ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 5, с. 867–880

УДК 519.6

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПО ВНЕШНЕМУ ПОЛЮ ИСТОЧНИКОВ И СПЕКТРА ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА[1)]

© 2024 г. И. Э. Степанова[1,*], Д. В. Лукьяненко[2], И. И. Колотов[2], А. В. Шепетилов[2], А. Г. Ягола[2], И. А. Керимов[1], А. Н. Левашов[2]

[1] 123242 Москва, ул. Б.Грузинская, 10, ГБУ Ин-т физики Земли РАН, Россия
[2] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия
**e-mail: tet@ifz.ru*

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.
Переработанный вариант 28.06.2023 г.
Принята к публикации 14.01.2024 г.

В статье исследуется возможность одновременного восстановления эквивалентных по внешнему полю источников и спектральных характеристик полезного сигнала. Приводятся примеры вариационных постановок для различных версий метода линейных интегральных представлений, а также формулируется задача о нахождении плотности распределения гравитирующих или магнитных масс на нескольких горизонтальных плоскостях и преобразования Фурье элемента аномального поля по известным в точках некоторой сети наблюдений значениям сигнала, осложненного помехой. Библ.17.

Ключевые слова: системы линейных алгебраических уравнений, интегральные представления, формула суммирования Пуассона.

DOI: 10.31857/S0044466924050147, **EDN**: YCQUUV

ВВЕДЕНИЕ

В рамках аппроксимационного подхода к решению обратных линейных и нелинейных задач геофизики, геодезии и геоморфологии [1, 2] практически все постановки по определению параметров геологической среды можно редуцировать к решению систем линейных (в некоторых случаях — и нелинейных) систем алгебраических уравнений. Как было отмечено в работе [3], основным методом, позволяющим реализовать такой подход, является метод интегральных представлений.

В статье исследуется возможность одновременного определения плотностей эквивалентных по внешнему гравитационному или магнитному полю источников и спектров полезных сигналов. Приводится описание методики нахождения численного решения обратной задачи по поиску распределений эквивалентных по внешнему полю носителей масс как в обычном (двумерном или трехмерном пространстве), так и в двойственном ему пространстве частот спектра полезного сигнала — некоторой компоненты гравитационного или магнитного поля.

Основы теории локальных и региональных S-аппроксимаций, а также локальных F- и R-аппроксимаций как примеров применения метода линейных интегральных представлений изложены в целой серии работ авторов [4–8].

В рамках трехмерного метода S-аппроксимаций известная компонента гравитационного поля аппроксимируется суммой простого и двойного слоев, распределенных на некоторой совокупности областей (в локальном случае ими являются горизонтальные плоскости, в региональном — сферы или сфероиды). Но, как уже подчеркивалось в работе [3], источники поля масс могут иметь любую форму (конечно, при условии, что выполнены требования гладкости для границы области, занятой массами) и любую размерность, меньшую или равную размерности рассматриваемого пространства. Плоскости в локальном варианте и сферы (или эллипсоиды вращения) — в региональном и глобальном) выбирались нами в качестве носителей масс исключительно

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-41-00002).

из-за простоты выражений для элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений, к которой редуцировалась обратная задача.

В методе F-аппроксимаций элементы аномальных потенциальных полей представляются интегралом Фурье, а R-аппроксимации получаются при так называемом лучевом преобразовании.

Методы F-, R- и S-аппроксимаций позволяют получить решение, с помощью которого можно эффективно строить линейные трансформанты поля, а также использовать их в качестве нулевого приближения для решения нелинейной обратной задачи по локализации источников. Для того чтобы изложить основные моменты новой методики одновременного определения распределений масс в различных пространствах, напомним читателю, как строятся R- F- и S-аппроксимации элементов потенциальных полей (а также функции, описывающей рельеф поверхности планеты) в трехмерном декартовом пространстве. Поскольку все три типа аппроксимаций связаны между собой [3], то возникает естественный вопрос: а нельзя ли по решению вариационной задачи для одного типа представлений определить другие важнейшие характеристики сигнала: например, по восстановленной плотности распределения эквивалентных по внешнему гравитационному или магнитному полю источников масс найти спектр элемента поля или интегральную плотность масс вдоль фиксированного направления (луча)? Оказывается, можно. И при этом еще раз решать системы линейных алгебраических уравнений не нужно: элементы матрицы системы для постановки одного типа аппроксимаций в точности совпадают с элементами матрицы для другой.

1. R-АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АНОМАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В [8] показано, что для функции $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{R}^n$ — пространство быстро убывающих на бесконечности непрерывно дифференцируемых функций (точнее говоря, для непрерывно дифференцируемых функций, имеющих порядок убывания $O\big(1+\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{-1}\big)$ — пространство Шварца — существует преобразование Радона:

$$\hat{f}(\omega, p) = \int\limits_{(\omega,x)=p} f(x)dm(x), \tag{1}$$

где ω — единичный вектор, $dm(x)$ — мера на прямой $(\omega, x) = p$.

В двумерном случае формула (1) принимает вид:

$$\hat{f}(\omega, p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-t\sin s + x_1\cos\varphi, t\cos s + x_2\sin\varphi)ds, \quad \omega = (\cos\omega, \sin\omega), \quad x = (x_1, x_2). \tag{2}$$

Запишем формулу обращения преобразования Радона

$$f(x) = \gamma L_x^{(n-1/2)}\left(\int\limits_{S^{n-1}} \hat{f}\big(\omega, (x,\omega)\big)d\omega\right),$$

где постоянная $\gamma = (2\pi i)^{1-n}/2$. Отметим, что функция $f_\omega(x) = \hat{f}\big(\omega,(x,\omega)\big)d\omega$ есть плоская волна в направлении ω, другими словами, она постоянна на каждой гиперплоскости, перпендикулярной ω. Здесь $L_n^{(n-1)/2}$ — оператор Лапласа порядка $(n-1)/2$. В случае нечетных n она принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n}(-i)^{n-1}\int\limits_{S^{n-1}}\left\{\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\hat{f}(\omega,p)\right\}_{p=(x,\omega)}d\omega.$$

Покажем, как связаны преобразование Радона и n-мерное преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(u) = \int\limits_{R^n} f(x)e^{-i(x,u)}dx, \quad u \in R^n. \tag{3}$$

