

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМ CABARET И WENO ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ЗВУКОВОГО УДАРА В АТМОСФЕРЕ¹⁾

© 2024 г. П. А. Мищенко^{1,*}, Т. А. Гимон¹, В. А. Колотиллов^{1,2}, А. Н. Кудрявцев¹

¹630090 Новосибирск, ул. Институтская, 4/1, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Россия

²630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 15, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

*e-mail: mischenko.polina.16@gmail.com

Поступила в редакцию 21.09.2023 г.

Переработанный вариант 20.12.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2024 г.

Наиболее удобной моделью описания явления распространения волн звукового удара в атмосфере является расширенное уравнение Бюргерса. В настоящей работе исследовалось влияние численной схемы на результат решения уравнения, учитывающего нелинейный характер распространения в атмосфере волн звукового удара. Это уравнение является ключевым компонентом расширенного уравнения Бюргерса и определяет характер трансформации профиля возмущенного давления при его распространении. Для решения применялись две численные схемы: CABARET и WENO, квазимонотонные сквозные счетные схемы, позволяющие получить решение без значительных численных осцилляций. Проводился анализ применимости данных схем для решения рассматриваемой задачи. Библ. 19. Фиг. 12.

Ключевые слова: звуковой удар, нелинейное уравнение переноса, распространение волн малой амплитуды, схема CABARET, схема WENO.

DOI: 10.31857/S0044466924050136, EDN: YCUYOH

ВВЕДЕНИЕ

Звуковой удар, возникающий при достижении поверхности земли возмущений, генерируемых при крейсерском полете сверхзвукового самолета, может приводить к ряду нежелательных последствий. Минимизация звукового удара — одна из актуальных проблем в области конструирования сверхзвуковых пассажирских самолетов нового поколения (см. [1]). Точное численное моделирование сверхзвукового обтекания геометрии самолета и распространения возникающих возмущений параметров среды до поверхности земли необходимо для успешного прогнозирования звукового удара.

Наиболее эффективным подходом к моделированию распространения в атмосфере на дальние расстояния волн звукового удара является решение расширенного уравнения Бюргерса (см. [2]). Одна из составляющих этого уравнения представляет собой одномерное квазилинейное уравнение переноса и описывает перенос в пространстве волны малой амплитуды со скоростью распространения, определяемой параметрами среды и интенсивностью самих возмущений. При распространении начального профиля волны на дальнее расстояние, как например, с высоты полета до поверхности земли, профиль волны может значительно трансформироваться, могут образовываться разрывы решения.

Распространенные способы решения рассматриваемого уравнения основываются на его неявном аналитическом решении (решение Пуассона) (см. [2]–[4], [9]), а также метода параметров формы волны (см. [10]), разработанный из теории геометрической акустики Ч. Томасом.

При возникающей многозначности решения для локализации разрывов применяются условие Ренкина–Югонио (см. [8]) и следствие из него “правило равенства площадей” (см. [5], [7]). Также в работах [6], [9] используется метод Бургера–Хейса, заключающийся в выявлении узлов с минимальными значениями потенциала численного решения. Также во избежание возникновения областей многозначности решения в [2], [4] ограничивается шаг дискретизации, не позволяющий достичь момента формирования разрывов решения. Данные

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №121030900260-6).

аналитические подходы имеют свои недостатки. Некоторые из методов сложно реализуемы для решения практических задач, могут в зависимости от параметров задачи повышать требуемые вычислительные мощности численного алгоритма, а также не удовлетворять условию консервативности.

Схемы сквозного счета кажутся более универсальным подходом. Однако они нашли меньшее распространение при решении рассматриваемого в работе нелинейного уравнения переноса, несмотря на множество схем сквозного счета, разработанных для решения уравнений гиперболического типа (см. [11]–[13]). Частой проблемой данных схем является возникающие нефизические осцилляции в областях особенностей решения. Схемы со значительной численной вязкостью, помогающей бороться с ними, могут наоборот гасить физические локальные экстремумы.

Важными параметрами при моделировании распространения акустических волн являются амплитуда возмущений и время нарастания фронта волны, которые определяют интенсивность воздействия звукового удара. Сложность рассматриваемой задачи, включая большую протяженность области моделирования и сложную структуру исходных данных с волнами разрежения, скачками разной интенсивности и разрывами, требует от используемых численных методов не только высокой точности, но также низкой диссипации и дисперсии.

В настоящей работе рассматриваемое нелинейное уравнение переноса решалось с помощью численных схем сквозного счета CABARET и WENO. Также для оценки влияния выбора численной схемы на точность конечного численного решения применялась явная схема Годунова. Сравнение точности применяемых схем и определение основных особенностей полученных численных решений проводились на ряде тестовых примеров с распространением плоских волн различной сложности. Решение данными схемами тестового примера для уравнения Хопфа, подобного рассматриваемому в работе уравнению переноса, позволило верифицировать численные результаты расчетов. Программная реализация проводилась на языке программирования Python.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для одномерного квазилинейного уравнения переноса в следующей постановке:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + C \frac{\partial p^2}{\partial t'} = 0, \quad p(t', 0) = p_0(t'), \quad (1)$$

где $p(t', x)$ — акустическое давление (переносимая величина), x — криволинейная координата вдоль траектории распространения волны (пространственная переменная распространения), $t' = t - \int_0^x \frac{1}{c_0} dx$ — временная переменная длительности сигнала, коэффициент C определяет скорость переноса $2Cp$, $p_0(t')$ — начальный профиль распределения давления. В дальнейшем в работе для простоты будем t' обозначать t .

В работе рассматривалось уравнение с коэффициентом C , принимающим постоянное значение $1/2$ (уравнение Хопфа), так и с C , определяемым параметрами среды

$$C = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3}, \quad (2)$$

где коэффициент нелинейности β определяется через показатель адиабаты γ , как $\beta = (\gamma + 1)/2$, ρ_0 — плотность окружающей среды, и c_0 — скорость звука на высоте распространения.

В настоящей работе задача Коши (1) для уравнения переноса решалась с применением численных схем CABARET, WENO и Годунова. Сравнение точности расчетов по данным схемам проводилось на ряде тестовых примеров с распространением плоских волн при двух отличающихся скоростях переноса C .

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

В работе для численного решения уравнения (1) с начальными данными (2) применялись три численные схемы: CABARET, WENO и Годунова.

Схема CABARET (см. [14], [15]) имеет второй порядок точности по времени и по пространству и характеризуется использованием дробных узлов сетки, помимо основных. Для нивелирования нефизических осцилляций проводится нелинейная коррекция потоковых членов на основе принципа максимума. В этой схеме используются потоковые и консервативные переменные, заданные соответственно в полуцелых и целых пространственных узлах разностной сетки. Именно в консервативных переменных обеспечивается выполнение законов сохранения. В качестве начальных данных консервативных переменных использовались дискретные значения сеточных начальных функций. Учитывая разрывность начальных данных, начальные потоковые переменные в полуцелых узлах согласовывались с консервативными с применением оператора Римана (см. [15]). Данный оператор представляет собой решение задачи о распаде разрыва в текущем узле.

Конечно-объемная схема WENO (Weighted essentially non-oscillatory scheme) (см. [16]) — схема пятого порядка точности по пространству и третьего по времени на гладких решениях. Данная схема основывается на

применении линейной комбинации реконструкций по трем различным шаблонам искомой функции для обеих сторон грани ячейки и интегрирования по времени по схеме Рунге—Кутты. Значения потоковых переменных вычисляются из решения задачи о распаде разрыва.

Схема Годунова — консервативная схема первого порядка точности, также использующая для вычисления потоковых переменных решение задачи о распаде разрыва, но с состояниями, соответствующими значениям искомой функции в соседних ячейках сетки. Данная схема является широко распространенной численной схемой решения уравнений гиперболического типа, характеризующаяся высокой схематической вязкостью. В настоящей работе она была реализована для оценки точности схем CABARET и WENO при решении тестовых примеров.

