

## РАСЧЕТ НАГРЕВА ПЛАЗМЫ ЗАРЯЖЕННЫМИ ПРОДУКТАМИ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА

© 2024 г. К. В. Хищенко<sup>1,\*</sup>, А. А. Чарахчян<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2, ОИВТ РАН, Россия

<sup>2</sup>119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

\*e-mail: konst@ihed.ras.ru

\*\*e-mail: chara@ccas.ru

Поступила в редакцию 05.12.2023 г.

Переработанный вариант 20.12.2023 г.

Принята к публикации 14.01.2024 г.

Создана двухслойная по времени схема расчета упрощенного кинетического уравнения Фоккера–Планка применительно к переносу заряженных продуктов термоядерной реакции, которая включает в себя интерполяционную процедуру в 4-мерном сеточном пространстве. Обнаружена неустойчивость схемы при малых значениях скорости частицы и специальном выборе скорости торможения частицы в поле иона, которая входит в кинетическое уравнение в качестве параметра. Показано, что условие термализации, которое запрещает расчет кинетического уравнения для частицы с энергией меньше средней энергии иона, существенно ограничивает число термоядерных реакций, где неустойчивость может проявиться. Схема тестирована на задаче релаксации к стационарному состоянию и на задаче с заданной зависимостью от времени скорости термоядерной реакции, для которой можно найти точное решение кинетического уравнения. Библ. 16. Фиг. 7.

**Ключевые слова:** термоядерная реакция, уравнение Фоккера–Планка, конечно-разностная схема, неустойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466924050157, EDN: YCLPUZ

### ВВЕДЕНИЕ

Инерционный управляемый термоядерный синтез основан на зажигании с помощью внешнего драйвера небольшой части топлива с последующим распространением волны термоядерного горения на его остальную часть [1]. Механизмом горения термоядерного топлива является нагрев плазмы при торможении в ней надтепловых заряженных частиц, которые возникают в результате термоядерных реакций. Простейшая модель локального нагрева, когда частица отдает свою энергию в той точке, где она родилась, имеет очень узкую область применимости.

Перенос надтепловых заряженных частиц в плазме описывается кинетическим уравнением Фоккера–Планка [1], которое можно получить из уравнения Больцмана (см. [2]). Помимо термоядерных реакций это уравнение описывает различные процессы, в частности в астрофизике [3].

Применительно к заряженным продуктам термоядерных реакций имеется замечательная возможность отбросить в уравнении Фоккера–Планка диффузию функции распределения в скоростном пространстве (см. [4], где приведено обоснование малости отброшенного слагаемого). Далее такое упрощенное уравнение Фоккера–Планка будем для краткости называть *кинетическим уравнением*. Решение этого уравнения сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения вдоль характеристики, а уравнения характеристики описывают процесс торможения частицы электронами и ионами плазмы.

Во многих работах для расчета переноса надтепловых заряженных частиц используется трековый метод (см. [1, 5–7]), построенный на простых физических соображениях, применяемых к дискретной среде. Как показано в [7], трековый метод является методом расчета стационарного кинетического уравнения. Что касается нестационарного кинетического уравнения, то, насколько известно авторам, в настоящее время в качестве модели используется не само уравнение, а его диффузионное приближение по телесному углу в одноклассовом [8] или многоклассовом [1] приближении по скорости частицы.

Настоящая работа является продолжением работы [7], в которой рассматривается стационарное кинетическое уравнение. Любопытным результатом этой работы является следующее утверждение. Пусть внутри расчетной области имеется подобласть, где коэффициенты уравнения постоянны. Тогда во всех точках подобласти, удаленных от ее границы на расстояние, превышающее длину пробега частицы, решение уравнения совпадает с упомянутой выше моделью локального нагрева.

В работе [7] применительно к двумерным осесимметричным течениям развит обратный трековый метод, когда пробные частицы влетают в центр ячейки пространственной сетки, а не вылетают из них, как в обычном прямом трековом методе. Для одной и той же сетки по пространственным и угловым переменным объем вычислений для обратного метода заметно больше, чем для прямого. Однако прямой метод, в отличие от обратного, дает значительную потерю точности вблизи оси симметрии для не слишком подробных сеток по телесному углу, что связано с известным “эффектом луча”. В [7] приводятся рекомендации по значительному снижению объема вычислений обратного метода без существенного снижения точности расчета.

Метод [7] применялся для расчета горения оболочечной цилиндрической дейтерий-третиевой мишени в [9, 10].

В работе [9] впервые было показано, что квазистационарная быстрая безударная волна горения с механизмом распространения в виде нелокального нагрева альфа-частицами, перенос которых описывался стационарным кинетическим уравнением, может возникать из нестационарной детонационной волны по мере увеличения ее интенсивности. Настоящая работа открывает возможность изучения структуры квазистационарной волны горения на основе нестационарного кинетического уравнения.

Параметры зажигающего драйвера и мишени в [9] выбираются так, чтобы по возможности уменьшить энергию зажигания. В частности, произведение начальной плотности и радиуса цилиндра с DT смесью равно примерно  $0.5 \text{ г/см}^2$ , что примерно соответствует длине торможения альфа-частицы. Учет нестационарности кинетического уравнения возможно приведет к увеличению этого параметра. Размер мишени вдоль оси симметрии выбирается достаточно большим, чтобы увидеть процесс превращения детонационной волны в быструю безударную волну.

Далее мы ограничимся дейтерий-третиевой реакцией, заряженным продуктом которой является  $\alpha$ -частица. Будем также предполагать, что рождающиеся частицы имеют одну и ту же скорость  $v_{\max}$ , которая определяется энергией частицы 3.5 МэВ, и изотропное распределение по телесному углу. Это предположение основано на том, что для типичной температуры  $10^8 \text{ К}$  средняя скорость ионов примерно в 10 раз меньше  $v_{\max}$  (см. [11]).

Продуктом DT-реакции являются также высокоэнергичные нейтроны. Длина их свободного пробега намного больше характерных размеров области горения. Поэтому они часто не учитываются, как, например, в [9]. В будущем авторы предполагают использовать модель нейтронного нагрева в оптически тонком пределе [12], где учитывается только первый акт рассеяния нейтрона.

