
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.951

**СИММЕТРИИ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

© 2024 г. В. И. Елкин^{1,*}

¹ 117333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: elk_v@mail.ru

Поступила в редакцию: 08.08.2023 г.

Переработанный вариант 31.01.2024 г.

Принята к публикации 05.03.2024 г.

Рассматривается вопрос о симметриях уравнений с частными производными на основе использования дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением. Библ. 6.

Ключевые слова: группа симметрий, алгебра Ли.

DOI: 10.31857/S0044466924060048, **EDN:** XYXTRL

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t, y, p) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad (1)$$

После приведения этой системы к специальному виду в параметрической форме, разрешенной относительно всех производных

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u), \quad \partial_k = \partial/\partial t_k, \quad (2)$$

открывается возможность применения дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др. В [1] на основе понятия первого интеграла с помощью замены координат, в которую входят первые интегралы, была получена простая декомпозиция вида

$$\partial_k z^i = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \partial_k z^j = h_k^j(t, x, u), \quad j = q + 1, \dots, n. \quad (3)$$

В [2] рассматривается более общая декомпозиция, которая также имеет аналог в теории динамических систем с управлением под названием агрегирование (факторизация). Здесь исследуются симметрии, т.е. преобразования переменных, переводящие решения в решения. Кроме практического смысла тиражирования решений, симметрии определяют также некоторую декомпозицию уравнений с частными производными.

1. О СИММЕТРИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Симметрии дифференциальных уравнений — это такие преобразования зависимых и независимых переменных, которые переводят решения дифференциальных уравнений в решения. Таким образом, симметрии позволяют находить новые решения по известным решениям. Но этим не ограничивается роль симметрий. Различные качественные характеристики дифференциальных уравнений определяются существованием тех или иных симметрий. Например, для обыкновенных дифференциальных уравнений симметрии помогают находить первые интегралы, которые в случае уравнений механики дают законы сохранения. Для уравнений с частными производными математической физики симметрии также поставляют законы сохранения, которые имеют более сложный вид. Знание симметрий позволяет преобразовать дифференциальные уравнения к удобному для исследований виду, например, к некоторой декомпозиции. Аппарат симметрий для дифференциальных уравнений был разработан еще в 19 веке С. Ли в его теории непрерывных групп, которые стали называть группами Ли. Л. В. Овсянников возродил эту теорию под наименованием групповой анализ [3]. Немного подробнее.

Рассмотрим систему $\mathcal{L}$ дифференциальных уравнений первого порядка (1), включающую m независимых переменных $t = (t^1, \dots, t^m)$ и n зависимых переменных $y = (y^1, \dots, y^n)$. Решением системы $\mathcal{L}$ является гладкая функция $y = \Phi(t)$, удовлетворяющая системе $\mathcal{L}$. Будем отождествлять эту функцию, заданную в области $I \subset \mathbb{R}^m$ изменения переменных t , с ее графиком, т.е. с множеством точек

$$N = \{(t, y) \in \mathbb{R}^d : y = \Phi(t)\}, \quad d = m + n.$$

Этот график является m -мерным многообразием в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим некоторый диффеоморфизм (т.е. взаимно однозначное отображение, гладкое в обе стороны) $\psi : M \rightarrow M$, где M — область в $\mathbb{R}^d$, причем $N \subset M$. Под действием диффеоморфизма ψ многообразие N перейдет в некоторое многообразие $\hat{N} = \psi(N)$. Многообразие $\hat{N}$ не является, вообще говоря, графиком какой-либо однозначной функции $y = \hat{\Phi}(t)$. Понятие симметрии относится к случаю, когда $\hat{N}$ — график. Итак, будем говорить, что диффеоморфизм ψ является симметрией системы $\mathcal{L}$, если каждое решение $y = \Phi(t)$ системы, трактуемое как многообразие N , переводится этим диффеоморфизмом в многообразие $\hat{N} = \psi(N)$, являющееся графиком некоторой функции $y = \hat{\Phi}(t)$, представляющей собой решение системы $\mathcal{L}$. Естественным образом понятие симметрии обобщается для случая локального диффеоморфизма ψ .