Действительно, если $s \in R$ и ω — единичный вектор, то

$$\tilde{f}(s\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dr \int\limits_{(x,\omega)=r} f(x)e^{-is(x,\omega)}dm(x), \tag{4}$$

следовательно,

$$\tilde{f}(s\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, r) e^{-isr} dr. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что n-мерное преобразование Фурье есть композиция одномерного преобразования Фурье и преобразования Радона. Введем среднее функции f по сферам с центром в фиксированной точке :

$$F(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\omega|=1} f(x + r\omega) d\omega. \tag{6}$$

Пусть

$$\hat{F}(x, p) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\omega|=1} \Re f(\omega, p + \langle \omega, x \rangle) d\omega$$

среднее $\Re f$ по плоскостям, равноотстоящим от точки x, т.е. по плоскостям, касающимся сферы радиуса p с центром в точке x. Тогда

$$f(x) = F(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \hat{F}_p''(\omega, 0). \tag{7}$$

Аналогичным образом определяется среднее функции $\Re f$ по прямым, касающимся окружности с центром в точке $x = (x_1, x_2)$ радиуса p на плоскости:

$$\hat{F}(x, p) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Re f(\varphi, p + x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) d\varphi. \tag{8}$$

Теперь функцию f можно восстановить, пользуясь следующим представлением:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\hat{F}_p'(x, p)}{p} dp, \tag{9}$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения.

Напомним основную формулу теории гармонических функций для полупространства, ограниченного плоскостью $x_3 = 0$ (далее упоминаемой как плоскость “*П*”) [9]:

$$V(M) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}} + \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\xi_1, \xi_2) x_3 d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}\right]^3}, \tag{10}$$
$$M = (x_1, x_2, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Мы выбрали систему координат так, чтобы плоскость простого и двойного слоев задавалась уравнением $x_3 = 0$. Тогда производная по x_3 потенциала V, взятая с обратным знаком, будет иметь вид

$$-\frac{\partial V}{\partial x_3}(M) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\hat{\xi}) x_3 d\hat{\xi}}{\left[\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}\right]^3} + \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\hat{\xi}) \left(2x_3^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2\right)^2 d\hat{\xi}}{\left[\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}\right]^5}, \tag{11}$$
$$M = (x_1, x_2, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Функции ρ_1, ρ_2 неизвестны. Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек $M_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом в (11) в точке M_i через $Q_1^{(i)}$, а во втором слагаемом — через $Q_2^{(i)}$. Тогда получим

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial x_3} \equiv f_i = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_1(\hat{\xi}) Q_1^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_2(\hat{\xi}) Q_2^{(i)}(\hat{\xi})\right) d\hat{\xi}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{12}$$

Здесь необходимо отметить, что формулы (10)–(12) являются основными при построении S-аппроксимаций искомого элемента аномального потенциального поля в локальном варианте, когда сферичностью Земли или другой планеты можно пренебречь [1].

Применим к обеим частям равенства (12) преобразование Радона:

$$\hat{V}_{x_3}(\omega,p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\hat{\rho}_1(\omega,q)\cdot\hat{Q}_1^{(i)}(\omega,p-q)+\hat{\rho}_2(\omega,q)\cdot\hat{Q}_2^{(i)}(\omega,p-q)\right]dq. \tag{13}$$

Функции $\hat{Q}_1^{(i)}$, $\hat{Q}_2^{(i)}$ можно найти аналитически:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_3}{\left[\sqrt{(x_1+t\sin\varphi-p\cos\varphi)^2+(x_2+t\cos\varphi-p\sin\varphi)^2+x_3^2}\right]^3}dt=\\=\frac{2x_3}{x_3^2+p^2-2px_1\cos\varphi-2px_2\sin\varphi+(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)^2},\quad\omega=(\cos\varphi,\sin\varphi),\\\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x_3^2-\left((x_1+t\sin\varphi-p\cos\varphi)^2+(x_2+t\cos\varphi-p\sin\varphi)^2\right)}{\left[\sqrt{(x_1+t\sin\varphi-p\cos\varphi)^2+(x_2+t\cos\varphi-p\sin\varphi)^2+x_3^2}\right]^5}dt=\\=\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{2x_3}{x_3^2+p^2-2px_1\cos\varphi-2px_2\sin\varphi+(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)^2}\right],\quad\omega=(\cos\varphi,\sin\varphi),\end{gathered}\tag{14}$$

где $\omega_1\xi+\omega_2\eta=p$ — прямая, по которой производится интегрирование. Если теперь записать для $-\frac{\partial V}{\partial x_3}(M_i)$ его выражение с помощью формулы обращения преобразования Радона, мы получим:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial V}{\partial x_3}(M_i)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dp\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\frac{1}{p}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\hat{\rho}_1(\omega,q)(\hat{Q}_1^{(i)})'_p(\omega,p-q)+\hat{\rho}_2(\omega,q)(\hat{Q}_2^{(i)})'_p(\omega,p-q)\right]dq\right]=\\=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp\frac{(\hat{Q}_1^{(i)})'_p(\omega,p-q)}{p}\right]\rho_1(\omega,q)+\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp\frac{(\hat{Q}_2^{(i)})'_p(\omega,p-q)}{p}\right]\rho_2(\omega,q)\right\}dq.\end{gathered}\tag{15}$$

В (15) интеграл по переменной p понимается в смысле главного значения. Его можно вычислить явно:

$$\begin{gathered}I_1(\omega,q)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(Q_1)'_p(\omega,p-q)dp}{p}=2\cdot\frac{x_3^2-(q-r\cos\varphi)^2}{\left(x_3^2+(q-r\cos\varphi)^2\right)^2},\\I_2(\omega,q)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(Q_2)'_p(\omega,p-q)dp}{p}=8\cdot\frac{x_3(q-r\cos\varphi)^2}{\left(x_3^2+(q-r\cos\varphi)^2\right)^2}.\end{gathered}\tag{16}$$

На практике компоненты поля бывают заданы с некоторой погрешностью, поэтому входной информацией являются значения $f_{i,\delta}$. С помощью решения вариационной задачи:

$$\begin{gathered}\Omega(\rho)=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dq\int\limits_0^{2\pi}\left(\hat{\rho}_1^2(\omega,q)+\hat{\rho}_2^2(\omega,q)\right)dpd\varphi=\min_{\rho},\\f_{i,\delta}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\hat{Q}_1^{(i)})'_p(\omega,p-q)dp}{p}\right]\rho_1(\omega,q)+\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\hat{Q}_2^{(i)})'_p(\omega,p-q)dp}{p}\right]\rho_2(\omega,q)\right\}dq\end{gathered}\tag{17}$$