## 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Помимо начальной скорости частицы  $v_{\max}$  в модель переноса  $\alpha$ -частиц входят скорости торможения (отрицательные по величине ускорения) частицы на электронах  $a_e$  и ионах  $a_i$ , скорость рождения частиц в единице объема  $F$  и скорость частицы в конце траектории  $v_{\text{th}}$ , при которой она перестает нагревать плазму. Эти функции зависят от термодинамических функций плазмы (плотности и температур электронов и ионов), а скорости торможения  $a_e$  и  $a_i$  еще и от скорости частицы  $v$ . Зависимость термодинамических функций плазмы от пространственной координаты  $\mathbf{r}$  и времени  $t$  будем считать известной, и тем самым полагать известными функции  $a_{e,i}(\mathbf{r}, t, v)$ ,  $F(\mathbf{r}, t)$ ,  $v_{\text{th}}(\mathbf{r}, t)$ . Задача рассматривается на некотором интервале времени в некоторой пространственной области. Предполагается отсутствие частиц, влетающих в область извне.

Рассматриваемое кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\boldsymbol{\Omega}\nabla)f + \frac{\partial a f}{\partial v} = \tilde{F}\delta(v - v_{\max}), \quad a = a_e + a_i, \quad \tilde{F} = F/4\pi, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  — единичный вектор, который задает направление полета частицы;  $f(\mathbf{r}, t, v, \boldsymbol{\Omega})$  — функция распределения, которая определяет  $f(\mathbf{r}, t, v, \boldsymbol{\Omega})dv d\boldsymbol{\Omega}$  как число частиц в единице объема в точке  $(\mathbf{r}, t)$ , имеющих модуль скорости в интервале  $dv$  вблизи  $v$  и направление в интервале телесного угла  $d\boldsymbol{\Omega}$  вблизи  $\boldsymbol{\Omega}$ ;  $\delta$  есть  $\delta$ -функция Дирака.

При  $0 \leq v < v_{\max}$  правая часть уравнения (1) равна нулю. Следуя [4], в точке  $v = v_{\max}$  поставим граничное условие

$$f(\mathbf{r}, t, v_{\max}, \boldsymbol{\Omega}) = -\frac{\tilde{F}(\mathbf{r}, t)}{a(\mathbf{r}, t, v_{\max})}, \quad (2)$$

которое получается интегрированием уравнения (1) по  $v$  от  $v_{\max} - \Delta v$  до  $v_{\max} + \Delta v$ ,  $\Delta v > 0$  при  $\Delta v \rightarrow 0$ .

Вместо пространственной координаты  $\mathbf{r}$  введем в рассмотрение постоянный вектор  $\mathbf{r}_0$  и координату  $\xi$  вдоль луча  $\Omega$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi\Omega$ , а также переменную  $\varepsilon = v^2/2$ ,  $\varepsilon_{\max} = v_{\max}^2/2$ . Тогда уравнение (1) при  $v < v_{\max}$  (или при  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ ) принимает вид линейного гиперболического уравнения

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi} + a \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -f a_\varepsilon, \quad a = a(\xi, t, \varepsilon). \tag{3}$$

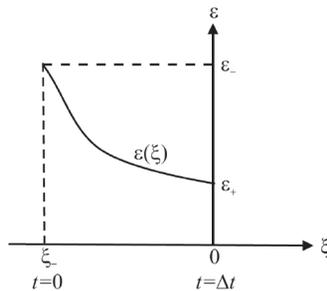
Семейство характеристик уравнения (3) определяется уравнениями

$$\frac{d\xi}{dt} = v, \quad \frac{d\varepsilon}{d\xi} = a, \tag{4}$$

где дифференцирование выполняется вдоль характеристики. Уравнения (4) описывают торможение частицы при увеличении  $\xi$  под действием отрицательного ускорения  $a$ .

При построении численного метода значение  $\varepsilon = \varepsilon_+$  задается при  $t = \Delta t > 0$ , а функция распределения известна при  $t = 0$ . Кроме того, функция распределения известна при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  (2) и на границе области (т.е. при некотором значении  $\xi < 0$  в точке пересечения луча  $-\Omega$  с границей), где  $f = 0$ .

Для нахождения нужного участка характеристики надо интегрировать уравнения (4), начиная от точки  $t = \Delta t$ , в сторону уменьшения  $t$  (и, следовательно, уменьшения  $\xi$ , так как  $v > 0$ ) до ближайшей точки, где задана функция распределения. На этом участке уравнения (4) описывают движение частицы с положительным ускорением  $-a$ , как это показано на фиг. 1 применительно к случаю, когда ближайшей точкой с заданной функцией распределения оказывается точка с  $t = 0$ . В двух других случаях также определяется точка на характеристике, координаты которой будем обозначать  $\xi_-$ ,  $t_-$  и  $\varepsilon_-$ .



Фиг. 1. Характеристика  $\varepsilon(\xi)$  на интервале от  $t = \Delta t > 0$ , где  $\xi = 0$  и задано  $\varepsilon_+$ , до  $t = 0$ , где определяются  $\xi_-$  и  $\varepsilon_-$ .

Уравнение (3) вдоль характеристики удобно взять в виде

$$\frac{df}{d\xi} = -f a_\varepsilon. \tag{5}$$

Далее с помощью равенства

$$a_\varepsilon = \frac{da}{d\varepsilon} - a_\xi \frac{d\xi}{d\varepsilon} - a_t \frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{1}{a} \left( \frac{da}{d\xi} - a_{\xi t} \right), \quad a_{\xi t} = a_\xi + a_t/v, \tag{6}$$

уравнение (5) приводится к виду

$$\frac{da f}{d\xi} = f a_{\xi t}, \tag{7}$$

откуда получаем связь между функциями распределения  $f_- = f(\xi_-, t_-, \varepsilon_-)$  и  $f_+ = f(0, \Delta t, \varepsilon_+)$

$$f_+ a_+ = f_- a_- \exp \left( \int_{\xi_-}^0 \frac{a_{\xi t}}{a} d\xi \right), \tag{8}$$

где  $a_- = a(\xi_-, t_-, \varepsilon_-)$ ,  $a_+ = a(0, \Delta t, \varepsilon_+)$ , интегрирование выполняется вдоль характеристики,  $a_{\xi t}$  определено в (6).