Перейдем теперь к группам симметрий. Пусть S — локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов некоторой области в $\mathbb{R}^d$, состоящая из преобразований s^τ вида

$$t' = h(t, y, \tau), \quad y' = g(t, y, \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^1. \quad (4)$$

Под действием преобразования s^τ группы S многообразие N , являющееся графиком функции $y = \Phi(t)$, перейдет в многообразие $\hat{N}$, которое в параметрической форме (параметр t) задается уравнениями

$$t' = h(t, \Phi(t), \tau), \quad (5)$$

$$y' = g(t, \Phi(t), \tau). \quad (6)$$

Так как $h(t, y, 0) = t$, то (по крайней мере для малых τ) уравнения (5) можно разрешить относительно t и подставить в (6). В результате получим представление многообразия $\hat{N}$ в виде графика функции $y' = \hat{\Phi}(t')$. Будем говорить, что эта функция получается из функции $y = \Phi(t)$ действием преобразования s^τ . Группа S называется группой симметрий, если такие функции, получаемые действием преобразований группы на решения, снова являются решениями системы $\mathcal{L}$, т.е. преобразования s^τ — симметрии системы $\mathcal{L}$. Заметим, что симметрии часто называют допускаемыми преобразованиями, а группы симметрий — допускаемыми группами системы $\mathcal{L}$. Говорят также, что система $\mathcal{L}$ допускает преобразование или группу преобразований.

При рассмотрении вопроса о симметриях вместо нахождения конечных преобразований (5), (6) удобнее сначала отыскивать векторные поля (инфинитезимальные операторы)

$$X = \xi^k(t, y) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (7)$$

которые порождают однопараметрические группы симметрий (5), (6). Здесь и далее производится суммирование по повторяющемуся индексу. Более старое название для (7) — инфинитезимальные симметрии или допускаемые поля. Нахождение полей (7) осуществляется решением некоторых систем дифференциальных уравнений (так называемых определяющих уравнений). Эти уравнения находятся с помощью техники продолжения [3]. Для этой цели нужно перейти в так называемое расширенное пространство переменных, которое наряду с зависимыми и независимыми переменными содержит еще в качестве переменных производные зависимых переменных по независимым

$$p_k^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial t^k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

В качестве примера приведем определяющие уравнения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (t, y) \in R^{n+1}. \quad (8)$$

Это — равенства

$$X_0 \eta^i - f^i X_0 \xi = X f^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где X_0 — векторное поле (оператор полного дифференцирования в силу системы), имеющее вид

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (10)$$

Соотношения (9) можно записать в компактной форме с помощью операции коммутирования векторных полей

$$[X_0, X] = (X_0 \xi) X_0. \quad (11)$$

Перейдем к симметриям динамических систем с управлением [4].

Динамической системой с управлением называется система уравнений вида

$$\dot{y}^i = g^i(t, y, u), \quad i = 1, \dots, n, \quad (t, y) \in M \subset R^{n+1}, \quad u \in U \subset R^r. \quad (12)$$

Предполагается, что функции g^i , $\partial f^i / \partial y^j$, $\partial g^i / \partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно называют y фазовыми переменными (состояниями), u — управлениями (внешними воздействиями). Множество M , называемое фазовым пространством, — область, U — область. Управления могут быть кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае они называются допустимыми. Решением или фазовой траекторией системы (12) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (12).

Далее будем считать, что управления являются постоянными. Дело в том, что для исследования декомпозиции этого достаточно, а в качестве приложения симметрий будет именно декомпозиция. При этом будем следовать работе [4], которая затем будет обобщена для дифференциальных уравнений с частными производными в следующем разделе. Кстати, Ю. Н. Павловский (автор), будучи учеником Л. В. Овсянникова, выполнил первые исследования по групповому анализу уравнений двумерного пограничного слоя [5]. Предполагаем, что однопараметрические группы симметрий порождаются векторными полями (инфинитезимальными) операторами

$$X = \xi(t, y) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha(t, y, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (13)$$

действующими в $(n + r + 1)$ -мерном пространстве переменных (t, y, u) .