получим, что искомые функции должны иметь вид [3, 8]:

$$\begin{gathered}\hat{\rho}_1^{(a)}(\omega,q)=\tilde{\hat{\rho}}_1(\omega,q,\lambda),\quad\hat{\rho}_2^{(a)}(\omega,q)=\tilde{\hat{\rho}}_2(\omega,q,\lambda),\\\tilde{\hat{\rho}}_1(\omega,q,\lambda)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^N\lambda_i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\hat{Q}_1^{(i)})'_p(\omega,p-q)}{p}dp,\quad\tilde{\hat{\rho}}_2(\omega,q,\lambda)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^N\lambda_i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\hat{Q}_2^{(i)})'_p(\omega,p-q)}{p}dp.\end{gathered}\tag{18}$$

Таким образом, мы приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_\delta, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \quad \mathbf{f}_\delta = (f_{1,\delta}, \ldots, f_{N,\delta}), \tag{19}$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big\{ I_{1,i}(\omega, q) I_{1,j}(\omega, q) + I_{2,i}(\omega, q) I_{2,j}(\omega, q) \big\} d\varphi dq, \quad 1 \le i \le N, \quad 1 \le j \le N. \tag{20}$$

Элементы матрицы системы (19), (20) имеют абсолютно такой же вид, как и элементы матрицы системы в методе локальных S-аппроксимаций [1] при условии, что элементы поля представляются в виде потенциала простого слоя.

Как было показано выше, преобразование Фурье и лучевое преобразование тесно связаны друг с другом:

$$\begin{gathered} \bar{f}(p, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u, \nu) e^{-i|\omega|p} d(|\bar{\omega}|), \quad \bar{\omega} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \\ F(u, \nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(p, \varphi) e^{-i|\omega|p} dp, \end{gathered} \tag{21}$$

где через $\bar{f}(p, \varphi)$ обозначено преобразование Радона от соответствующих переменных, а через $F(u, \nu)$ — преобразование Фурье. Если ввести обозначения

$$\frac{ux + \nu y}{\sqrt{u^2 + \nu^2}} = p, \quad \varphi = \arccos \frac{u}{\sqrt{u^2 + \nu^2}}$$

и принять во внимание тот факт, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega = 2\pi\delta(x)$$

(здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака), то можно показать, что

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p-q)\rho_1} \cdot e^{-iq\rho_2} dq = e^{-i\rho_1 p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\rho_1 - \rho_2)q} dq = 2\pi\delta(\rho_1 - \rho_2) e^{ip\rho_1} \cdot 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\rho_1} \cdot e^{-\rho_1(x_{3i} + H)} \times \\ \times e^{i\rho_1(x_i \cos\varphi + y_i \sin\varphi)} d\rho_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_2(x_{3j} + H)} \cdot e^{i\rho_2(x_j \cos\varphi + y_j \sin\varphi)} \delta(\rho_1 - \rho_1) d\rho_2 = \\ = \frac{2\pi}{(x_{3i} + 2H + x_{3j})^2 + \Big(p - \big((x_{3i} + x_{3j})\cos\varphi + (y_{3i} + y_{3j})\sin\varphi\big)\Big)^2}. \end{gathered} \tag{22}$$

Если затем осуществить обратное преобразование Радона, отнесенное к i-й точке, (см. формулы (6)–(9)), то мы убедимся в том, что элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений (20) — это вторые производные по i-й координате функции, преобразование Радона которой, деленное на $x_{3i} + 2H + x_{3j}$, есть как раз (22). Данное утверждение отражает очень важный факт: интегральные представления аномальных потенциальных полей (т.е. гармонических в некоторых областях пространства истокообразно представимых функций) весьма тесно связаны друг с другом. Если вспомнить выражения для элементов матрицы в методе S-аппроксимаций [1]:

$$\begin{gathered} a_{ij} = 2\pi \left\{ \frac{z_i + z_j}{\rho_{i,j}^3} + \frac{(z_i + z_j)\big(9\rho_{i,j}^2 - 6(z_i + z_j)^2\big)}{\rho_{i,j}^7} \right\}, \\ \rho_{i,j}^2 = (z_i + z_j)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad 1 \le i, j \le N, \end{gathered} \tag{23}$$

то можно сделать вывод, что преобразование Радона приводит к точно такой же системе линейных алгебраических уравнений, как и S-аппроксимация в локальном варианте, но с представлением искомого элемента поля в виде потенциала простого слоя. Таким образом, интегральная плотность масс, описываемая выражениями вида (18), может быть восстановлена из решения той же самой системы линейных алгебраических уравнений, которая записывается для определения носителей простого и двойного слоев (11). Опишем этот процесс более подробно.

Если поставить вариационную задачу:

$$\Omega(\rho) = \sum_{l=1}^{L} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\rho_{1,l}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}^2(\hat{\xi})\big) d\hat{\xi} = \min_{\rho}, \tag{24}$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{l=1}^{L} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi})\big) d\hat{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{25}$$

то для ее решения нам нужно будет определить вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots \lambda_N)$, а затем найти приближения к искомым неизвестным функциям по формулам

$$\rho_{1,l}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{1,l}(\hat{\xi}, \lambda), \quad \rho_{2,l}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{2,l}(\hat{\xi}, \lambda), \quad \tilde{\rho}_{1,l}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad \tilde{\rho}_{2,l}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad l = 1, 2, \ldots, L. \tag{26}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots \lambda_N)$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений, матрица которой имеет элементы, выражающиеся по формулам (23) [1].

2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПО ВНЕШНЕМУ ПОЛЮ ИСТОЧНИКОВ И СПЕКТРОВ ПОЛЕЙ

Спектральный анализ элементов аномальных потенциальных полей был широко распространен в 50–80-е годы прошлого века [3, 7].