Для построения численного метода нужна процедура интерполяции термодинамических функций, включая скорость рождения частиц в единице объема  $F$ , определенных в серединах ячеек пространственной сетки, на луч, пересекающий эти ячейки. В работе [7] была реализована простейшая интерполяция в виде кусочно постоянной аппроксимации вдоль луча, который разбивался на интервалы, принадлежащие определенным ячейкам сетки. Термодинамические функции на интервале полагались равными своим значениям в центре соответствующей ячейки. Поэтому ниже будет рассмотрен частный случай формулы (8), когда отрезок  $[\xi_-, 0]$  разбит на интервалы, в каждом из которых  $a(\xi, t, \varepsilon)$  не зависит от  $\xi$  и  $t$ , а на границах интервалов функция  $a$  разрывна.

Пусть отрезок  $[\xi_-, 0]$  разбит на  $N$  интервалов  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, N$ . На каждом интервале  $j$  функция  $a$  задана в виде функции  $a_j(\varepsilon)$ . Функции  $f(\xi)$  и  $\varepsilon(\xi)$  непрерывны. Формула (8), которая справедлива на любом интервале, дает на интервале  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$

$$f_j a_j(\varepsilon_j) = f_{j+1} a_j(\varepsilon_{j+1}), \quad \varepsilon_j = \varepsilon(\xi_j), \quad f_j = f(\xi_j),$$

откуда получаем

$$f_+ = f_- \prod_{j=1}^N \frac{a_j(\varepsilon_j)}{a_j(\varepsilon_{j+1})}. \quad (9)$$

Мощность нагрева единицы объема электронной  $W_e$  и ионной  $W_i$  компоненты плазмы задается формулой

$$W_{e,i}(\mathbf{r}, t) = -m_p \int_{(4\pi)}^{\varepsilon_{\max}} \int_{\varepsilon_{\text{th}}}^{\varepsilon_{\max}} a_{e,i}(\mathbf{r}, t, \varepsilon) f(\mathbf{r}, t, \varepsilon, \mathbf{\Omega}) d\varepsilon d\mathbf{\Omega}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_{\text{th}} = v_{\text{th}}^2/2$ ,  $m_p$  — масса частицы.

В работе [7] применительно к стационарному кинетическому уравнению во внутреннем интеграле формулы (10) делается замена переменных  $\xi_- = \xi_-(\varepsilon)$  (см. фиг. 1, где переменная  $\varepsilon$  из (10) обозначена через  $\varepsilon_+$ ). В результате формула (10) превращается в известную интегральную формулу трекового метода, которая и используется в расчетах. В расчетах настоящей работы используется формула (10), в частности из-за того, что связь между дифференциалами  $d\xi_-$  и  $d\varepsilon$  зависит от типа точки с заданной функцией распределения ( $t = 0$  или  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ ).

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Как и в работе [7], будем рассматривать двумерные осесимметричные течения, когда искомая функция распределения и коэффициенты модели зависят только от двух пространственных цилиндрических координат (координаты вдоль оси симметрии  $z$  и расстояния до оси  $r$ ) и не зависят от угловой координаты  $\psi$ . В плоскости  $(z, r)$  имеется регулярная сетка из четырехугольных ячеек. Все упомянутые выше функции определены при  $t = 0$  в серединах ячеек, которые будем называть узлами сетки. Рассматривается двухслойная схема, которая позволяет определять функцию распределения в тех же узлах в следующий момент времени  $t = \Delta t$ . Шаг  $\Delta t$  предполагается достаточно малым, чтобы можно было пренебречь зависимостью от времени коэффициентов модели.

Из каждого узла пространственной сетки выпускаются лучи. Единичный вектор вдоль луча определяется двумя угловыми координатами следующим образом. Возьмем точку в трехмерном пространстве с цилиндрическими координатами  $(z_0, r_0, \psi_0)$ , в которой задан единичный вектор  $\mathbf{\Omega}$ . На фиг. 2 показана связанная с этой точкой локальная декартова система координат, ось  $z'$  которой параллельна оси  $z$ , ось  $x'$  лежит в одной плоскости с осью  $z$  и ортогональна ей, а ось  $y'$  выбрана так, чтобы оси  $x', y', z'$  образовывали правую систему координат. Направление единичного вектора  $\mathbf{\Omega}$  задается углами  $\theta$  и  $\varphi$ , как это показано на фиг. 2.

Обозначим через  $n_z, n_r$  и  $n_\psi$  проекции вектора  $\mathbf{\Omega}$  на оси  $z', x'$  и  $y'$  соответственно. Как видно из фиг. 2,

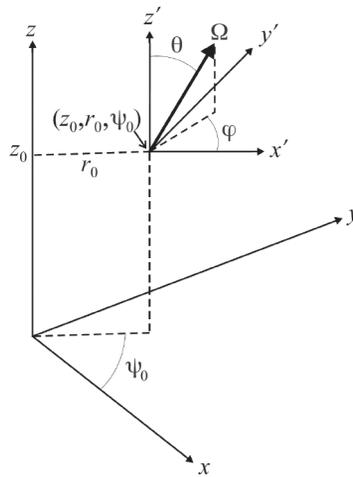
$$n_z = \cos(\theta), \quad n_r = \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad n_\psi = \sin(\theta) \sin(\varphi). \quad (11)$$

Проекции вектора  $\mathbf{\Omega}$  на оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат

$$n_x = n_r \cos(\psi_0) - n_\psi \sin(\psi_0), \quad n_y = n_r \sin(\psi_0) + n_\psi \cos(\psi_0). \quad (12)$$

Введем координату  $\xi$  вдоль луча, задаваемого вектором  $\mathbf{\Omega}$ , и найдем зависимость цилиндрических координат  $z(\xi)$  и  $r(\xi)$  вдоль луча. В дальнейшем понадобятся также функции  $\psi(\xi)$  ( $\psi(0) = \psi_0$ ),  $n_r(\xi)$  и  $n_\psi(\xi)$ . Используя зависимость декартовых координат от  $\xi$  (см. фиг. 2)

$$\begin{aligned} x &= r(\xi) \cos(\psi(\xi)) = r_0 \cos(\psi_0) + n_x \xi, \\ y &= r(\xi) \sin(\psi(\xi)) = r_0 \sin(\psi_0) + n_y \xi, \end{aligned} \quad (13)$$



**Фиг. 2.** Угловые координаты  $\theta$  и  $\varphi$  единичного вектора  $\Omega$  в локальной системе координат  $(x', y', z')$  относительно точки с цилиндрическими координатами  $(z_0, r_0, \psi_0)$ .