Условие того, что поле X допускається системой, выглядит следующим образом:

$$X_0 \eta^i - f^i X_0 \xi = X f^i, \quad (14)$$

$$X_0(\omega^\alpha) = 0. \quad (15)$$

где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

есть оператор полного дифференцирования.

Полагая

$$X^* = \theta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad X = \xi X_0 + X^*, \quad (16)$$

из (14), (15) получим

$$X_0(\theta^i) = X^*(f^i), \quad (17)$$

$$X_0(\omega^\alpha) = 0. \quad (18)$$

Это можно записать с помощью коммутатора

$$[X_0, X^*] = 0 \quad (19)$$

Соотношения (17), (18) представляют собой дифференциальные уравнения относительно компонент допускаемого поля (16). После их нахождения симметрии находятся решением некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Симметрии, как уже отмечалось, могут быть использованы для построения новых решений системы уравнений по известным решениям. Существует еще одно приложение симметрий для упрощения исследования систем уравнений, а именно, декомпозиция этих уравнений.

2. СИММЕТРИИ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Вернемся к дифференциальным уравнениям с частными производными (1), причем в специальной форме (2)

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u) \quad (20)$$

$$t \in I \subset R^m, \quad y \in L \subset R^n, \quad u \in U \subset R^s, \quad (21)$$

где I, L, U — некоторые области. Заметим, что если в (1) входят управляющие воздействия, т.е. это так называемая система управления с распределенными параметрами, то при переходе в специальную форму (2) управляющие воздействия переходят в разряд параметрических переменных и в математическом смысле не отличаются от них [2]. Исследуем вопрос о существовании инфинитезимальных симметрий (допускаемых векторных полей) для системы (20). Как и в [1, 2], воспользуемся аналогией систем (2) с управляемыми динамическими системами (12). Эта аналогия заключается в следующем.

Каждое решение $y(t)$ управляемой динамической системы (12) получается после подстановки в правую часть управлений $u(t)$ из некоторого класса допустимых функций. С другой стороны, решения $y(t)$ системы (20) соответствуют некоторому выбору параметрической функции $u(t)$ также из некоторого класса. Однако есть существенное различие в классах допустимых “управлений”. Для управляемых динамических систем классы допустимых управлений достаточно известны и широки: от класса кусочно-непрерывных функций до класса измеримых функций. Для систем (20) заранее задать класс допустимых “управлений” затруднительно, ибо далеко не каждый выбор функций $u(t)$ приводит к решению $y(t)$. Препятствием является, в частности, возможность несовместности полученной системы после подстановки $u(t)$. Тем не менее идеология теории управлений может быть полезна из-за возможности привлечения математического аппарата, разработанного для систем вида (12).

Далее будем считать, что параметрические переменные (“управления”) являются всевозможными постоянными. Дело в том, что (также как и для управляемых систем (12)) для исследования декомпозиции этого достаточно (см. [2]) а в качестве приложения симметрий будет именно декомпозиция. При этом будем следовать результатам работы [4], которые здесь естественным образом обобщаются на дифференциальные уравнения с частными производными. Итак, речь идет нахождении векторных полей

$$X = \xi^k(t, y, u) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y, u) \frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha(t, y, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (22)$$

По аналогии с управляемыми динамическими системами, условие того, что поле X допускается системой, выглядит следующим образом:

$$X_l \eta^i - g^i X_l \xi = X g^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (23)$$

$$X_l(\omega^\alpha) = 0, \quad (24)$$

где X_l — операторы полного дифференцирования системы (20) по переменным t^l

$$X_l = g_l^i(t, y, u) \partial / \partial y^i, \quad l = 1, \dots, m. \quad (25)$$

Это — аналоги оператора полного дифференцирования X_0 по одной независимой переменной для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее при исследовании симметрий и декомпозиции рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными специального вида, причем для простоты и не ограничивая общности “автономные”, т.е с правыми частями, не зависящими от аргументов t .

$$\partial_k y^i = g_k^i(y, u), \quad (26)$$

$$t \in I \subset R^m, \quad y \in L \subset R^n, \quad u \in U \subset R^s, \quad (27)$$