При определении двумерных спектров различных сигналов предполагалось, что элемент V_x, $x = (x_1, x_2, x_3)$ аномального поля непрерывно задан на всей бесконечной плоскости $x_3 = 0$ и что однозначно восстанавливается преобразование Фурье $F(u, \nu)$ элемента $V(x)|_{x_3=0}$:

$$F(u, \nu) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} V(x)|_{x_3=0} \exp\big(i(ux_1 + \nu x_2)\big) dx_1 dx_2. \tag{27}$$

Обратное к (27) преобразование можно записать следующим образом:

$$T\big\{V(x)\big\} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u, \nu) F(u, \nu) \exp\big(-i(ux_1 + \nu x_2)\big) du d\nu, \tag{28}$$

где $T\big\{V(x)\big\} = W(x)$ есть некоторая линейная трансформанта функции $V(x)$, которой в спектральной области соответствует умножение спектра $F(u\nu)$ на частотную характеристику $K(u, \nu)$. Метод линейных интегральных представлений позволяет принципиально по-новому подойти к использованию метода анализа Фурье в задачах гравиметрии и магнитометрии [3, 7]. Подчеркнем, что формулы (27) и (28) имеют абсолютно аналогичный вид и для четырехмерного пространства (вариационные постановки для которого также рассматривались нами ранее, в [3]), частотная характеристика и спектр будут иметь еще одну компоненту: $K(\omega) = K(u, \nu, \omega)$, $F = F(u, \nu, \omega)$.

Рассмотрим одну из основных постановок задач на нахождение спектров Фурье элементов аномальных потенциальных полей по данным экспериментальных исследований этих полей. В данной работе ограничимся случаем гравитационного поля и задания значений одного элемента:

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial V_a(x)}{\partial x_3}, \tag{29}$$

где $V_a(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — потенциал аномального гравитационного поля, а ось Ox_3 направлена вверх, в силу чего в (29) фигурирует знак минус.

Напомним, как решается задача определения спектра сигнала в рамках одного из вариантов метода F-аппроксимаций [7], который состоит в том, что вводится спектральное представление функции $\frac{\partial V_a(x)}{\partial x_3}$, гармонической в полупространстве $x_3 > -H$, через спектр Фурье $F(u,\nu)$ потенциала $V_a(x)$:

$$\frac{\partial V_a(x)}{\partial x_3} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u,\nu;x_3+H)F(u,\nu)\exp\bigl(-i(ux_1+\nu x_2)\bigr)dud\nu\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u,\nu;x_3+H)\bigl(A(u,\nu)\cos(ux_1+\nu x_2)+B(u,\nu)\sin(ux_1+\nu x_2)\bigr)dud\nu. \quad (30)$$

В (30) положено

$$K(u,\nu;x_3+H) = \exp\bigl(-(x_3+H)\sqrt{u^2+\nu^2}\bigr) \quad (31)$$

и

$$F(u,\nu) = A(u,\nu) + iB(u,\nu). \quad (32)$$

Вариационная постановка на нахождение функций $A(u,\nu)$ и $B(u,\nu)$ (действительной и мнимой частей комплексного спектра Фурье) и имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(u,\nu)|^2 dud\nu = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\bigl(A^2(u,\nu)+B^2(u,\nu)\bigr)dud\nu = \min_{\substack{A(u,\nu)\\ B(u,\nu)}}. \quad (33)$$

при линейных условиях

$$f_{i,\delta} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u,\nu;x_3^{(i)}+H)\times\bigl[A(u,\nu)\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)})+B(u,\nu)\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)})\bigr]dud\nu = 0, \quad i=1,2,\ldots,N, \quad (34)$$

где

$$f_{i,\delta} = \frac{\partial V(x^{(i)})}{\partial x_3} + \delta\left(\frac{\partial V(x^{(i)})}{\partial x_3}\right). \quad (35)$$

Аналогичная вариационная постановка возникает и в том случае, когда требуется найти спектр при частотной характеристике $K(u,\nu;x_3+H) = \sqrt{u^2+\nu^2}\exp\bigl(-(x_3+H)\sqrt{u^2+\nu^2}\bigr)$, соответствующей двойному слою. Компоненты спектра будем обозначать тогда через

$$G(u,\nu) = C(u,\nu) + iD(u,\nu). \quad (36)$$

Задача (33)–(35) решается методом множителей Лагранжа [10]. Имеют место представления

$$\begin{aligned} A(u,\nu) &= \sum_{i=1}^{N}\lambda_i P_i(u,\nu),\\ B(u,\nu) &= \sum_{i=1}^{N}\lambda_i P_i(u,\nu), \end{aligned} \quad (37)$$

где положено

$$\begin{aligned} P_i(u,\nu) &= \frac{1}{2\pi}K(u,\nu;x_3^{(i)}+H)\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}),\\ S_i(u,\nu) &= \frac{1}{2\pi}K(u,\nu;x_3^{(i)}+H)\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}), \quad i=1,2,\ldots,N. \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом (31) получаем

$$\begin{aligned} A(u,\nu) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e^{-(x_3^{(i)}+H)\sqrt{u^2+\nu^2}}\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i P_i(u,\nu),\\ B(u,\nu) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e^{-(x_3^{(i)}+H)\sqrt{u^2+\nu^2}}\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i S_i(u,\nu), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$P_i(u,\nu)=\frac{1}{2\pi}e^{-(x_3^{(i)}+H)\sqrt{u^2+\nu^2}}\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}),$$
$$S_i(u,\nu)=\frac{1}{2\pi}e^{-(x_3^{(i)}+H)\sqrt{u^2+\nu^2}}\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}).\tag{40}$$

Значения параметров λ_i (множителей Лагранжа) находятся из решения (СЛАУ) вида (19), в которой $\mathbf{A}$ есть $(N\times N)$ — матрица со свойством

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\geq 0\tag{41}$$

и элементами a_{pq}, $p=1,2,\ldots,N$ $q=1,2,\ldots,N$:

$$a_{pq}=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[P_p(u,\nu)P_q(u,\nu)+S_p(u,\nu)S_q(u,\nu)\right]dud\nu,\tag{42}$$

С учетом условных обозначений (37) и (38) получим окончательное выражение для элементов искомой матрицы:

$$a_{p,q}=\frac{x_3^{(p)}+x_3^{(q)}+2H}{2\pi\left[(x_3^{(p)}+x_3^{(q)}+2H)^2+(x_1^{(p)}-x_1^{(q)})^2+(x_2^{(p)}-x_2^{(q)})^2\right]^{\frac{3}{2}}}.\tag{43}$$

Обратим внимание на тот факт, что условная экстремальная задача (33)–(35) не содержит априорной информации о свойствах погрешностей δV_i в экспериментальных данных — в значениях $f_{i,\delta}$. Однако эта информация может быть учтена при нахождении устойчивых приближенных решений СЛАУ (19).