формулу (12) и связь  $r^2 = x^2 + y^2$ , получим формулы

$$z(\xi) = z_0 + n_z \xi, \quad r(\xi) = [(r_0 + n_r \xi)^2 + (n_\psi \xi)^2]^{1/2}, \tag{14}$$

которые являются параметрической формой уравнения гиперболы в плоскости  $z, r$ . Неравенство  $\xi \leq 0$  выделяет часть этой гиперболы.

Как и следовало ожидать, функции (14) не зависят от  $\psi_0$ . Отметим также инвариантность этих функций при замене  $\varphi$  на  $-\varphi$ , что позволяет ограничиться рассмотрением диапазона  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Для нахождения функции распределения в конечной точке характеристики при  $t = 0$  необходимо знать значение угла  $\varphi$ , который зависит от  $\xi$ . Из второй формулы (11), которая остается справедливой после замены переменных  $\varphi$  и  $n_r$  на соответствующие функции, получаем

$$\varphi(\xi) = \arccos(n_r(\xi) / \sin(\theta)). \tag{15}$$

Формулы (12) остаются в силе после замены переменных  $\psi_0, n_r$  и  $n_\psi$  соответствующими функциями. Из этих формул можно получить связь

$$n_r(\xi) = n_x \cos(\psi(\xi)) + n_y \sin(\psi(\xi)).$$

После подстановки  $n_x, n_y$  из исходных формул (12) и  $\cos(\psi(\xi)), \sin(\psi(\xi))$  из (13), получим простую формулу

$$n_r(\xi) = r'_\xi(\xi), \tag{16}$$

где  $r(\xi)$  определено в (14).

Дифференциал телесного угла

$$d\Omega = d\mu d\varphi, \quad -1 \leq \mu = \cos(\theta) \leq 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Пусть имеется для простоты равномерная сетка по угловым переменным

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_m &= -1 + (m - 1)\Delta\mu, \quad \Delta\mu = 2/N_\mu, \quad m = 1, \dots, N_\mu + 1, \\ \tilde{\varphi}_k &= (k - 1)\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \pi/N_\varphi, \quad k = 1, \dots, N_\varphi + 1, \end{aligned} \tag{17}$$

которая делит половину полного телесного угла  $-1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$  на  $N_\mu N_\varphi$  угловых групп с одинаковым телесным углом  $\Delta\mu \Delta\varphi$ . Каждой угловой группе соответствует единичный вектор с координатами

$$\theta_m = \arccos((\tilde{\mu}_m + \tilde{\mu}_{m+1})/2), \quad \varphi_k = (\tilde{\varphi}_k + \tilde{\varphi}_{k+1})/2, \quad 1 \leq m \leq N_\mu, \quad 1 \leq k \leq N_\varphi.$$

Для приближенного представления функции распределения нужна также сетка в скоростном пространстве  $\varepsilon_i, i = 0, \dots, M, \varepsilon_0 = 0, \varepsilon_M = \varepsilon_{\max}$ .

При  $t = 0$  в узлах всех рассмотренных выше сеток заданы соответствующие значения функции распределения. Для нахождения значений при  $t = \Delta t$  из каждого узла пространственной сетки выпускаются лучи, вдоль которых для всех значений  $\varepsilon_i$  (кроме  $i = M$  и узлов с  $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{th}$ , где функция распределения задана формулой (2) и нулевым значением соответственно) находится представленное в разд. 1 решение кинетического уравнения при  $\varepsilon_+ = \varepsilon_i$ . Вначале находится ближайшая вдоль характеристики точка с заданной функцией распределения (при  $t = 0$ , на границе области или при  $\varepsilon = \varepsilon_{max}$ ), а затем по формуле (9) находится искомое значение функции распределения.

Для реализации схемы необходимо находить функцию распределения  $f_-$  при  $t = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_-$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi_- \mathbf{\Omega}$  ( $\mathbf{r}_0$  — заданный узел пространственной сетки,  $\mathbf{\Omega}$  определяется заданными значениями угловой сетки  $\theta_m, \varphi_k$ ),  $\varphi = \varphi(\xi_-)$  (см. (15), (16)) и  $\theta = \theta_m$ , по заданным значениям функции распределения в узлах пространственной, угловой и скоростной сеток. Соответствующая процедура содержит интерполяцию высокого порядка точности на 16-ти точечном шаблоне пространственной сетки из [13] и билинейную интерполяцию на объединении скоростной  $\varepsilon_i$  и угловой  $\varphi_k$  сеток.

Описанная выше конечно-разностная схема при  $\Delta t = \infty$  переходит в схему для уравнения (1) с отброшенной производной по времени, которую далее будем называть *стационарной схемой*.

### 3. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Параметры тестовых задач примерно соответствуют параметрам горения цилиндрических мишеней для инерциального термоядерного синтеза из [9, 10].

Рассмотрены две задачи. В первой задаче все параметры кинетического уравнения не зависят от пространственных координат и времени. Во второй задаче скорость рождения  $\alpha$ -частиц в единице объема  $F$  зависит заданным образом от времени, а коэффициенты  $a_e$  и  $a_i$  по-прежнему зависят только от скорости частицы, что позволяет точно решать задачу вдоль характеристики (так как приближенная формула (9) превращается в точную формулу (8) в силу равенства  $a_{\xi t} = 0$ ).

#### 3.1. Задача о релаксации к стационарному состоянию

Рассматривается цилиндр радиусом  $R = 0.1$  мм и длиной  $H = 1$  мм, состоящий из полностью ионизованной эквимольной смеси дейтерия и трития, параметры которой не зависят от пространственных координат и времени. Число ячеек пространственной сетки вдоль оси  $z$   $N_z = 120$  и вдоль оси  $r$   $N_r = 50$ . Угловая сетка  $N_\mu = 8$ ,  $N_\varphi = 4$ .