Аппроксимируем задачу (1) схемами CABARET, WENO и Годунова, заданными на прямоугольной равномерной разностной сетке:

$$\{t_j, x_n\} : t_j = j\Delta\tau, \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad x_0 = 0, \quad (3)$$

в котором $\Delta\tau$ — постоянный шаг сетки по времени, а Δx_n — шаг сетки по пространству, определяемый из условия устойчивости

$$\Delta x_n = \frac{z\Delta\tau}{\max_j |a_{j+1/2}^n|},$$

где $z \in (0, 1)$ — коэффициент запаса, $a_{j+1/2}^n = 2Cp_{j+1/2}$, а значения $p_{j+1/2}$ заданы в полуцелых временных узлах разностной сетки $t_{j+1/2} = t_j + \Delta\tau/2$. Данное условие устойчивости можно считать аналогом условия устойчивости Куранта (см. [17]) для рассматриваемого уравнения переноса, тогда коэффициент запаса z соответствует числу Куранта. Далее в работе для простоты вместо коэффициента запаса z будет часто применяться понятие числа Куранта и обозначение CFL. Далее в работе будет показано, что число Куранта является важным параметром, оказывающим влияние на точность расчетов для схем CABARET и Годунова.

3. РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

3.1. Решение задачи Коши для уравнения переноса (1) с постоянным коэффициентом $C = 1/2$

В качестве тестового примера рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа (нелинейного уравнения переноса с фиксированным коэффициентом скорости переноса $= 1/2$) следующего вида:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial t} = 0, \quad p(t, 0) = p_0(t), \quad (4)$$

На фиг. 1а приведены точное решение и результаты численного решения (4) с кусочно-постоянными начальными данными, представляющими собой прямоугольное возмущение “ступенька”:

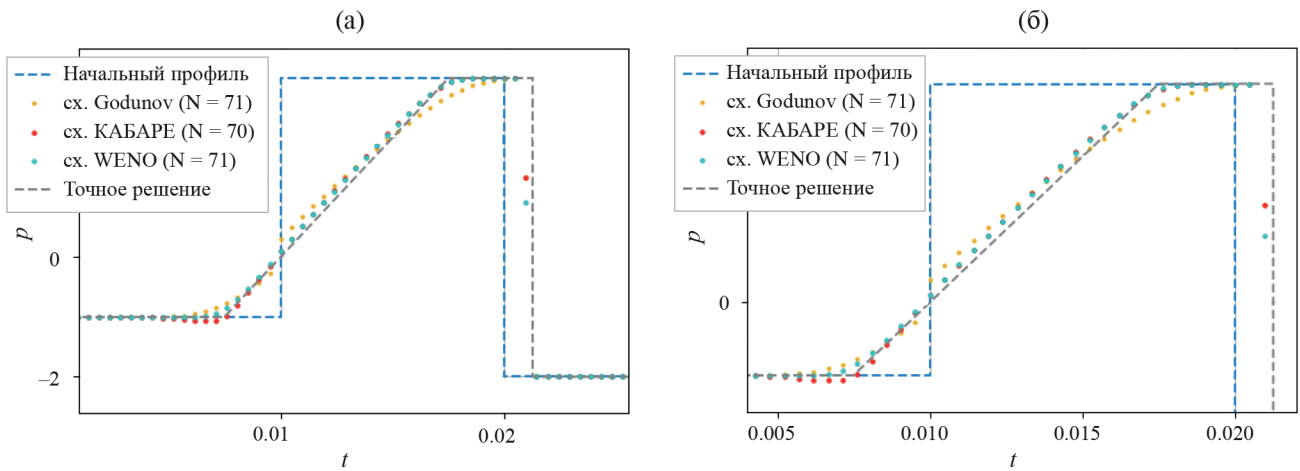
$$p_0(t) = \begin{cases} -1, & t < 0.01, \\ 3, & 0.01 \leq t \leq 0.02, \\ -2, & t > 0.02. \end{cases} \quad (5)$$

Также на фиг. 2 приведены результаты численного решения задачи с гладкими синусоидальными начальными данными:

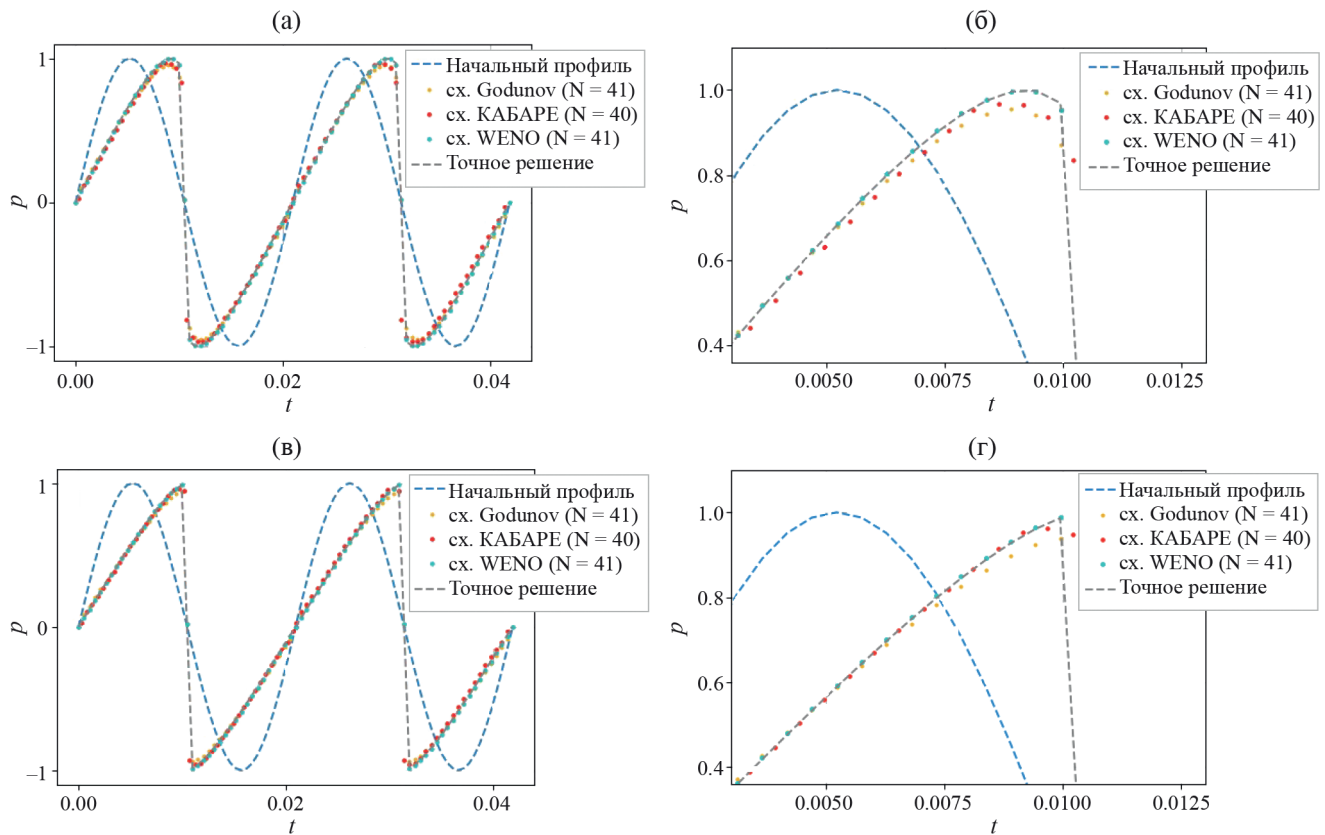
$$p_0(t) = \sin(t). \quad (6)$$

Начальные данные и точные решения этих задач показаны пунктирными линиями, а точками — численные результаты, полученные с применением схем CABARET, WENO и Годунова. Точное решение находилось из аналитического решения для данного уравнения, а расположение и амплитуда скачков профиля решения из условия Ренкина—Югонио (см. [18]). Расчеты проводились на прямоугольной разностной сетке (3) с размерностью в 70 узлов и с временным шагом $\Delta\tau = 0.0004$ (фиг. 1), а также на сетке в 80 узлов с временным шагом $\Delta\tau = 0.0005$ (фиг. 2) при коэффициенте запаса $z = 0.5$ в условии устойчивости.

Результаты вычислений на фиг. 1 и 2 демонстрируют хорошее согласование с точным решением задачи Коши. Данные схемы сохраняют высокую точность при локализации сильных и слабых разрывов и воспроизводят волны разрежения. Численные решения отличаются монотонностью, не генерируются нефизические осцилляции в областях разрывов профиля решения.



