УДК 519.653

ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ[1)]

А. И. Задорин[1,*]

[1] *630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т матем. СО РАН*

[*] *e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru*

Поступила в редакцию 13.10.2023 г.
Переработанный вариант 28.12.2023 г.
Принята к публикации 05.03.2024 г.

Рассматривается вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами. Предполагается, что для исходной функции одной переменной справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной составляющей с ограниченными производными до некоторого порядка и погранслойной составляющей, имеющей большие градиенты и известной с точностью до множителя. Такая декомпозиция, в частности, справедлива для решения сингулярно возмущенной краевой задачи. Тема исследования актуальна, так как применение к функциям с большими градиентами классических полиномиальных формул численного дифференцирования может приводить к существенным погрешностям. Оценивается погрешность формул численного дифференцирования, по построению точных на погранслойной составляющей исходной функции. Приведены результаты численных экспериментов, согласующиеся с полученными оценками погрешностей. Библ. 16. Табл. 2.

Ключевые слова: функция одной переменной, большие градиенты, специальная формула численного дифференцирования, оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466924060039, **EDN:** XZEARW

1. ВВЕДЕНИЕ

Применение классических полиномиальных формул численного дифференцирования [1] при наличии пограничного слоя может приводить к значительным погрешностям [2]. В связи с этим возникает необходимость в построении формул численного дифференцирования, погрешность которых не растет из-за больших градиентов функции в области пограничного слоя. В [3] предполагается, что у исходной функции с точностью до множителя выделена составляющая, отвечающая за большие градиенты функции. Такая декомпозиция функции с выделением регулярной и погранслойной составляющих обосновывалась в [4] для решения сингулярно возмущенной задачи. В [3] построена интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции, точная на погранслойной составляющей. Равномерная по погранслойной составляющей оценка погрешности этой формулы получена в [5].

В [3] на основе дифференцирования построенного интерполянта получены формулы численного дифференцирования, точные на погранслойной составляющей функции. Однако погрешность построенных формул для вычисления производных в [3] не оценена. В [6], [7] получены оценки погрешности формул из [3], равномерные по градиентам выделенной погранслойной составляющей, при вычислении первой и второй производных. В [8] рассмотрен случай, когда формула из [3] содержит k узлов в сеточном шаблоне для производной. В случае $n = k - 1$ и экспоненциального пограничного слоя получена оценка погрешности, где n — порядок вычисляемой производной. При этом предполагается, что регулярная составляющая имеет ограниченные производные.

[1)] Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0016.

В предлагаемой работе оценивается погрешность, когда формула для производной, точная на погранслойной составляющей, содержит k узлов, $k > n$. Проводится сравнение с оценкой погрешности классической формулы, основанной на многочлене Лагранжа.

Отметим, что при наличии экспоненциального пограничного слоя погрешность классических полиномиальных разностных формул для вычисления производных становится равномерной по малому параметру ε, если их применять на сетках, сгущающихся в области пограничного слоя. В [9] это обосновано в случае сетки Шишкина [10], в [11] применена сетка Бахвалова [12] с модификацией из [13].

Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от погранслойной составляющей $\Phi(x)$, ее производных и от шага сетки. В случае экспоненциального погранслоя эти постоянные не зависят от ε и h. Различные величины будем ограничивать одной постоянной C_j, если понятно по тексту. Будем подразумевать, что $f = O(g)$, если для некоторой постоянной C $|f| \le C|g|$; $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть для достаточно гладкой функции $u(x)$ справедлива декомпозиция

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x),\ x \in [0, 1], \tag{1}$$

где $p(x)$ — регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ — погранслойная составляющая, являющаяся функцией общего вида и отвечающая за большие градиенты функции $u(x)$. Функция $\Phi(x)$ предполагается известной, $p(x)$ и γ не заданы, $|\gamma| \le C$ для некоторой постоянной C.