Температура ионов ( $T_i$ ) и электронов ( $T_e$ )  $T_i = T_e = 10^8$  К, плотность смеси  $\rho = 100\rho_a$ ,  $\rho_a \approx 0.22$  г/см<sup>3</sup> — плотность жидкой смеси при атмосферном давлении. Скорость рождения  $\alpha$ -частиц в единице объема  $F = n_D n_T \langle \sigma v \rangle_{DT}(T_i)$ , где  $n_D$  и  $n_T = n_D$  — концентрации ядер дейтерия и трития, которые определяются плотностью плазмы  $\rho$ ,  $\langle \sigma v \rangle_{DT}(T_i)$  — взятая из [5] скорость реакции.

Для расчета скоростей торможения  $\alpha$ -частицы на электронах ( $a_e$ ) и ионах ( $a_i$ ), которые зависят от термодинамических функций и скорости  $\alpha$ -частицы, как правило используются различные варианты теории парных столкновений в плазме. В настоящей работе использовались два варианта формул. Первый вариант взят из работы [14]. Эта работа посвящена торможению тяжелых ионов, степень ионизации которых также подлежит определению, но после очевидных упрощений можно получить формулы и для полностью ионизованных частиц.

Второй вариант этой формулы из работы [15] для электронов и из работы [16] для ионов. Заметим, что в [16] используется последовательная теория парных столкновений, которая допускает наличие небольшой области скоростной координаты вблизи нуля с положительными значениями  $a_i$ , что означает передачу энергии от ионов среды к продуктам термоядерной реакции, а не наоборот.

Наличие такой области связано с функцией

$$G(x, \beta) = \int_0^x \exp(-y) dy - x(1 + \beta) \exp(-x^2),$$

которая входит в качестве множителя в формулу для  $a_i$ . При  $\beta > 0$  на некотором интервале вблизи  $x = 0$   $G(x, \beta) < 0$  (см. [16]). Здесь  $x = v(m_i/2k_B T_i)^{1/2}$ ,  $m_i$  — масса иона,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T_i$  — температура ионов,  $\beta = m_i/m_p$ . При расчете  $a_i$  по формулам из [16] мы полагали  $a_i = 0$ , если формулы давали  $a_i > 0$ .

В работе [14] использовался другой подход. Функция  $G(x, \beta)$  заменялась положительной при  $x > 0$  функцией  $G(x, 0)$ . Такой подход кажется менее предпочтительным, так как вносит изменения в теорию парных столкновений для случая  $a_i < 0$ , что нуждается в обосновании. Тем не менее ниже будет показано, что подход с

занулением положительных значений  $a_i$  имеет существенный дефект, который может приводить к неустойчивости разностной схемы.

В работе [16] приведена таблица значений функции  $x_{cr}(\beta)$ , которая является решением уравнения

$$G(x_{cr}(\beta), \beta) = 0.$$

Рассмотрим теперь как влияет на возможность появления положительных значений  $a_i$  условие термализации частицы  $f(v) = 0$  при  $v \leq v_{th} = (3k_B T_i / m_i)^{1/2}$ . Введем в рассмотрение скорость  $v_{cr} = x_{cr}(2k_B T_i / m_i)^{1/2}$ . Условие отсутствия положительных значений  $a_i$  принимает вид

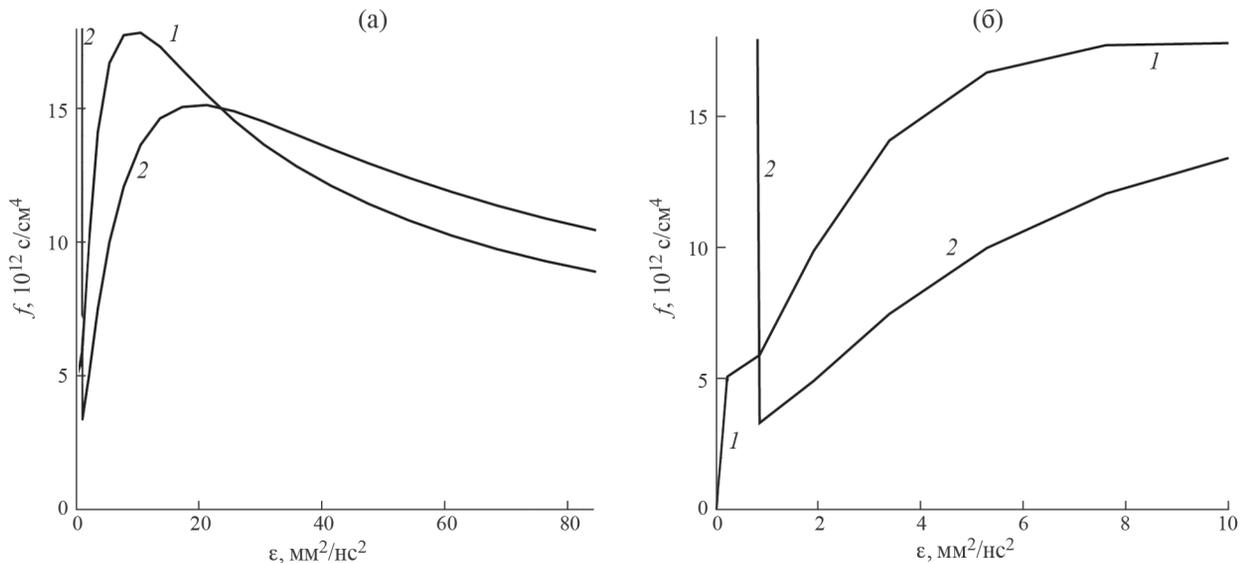
$$\frac{v_{cr}}{v_{th}} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_{cr}(\beta) \leq 1. \tag{18}$$

Одна из точек упомянутой выше таблицы, ( $\beta = 2, x_{cr} = 1.23$ ), с хорошей точностью совпадает с решением уравнения

$$x_{cr}(\beta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.225.$$

Так как функция  $x_{cr}(\beta)$  возрастающая, из неравенства (18) получим  $\beta \lesssim 2$ . Для DT-реакции  $\beta = 2.5/4 \approx 0.6$ , что гарантирует отсутствие положительных значений  $a_i$ .

Для других термоядерных реакций, в частности протонного типа (см. [1]), положительные значения  $a_i$  могут возникать в расчетах. Ниже мы приводим результаты расчетов для DT-реакции, но без условия термализации ( $v_{th} = 0$ ), чтобы продемонстрировать возможное anomальное поведение вычислительной схемы при наличии точек скоростной сетки с положительными значениями  $a_i$ , которые искусственно заменяются нулевыми значениями.