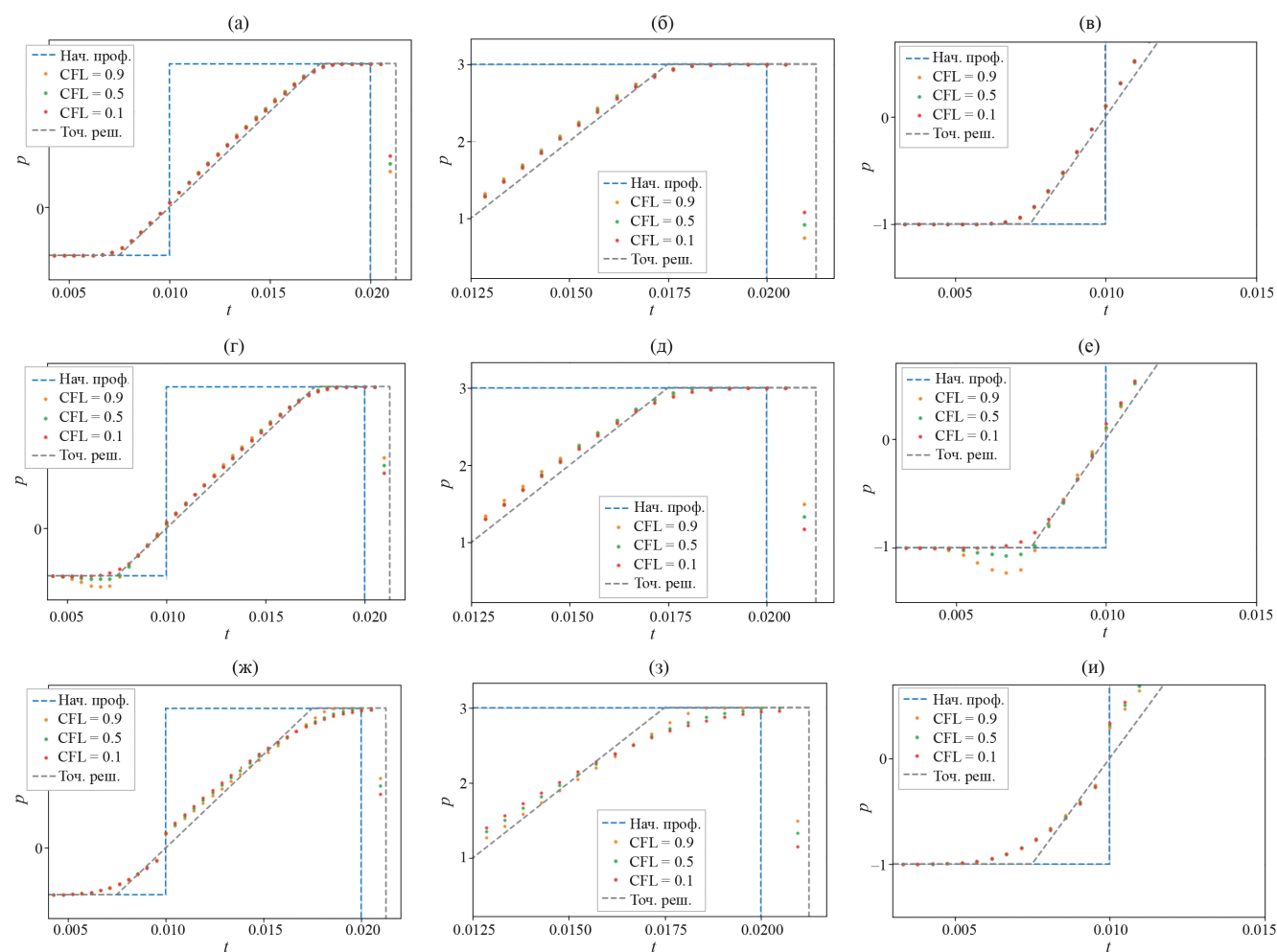
Фиг. 1. Сравнение точного и численных решений задачи Коши (4), (5) при распространении на $x = 225$ м (а), область ударных волн профиля решения (б).



Фиг. 2. Сравнение аналитического и численных решений задачи Коши (4), (6) при распространении на $x = 360$ м (а), (б) — область головной ударной волны профиля решения, (в) — сравнение решений при распространении на $x = 480$ м, (г) — область головной ударной волны профиля решения.

На масштабированных фиг. 1б и 1г видно, что результаты WENO схемы относительно результатов схем САВАРЕТ и Годунова характеризуются большей крутизной фронта, большей интенсивностью скачков и большим совпадением с точным решением. В областях с ударными волнами схема САВАРЕТ сглаживает неоднородности решения сильнее, чем WENO, а схема Годунова — еще сильнее. Это соответствует упомянутому ранее свойству схемы Годунова. Также наблюдается разрыв численного решения схемы Годунова в области волны разрежения.

На фиг. 3 представлены численные результаты распространения профиля (5) “ступеньки” на расстояние 225 м при числе Куранта, принимающего значения 0.1, 0.5 и 0.9. Представлены численные решения в общем



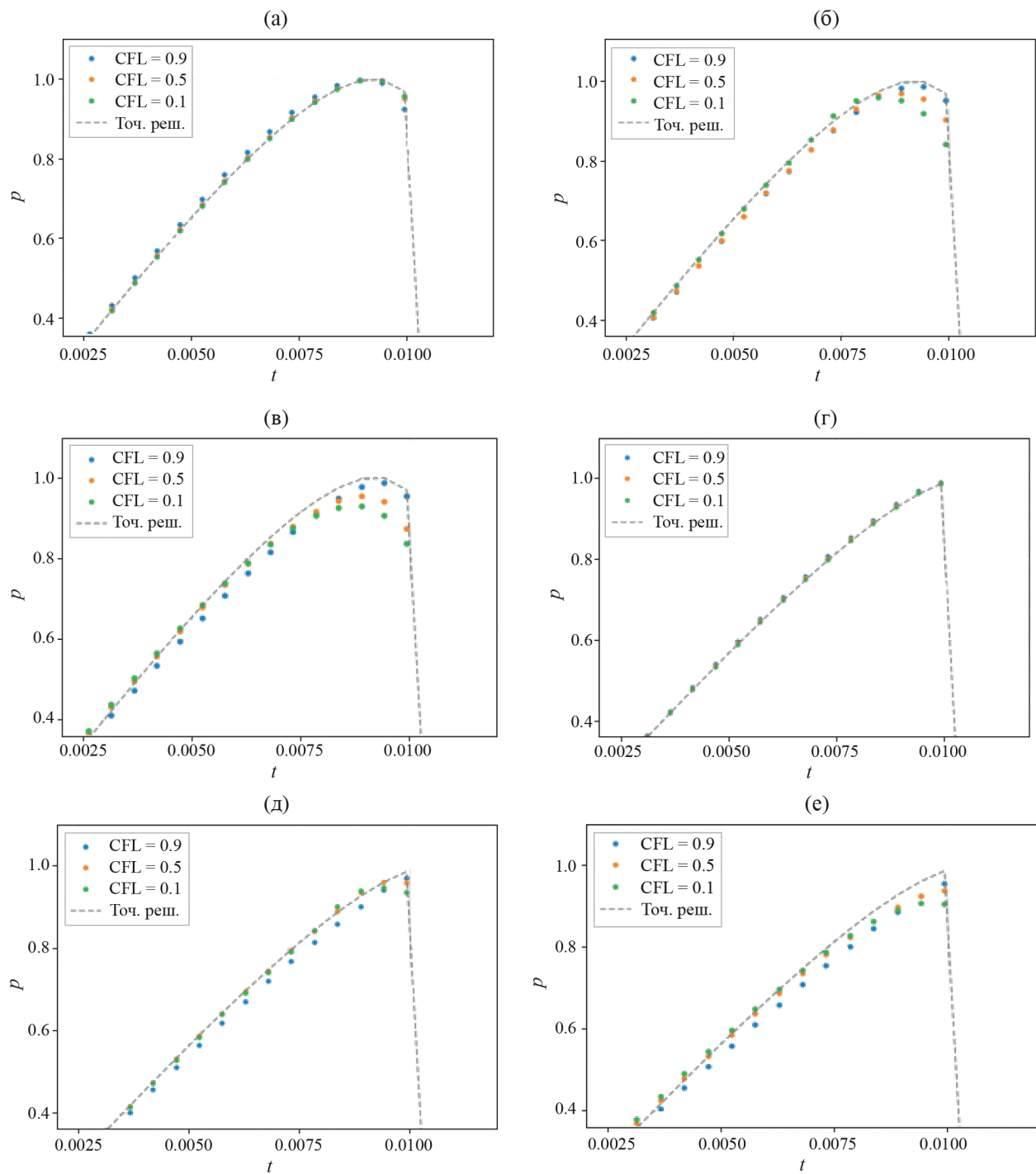
Фиг. 3. Влияние числа Куранта на вид численного решения задачи Коши (4), (5), полученного по схемам WENO (а)–(в), SABARET (г)–(е) и Годунова (ж)–(и).