В частности, рассмотрим случай экспоненциального пограничного слоя, когда функция $u(x)$ является решением сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x),\ u(0) = A,\ u(1) = B, \tag{2}$$

где $a_1(x) \ge \beta > 0, a_2(x) \ge 0,\ \varepsilon \in (0, 1]$, функции a_1, a_2, f — достаточно гладкие.

Согласно [4], для решения задачи (2) и произвольно задаваемого n_0 справедлива декомпозиция (1), для которой

$$\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon},\ \alpha = a_1(0), \tag{3}$$

$$|p^{(n)}(x)| \le C_0\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}e^{-\beta x/\varepsilon}\right], n \le n_0,\ \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_1(0). \tag{4}$$

В соответствии с (4), производная $p'(x)$ ограничена равномерно по параметру ε.

При наличии степенного пограничного слоя декомпозиция (1) справедлива при задании $\Phi(x) = (x + \varepsilon)^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1, 0 < \varepsilon \le 1$.

Зададим равномерную сетку интервала [0, 1]:

$$\Omega^h = \{x_j :\ x_j = jh, j = 0, 1, \dots, N,\ Nh = 1\}.$$

Предполагаем, что функция $u(x)$, обладающая декомпозицией (1), задана в узлах сетки Ω^h, $u_j = u(x_j)$. Рассмотрим вопрос численного дифференцирования такой функции на произвольном интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$ с k узлами сетки Ω^h.

Пусть $L_k(u, x)$ — многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с k узлами интерполяции $x_m, \dots, x_{m+k-1}$. Производные функции $u(x)$, как известно [1], можно приближенно находить на основе дифференцирования многочлена Лагранжа: $u^{(n)}(x) \approx L_k^{(n)}(u, x), x \in [x_m, x_{m+k-1}]$. В соответствии, например, с [14] справедлива оценка погрешности:

$$|u^{(n)}(x) - L_k^{(n)}(u, x)| \le \frac{M_k(k-1)^{k-n}h^{k-n}}{(k-n)!}, \tag{5}$$

где $M_k = \max\limits_s |u^{(k)}(s)|,\ x, s \in [x_m, x_{m+k-1}]$.

Из (5) следует, что погрешность вычисления производных на основе дифференцирования многочлена Лагранжа порядка $O(h^{k-n})$, если величина M_k равномерно ограничена. Однако в случае экспоненциального пограничного слоя в соответствии с (3) $M_k = O^*(\varepsilon^{-k})$, поэтому при малых значениях ε погрешность может быть существенной.

Покажем это на примере. Пусть $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$, $x \in [0, 1]$. Выпишем формулу для производной:

$$u'(x) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \; x \in [x_{j-1}, x_j]. \tag{6}$$

В данном случае производная $u'(x)$ в области пограничного слоя порядка $O(1/\varepsilon)$, поэтому в соответствии, например, с [15], [16], [9] оценивается относительная погрешность при вычислении первой производной, получаемая умножением абсолютной погрешности на малый параметр ε. В случае формулы (6) на равномерной сетке при $\varepsilon = h$ имеем

$$\varepsilon\Big|\frac{u_1 - u_0}{h} - u'(0)\Big| = e^{-1}. \tag{7}$$

Таким образом, относительная погрешность формулы (6) значительна, если $\varepsilon = h$, несмотря на малость h. Задача построения формул численного дифференцирования для функций, имеющих представление (1), актуальна.

Интерполяционная формула из [3]

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_{k-1}(u, x) + \frac{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]\Phi}\Big[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)\Big], \; x \in [x_m, x_{m+k-1}], \tag{8}$$

в соответствии с [5] представима в виде

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_k(u, x) + \frac{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]\Phi}\Big[\Phi(x) - L_k(\Phi, x)\Big], \; x \in [x_m, x_{m+k-1}], \tag{9}$$

где $[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u$ — разделенная разность [1] для функции $u(x)$, $k \geq 2$. Для корректного задания формулы (9) задаем ограничение

$$\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0, \; x \in (x_m, x_{m+k-1}).$$

Из (9) следует, что эта формула является интерполяционной с узлами интерполяции $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}$ и точной на многочленах степени $(k-2)$ и на функции $\Phi(x)$.