Теперь можно перейти от вариационных постановок вида (24), (25) или (33)–(35) к более сложной задаче. Поясним, как это сделать, на примере объединения вариационных постановок в рамках F- и S-аппроксимаций.

Сформулируем следующую вариационную постановку.

Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек $M_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},x_3^{(i)})$, $i=1,2,\ldots,N$. Рассмотрим интегральные представления вида (12) элемента аномального поля $\frac{\partial V_a(x)}{\partial x_3}$ на этом множестве. Функции ρ_1, ρ_2 неизвестны. Как и выше, обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом в (12) в точке M_i через $Q_1^{(i)}$, а во втором слагаемом — через $Q_2^{(i)}$. Кроме того, попытаемся одновременно с функциями ρ_1, ρ_2 определить спектральные характеристики указанной компоненты аномального поля $A(u,\nu)$, $B(u,\nu)$, $C(u,\nu)$, $D(u,\nu)$ (см. (32) и (36)). В отличие от варианта представления элемента поля формулой (12), рассмотрим случай L плоскостей, на которых распределены простой и двойной слои. Тогда нам потребуется определить две вектор-функции:

$$P=(\rho_1^{(l)},\rho_2^{(l)}),\quad A=\left(A^{(l)}(u,\nu);B^{(l)}(u,\nu);C^{(l)}(u,\nu);D^{(l)}(u,\nu)\right),\quad l=1,2,\ldots,L,\tag{45}$$

причем компоненты этих функций заданы на плоскостях H_l, $l=1,2,\ldots,L$.

Получим следующую задачу на поиск экстремумов двух функционалов при различных линейных ограничениях на искомые функции [11, 12]:

$$\Omega(\rho)=\sum_{l=1}^{L}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{1,l}^2(\hat{\xi})+\rho_{2,l}^2(\hat{\xi})\right)d\hat{\xi}=\min_{\rho},\tag{46}$$

$$f_{i,\delta}-\sum_{l=1}^{L}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{1,l}(\hat{\xi})Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi})+\rho_{2,l}(\hat{\xi})Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi})\right)d\hat{\xi}=0,\quad i=1,2,\ldots,N,\tag{47}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F^{(l)}(u,\nu)|^2dud\nu+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G^{(l)}(u,\nu)|^2dud\nu=\sum_{l=1}^{L}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\left(A^{(l)}(u,\nu)\right)^2+\left(B^{(l)}(u,\nu)\right)^2+$$
$$+\left(C^{(l)}(u,\nu)\right)^2+\left(D^{(l)}(u,\nu)\right)^2\Big)dud\nu=\min\left\{A^{(l)}(u,\nu),B^{(l)}(u,\nu),C^{(l)}(u,\nu),D^{(l)}(u,\nu)\right\},\tag{48}$$

$$f_{i,\delta} - \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{L}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(u,\nu;x_3^{(i)}+H_l)\times\left[A^{(l)}(u,\nu)\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)})+B^{(l)}(u,\nu)\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)})\right]dud\nu+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{L}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(u,\nu;x_3^{(i)}+H_l)\times\left[C^{(l)}(u,\nu)\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)})+D^{(l)}(u,\nu)\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)})\right]dud\nu=0,$$
$$i=1,2,\ldots,N, \quad (49)$$

где положено

$$f_{i,\delta}=\frac{\partial V_a(x^{(i)})}{\partial z}+\delta f_i. \quad (50)$$

Решение задачи (46)–(50) будет иметь вид

$$\rho_{1,l}^{(a)}(\hat\xi)=\tilde\rho_{1,l}(\hat\xi,\lambda),\quad \rho_{2,l}^{(a)}(\hat\xi)=\tilde\rho_{2,l}(\hat\xi,\lambda),\quad \tilde\rho_{1,l}(\hat\xi,\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i Q_{1,l}^{(i)}(\hat\xi),\quad \tilde\rho_{2,l}(\hat\xi,\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i Q_{2,l}^{(i)}(\hat\xi),\quad l=1,2,\ldots,L,$$
$$A^{(l)}(u,\nu)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i P_{i,1}^{(l)}(u,\nu),\quad B^{(l)}(u,\nu)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i S_{i,1}^{(l)}(u,\nu), \quad (51)$$
$$C^{(l)}(u,\nu)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i P_{i,2}^{(l)}(u,\nu),\quad D^{(l)}(u,\nu)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i S_{i,2}^{(l)}(u,\nu),$$

где положено

$$\begin{aligned}
&P_{i,m}^{(l)}(u,\nu)=\frac{1}{2\pi}K_m(u,\nu;x_3^{(i)}+H_l)\cos(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}),\\
&S_{i,m}^{(l)}(u,\nu)=\frac{1}{2\pi}K_m(u,\nu;x_3^{(i)}+H_l)\sin(ux_1^{(i)}+\nu x_2^{(i)}),\quad m=1,2,\\
&K_1(u,\nu;x_3^{(i)}+H_l)=\exp\bigl(-(x_3^{(i)}+H_l)\sqrt{u^2+\nu^2}\bigr),\quad i=1,\ldots,N,\quad l=1,\ldots,L,\\
&K_2(u,\nu;x_3^{(i)}+H_l)=\sqrt{u^2+\nu^2}\exp\bigl(-(x_3^{(i)}+H_l)\sqrt{u^2+\nu^2}\bigr),\quad i=1,\ldots,N,\quad l=1,\ldots,L.
\end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, приходим к системе линейных уравнений (аналогичной (19)):

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{f}_\delta, \quad (53)$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид

$$a_{ij}=\sum_{l=1}^{L}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\bigl(Q_{1,l}^{(i)}(\hat\xi)Q_{1,l}^{(j)}(\hat\xi)+Q_{2,l}^{(i)}(\hat\xi)Q_{2,l}^{(j)}(\hat\xi)\bigr)d\hat\xi,\quad 1\le i\le N,\quad 1\le j\le N. \quad (54)$$

