*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Acad. Lavrentiev Ave., 6, Novosibirsk, 630090,
Russia*

**e-mail: zukov@ict.nsc.ru*

Received 05 December, 2023

Revised 25 December, 2023

Accepted 14 January, 2024

Abstract. It is generally accepted that the stabilizing correction scheme with central differences for spatial variables in the 3D transport equation is conditionally stable. The work shows that, strictly speaking, this scheme is absolutely unstable. However, the region of unstable harmonics in the wave vector space and the magnitude of their increments rapidly approach zero as the Courant parameter tends to zero, allowing successful use of this scheme. Therefore, it is more accurate to refer to this scheme as practically conditionally stable.

Keywords: stability of finite-difference schemes in multidimensional cases, fractional step method, stabilizing correction scheme, hyperbolic equations.