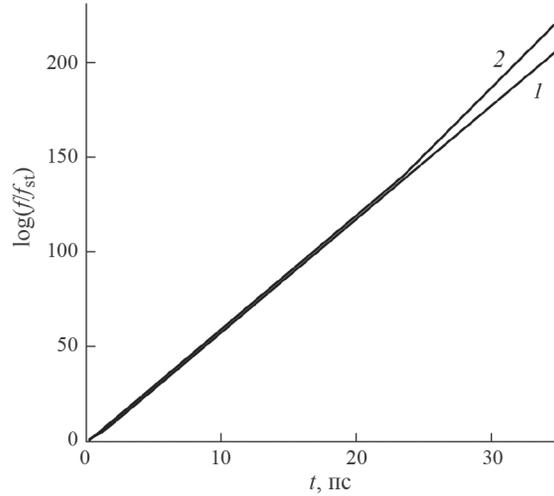


**Фиг. 3.** Функция распределения (стационарная схема) в некотором узле пространственной сетки вдоль некоторого направления для всего скоростного диапазона (а) и вблизи точки  $\epsilon = 0$  (б) для разных формул вычисления  $a_e$  и  $a_i$ : 1 – расчет по формулам из [12], 2 – из [13] для  $a_e$  и из [14] для  $a_i$  (с занулением положительных значений  $a_i$ );  $\epsilon_{th} = 0, M = 20$ , сетка  $\epsilon_i$  с равномерным распределением по  $v = \sqrt{2\epsilon}$ .

На фиг. 3 приведена функция  $f(\epsilon)$ , полученная по стационарной схеме в некоторых узлах пространственной и угловой сетки для двух рассмотренных выше вариантов вычисления  $a_e$  и  $a_i$ .

В отсутствие условия термализации узел скоростной сетки  $\epsilon_1$  входит в область положительности  $a_i$  для второго варианта вычислений, что дает аномально высокое значение  $f$  (примерно в 50 раз больше, чем в соседнем узле  $\epsilon_2$ ), указывающее на наличие множителей заметно больше 1 под знаком произведения в формуле (9). В первом варианте такой аномалии нет.

Рассмотрим теперь численное решение нестационарной задачи о релаксации к стационарному состоянию для той же сетки. Функция распределения в начальный момент времени полагается равной результату расчета по стационарной схеме, умноженной на 20. Сетка и другие параметры те же, что и во втором варианте расчета на фиг. 3, который дает аномально высокое значение функции распределения в узле  $\epsilon_1$ .



**Фиг. 4.** Неустойчивость при релаксации к стационарному состоянию. Функция распределения в узле с аномально высоким стационарным решением  $f_{st}$  на фиг. 3 (1) и максимальное значение функции распределения (2) от времени; расчет с занулением положительных значений  $a_i$ ,  $\epsilon_{th} = 0$ , сетка та же, что и для стационарной схемы.

Как видно на фиг. 4, численное решение в том же узле  $\epsilon_1$ , что и на фиг. 3, как и максимальное значение по узлам всех сеток, стремится не к стационарному значению, а к бесконечности.

Напомним, что для DT-реакции такая неустойчивость возможна только в отсутствие условия термализации ( $\epsilon_{th} = 0$ ). Учет этого условия делает неустойчивость возможной для термоядерных реакций с  $\beta = m_i/m_p \gtrsim 2$ . Заметим, что для таких реакций неустойчивости можно избежать, если к условию термализации добавить условие  $f(v) = 0$  при  $x \leq x_{cr}(\beta)$ .

Заметим, что кривые на фиг. 4 слабо зависят от начальных данных. Например, если в качестве начальных данных взять результат расчета по стационарной схеме, деленный на 20, то кривые на фиг. 4 почти не изменятся.

Далее будем использовать только первый вариант расчета коэффициентов  $a_e$  и  $a_i$  [14]. Число узлов скоростной сетки  $M = 20$ . Вместо сетки с равномерной расстановкой узлов по переменной  $v = \sqrt{2}\epsilon$  будет использоваться равномерная по  $\epsilon$  сетка, более подробная вблизи  $\epsilon = \epsilon_{max}$  и, соответственно, менее подробная вблизи  $\epsilon = 0$ .

На фиг. 5 показан результат расчета упомянутой выше задачи о релаксации. Шаг по времени выбирался по формуле

$$\Delta t = \frac{R}{v_{max}} \frac{5}{N_t},$$

где  $N_t = 200$  — число шагов по времени. Видно, что функция распределения сходится к некоторой функции, которую назовем *стационарным состоянием*. Эта функция близка к решению по стационарной схеме. Небольшие отличия связаны с тем, что стационарное состояние зависит от шага по времени и от упомянутой выше интерполяционной процедуры.

На фиг. 6 показано сравнение результатов расчетов с шагом по времени для  $N_t = 200$  и в два раза большим шагом для  $N_t = 100$  в один и тот же момент времени. Видно, что результаты с хорошей точностью близки друг к другу.

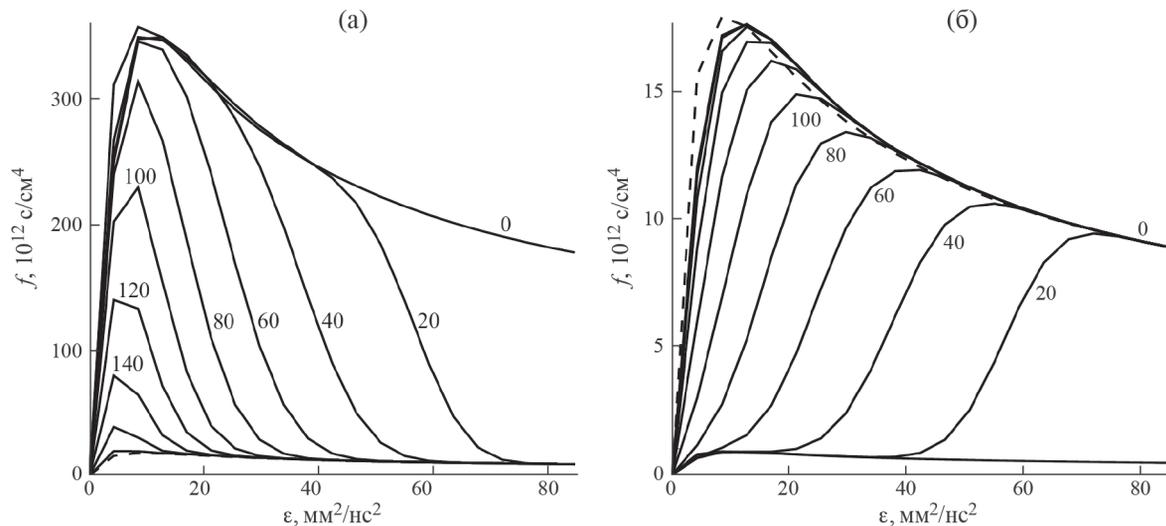
### 3.2. Задача с заданной временной зависимостью скорости рождения частиц