Элементы a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ при использовании интегральных представлений (11) и (34) могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона. Например, в случае представления вертикальной компоненты гравитационного поля получим выражения

$$a_{ij}=2\pi\sum_{l=1}^{L}\left\{\frac{z_i+z_j-2H_l}{\left(\sqrt{(z_i+z_j-2H_l)^2+(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}\right)^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{(z_i+z_j-2H_l)\Bigl(9\bigl[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\bigr]-6(z_i+z_j-2H_l)^2\Bigr)}{\left(\sqrt{(z_i+z_j-2H_l)^2+(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}\right)^7}\right\},\quad 1\le i\le N,\quad 1\le j\le N. \quad (55)$$

Необходимо подчеркнуть, что компоненты вектор-функции (44) (плотности простого и двойного слоев, а также спектральные плотности соответствующих распределений) находятся из решения одной и той же системы уравнений (53). Если частотная характеристика имеет вид

$$K_2(u,\nu;x_3+H)=\sqrt{u^2+\nu^2}\exp\bigl(-(x_3+H)\sqrt{u^2+\nu^2}\bigr), \quad (56)$$

то элементы матрицы системы для определения спектральных плотностей представляют собой второе слагаемое в формуле (55):

$$a_{p,q} = \frac{6(x_3^{(p)} + x_3^{(q)} + 2H)^3 - 9\big((x_1^{(p)} - x_1^{(q)})^2 + (x_2^{(p)} - x_2^{(q)})^2\big) \cdot (x_3^{(p)} + x_3^{(q)} + 2H)}{2\pi\big[(x_3^{(p)} + x_3^{(q)} + 2H)^2 + (x_1^{(p)} - x_1^{(q)})^2 + (x_2^{(p)} - x_2^{(q)})^2\big]^{\frac{7}{2}}}. \tag{57}$$

Фактически, нами доказана следующая

Теорема 1. *Плотности простых слоев, распределенных на нескольких горизонтальных плоскостях, и спектральные плотности источников при частотной характеристике вида* (31) *определяются в рамках метода линейных интегральных представлений из решения одной и той же системы линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ).

Замечание 1. СЛАУ (19) и аналогичные ей необходимо решать с помощью одного из методов регуляризации, см., например, [3, 5, 6].

Как хорошо известно [13], для финитных функций справедлива формула суммирования Пуассона:

$$\sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{Z}^n} F(\mathbf{x} + a\mathbf{g}) = \left(\frac{k}{a}\right)^n \sum_{\mathbf{g}\in\mathbb{Z}^n} f\left(\frac{k\mathbf{g}}{a}\right) \exp\big(i(\mathbf{x},\mathbf{g})k/a\big). \tag{58}$$

В (58), как и далее по тексту статьи, приняты следующие обозначения: $\mathbb{Z}^n$ есть n-мерное пространство векторов с целочисленными координатами, $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное пространство; $\mathbf{g} = (g_1, g_2 < \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}^n$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2 < \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a — положительное вещественное число (период функции F). В правой части (58) суммируются значения преобразования Фурье исходной функции, заданные в узлах дополнительной решетки (в фазовом пространстве).

Формула (58) может быть получена различными способами, в частности, путем определения так называемых условно периодических функций.

А именно, для быстро убывающей вместе со всеми производными на бесконечности функции $F(x)$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ положим

$$F_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+n)e^{\mathrm{int}}. \tag{59}$$

Функция (59) является условно периодической по x с параметром t.

Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье:

$$F_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(t)e^{i2\pi nx}, \quad a_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 F(x+m)e^{i(mt+2\pi nx)}dx = f(t+2\pi n), \tag{60}$$

где через $f(t + 2\pi n)$ обозначено преобразование Фурье функции $F(x)$. Отсюда получаем при $t = 1$ искомую формулу Пуассона в одномерном случае. Если период условно периодической функции равен a, то формула Пуассона приобретает вид:

$$\begin{gathered} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} f(x+ga) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^n \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} F\left(\frac{2\pi g\mathbf{g}}{a}\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{a}\mathbf{xg}\right), \\ \mathbf{xg} = g_1x_1 + \cdots + g_nx_n, \quad g_i \in \mathbb{Z} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{61}$$

В (61) через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$ обозначены множество целых чисел, множество n-мерных векторов с целыми и вещественными координатами, соответственно.

Ввиду справедливости формулы (58), можно ввести дополнительный критерий качества решения задачи (46)–(50). А именно, среди всех решений, удовлетворяющих условиям (46)–(50) отберем те, которые дают минимальное отклонение левых и правых частей формулы (58) друг от друга. При этом важно обратить внимание на следующий факт: сеть наблюдений всегда конечна и расположена в ограниченной области пространства [1, 2] (неважно, является ли эта сеть в полном смысле трехмерной или мы интерпретируем результаты измерений вдоль кривых, на кусках поверхностей и т.п.). Поэтому в формуле (58) левая часть рассматривается лишь в конечном числе точек. Что же касается правой части (58), то суммирование значений фурье-преобразования сигнала выполняется во всем пространстве частот. Но частотный спектр сигнала также может быть ограничен. Фактически, мы оказываемся в ситуации, когда более “узкому” спектру сигнала в фазовом пространстве соответствует более широкий спектр в реальном трехмерном пространстве, и наоборот. Это становится понятным, если вспомнить вид преобразования фурье-компонент гравитационного поля согласно методу

F-аппроксимаций (см. (34)). Одна точка наблюдения "дает" одну косинусоиду с экспотенциально убывающей амплитудой:

$$A^{(i)}(u,\nu) = \lambda_i e^{-(x_3^{(i)}+H)\sqrt{u^2+\nu^2}} \cos(ux_1^{(i)} + \nu x_2^{(i)}). \tag{62}$$

При суммировании правой и левой частей формулы (58) можно применять различные варианты формулы Эйлера-Маклорена для многомерного случая [14]. Напомним читателю формулу Эйлера-Маклорена в одномерном случае [15]:

$$\sum_{j=m}^{n} \varphi(j) = \int_m^n \varphi(x)dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}\{\varphi^{(\nu-1)}(n) - \varphi^{(\nu-1)}(m)\} =$$

$$= \int_m^n \varphi(x)dx + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{B_\nu}{\nu!}\{\varphi^{(\nu-1)}(n) - \varphi^{(\nu-1)}(m)\} -$$

$$- \frac{1}{k!}\int_0^1 \big(B_k(x) - B_k\big) \sum_{j=m}^{n-1} \varphi^k(j-x+1)dx. \tag{63}$$