виде, а также области решений с разрывами более детально. Численные решения на фиг. 3 представлены точками, а точное решение — пунктирной линией. Для схемы WENO изменение числа Куранта не приводит к значительным изменениям профиля решения. Число Куранта для схем Годунова и SABARET оказывает большее влияние на точность решения. При числах Куранта 0.1 и 0.5 численные результаты WENO и SABARET показывают более точное разрешение слабых разрывов решения и волны разрежения. Как и следует из свойств схемы SABARET, при приближении числа Куранта к 0.5 точность численного решения растет. Для числа Куранта 0.9 схема Годунова показывает более точное разрешение разрывов и скачков решения.

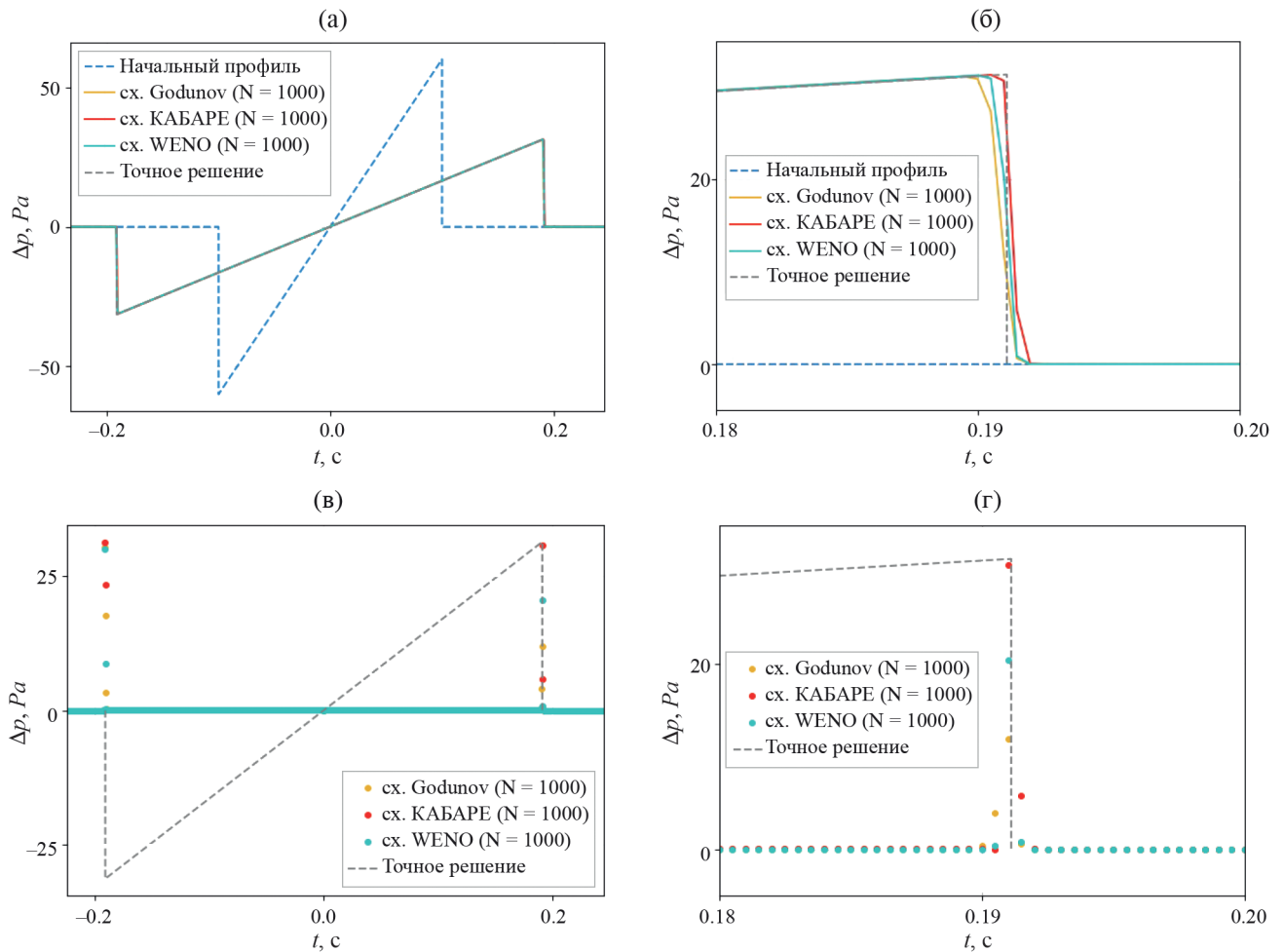
На фиг. 4 представлены области численных решений со скачками, полученные для случая распространении начального синусоидального профиля (6) на расстояние $x = 360$ м (фиг. 4а–в) и 480 м (фиг. 4г–е) при числах Куранта 0.1, 0.5 и 0.9. Численные решения на фиг. 4 представлены точками, а точное решение — пунктирной линией. Также, как и для результатов пересчета “ступеньки” (фиг. 3), для схем Годунова и SABARET наблюдается большее влияние числа Куранта на точность решения по сравнению со схемой WENO. Для двух рассмотренных случаев при числе Куранта 0.5 численные решения WENO и SABARET лучше разрешают слабые разрывы решения и волны разрежения.

3.2. Решение задачи Коши для уравнения переноса (1) с коэффициентом C , определяемым параметрами среды

Для второго тестового примера рассмотрим задачу о нелинейном распространении волны возмущенного давления в однородной атмосфере. В качестве начального профиля возмущенного давления p_0 брались волны с сигнатурой N-образной формы и с сигнатурой более сложной формы с ударными волнами и волнами разрежения.



Фиг. 4. Область головной ударной волны профиля численного решения задачи Коши (4), (6) при распространении на $x = 360$ м, полученного по схемам WENO (а), САВАРЕТ (б) и Годунова (в) при различных числах Куранта и при распространении на $x = 480$ м (г)–(е) аналогично.



Фиг. 5. Сравнение аналитического и численных решений задачи о распространении с высоты 15 000 м до 264 м начального профиля (8) с шагом $\Delta\tau = 0.0005$ (а), (б) — область головной ударной волны профиля решения, (в) — абсолютная погрешность численных решений, (г) — абсолютная погрешность численных решений в области головной ударной волны.

Рассмотрим численное решение задачи Коши для уравнения переноса (1):

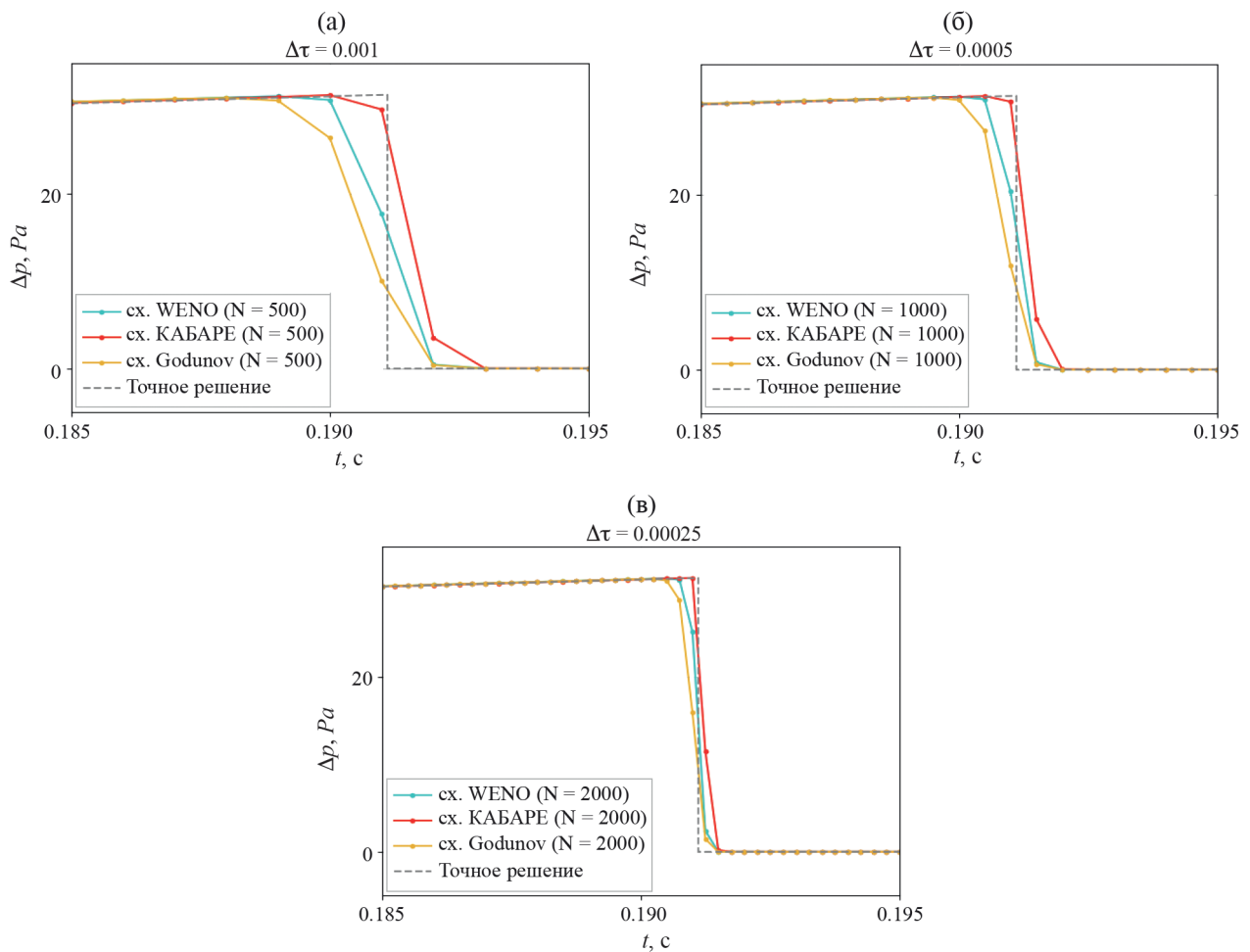
$$\frac{\partial p}{\partial x} + C \frac{\partial p^2}{\partial t} = 0, \quad p(t, 0) = p_0(t), \quad (7)$$