Дифференцируя (9), получаем формулу численного дифференцирования:

$$u^{(n)}(x) \approx L^{(n)}_{\Phi,k}(u, x) = L^{(n)}_k(u, x) + \frac{\Delta^{k-1}u_m}{\Delta^{k-1}\Phi_m}\Big[\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_k(\Phi, x)\Big], \tag{10}$$

где $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$, $n < k$, $\Delta^{k-1}u_m$ — конечная разность для $u(x)$ [1, с. 65], определяемая соотношениями $\Delta u_m = u_{m+1} - u_m, \Delta^j u_m = \Delta(\Delta^{j-1}u_m)$.

Отметим, что формула (10) является точной на составляющей $\Phi(x)$.

Целью работы является оценивание погрешности формулы (10), применяемой к функции $u(x)$ вида (1).

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Теорема. *Пусть для функции* $u(x)$ *справедлива декомпозиция* (1). *Пусть* D_k *такое, что* $0 < 1/D_k \leq C_1$ *и для некоторой постоянной* C_2 *справедлива оценка*

$$G = \frac{h^{k-2}}{D_k} \int\limits_{x_m}^{x_{m+k-1}} \left|\Phi^{(k)}(t)\right| \, dt \Big/ \left|\Delta^{k-1}\Phi_m\right| \leq C_2. \tag{11}$$

Тогда найдется C_3 такое, что справедлива оценка:

$$\frac{1}{D_k}\left|L^{(n)}_{\Phi,k}(u,x)-u^{(n)}(x)\right| \le \frac{1}{D_k}\left|L^{(n)}_{k}(p,x)-p^{(n)}(x)\right| + \frac{C_3}{h^{n-1}}\left|L_{k-1}(p,x_{m+k-1})-p(x_{m+k-1})\right|, \tag{12}$$

где $x\in[x_m,x_{m+k-1}],\ 1\le n<k.$

Доказательство. Формула (10) является точной на $\Phi(x)$, поэтому

$$\left|L^{(n)}_{\Phi,k}(u,x)-u^{(n)}(x)\right| = \left|L^{(n)}_{\Phi,k}(p,x)-p^{(n)}(x)\right| \le \left|L^{(n)}_{k}(p,x)-p^{(n)}(x)\right| +$$

$$+\left|\frac{\Delta^{k-1}p_m}{\Delta^{k-1}\Phi_m}\Big(\Phi^{(n)}(x)-L^{(n)}_k(\Phi,x)\Big)\right|,\ x\in[x_m,x_{m+k-1}]. \tag{13}$$

В (13) оценим $\left|\Phi^{(n)}(x)-L^{(n)}_k(\Phi,x)\right|$. Сначала получим оценку такой погрешности в случае достаточно гладкой функции $\upsilon(x)$. Используем разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральном виде:

$$\upsilon(x)=P_k(x)+R_k(x), \tag{14}$$

где

$$P_k(x)=\upsilon(x_m)+\upsilon'(x_m)(x-x_m)+\dots+\upsilon^{(k-1)}(x_m)\frac{(x-x_m)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$R_k(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{x_m}^{x}(x-t)^{k-1}\upsilon^{(k)}(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$R_k(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{x_m}^{x_{m+k-1}}(x-t)_+^{k-1}\upsilon^{(k)}(t)\,dt, \tag{15}$$

где $(x-t)_+^{k-1}=(x-t)^{k-1}$ при $x\ge t$ и $(x-t)_+^{k-1}=0$ при $x<t$.