В двумерном случае формула (63) приобретает вид

$$\sum_{m=m_1}^{m_2}\sum_{n=n_1}^{n_2} \varphi(m.n) = \int_{m1}^{m2}\int_{n1}^{n2} \varphi(x,y)dxdy + \sum_{\nu} \frac{B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x,y)|_{m_1,m_2}^{n_1,n_2}, \quad \nu = (\nu_1,\nu_2), \quad B_\nu = B_{\nu_1}B_{\nu_2}, \quad \nu! = \nu_1!\nu_2!;$$

$$\varphi^{(\nu-1)} = \frac{\partial^{\nu_1-1}\partial^{\nu_2-1}\varphi}{\partial x^{\nu_1-1}\partial y^{\nu_2-1}}, \quad \varphi^{(\nu-1)}(x,y)|_{m_1,m_2}^{n_1,n_2} = \varphi^{(\nu-1)}(m_2,n_2) - \varphi^{(\nu-1)}(m_1,n_2) - \tag{64}$$

$$-\varphi^{(\nu-1)}(m_2,n_1) + \varphi^{(\nu-1)}(m_1,n_1).$$

При вычислении суммы значений некоторой функции, зависящей от двух переменных, согласно выражению (64) целесообразно пользоваться формулой Бруно [15]:

$$D^n f\big[g(t)\big] = n!\sum_{k=1}^{n} f_k \sum_{\substack{\sum jk_j = n\\ \sum k_j = k}} \prod_{j=1}^{n} \frac{g_j^{k_j}}{(j!)^{k_j}k_j!}, \quad f_k \equiv D_s^n f(s)|_{s=g(t)}, \quad g^k = D_t^k g(t), \quad D_t^k g(t) \equiv \frac{d^k g(t)}{dt^k}. \tag{65}$$

В нашем случае формулу (65) приходится применять дважды, поскольку при суммировании значений экспоненты от функции двух переменных, представляющей собой корень квадратный из суммы квадратов этих переменных, лучше применить (65) к сложной функции вида $f\big(g(u,\nu)\big) = \exp\big(-(z_i + H_l)\sqrt{u^2+\nu^2}\big)$ для переменных u и ν в отдельности, но считая функцией $g(w)$ сначала $g_1(w) = -aw$, а затем $w = g_2\big(\eta(u,\nu)\big) = \sqrt{\eta}$, $\eta = u^2 + \nu^2$.

На втором этапе в роли функции f выступает $w(\eta) = \sqrt{\eta}$, а в роли g — функция $g(u,\nu) = u^2 + \nu^2$.

Таким образом, мы приходим к выражению

$$f\Big(g_1\big(g_2(u,\nu)\big)\Big) \equiv F(u,\nu). \tag{66}$$

Для функции $w(\eta) = \sqrt{\eta}$ верны, как легко установить, следующие выражения для производных k-го порядка:

$$\frac{d^k w}{d\eta^k} = \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k(\eta)^{(2k-1)/2}}, \quad k = 1,2,\ldots; \quad (2k-3)!! = 1, k = 1;$$

$$(2k-3)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots, k = 2,\ldots.$$

Аналогичные соображения верны и для производной по второй переменной ν.

В результате получим следующие соотношения:

$$F(u,\nu) = g_1\big(g_2(u,\nu)\big), \qquad \frac{\partial F\Big(g_1\big(g_2(u,\nu)\big)\Big)}{\partial u} = \frac{dF}{dg}\bigg|_{g=g_1\circ g_2(u,\nu)} \cdot \frac{dg_1}{d\tau}\bigg|_{\tau=g_2(u,\nu)} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u}. \tag{67}$$

Описанный выше алгоритм действий при выполнении операций суммирования значений функций, заданных в узлах двумерной целочисленной решетки, безусловно, не является единственно возможным, но двухэтапное применение формулы Бруно позволит существенно упростить выражения для производных сложной функции, поскольку у $g(u) = u^2 + \nu^2$ отличны от нуля лишь производные первого и второго порядка (см. формулу (65)), а производные функции $f\big(g_1(w)\big) = \exp(-aw)$ легко вычисляются:

$$\frac{\partial^k g(u)}{\partial u^k} \equiv 0, \quad \frac{\partial^k g(\nu)}{\partial \nu^k} \equiv 0, \quad k \geq 3, \quad \frac{d^k\big(\exp(-aw)\big)}{dw^k} = (-1)^k a^k \exp(-aw).$$

Как было отмечено в предыдущих работах авторов (см. [16–17]), матрицы систем линейных алгебраических уравнений вида (19) бывают невырожденными в тех случаях, когда координаты точек наблюдений располагаются в точках оптимальной в некотором смысле сети. Такую оптимальную сеть построить бывает непросто, но опыт численных расчетов при интерпретации реальных геофизических данных показывает, что в случае равномерной сети точек матрицы СЛАУ, как правило, не вырождена, если имеет место диагональное преобладание (оно наблюдается при задании всех пунктов наблюдений на одной и той же горизонтальной плоскости, например, но не только). Можно ввести дополнительный функционал качества приближенного решения вариационной постановки (46)–(50):

$$X[P,A] = \left\{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_i e^{-(x_3^{(i)}+H)\frac{2\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}} \cos\left(\frac{2\pi}{a}nx_1^{(i)} + \frac{2\pi}{a}mx_2^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{i,\delta(ma,na)}\right\}^2 = \min_{P,A}. \quad (68)$$

В (68) используются те же обозначения, что и ранее определенные в статье. Если предположить, что координаты сети точек наблюдений удовлетворяют условиям $x_1^{(i)} = ia$, $x_2^{(i)} = ia$, то (68) принимает вид

$$X[P,A] = \left\{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_i e^{-(x_3^{(i)}+H)\frac{2\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{i,\delta(ma,na)}\right\}^2 = \min_{P,A}. \quad (69)$$

Если значения полезного сигнала, осложненные случайной помехой заданы в ограниченной области трехмерного пространства (а именно так и бывает на практике), то суммирование в (69) происходит не по всему множеству пар целых чисел (m,n), а только по некоторому конечному подмножеству: $(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{lim}} = \big\{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} : m_1 \leq m \leq m_2; n_1 \leq n \leq n_2\big\}$.