где коэффициент скорости распространения C определяется плотностью окружающей среды ρ_0 и скоростью звука c_0 из соотношения (2). Данные параметры среды принимают значения $\rho_0 = 0.1515 \text{ кг/м}^3$ и $c_0 = 297.8 \text{ м/с}$ на начальной высоте распространения 15 000 м из данных о стандартной атмосфере США (1976 г.) (см. [19]). При таких значениях параметров среды коэффициент C принимает значение $C = 1.5 \times 10^{-7}$. Распространение сигнала происходит с начальной высоты 15 000 м и до высоты в 264 м в перпендикулярном направлении к поверхности земли. Длина траектории распространения начального профиля волны составляет 14 736 м.

3.2.1. Распространение N-волны. Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса (1), полагая в качестве профиля начальных данных N-волну. N-волна — это простая, но реалистичная модель волны звукового удара. Ее большим преимуществом является возможность нахождения аналитического решения задачи Коши из условия Ренкина-Гюгоньо для локализации скачков решения.

На фиг. 5а приведены аналитическое и численные решения уравнения переноса (7) с начальным профилем N-волны следующего вида:

$$p_0(t) = \begin{cases} \hat{p}_0 \frac{t}{t_0}, & -t_0 < t < t_0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

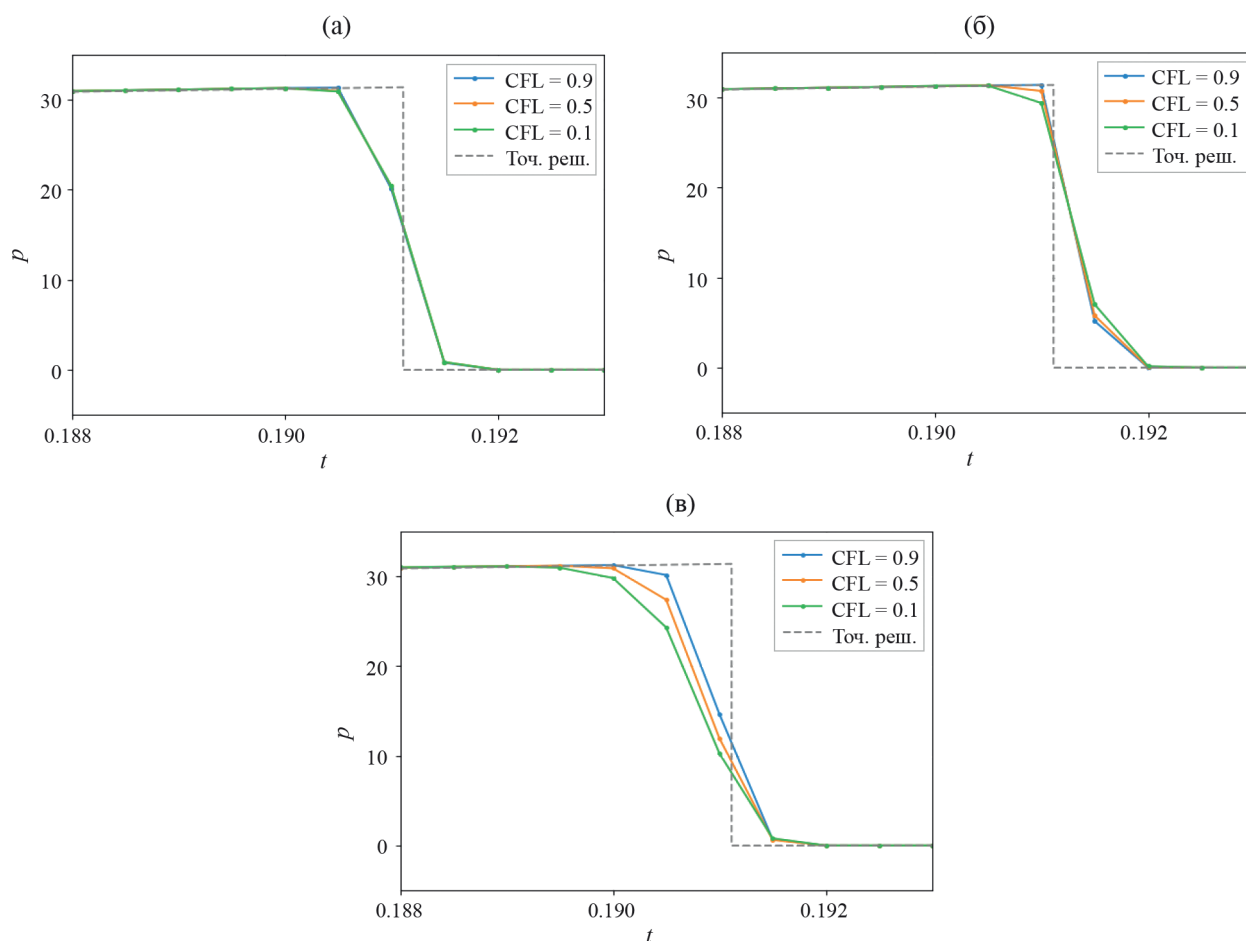


Фиг. 6. Область головной ударной волны аналитического и численного решений при распространении начального профиля (8) с высоты 15 000 м до 264 м при шаге $\Delta\tau = 0.001$ (а), $\Delta\tau = 0.0005$ (б) и $\Delta\tau = 0.00025$ (в).

Начальный профиль N-волны с $t_0 = 0.1$ с и аналитическое решение задачи о распространении начального профиля показаны пунктирной линией, а сплошными линиями — численные результаты, полученные с помощью схем CABARET, WENO и Годунова. Расчеты проводились на разностной сетке (3) из 1000 узлов с временным шагом $\Delta\tau = 0.0005$ и при коэффициенте запаса $z = 0.5$ в условии устойчивости. В ходе распространения вдоль траектории начального профиля N-волны его протяженность увеличивается, а интенсивность скачков уменьшается.

На фиг. 5а наблюдается хорошее согласование результатов вычислений с аналитическим решением задачи Коши (7), (8). Численные схемы показывают хорошую точность локализации ударных волн и сохраняют монотонность численного решения. Абсолютные погрешности численных результатов представлены на фиг. 5в,г точками. Значения погрешностей для всех схем малы и близки к нулю на гладких участках решения. В областях разрыва погрешности принимают большие значения и отличаются для различных схем.