Для погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на интервале $[x_m,x_{m+k-1}]$ известна оценка [1]:

$$|\upsilon(x)-L_k(\upsilon,x)|\le\max_s|\upsilon^{(k)}(s)||w_k(x)|/k!,\ \ w_k(x)=(x-x_m)\cdots(x-x_{m+k-1}). \tag{16}$$

Учитывая (16), имеем $P_k(x)-L_k(P_k,x)=0$. Учитывая (14), получаем

$$\upsilon(x)-L_k(\upsilon,x)=R_k(x)-L_k(R_k,x).$$

Следовательно,

$$\upsilon(x)-L_k(\upsilon,x)=R_k(x)-\sum_{j=m}^{m+k-1}R_k(x_j)\prod_{i=m,\,i\ne j}^{m+k-1}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}. \tag{17}$$

Учитывая (15) и дифференцируя (17), для некоторой постоянной C_1 получаем

$$\left|\upsilon^{(n)}(x)-L^{(n)}_k(\upsilon,x)\right|\le C_1h^{k-n-1}\int\limits_{x_m}^{x_{m+k-1}}\left|\upsilon^{(k)}(t)\right|\,dt,\ \ x\in\left[x_m,x_{m+k-1}\right]. \tag{18}$$

В случае $\upsilon(x)=\Phi(x)$ из (18) получаем

$$\left|\Phi^{(n)}(x)-L^{(n)}_k(\Phi,x)\right|\le C_1h^{k-n-1}\int\limits_{x_m}^{x_{m+k-1}}\left|\Phi^{(k)}(t)\right|\,dt,\ \ x\in\left[x_m,x_{m+k-1}\right]. \tag{19}$$

Теперь из (13), (19) для некоторой постоянной C получаем

$$\frac{1}{D_k}\left|L_{\Phi,k}^{(n)}(u,x)-u^{(n)}(x)\right| \le \frac{1}{D_k}\left|L_k^{(n)}(p,x)-p^{(n)}(x)\right|+ \\ +\frac{C}{D_k}\left|\frac{\Delta^{k-1}p_m}{\Delta^{k-1}\Phi_m}\right| h^{k-n-1}\int\limits_{x_m}^{x_{m+k-1}}\left|\Phi^{(k)}(t)\right|\,dt. \tag{20}$$

Преобразуем $\Delta^{k-1}p_m$. Учитывая соотношения [1]

$$\Delta^{k-1}p_m=(k-1)!h^{k-1}[x_m,\ldots,x_{m+k-1}]p,$$

$$p(x)-L_{k-1}(p,x)=w_{k-1}(x)[x_m,\ldots,x_{m+k-2},x]p,$$

где $w_{k-1}(x)$ соответствует (16), получаем

$$\left|\Delta^{k-1}p_m\right|=\left|p(x_{m+k-1})-L_{k-1}(p,x_{m+k-1})\right|. \tag{21}$$

Учитывая (11), (21) в (20), получаем (12). Теорема доказана.

Следствие. Согласно (12), оценка погрешности предложенной формулы численного дифференцирования (10) сведена к оценке погрешности многочлена Лагранжа на регулярной составляющей $p(x)$. Преобразуем эту оценку, применяя оценку (18) в случае $v(x)=p(x)$. Тогда из (12) для некоторой постоянной C получаем

$$\frac{1}{D_k}\left|L_{\Phi,k}^{(n)}(u,x)-u^{(n)}(x)\right| \le Ch^{k-n-1}\int\limits_{x_m}^{x_{m+k-1}}|p^{(k)}(t)|\,dt,\quad x\in[x_m,x_{m+k-1}]. \tag{22}$$

Если производная $p^{(k)}(x)$ является равномерно ограниченной, то из (22) для некоторой постоянной C_1 следует

$$\frac{1}{D_k}\left|L_{\Phi,k}^{(n)}(u,x)-u^{(n)}(x)\right| \le C_1h^{k-n},\ x\in[x_m,x_{m+k-1}]. \tag{23}$$

В регулярном случае, когда производные функции $u(x)$ являются равномерно ограниченными, в соответствии с (11) можно задать $D_k=1$. В соответствии с (23) оценка погрешности формулы (10) в этом случае такая же, как при применении классической формулы, основанной на дифференцировании многочлена Лагранжа.

4. СЛУЧАЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим применение теоремы в случае экспоненциального пограничного слоя, когда для функции $u(x)$ в декомпозиции (1) справедливы соотношения (3), (4).

Оценка погрешности классической формулы. При задании $\Phi(x)$ в соответствии с (3) для некоторой постоянной C оценка (19) принимает вид:

$$\varepsilon^{k-1}|\Phi^{(n)}(x)-L_k^{(n)}(\Phi,x)| \le Ch^{k-n-1}e^{-\alpha x_m/\varepsilon}\left(1-e^{-(k-1)\alpha h/\varepsilon}\right),\ x\in[x_m,x_{m+k-1}]. \tag{24}$$

Учитывая оценки (4) в (18) при задании $v(x)=p(x)$, получаем

$$\varepsilon^{k-1}|p^{(n)}(x)-L_k^{(n)}(p,x)| \le Ch^{k-n},\ x\in[x_m,x_{m+k-1}]. \tag{25}$$

Учитывая (1), (24) и (25), получаем оценку погрешности:

$$\varepsilon^{k-1}|u^{(n)}(x)-L_k^{(n)}(u,x)| \le C\left[h^{k-n}+h^{k-n-1}e^{-\alpha x_m/\varepsilon}\left(1-e^{-(k-1)\alpha h/\varepsilon}\right)\right]. \tag{26}$$

Из (26) при всех $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$ имеем

$$\varepsilon^{k-1}|u^{(n)}(x) - L_k^{(n)}(u,x)| \le Ch^{k-n}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\alpha x_m/\varepsilon}\right],\ (k-1)\alpha h/\varepsilon < 1, \tag{27}$$

$$\varepsilon^{k-1}|u^{(n)}(x) - L_k^{(n)}(u,x)| \le Ch^{k-n}\left[1 + \frac{1}{h}e^{-\alpha x_m/\varepsilon}\right],\ (k-1)\alpha h/\varepsilon \ge 1. \tag{28}$$

Из (28) следует, что в случае $k-1=n,\ m=0$, относительная погрешность $\varepsilon^n|u^{(n)}(x) - L_k^{(n)}(u,x)|$ может быть порядка $O(1)$, что подтверждается примером (7).

Оценка погрешности формулы (10). В случае $\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}$ величина G из (11) принимает вид:

$$G = \frac{h^{k-2}\alpha^{k-1}}{D_k\varepsilon^{k-1}}\left(e^{-\alpha x_m/\varepsilon} - e^{-\alpha x_{m+k-1}/\varepsilon}\right)\Big/|\Delta^{k-1}e^{-\alpha x_m/\varepsilon}|. \tag{29}$$

В соответствии с [1, с. 66], справедлива формула

$$\Delta^{k-1}\Phi_m = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j C_{k-1}^j \Phi_{m+k-1-j}.$$

Учитывая (3), имеем

$$\Delta^{k-1}\Phi_m = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j C_{k-1}^j e^{-\alpha x_{m+k-1-j}/\varepsilon}.$$

Тогда G из (29) принимает вид:

$$G = \frac{h^{k-2}\alpha^{k-1}}{D_k\varepsilon^{k-1}}\frac{1 - e^{-\alpha h(k-1)/\varepsilon}}{\left|\sum\limits_{j=0}^{k-1}(-1)^j C_{k-1}^j e^{-\alpha h(k-1-j)/\varepsilon}\right|} = \frac{h^{k-2}\alpha^{k-1}}{D_k\varepsilon^{k-1}}\frac{1 - e^{-\alpha h(k-1)/\varepsilon}}{\left|\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i} C_{k-1}^i (e^{-\alpha h/\varepsilon})^i\right|},$$