Множество ограничений на области определения функций, фигурирующих в (69), можно задавать и иными способами. С точки зрения простоты формул для практического использования, наиболее удобным является следующее условие:

$$(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{lim}} = \big\{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} : m_1^2 + n_1^2 = r_1^2 \leq m^2 + n^2 \leq r_2^2 = m_2^2 + n_2^2\big\}. \quad (70)$$

Применяя формулу приближенного суммирования значений функции вида (64), получим тогда следующее выражение для интегрального слагаемого:

$$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2_{\mathrm{lim}}} \lambda_i e^{-(x_3^{(i)}+H)\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}} \approx -2\pi \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{1}{(x_3^{(i)}+H)^2} \left\{e^{-(x_3^{(i)}+H)\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}}\right\}_{r_1}^{r_2} - \left(\frac{2\pi}{a}\right)\cdot 2\pi \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{(x_3^{(i)}+H)} \left\{e^{-(x_3^{(i)}+H)\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}}\right\}_{r_1}^{r_2}, \quad (71)$$

$$r(m,n) = \sqrt{m^2+n^2},$$
$$(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{lim}} = \big\{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} : m_1^2 + n_1^2 = r_1^2 \leq m^2 + n^2 \leq r_2^2 = m_2^2 + n_2^2\big\}.$$

В (64) мы интегрируем по мере $rdrd\vartheta$, при том $r(m,n) = \sqrt{m^2+n^2}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $r_1 \leq r \leq r_2$. Формулы (69), (70) позволяет сузить множество приближенных решений вариационной задачи (46)–(50) и, тем самым, повысить надежность предлагаемой методики решения некорректных геофизических задач. Кроме того, предложенный в статье подход к одновременной интерпретации пространственных и спектральных данных (под “пространственными” данными подразумеваются значения поля в точках некоторой сети наблюдений — сенсорах) открывает, на наш взгляд, ряд дополнительных возможностей для уточнения геологического строения Земли и планет: методика чувствительна к погрешностям в определении спектра и, следовательно, мелкие неоднородности можно выявить при ее применении.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье показана связь вариационных постановок в рамках методов S-, F- и R-аппроксимаций в трехмерном декартовом пространстве. Доказано, что элементы матрицы СЛАУ во всех трех случаях совпадают, при условии если в качестве эквивалентных носителей выбираются простые и двойные слои, распределенные на некотором множестве горизонтальных плоскостей. По одному набору множителей Лагранжа (который представляет собой решение СЛАУ) можно находить различные характеристики аномальных геофизических полей, включая спектр и интегральную плотность носителя вдоль фиксированного направления (при построении F- и R-аппроксимаций соответственно).

2. В статье формулируются условия для повышения качества совместной интерпретации различных данных об изучаемом аномальном поле: вводится дополнительный стабилизатор при восстановлении плотности распределений источников на горизонтальных плоскостях одновременно со спектральной плотностью сигнала.

3. В статье делается акцент на возможность дальнейшего улучшения свойств решений некорректных задач геофизики путем выбора оптимальной сети точек наблюдений. Если из большого и сверхбольшого массива данных об аномальных полях Земли и рельефе «вычленить» информацию о значениях физических величин в точках трехмерного пространства, координаты которых соответствуют пунктам оптимальной сети и одновременно близки к целым числам, то точность результатов совместной интерпретации значительно возрастет. Такой эффект наблюдается благодаря специфическим особенностям различных версий метода интегральных представлений и свойствам преобразования Фурье интегрируемых с квадратом функций во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002. № 2. С. 3–19.

2. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физика Земли. 2002. № 7. С. 3–12.

3. *Stepanova I.E., Kerimov I.A., Yagola A.G.* Approximation approach in various modifications of the method of linear integral representations// Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2019. Vol. 55. No 2. P. 218–231.

4. *Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э.* Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М.: ИФЗ РАН. 2009. 254 с.

5. *Раевский Д.Н., Степанова И.Э.* О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2015. № 2. С. 44–54.

6. *Раевский Д.Н., Степанова И.Э.* Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // Физика Земли. 2015. № 2. С. 55–66.

7. *Керимов И.А.* Метод F-аппроксимаций при решении задач гравиметрии и магнитометрии. М.:Физматлит, 2011. 262 с.

8. *Степанова И.Э.* Метод R-аппроксимаций при интерпретации данных детальной гравиметрической и магнитометрической съемок // Физика Земли. 2009. № 4. С. 17–30.

9. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.

10. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.-Л.: Гостоптехиздат, 1950. 296 с.

11. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

12. *Ягола А.Г., Степанова И.Э., Ван Янфей, Титаренко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2014. 214 с.

13. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

14. *Лейнартас Е.К., Петроченко М.Е.* Многомерные аналоги формулы суммирования Эйлера—Маклорена и преобразование Бореля степенных рядов// Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 91–100. DOI: 10.33048/semi.2022.19.008

15. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977. 320 с.

16. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Yagola A.G.* On the uniqueness of solution to systems of linear algebraic equations to which the inverse problems of gravimetry and magnetometry are reduced: a regional variant// Comput. Math. and Math.Physics. 2023. V. 63. № 9. P. 1588–1599.

17. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G.* On the uniqueness of solutions to systems of linear algebraic equations resulting from the reduction of linear inverse problems of gravimetry and magnetometry: a local case// Comput. Math. and Math.Physics. 2023. V. 63. № 8. P. 1452–1465.

ON THE SIMULTANEOUS DETERMINATION OF THE DENSITY DISTRIBUTION OF EQUIVALENT SOURCES UNDER AN EXTERNAL FIELD AND THE SPECTRUM OF USEFUL SIGNAL

I. Stepanova[a,*], D. Lukyanenko[b], I. Kolotov[b], A. Shepetilov[b], A. Yagola[b], I. Kerimov[a], A. Levashov[b]

[a] *Institute of Physics of the Earth RAS, B. Grusinskaya St. 10, Moscow, 123242, Russia*
[b] *Lomonosov Moscow State University, Leninskiye gory, Moscow, 119991, Russia*
**e-mail: tet@ifz.ru*
Received 28 June, 2023
Revised 28 June, 2023
Accepted 14 January, 2024

Abstract. The article investigates the possibility of simultaneously recovering equivalent sources under an external field and the spectral characteristics of a useful signal. Examples of variational formulations for different versions of the method of linear integral representations are presented, and the problem of finding the density distribution of gravitating or magnetic masses on several horizontal planes is formulated. Additionally, the Fourier transform of the anomalous field element based on the known signal values at certain observation points, complicated by noise, is discussed.

Keywords: systems of linear algebraic equations, integral representations, Poisson summation formula.