На фиг. 6 представлены аналитические и численные решения задачи Коши (7), (8) при сильном приближении к области с головной ударной волной. Аналитическое решение задачи показано пунктирной линией, а сплошными линиями с точками — численные результаты, полученные с помощью схем CABARET, WENO и Годунова. Сравнивается точность разрешения разрыва численными схемами при расчете с различным шагом дискретизации $\Delta\tau = 0.001$, $\Delta\tau = 0.0005$ и $\Delta\tau = 0.00025$ (сетки из 500, 1000 и 2000 узлов соответственно) при коэффициенте запаса $z = 0.5$ в условии устойчивости. Наблюдается слабое разрешение ударных волн схемой Годунова по сравнению со схемой WENO и CABARET, как и в ранее рассмотренных случаях. Для задач, связанных с распространением волн малой амплитуды на дальние расстояния, данная потеря в точности и размазывание скачка на большее количество узлов сетки может значительно повлиять на достоверность предсказания конечного результата распространения волны. Численные результаты, полученные с помощью схем CABARET и



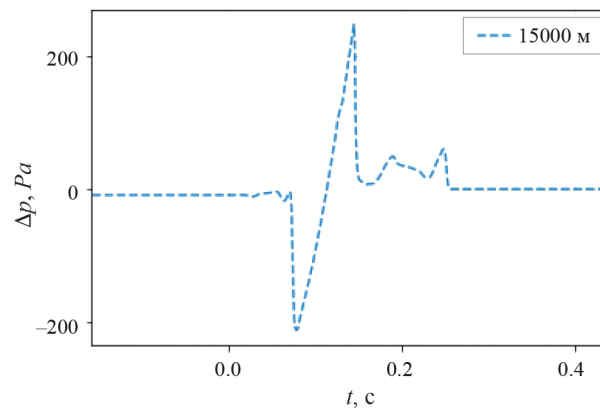
Фиг. 7. Область головной ударной волны численного решения задачи Коши (7), (8), полученного по схемам WENO (а), CABARET (б) и Годунова (в) при различных числах Куранта.

WENO, показывают незначительные различия. Точность разрешения разрыва и время нарастания скачка имеют достаточную степень соответствия. Результаты схемы CABARET по сравнению с результатами схемы WENO имеют большую крутизну фронта на скачках решения и большую их интенсивность.

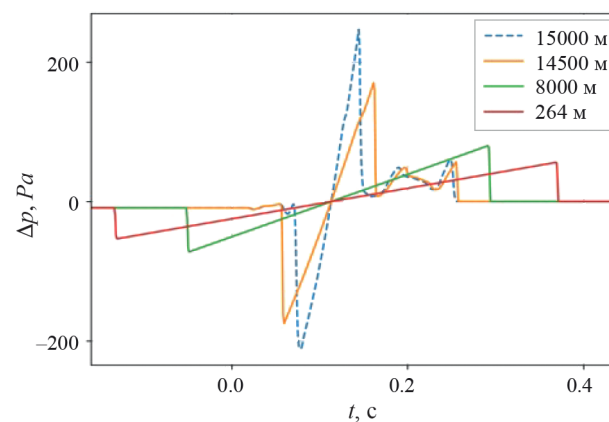
На фиг. 7 представлены численные результаты пересчета (головная ударная волна) при распространении начального профиля (8) N-волны с высоты 15 000 м до 264 м с шагом сетки $\Delta\tau = 0.0005$ и при числах Куранта 0.1, 0.5 и 0.9. Численные решения на фиг. 7 представлены точками, а точное решение — пунктирной линией. Также, как и для результатов пересчета в первом тестовом примере, наблюдается большее влияние числа Куранта на точность решения схемами Годунова и CABARET по сравнению со схемой WENO. Численные решения, полученные по схеме CABARET при числах Куранта 0.5 и 0.9, показывают более хорошее согласование с точным решением и более крутой фронт разрыва решения. Как и ранее наблюдалось в результатах первого тестового примера, для числа Куранта 0.9 схема Годунова показывает более точное разрешение разрывов и скачков решения.

3.2.2. Распространение профиля сложной структуры Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса (7), полагая в качестве профиля начальных данных профиль сложной структуры с ударными волнами и волнами разрежения (фиг. 8). Данный профиль соответствует значениям возмущенного давления, зафиксированного в ближней зоне возмущенного течения у модели самолета при ее обтекании набегающим сверхзвуковым потоком воздуха с числом Маха $M = 2$. Модель представляет собой компоновку “корпус-крыло” сверхзвукового пассажирского самолета с массой $G = 70$ т и длиной $L = 40$ м.

На фиг. 9 представлены результаты пересчета профиля избыточного давления на различное удаление от начальной высоты. Данные результаты были получены решением задачи Коши (7) с помощью схемы WENO. Расчеты проводились на разностной сетке (3) в 677 узлов с временным шагом $\Delta\tau = 0.001$ и при коэффициенте



Фиг. 8. Начальный профиль избыточного давления.

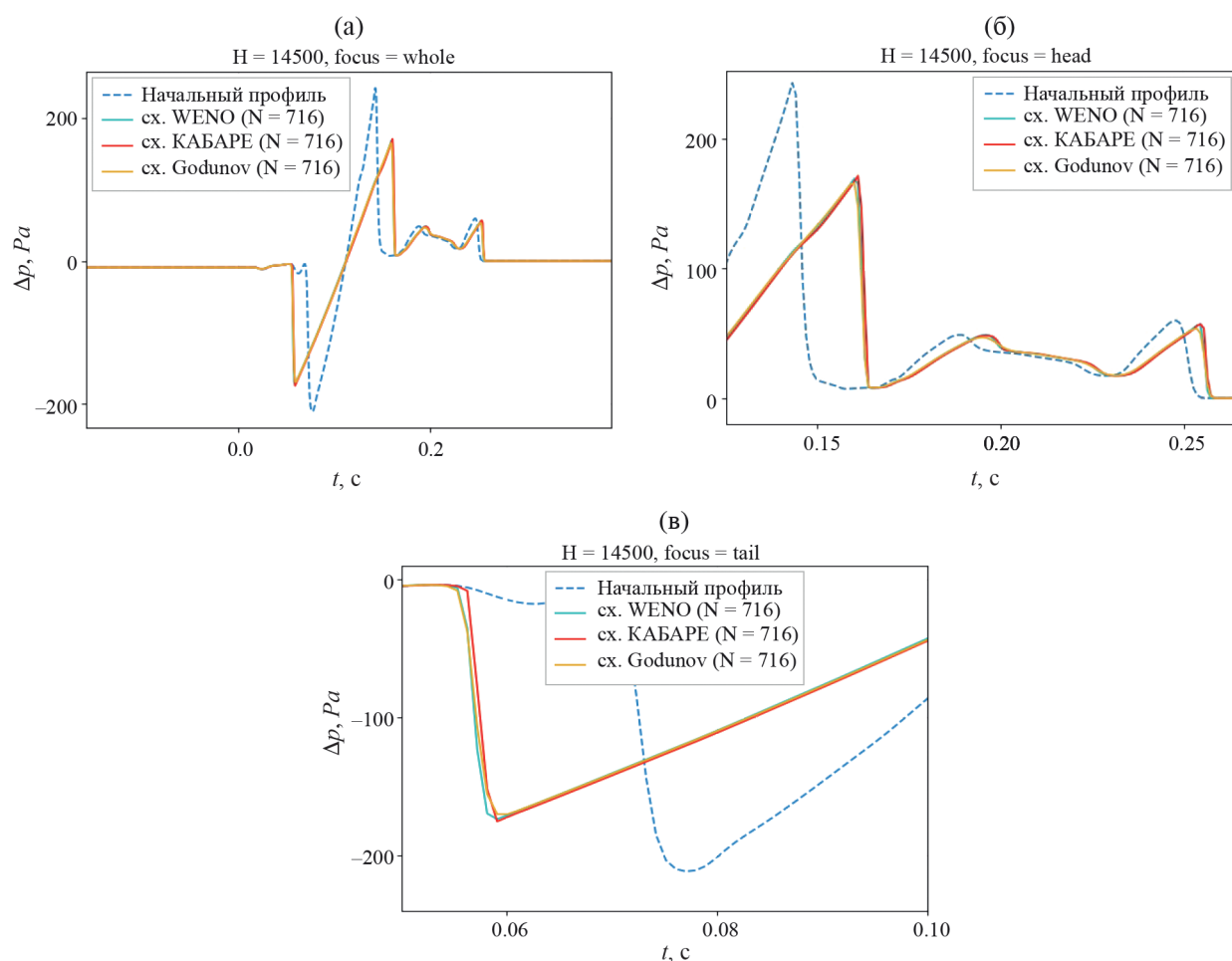


Фиг. 9. Трансформация профиля сложной структуры при его распространении с начальной высоты 15 000 м до 264 м.

запаса $z = 0.5$ в условии устойчивости. Под действием нелинейных эффектов при распространении профиля возмущенного давления скачки большей интенсивности движутся с большей скоростью относительно скачков меньшей интенсивности. В результате “догоняет” его и, не достигая высоты 8000 метров, профиль избыточного давления трансформируется в N-волну, которая далее растягивается в стороны с потерей интенсивности скачков.