где $i = k-1-j$. Учитывая разложение для $(1-x)^{k-1}$, получаем

$$G = \frac{h^{k-2}\alpha^{k-1}}{D_k\varepsilon^{k-1}} \times \frac{1 - e^{-\alpha h(k-1)/\varepsilon}}{(1 - e^{-\alpha h/\varepsilon})^{k-1}} = \frac{h^{k-2}\alpha^{k-1}}{D_k\varepsilon^{k-1}} \times \frac{1 + e^{-\alpha h/\varepsilon} + \dots + e^{-\alpha(k-2)h/\varepsilon}}{(1 - e^{-\alpha h/\varepsilon})^{k-2}}.$$

Следовательно, для некоторой постоянной C_4 имеем

$$G \le C_4\frac{h^{k-2}}{D_k\varepsilon^{k-1}} \times \frac{1}{(1 - e^{-\alpha h/\varepsilon})^{k-2}}.$$

Следовательно, условие (11) выполняется, если D_k задавать на основе выполнения неравенства

$$D_k \ge C\frac{h^{k-2}}{\varepsilon^{k-1}} \times \frac{1}{(1 - e^{-\alpha h/\varepsilon})^{k-2}}. \tag{30}$$

Рассмотрим два случая для значения $\alpha h/\varepsilon$.

1. Пусть $\alpha h/\varepsilon < 1$. Тогда неравенство (30) выполняется для некоторой постоянной C при задании $D_k = 1/\varepsilon$. При этом выполнено (11) и в соответствии с теоремой справедлива оценка (12), поэтому

$$\varepsilon\left|L_{\Phi,k}^{(n)}(u,x) - u^{(n)}(x)\right| \le \varepsilon\left|L_k^{(n)}(p,x) - p^{(n)}(x)\right| + \frac{C_3}{h^{n-1}}\left|L_{k-1}(p, x_{m+k-1}) - p(x_{m+k-1})\right|.$$

Умножая это неравенство на ε^{k-2} и учитывая (25) с применением $k-1$ вместо k для второго слагаемого, для некоторой постоянной C_1 получаем

$$\varepsilon^{k-1}\left|L_{\Phi,k}^{(n)}(u,x) - u^{(n)}(x)\right| \le C_1 h^{k-n},\ x \in [x_m, x_{m+k-1}],\ k > n > 0. \tag{31}$$

2. Пусть $\alpha h/\varepsilon \geq 1$. Тогда условие (30) выполнено для некоторого C, если задать

$$D_k = \frac{h^{k-2}}{\varepsilon^{k-1}}. \tag{32}$$

Тогда выполнено условие (11), и по теореме справедлива оценка (12). Применяя в этой оценке (32), получаем

$$\varepsilon^{k-1}\left|L^{(n)}_{\Phi,k}(u,x) - u^{(n)}(x)\right| \leq \varepsilon^{k-1}\left|L^{(n)}_k(p,x) - p^{(n)}(x)\right| + \frac{C_3 h^{k-2}}{h^{n-1}}\left|L_{k-1}(p,x_{m+k-1}) - p(x_{m+k-1})\right|. \tag{33}$$

Покажем, что в (33) для некоторой постоянной C_5

$$\left|L_{k-1}(p,x_{m+k-1}) - p(x_{m+k-1})\right| \leq C_5 h. \tag{34}$$

В соответствии с [1], для произвольного $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$ имеем

$$L_{k-1}(p,x) = \sum_{j=m}^{m+k-2} p(x_j) \prod_{i=m,i\neq j}^{m+k-2} R_i,\ R_i = \frac{x - x_i}{x_j - x_i},\ \sum_{j=m}^{m+k-2}\prod_{i=m,i\neq j}^{m+k-2} R_i = 1.$$

Учитывая, что в (4) $|p'(x)| \leq 2C_0$, для некоторой постоянной C_5 имеем

$$\left|L_{k-1}(p,x) - p(x)\right| = \left|\sum_{j=m}^{m+k-2}\left[p(x_j) - p(x)\right]\prod_{i=m,i\neq j}^{m+k-2} R_i\right| \leq C_5 h.$$

Оценка (34) доказана. Применяя оценки (25), (34) в (33), получаем оценку (31).