Рассматривается задача, в которой скорость рождения  $\alpha$ -частиц в единице объема

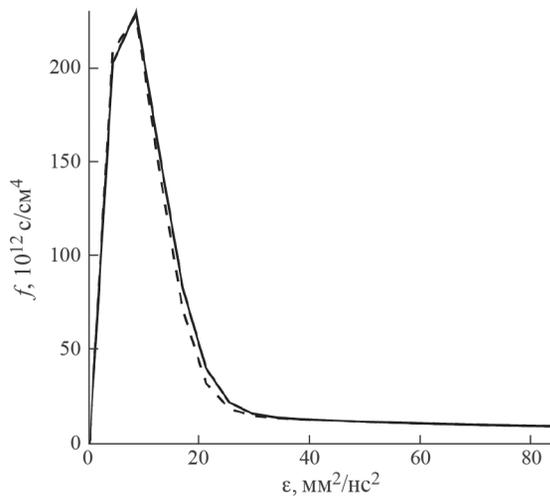
$$F = n_D n_T \langle \sigma v \rangle_{DT}(T_i(t)), \quad (19)$$

где  $n_D = n_T = \text{const}$ , а функция  $T_i(t) = (tT_i^{(1)} + (\tau - t)T_i^{(0)})/\tau$  имитирует быстрый рост температуры при зажигании мишени. Здесь  $T_i^{(1)} = 10^8 \text{K}$ ,  $T_i^{(0)} = 6000 \text{K}$ ,  $\tau = 20 \text{пс}$ .

Параметры мишени и сеток:  $R = 0.07 \text{мм}$ ,  $H = 0.1 \text{мм}$ ,  $\rho = 500\rho_a$ ,  $N_z = 100$ ,  $N_r = 40$ ,  $N_\mu = 8$ ,  $N_\phi = 4$ . Температура электронов и ионов, от которых зависят коэффициенты  $a_e$  и  $a_i$ , полагается независимой от пространственных координат и времени,  $T_e^{(2)} = T_i^{(2)} = (T_i^{(1)} + T_i^{(0)})/2$ . Начальные данные при  $t = 0$ :  $f = 0$  для всех значений пространственных, угловых и скоростной переменных.



**Фиг. 5.** Релаксация к стационарному состоянию (коэффициенты  $a_e$  и  $a_i$  из работы [14]) для начальных данных в 20 раз больше (а) и в 20 раз меньше (б) решения по стационарной схеме (штриховая линия), цифры у сплошных линий — число шагов по времени (0 — начальная функция распределения).



**Фиг. 6.** Функция распределения после 100 шагов по времени с  $N_t = 200$  (сплошная линия) и для того же момента времени с  $N_t = 100$  (штриховая линия); задача о релаксации для начальных данных в 20 раз больше решения по стационарной схеме.

Точное решение кинетического уравнения вдоль характеристики в момент времени  $t$  легко находится. Для этого надо в расчетных формулах схемы заменить  $\Delta t$  на  $t$ , а скорость рождения частиц в единице объема вычислять по формуле (19) с  $t = \Delta t - t_-$ , где  $t_-$  определяется характеристикой.

Двухслойная конечно-разностная схема для кинетического уравнения вычисляет значения функции распределения в момент  $t + \Delta t$  по значениям в момент  $t$ . Шаг  $\Delta t$  полагается достаточно малым, чтобы можно было пренебречь зависимостью от времени термодинамических функций, в частности скорости рождения частиц в единице объема, которая предварительно вычисляется в момент  $t$  в серединах ячеек пространственной сетки и аппроксимируется вдоль луча в виде кусочно-постоянной функции.

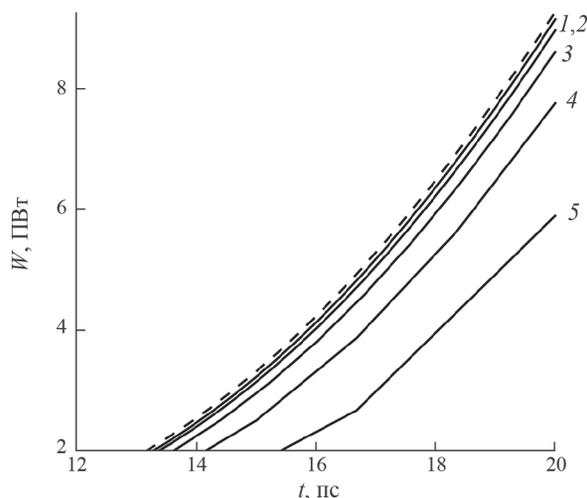
Полная мощность нагрева плазмы

$$W(t) = \int (W_e + W_i) dv,$$

где  $W_e, W_i$  определены формулой (10), интегрирование ведется по объему области.

Для вычисления  $W$  надо вначале решить кинетическое уравнение, приближенно или точно, а затем воспользоваться квадратурными формулами. Мы не будем проверять точность квадратурных формул. Ясно, что их точность возрастает с ростом числа значений по переменной интегрирования.

Функция  $W(t)$  используется для контроля точности двухслойной конечно-разностной схемы относительно точного решения кинетического уравнения. Для каждого интеграла выбирается некоторая квадратурная формула, одна и та же для точного и приближенного расчета кинетического уравнения.



**Фиг. 7.** Задача с заданной временной зависимостью скорости рождения частиц: точное решение (штриховая линия) и двухслойная схема (сплошные линии) для числа шагов по времени 100 (1), 50 (2), 25 (3), 12 (4) и 6 (5).