где I, L, U — некоторые области. Речь пойдет о декомпозиции системы (26) с помощью замены зависимых переменных y , точнее о возможности преобразования системы с помощью замены переменных

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (28)$$

к виду

$$\partial_k z^l = h_k^l(z^1, \dots, z^m, u), \quad l = 1, \dots, m, \quad (29)$$

$$\partial_k z^i = h_k^i(z^1, \dots, z^n, u), \quad i = m+1, \dots, n. \quad (30)$$

Если такое представление возможно, то будем говорить, что система (26) допускает декомпозицию (агрегирование) по зависимым переменным порядка $n - m$, причем первые m функций в замене переменных (28)

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = 1, \dots, m, \quad (31)$$

называются агрегатами, а система (29) — агрегированной системой.

Замена зависимых переменных (28) в системе (26) осуществляется следующим образом: нужно подействовать операторами полного дифференцирования (25) на функции (28)

$$X_l(\varphi^i(y)) = g_l^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} \quad (32)$$

и выразить функционально полученные функции через (28)

$$g_l^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y), u). \quad (33)$$

Функции

$$h^i(z^1, \dots, z^n, u) \quad (34)$$

являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (29), (30) возникает, когда первые m функций (33) функционально выражаются только через агрегаты (31), т.е.

$$g_l^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y), \dots, \varphi^m(y)u), \quad i = 1 \dots, m. \quad (35)$$

Непосредственное применение этого условия не дает конструктивного метода нахождения агрегатов и проверки возможности декомпозиции. Поэтому в [2] применен опосредственный подход, когда сначала с помощью решения некоторых систем дифференциальных уравнений отыскиваются полные семейства векторных полей, для которых агрегаты являются интегралами, а затем находятся агрегаты, т.е. интегралы этих семейств. При этом совместность упомянутых систем дифференциальных уравнений определяет возможность декомпозиции.

Для применения симметрий в вопросах декомпозиции вида (29), (30) в силу вышеуказанных причин (в частности, автономности) естественно рассматривать симметрии, не меняющие переменные t и параметрические переменные u . Для соответствующих полей (22) это означает, что $\xi^k = 0$, $\omega^\alpha = 0$.

Тогда для искомым векторных полей

$$X = \eta^i(t, y, u) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (36)$$

выражения (18), (24) можно с помощью операции коммутирования заменить компактным выражением

$$[X_l, X] = 0 \quad l = 1, \dots, m. \quad (37)$$

Векторные поля (36), удовлетворяющие (37), образуют алгебру Ли, обозначаемую через $\mathfrak{a}$, т.е. коммутаторы и линейные комбинации полей из $\mathfrak{a}$ снова принадлежат $\mathfrak{a}$. Кроме того, введем подалгебру, состоящую из полей вида

$$X = \eta^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (38)$$

которую обозначим через $\mathfrak{a}_0$. Заметим, что существуют аналоги этих алгебр для управляемых динамических систем, в частности, была обнаружена глубокая связь свойств структуры управляемой динамической системы со свойствами соответствующих алгебр. Вероятно, что существуют подобные связи и для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Здесь рассматривается применение алгебры $\mathfrak{a}_0$ для исследования возможности декомпозиции системы (26).

Напомним, что полным семейством векторных полей или операторов называется семейство полей

$$Z_a = b_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = 1, \dots, p \quad (39)$$

(по повторяющемуся индексу здесь и далее производится суммирование), если

$$1) \quad \text{rank} \|b_a^i(y)\| = p,$$

т.е. векторы $Z_a(y)$, $a = 1, \dots, p$ линейно независимы в каждой точке $y \in M$ или, как еще говорят, линейно несвязанны в области M ;

$$2) \quad [Z_a, Z_c] = h_{ac}^d(y) Z_d, \quad a, c, d = 1, \dots, p, \quad (40)$$

т.е. все коммутаторы $[Z_a, Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h_{ac}^d(y)$ через остальные поля семейства.

Следующее утверждение определяет некоторое условие декомпозиции на основе существования симметрий.