Итак, для классической разностной формулы, основанной на дифференцировании многочлена Лагранжа, получены оценки погрешности (27), (28), а для формулы (10), точной на погранслойной составляющей, получена оценка погрешности (31). Из сравнения этих оценок следует, что формула подгонки к погранслойной составляющей является более точной. Как показано, погрешность классической формулы может быть порядка $O(1)$. В полученных оценках погрешностей абсолютная погрешность умножена на ε^{k-1}, и это согласуется с оценками (5), (25). Оценка (25) существенно применяется при обосновании (31).

Случай $k - 1 = n$. Классические формулы для вычисления производных, основанные на дифференцировании многочлена Лагранжа, в этом случае имеют вид [1]:

$$u^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n u_m}{h^n},\ x \in [x_m, x_{m+n}].$$

Покажем, что формула (10) при $k-1 = n$ существенно упрощается. Дифференцируя (8), получаем

$$u^{(n)}(x) \approx L^{(n)}_{\Phi,k}(u,x) = \frac{\Delta^n u_m}{\Delta^n \Phi_m}\Phi^{(n)}(x),\ x \in [x_m, x_{m+n}].$$

Случай $k-1 = n$ широко применяется при аппроксимации производных, при этом полученные оценки погрешностей (27), (28), (31) переходят в оценки относительной погрешности.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На интервале $[0, 1]$ зададим функцию

$$u(x) = \cos(\pi x) + e^{-x/\varepsilon}.$$

Здесь $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Сетку задаем равномерной. На каждом сеточном интервале $[x_{j-1}, x_j]$ применяем классическую формулу

$$u'(x) \approx L'_2(u,x) = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}$$

и формулу, точную на погранслойной составляющей

$$u'(x) \approx L'_{\Phi,2}(u,x) = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}}\Phi'(x). \quad (35)$$

В табл. 1 приведена погрешность

$$\Delta_{\varepsilon,N} = \varepsilon \max_j |L'_2(u,\tilde{x}_j) - u'(\tilde{x}_j)|,$$

где $\tilde{x}_j$ — узлы сгущенной в четыре раза сетки. Согласно результатам вычислений, точность не повышается с уменьшением шага h, если $\varepsilon = h$.

В табл. 2 приведена погрешность вычислений по формуле (35)

$$\Delta_{\varepsilon,N} = \varepsilon \max_j |L'_{\Phi,2}(u,\tilde{x}_j) - u'(\tilde{x}_j)|.$$

Результаты вычислений при всех ε и N согласуются с погрешностью порядка $O(h)$, что соответствует оценке (31).

Результаты других численных экспериментов по применению формулы (10) приведены в [6]—[8].

Таблица 1. Погрешность классической формулы для вычисления первой производной

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$2.25e-3$	$5.68e-4$	$1.42e-4$	$3.57e-5$	$8.92e-6$	$2.23e-6$
16^{-1}	$6.67e-2$	$2.56e-2$	$8.14e-3$	$2.30e-3$	$6.12e-4$	$1.58e-4$
32^{-1}	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-2$	$8.14e-3$	$2.30e-3$	$6.12e-4$
64^{-1}	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-2$	$8.14e-3$	$2.30e-3$
128^{-1}	$1.04e-1$	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-3$	$8.14e-3$
256^{-1}	$6.71e-2$	$1.04e-1$	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-2$
512^{-1}	$3.90e-2$	$6.71e-2$	$1.04e-1$	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$

Таблица 2. Погрешность вычисления первой производной по формуле (35)