На фиг. 7 представлены результаты расчетов функции  $W(t)$  для точного решения и для двухслойной конечно-разностной схемы с разным числом шагов по времени на интервале  $0 \leq t \leq 20$  пс. Видно, что с уменьшением шага по времени погрешность схемы уменьшается.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создана двухслойная схема расчета упрощенного нестационарного кинетического уравнения переноса заряженных продуктов термоядерной реакции. По сравнению с развитым ранее обратным трековым методом для упрощенного стационарного кинетического уравнения, появляется новая независимая переменная, что меняет логическую схему вычислений.

Создана необходимая для расчета нестационарного уравнения интерполяционная процедура в 4-мерном сеточном пространстве (интерполяция высокого порядка точности для двумерных криволинейных пространственных сеток применительно к осесимметричным течениям и билинейная интерполяция для угловой и скоростной сеток).

Обнаружена неустойчивость схемы при малых значениях скорости частицы и специальном выборе скорости торможения частицы в поле иона  $a_i$ , которая входит в кинетическое уравнение в качестве параметра. Неустойчивость проявляется в бесконечном росте функции распределения с ростом числа шагов по времени и связана с наличием области в пространстве термодинамических функций и скорости частицы (далее аргументов функции  $a_i$ ), где теория парных столкновений дает  $a_i > 0$ , что означает ускорение (а не торможение) частицы в поле иона. Чтобы исключить эффект ускорения частицы, не затрагивая область аргументов функции  $a_i$ , где  $a_i < 0$ , положительные значения  $a_i$  полагались равными нулю.

Изучена роль условия термализации, которое запрещает расчет кинетического уравнения для частицы с энергией меньше средней энергии иона. Показано, что область аргументов функции  $a_i$ , где теория парных столкновений дает  $a_i > 0$ , может возникать только при  $m_i/m_p > 2$ , где  $m_i$  — масса иона,  $m_p$  — масса частицы, что существенно ограничивает число термоядерных реакций, где неустойчивость может проявиться.

Схема протестирована на задаче релаксации к стационарному состоянию и на задаче с заданной зависимостью от времени скорости термоядерной реакции, для которой можно найти точное решение кинетического уравнения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерционный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.

3. *Aksenov A.G., Ruffini R., Vereshchagin G.V.* Comptonization of photons near the photosphere of relativistic outflows // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. 2013. Vol. 436. Issue 1. P. L54–L58. <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt112>
4. *Гуськов С.И., Крохин О.Н., Розанов В.Б.* Перенос энергии заряженными частицами в лазерной плазме // Квантовая электроника. 1974. Т. 1. № 7. С. 1617–1623.
5. *Бракнер К., Джорна С.* Управляемый лазерный синтез. М.: Атомиздат, 1977.
6. *Charakhch'yan A.A., Khishchenko K.V.* Plane thermonuclear detonation waves initiated by proton beams and quasi-one-dimensional model of fast ignition // Laser and Particle Beams. 2015. V. 33. Issue 1. P. 65–80. <https://doi.org/10.1017/S0263034614000780>
7. *Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчьян А.А.* Трековый метод расчета нагрева плазмы заряженными продуктами термоядерных реакций для осесимметричных течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 36. № 3. С. 443–454. <https://doi.org/10.7868/S0044466916030054>
8. *Баско М.М.* Диффузионное описание переноса энергии заряженными продуктами термоядерных реакций // Физика плазмы. 1987. Т. 13. № 8. С. 967–973.
9. *Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчьян А.А.* Быстрое зажигание пучком протонов и горение цилиндрической оболочечной DT-мишени // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 9. С. 804–824. <https://doi.org/10.1134/S0367292119080043>
10. *Хищенко К.В., Чарахчьян А.А.* Отражение детонационной волны от плоскости симметрии внутри цилиндрической мишени для управляемого термоядерного синтеза // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 10. С. 1715–1733. <https://doi.org/10.31857/S0044466921100069>
11. *Гуськов С.Ю., Розанов В.Б.* Кинетика термоядерных частиц в лазерной плазме // Труды ФИАН. 1982. Т. 134. С. 115–152.
12. *Баско М.М.* Физические основы инерциального термоядерного синтеза. М.: МИФИ, 2009.
13. *Чарахчьян А.А.* Расчет сжатия дейтерия в конической мишени в рамках уравнений Навье—Стокса для двухтемпературной магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 5. С. 766–784.
14. *Баско М.М.* Торможение быстрых ионов в плотной плазме // Физика плазмы. 1984. Т. 10. № 6. С. 1195–1203.
15. *Выговский О.Б., Ильин Д.А., Левковский А.А. и др.* Торможение быстрых заряженных частиц в идеальной плазме с произвольной степенью вырождения: Препринт № 72. М.: ФИАН, 1990.
16. *Сивухин Д.В.* Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 81–187.

# CALCULATION OF PLASMA HEATING BY CHARGED PRODUCTS OF THERMONUCLEAR REACTIONS BASED ON A SIMPLIFIED FOKKER–PLANCK EQUATION

K. V. Khishchenko<sup>a,\*</sup>, A. A. Charakhchyan<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup>*Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences (JIHT RAS), Izhorskaya St. 13, Bldg. 2, Moscow, 125412, Russia*

<sup>b</sup>*Federal Research Center for Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Vavilov St. 44, Moscow, 119333, Russia*

*\*e-mail: konst@ihed.ras.ru*

*\*\*e-mail: chara@ccas.ru*

Received 05 December, 2023

Revised 20 December, 2023

Accepted 14 January, 2024

**Abstract.** A two-time-layer scheme has been developed for solving the simplified kinetic Fokker–Planck equation related to the transport of charged products of thermonuclear reactions, which includes an interpolation procedure in four-dimensional grid space. Instabilities in the scheme were detected at low particle velocities and for a specific choice of particle deceleration in the ion field, which enters the kinetic equation as a parameter. It was shown that the thermalization condition, which prohibits solving the kinetic equation for particles with energy lower than the average ion energy, significantly limits the number of thermonuclear reactions where instability can manifest. The scheme was tested on the problem of relaxation to a stationary state and on a problem with a prescribed time-dependent thermonuclear reaction rate, for which an exact solution to the kinetic equation can be found.

**Keywords:** thermonuclear reaction, Fokker–Planck equation, finite-difference scheme, instability.