На фиг. 10–12 представлены результаты расчета распространения начального профиля с высоты 15 000 м до высоты 14 500 м, 8000 м и 264 м соответственно. Начальный профиль показан пунктирной линией, сплошными линиями — численные результаты решения схемами WENO, CABARET и Годунова рассматриваемой задачи Коши (7). Результаты вычислений по схемам WENO и CABARET демонстрируют хорошее согласование друг с другом. В случае рассматриваемого начального профиля более сложной структуры также сохраняется монотонность численных решений. В результатах схемы Годунова для рассматриваемых случаев наблюдается более сглаженное разрешение разрывов и меньшая интенсивность скачков по сравнению с результатами схем WENO и CABARET. Результаты CABARET и WENO слабо отличаются друг от друга. Результаты схемы CABARET по сравнению с результатами схемы WENO, как и в ранее рассмотренном примере, имеют большую крутизну фронта на скачках решения и большую их интенсивность: на фиг. 12б, фиксирующем головной скачок, результат CABARET ушел вперед относительно результатов WENO.

Вычислительное время для решения рассматриваемого тестового примера по схеме WENO заняло 23.89 с, 0.55 с — по схеме CABARET и 0.85 с — по схеме Годунова. Использовался ноутбук HP Pavilion 13 with Core-i5-8265U. Расчет по схеме CABARET занимает значительно меньшее время по сравнению с временем расчета по схеме WENO. Данное соотношение между расчетными временами наблюдается и для других рассмотренных в работе тестовых примеров. Для данного тестового примера расчетное время WENO превышает расчетное время CABARET более, чем в 43 раза. Учитывая близкие по точности численные результаты схем WENO и CABARET



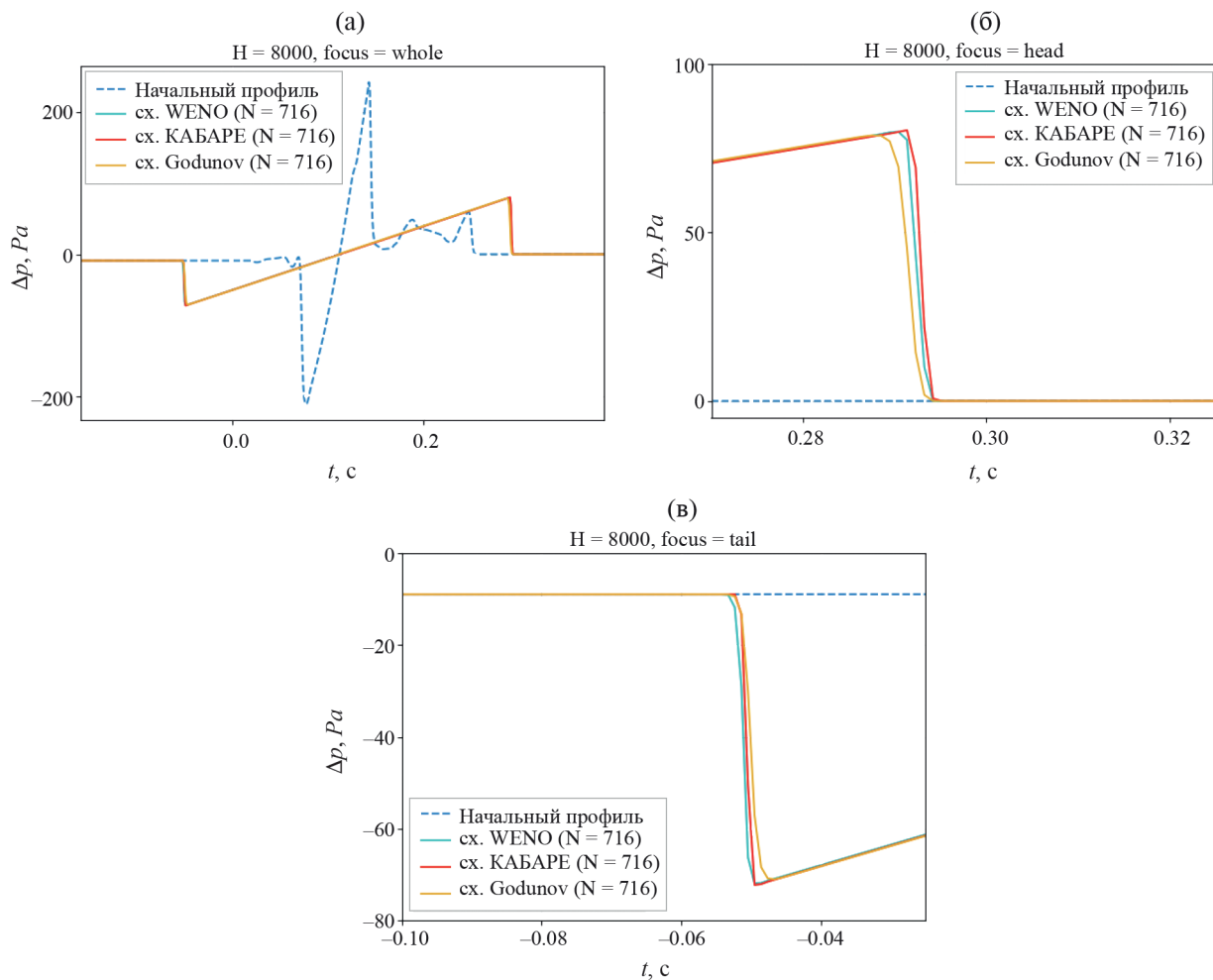
Фиг. 10. Сравнение численных решений задачи Коши (7) при распространении начального профиля сложной структуры с высоты 15 000 м до 14 500 м (а), (б) и (в) — области численных решений с головными скачками и хвостовым скачком соответственно.

для тестовых примеров, рассмотренных в п. 3.2.1 и 3.2.2, схема CABARET — более оптимальный выбор численной схемы по сравнению со схемой WENO для решения задачи распространения волны возмущенного давления на дальние расстояния в атмосфере. Однако нужно отметить необходимость предварительной подготовки согласованных наборов начальных данных для консервативных и потоковых переменных схемы CABARET.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривались численные схемы сквозного счета CABARET и WENO для решения нелинейного уравнения переноса, моделирующего перенос в пространстве волны возмущенного давления со скоростью распространения, определяемой параметрами среды и интенсивностью самих возмущений. Также для оценки влияния выбора численной схемы для рассматриваемой задачи применялась явная схема Годунова. Таким образом, задача Коши для рассматриваемого уравнения переноса решалась с применением трех численных схем: WENO, CABARET и Годунова.