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$2.98e-1$	$1.49e-1$	$7.43e-2$	$3.71e-2$	$1.85e-2$	$9.27e-3$
16^{-1}	$1.11e-1$	$5.17e-2$	$2.48e-2$	$1.22e-2$	$6.02e-3$	$3.00e-3$
32^{-1}	$1.23e-1$	$5.47e-2$	$2.55e-2$	$1.23e-2$	$6.01e-3$	$2.97e-3$
1024^{-1}	$1.84e-1$	$9.08e-2$	$4.39e-2$	$2.05e-2$	$9.01e-3$	$3.85e-3$
2048^{-1}	$1.59e-1$	$8.13e-2$	$3.95e-2$	$1.90e-2$	$8.83e-3$	$3.87e-3$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами на равномерной сетке. Предполагается, что для исходной функции одной переменной справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих. Погранслойная составляющая отвечает за большие градиенты функции и задается как функция общего вида, известная с точностью до множителя, может отражать различные особенности дифференцируемой функции. Получены оценки погрешности классических формул, основанных на дифференцировании многочлена Лагранжа и предложенных формул, по построению точных на погранслойной составляющей. Эти оценки зависят от порядка вычисляемой производной и от числа узлов в сеточном шаблоне для этой производной. Выделен случай, когда дифференцируемая функция соответствует решению краевой задачи при наличии экспоненциального пограничного слоя. В этом случае получены оценки погрешности, равномерные по малому параметру. Как по оценкам погрешностей, так и по результатам численных экспериментов получено преимущество в точности разработанных формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. *Задорин А. И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. ж. вычисл. матем. 2007. Т. 10. N 3. С. 267–275.
3. *Zadorin A. I., Zadorin N. A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Electron. Math. Rep. 2012. V. 9. P. 445–455.
4. *Kellogg R. B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. P. 1025–1039.
5. *Задорин А. И., Задорин Н. А.* Неполиномиальная интерполяция функций с большими градиентами и ее применение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. N 2. С. 179–188.
6. *Il'in V. P., Zadorin A. I.* Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1260. 042003.
7. *Zadorin A., Tikhovskaya S.* Formulas of numerical differentiation on a uniform mesh for functions with the exponential boundary layer // Internat. J. Numer. Anal. Model. 2019. V. 16. N 4. P. 590–608.
8. *Задорин А. И.* Формулы численного дифференцирования функций с большими градиентами // Сиб. ж. вычисл. матем. 2023. Т. 26. N 1. С. 17–26.
9. *Задорин А. И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. ж. вычисл. матем. 2018. Т. 21. N 3. С. 243–254.
10. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
11. *Задорин А. И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. N 2. С. 218–226.
12. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. N 4. С. 841–890.
13. *Roos H. G.* Layer-adapted meshes: milestones in 50 years of history // Appl. Math. arXiv:1909.08273v1, 2019.
14. *Даутов Р. З., Тимербаев М. Р.* Численные методы. Приближение функций: учебное пособие. Казань: Казан. ун-т, 2021.
15. *Kopteva N. V., Stynes M.* Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Appl. Numer. Math. 2001. V. 39. P. 47–60.
16. *Shishkin G. I.* Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations // Math. Proc. Royal Irish Acad. 2003. V. 103A. N 4. P. 169–201.

FORMULAS FOR NUMERICAL DIFFERENTIATION ON A UNIFORM GRID IN THE PRESENCE OF A BOUNDARY LAYER

A. I. Zadorin*

Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 4 Acad. Koptyug av. Novosibirsk, 630090 Russia

**e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.rv*

Received 10 October, 2023
Revised 28 December, 2023
Accepted 05 March, 2024

Abstract. The problem of numerical differentiation of functions with large gradients is considered. It is assumed that for the original function of one variable the decomposition is valid as the sum of a regular component with bounded derivatives up to a certain order and a boundary layer component having large gradients and known with an accuracy of up to a factor. Such a decomposition, in particular, is valid for solution of a singularly perturbed boundary value problem. The topic of the study is relevant, since the application of classical polynomial formulas of numerical differentiation to functions with large gradients can lead to significant errors. The error of the formulas of numerical differentiation, according to the construction of exact ones on the boundary layer component of the original function, is estimated. The results of numerical experiments are presented, consistent with the obtained error estimates.

Keywords: function of one variable, large gradients, special formula for numerical differentiation, error estimate.