Теорема. Если в $\mathfrak{a}_0$ существует полное семейство векторных полей

$$Z_a = b_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, l = 1, \dots, p < n, \quad (41)$$

то система допускает декомпозицию (29), (30) системы (26), причем агрегатами являются полный набор интегралов этого семейства, где $p = n - m$.

Доказательство. У полного семейства (41) имеется полный набор функционально независимых интегралов $\varphi^i(y)$, $i = 1, \dots, m = n - p$, т.е. $Z_a(\varphi^i(y)) = 0$ [6]. Рассмотрим выражения

$$[X_l, Z_a](\varphi^i(y)) = X_l(Z_a(\varphi^i(y)) - Z_a(X_l(\varphi^i(y)))) = 0. \quad (42)$$

Из (42) вытекает, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ являются интегралами семейства (39), т.е. $Z_a(X_l(\varphi^i(y))) = 0$ и, согласно [6], функционально выражаются через полный набор интегралов и, следовательно, $\varphi^i(y)$ являются агрегатами для системы (26).

Выражения (37) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$X_l(b_a^i) = Z_a(g^i), \quad (43)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad a, c = 1, \dots, p, \quad u \in U,$$

относительно неизвестных компонент семейства (39). В (43) выражения $\xi_u(b_a^i)$, $Z_a(f^i)$ представляют собой действия полей ξ_u , Z_a на функции $b_a^i(y)$, g^i как операторов. После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i = 1, \dots, m = n - p$, полного семейства (39), что, согласно [6, с. 12], сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых частей фактор-системы следует функции $g^j(y, u) \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^j}$ выразить функционально через функции $\varphi^i(y)$, $i = 1, \dots, m = n - p$, т.е. представить их в виде

$$g^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^p(\varphi^1(y), \dots, \varphi^m(y), u).$$

Построенные функции h^k и определяют искомую фактор-систему

$$\dot{z}^k = h^k(z, u), \quad k = 1, \dots, m.$$

Пример:

$$\begin{aligned} \partial_k y_1 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + u_1, \\ \partial_k y_2 &= 2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + u_2, \\ \partial_k y_3 &= 2y_1 y_3 + u_3. \end{aligned}$$

Убеждаемся, что компоненты полей семейства

$$\begin{aligned} X_1 &= \eta_{11} \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{21} \frac{\partial}{\partial y_2} + \eta_{31} \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ X_2 &= \eta_{12} \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{22} \frac{\partial}{\partial y_2} + \eta_{32} \frac{\partial}{\partial y_3}, \end{aligned}$$

такие, что

$$\eta_{11} + \eta_{21} + \eta_{31} = 0, \quad \eta_{12} + \eta_{22} + \eta_{32} = 0,$$

удовлетворяют соответствующим уравнениям (37), причем интеграл семейства:

$$y_1 + y_2 + y_3.$$

Для нахождения агрегированной системы следует подействовать операторами полного дифференцирования на этот интеграл и выразить функционально полученный результат через интеграл. В полученном выражении следует заменить интеграл на новую переменную z_1 . В результате, агрегированная система имеет вид

$$\partial_k z_l = z_1^2 + u_1 + u_2 + u_3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елкин В. И. Об одном условии управляемости систем с сосредоточенными и распределенными параметрами // Труды ИСА РАН. 2022. Т. 72. N 4. С. 11–15.
2. Елкин В. И. Агрегирование и декомпозиция систем дифференциальных уравнений с частными производными и систем управления с распределенными параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. N 9. С. 1575–1586.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
4. Павловский Ю. Н. Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. N 4. С. 862–872; Т. 14. N 5. С. 1093–1103.
5. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. N 2. С. 280–294.
6. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 359 с.

SYMMETRIES AND DECOMPOSITION OF SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DISTRIBUTED PARAMETERS CONTROL SYSTEMS

V. I. Elkin*

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Vavilova st., 44, Moscow, 119333 Russia

**e-mail: elk_v@mail.ru*

Received 08 August, 2023

Revised 31 January, 2024

Accepted 05 March, 2024

Abstract. The issue of symmetries of partial differential equations is considered based on the use of differential-geometric and algebraic methods of the theory of dynamic systems with control.

Keywords: symmetry group, Lie algebra.