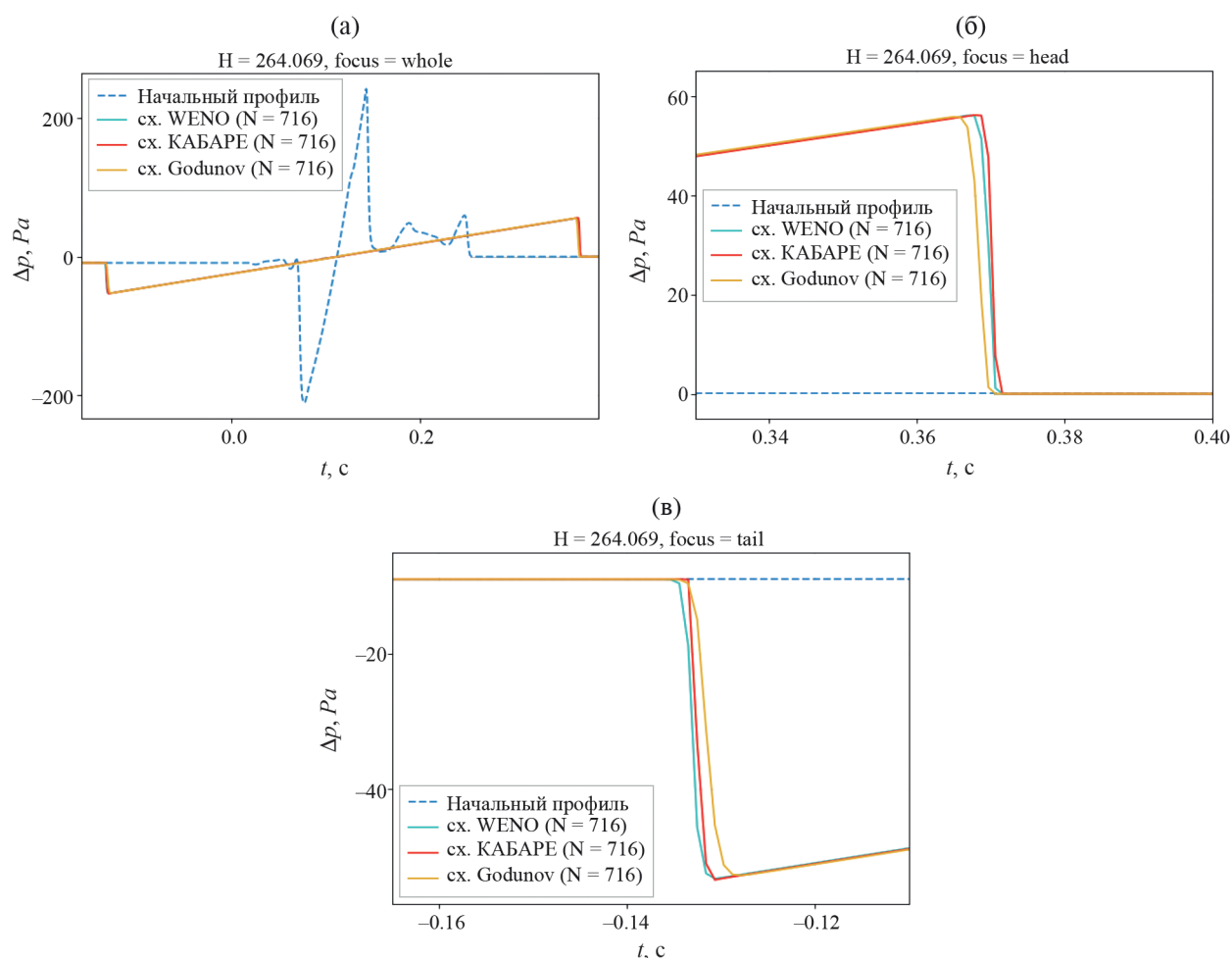
Решались тестовые примеры с распространением плоских волн различной сложности. Тестовый пример с фиксированным коэффициентом скорости распространения (уравнение Хопфа) позволяет верифицировать результаты расчетов реализованных численных схем. По результатам тестовых примеров для распространения начального профиля с фиксированным и нефиксированным коэффициентами скорости отмечалась потеря интенсивности скачков и значительное их сглаживание схемой Годунова. Схемы WENO и CABARET показали более точные результаты, сохранение монотонности решений и достоверность разрешения разрывов. В случае распространения начального профиля с фиксированным коэффициентом скорости схема WENO по срав-



Фиг. 11. Сравнение численных решений задачи Коши (7) при распространении начального профиля сложной структуры с высоты 15 000 м до 8000 м (а), (б) и (в) — области численных решений с головным и хвостовым скачками соответственно.

нению со схемой CABARET показывает более точные результаты и меньшее размазывание скачков. В случае распространения начального профиля с фиксированным коэффициентом скорости, схема WENO демонстрирует более высокую точность результатов и меньшее размазывание скачков по сравнению со схемой CABARET. Однако для задачи решения в протяженной области моделирования нелинейного уравнения переноса с коэффициентом скорости, зависящим от параметров среды, численные результаты, полученные с использованием схем CABARET и WENO, демонстрируют незначительные различия, что вполне ожидаемо, поскольку обе эти схемы относятся к методам с нелинейной коррекцией переменных потока. По сравнению с результатами схемы WENO результаты схемы CABARET характеризуются более крутым фронтом разрывов решения и более высокой их интенсивностью. Расчетное время численного метода со схемой CABARET значительно меньше, чем у метода со схемой WENO. Схема CABARET более предпочтительна для решения задачи распространения волны возмущенного давления на дальние расстояния в атмосфере.

Рассматриваемое в работе уравнение переноса описывает нелинейное распространение в стационарной атмосфере волн малой амплитуды и применяется в моделях распространения волн звукового удара, генерируемых при полете сверхзвукового пассажирского самолета в атмосфере. Поиск более точных и эффективных методов решения рассматриваемого в работе уравнения переноса необходим для разработки более достоверных методов прогнозирования звукового удара. Что позволяет более эффективно решать задачу минимизации звукового удара и многопараметрической задачи разработки компоновки “тихого” сверхзвукового пассажирского самолета нового поколения.



Фиг. 12. Сравнение численных решений задачи Коши (7) при распространении начального профиля сложной структуры с высоты 15 000 м до 264 м (а), (б) и (в) — области численных решений с головным и хвостовым скачками соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернышев С.Л. Звуковой удар. М.: Наука, 2011.
2. Cleveland R.O. Propagation of sonic booms through a real, stratified atmosphere : PhD thesis. Univer. Texas at Austin, 1995.
3. Blackstock D.T. Nonlinear acoustics (theoretical) // Am. Inst. Phys. Handbook. 1972. V. 3.
4. Rallabhandi S.K. Advanced sonic boom prediction using the augmented Burgers equation // J. Aircraft. 2011. V. 48. № 4. P. 1245–1253.
5. Qiao J.L. et al. Development of sonic boom prediction code for supersonic transports Based on augmented Burgers equation // AIAA Aviation 2019 Forum. 2019. P. 3571.
6. Kanamori M. et al. Comparison of simulated sonic boom in stratified atmosphere with flight test measurements // AIAA J. 2018. V. 56. № 7. P. 2743–2755.
7. Lonzaga J.B. Recent Enhancements to NASA PCBoom Sonic Boom Propagation Code // AIAA Aviation 2019 Forum. 2019. P. 3386.
8. Pilon A.R. Spectrally accurate prediction of sonic boom signals // AIAA J. 2007. V. 45. № 9. P. 2149–2156.
9. Jianling Q. et al. Far-field sonic boom prediction considering atmospheric turbulence effects: An improved approach // Chin. J. Aeronaut. 2022. V. 35. № 9. P. 208–225.

10. *Thomas C.L.* Extrapolation of wind-tunnel sonic boom signatures without use of a Whitham F-function // NASA SP-255. 1970. P. 205–217.
11. *Холодов А.С.* Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа // Энциклопедия низкотемпературной плазмы (сер. Б). 2008. Т. 1. Ч. 2. С. 141–174.
12. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.
13. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики: Учеб. пособие по прикл. математике. Науч. мир, 2003.
14. *Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы CABARET, аппроксимирующей скалярный закон сохранения со знакопеременным характеристическим полем и выпуклой функцией потоков // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 5. С. 76–98.
15. *Головизнин В.М. и др.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
16. *Jiang G.S., Shu C.W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. № 1. P. 202–228.
17. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* On the partial difference equations of mathematical physics // IBM J. Res. and Development. 1967. V. 11. № 2. P. 215–234.
18. *Pierce A.D., Acoustics A.* Introduction to its physical principles and applications // Acoustic. Soc. Am. and Am. Inst. Phys. 1981. P. 122.
19. United States Committee on Extension to the Standard Atmosphere et al. US standard atmosphere. — National Oceanic and Atmospheric Administration, National Aeronautics and Space Administration, US Air Force, 1962.

APPLICATION OF CABARET AND WENO SCHEMES FOR SOLVING THE NONLINEAR TRANSPORT EQUATION IN THE MODELING OF SOUND WAVE PROPAGATION IN THE ATMOSPHERE

P. A. Mishchenko^{a,*}, T. A. Himon^a, V. A. Kolotilov^{a,b}, A. N. Kudryavtseva^a

^a *Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Institutskaya st., 4/1, Novosibirsk, 1630090, Russia*

^b *M. A. Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Akademik Lavrentiev Ave., 15, Novosibirsk, 630090, Russia*

**e-mail: mischenko.polina.16@gmail.com*

Received 21 September, 2023

Revised 20 December, 2023

Accepted 06 February, 2024

Abstract. The most convenient model for describing the phenomenon of shock wave propagation in the atmosphere is the extended Burgers equation. This work investigates the influence of the numerical scheme on the results of solving the equation, which accounts for the nonlinear nature of shock wave propagation in the atmosphere. This equation is a key component of the extended Burgers equation and defines the transformation of the perturbed pressure profile during its propagation. Two numerical schemes were applied for the solution: CABARET and WENO, which are quasi-monotonic finite difference schemes that allow for solutions without significant numerical oscillations. An analysis of the applicability of these schemes for solving the considered problem was conducted.

Keywords: shock wave, nonlinear transport equation, small amplitude wave propagation, CABARET scheme, WENO scheme.