

УДК 517.63

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ОКЕАНСКИХ ТЕЧЕНИЙ¹⁾

© 2024 г. С. Л. Скороходов^{1,*}, Н. П. Кузьмина^{2,**}

¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П. П. Ширишова РАН, Россия

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

**e-mail: kuzmina@ocean.ru

Поступила в редакцию 12.01.2024 г.

Переработанный вариант 09.02.2024 г.

Принята к публикации 15.02.2024 г.

Разработан новый эффективный аналитико-численный метод решения задачи для уравнения эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Построенный метод применен к анализу малых возмущений океанских течений конечного поперечного масштаба с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида. Для возникающей спектральной несамосопряженной задачи построены асимптотики собственных функций и собственных значений при малых значениях волнового числа k и показано существование счетного множества комплексных собственных значений с неограниченно убывающей мнимой частью. На отрезке интегрирования $z \in [-1, 1]$ введена система трех окрестностей, в каждой из которых решение строится в виде степенных разложений, гладкая сшивка которых позволяет эффективно вычислять собственные функции и собственные значения с высокой точностью. Рассчитаны траектории комплексных собственных значений для различных параметров задачи при изменении волнового числа k и показано существование двойных собственных значений. Кратко представлена сложная картина возникновения неустойчивости моделируемого течения в зависимости от физических параметров задачи. Библ. 16. Фиг. 7.

Ключевые слова: спектральная несамосопряженная задача, асимптотические разложения, высокоточный численный метод, двойные собственные значения.

DOI: 10.31857/S0044466924060088, EDN: XYOCBH

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[10] представлены результаты исследования устойчивых и неустойчивых малых возмущений геострофических течений с линейным и параболическим вертикальными профилями скорости. Модели основывались на уравнении эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [1]–[4]. Анализ проводился для течений с боковыми границами в конечных по вертикали слоях. Для течения с параболическим вертикальным профилем скорости были рассмотрены два частных случая: а) максимум скорости течения расположен к середине слоя (см. [1]–[5]); б) максимум скорости течения достигался на верхней или нижней границах слоя (см. [8]). Однако в океане наблюдаются течения с максимумом внутри слоя, а не только на его границах или в центре слоя. В связи с этим исследование динамики такого течения, т.е. течения с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида, является актуальным. Такая задача была рассмотрена в работах [9], [10] с условиями равенства нулю потоков плавучести на границах слоя

¹⁾ Работа выполнена при участии Н. П. Кузьминой при поддержке бюджетного финансирования Института океанологии им. П. П. Ширишова РАН (тема FMWE-2024-0015).

$z = -1$ и $z = 1$. Представляется важным также исследовать динамику течения и при других граничных условиях, а именно, при условиях прилипания. Это соответствует равенству нулю возмущений горизонтальных скоростей на границах слоя, что эквивалентно, согласно формулировке задачи, равенству нулю возмущения давления на границах слоя.

Настоящая работа посвящена разработке нового эффективного подхода к аналитико-численному методу исследования устойчивости геострофического течения с параболическим профилем общего вида при различных граничных условиях. Возникающая модельная спектральная задача на отрезке $z \in [-1, 1]$ решается с помощью покрытия этого отрезка системой окрестностей, представления в каждой из окрестностей искомой собственной функции (СФ) $F(z)$ в виде степенных разложений и последующей гладкой сшивки. Предложенный метод позволяет эффективно и с высокой точностью находить собственные значения (СЗ) этой задачи. Показано, что при определенных физических параметрах могут возникать двойные СЗ. Представлены расчеты траекторий СЗ при непрерывном изменении волнового числа в задаче.

Постановка задачи. Областью исследования модельного течения является бесконечный в горизонтальном направлении слой толщины $2H$ с верхней и нижней границами $Z_1 = H$ и $Z_0 = -H$ и боковыми границами $Y_0 = 0$ и $Y_1 = L$. Декартовы координаты рассматриваемого слоя следующие: продольная переменная $X \in (-\infty, \infty)$, поперечная переменная $Y \in [0, L]$, вертикальная переменная $Z \in [-H, H]$.

Основываясь на методах анализа неустойчивости таких течений (см. работы [1]–[5]) будем представлять отклонение безразмерного давления в виде бегущей вдоль оси X волны:

$$p(X, Y, Z; T) = \sin\left(\pi n \frac{Y}{L}\right) e^{ik(X-cT)} F\left(\frac{Z}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где k — волновое число возмущения вдоль оси X , L/n — масштаб возмущения в направлении Y , c — комплексная фазовая скорость волны, а $F(Z/H)$ — искомый вертикальный профиль возмущения давления.

В безразмерных переменных задача исследования устойчивости течения с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида сводится к решению спектральной задачи на отрезке $z \in [-1, 1]$. Введение безразмерных переменных (x, y, z) для этой задачи дано, например, в [3], [4]. При этом вертикальный профиль скорости основного течения в безразмерном виде будет иметь вид

$$U(z) = 1 - \alpha z^2 + \beta z, \quad (2)$$

где параметры α и β неотрицательны. Из естественного условия равенства нулю скорости $U(z)$ на нижней границе слоя $z = -1$ следует, что

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Постановка задачи исследования устойчивости малых возмущений течения с вертикальным профилем скорости $U(z)$ проводится аналогично задачам в [3]–[10] и сводится к решению следующей спектральной задачи на отрезке $z \in [-1, 1]$.

Задача. Найти комплекснозначные СФ $F = F(z)$ и СЗ “ c ”, удовлетворяющие на отрезке $z \in [-1, 1]$ уравнению

$$\frac{1}{ikR} \left(F^{(IV)} - \text{Bu Pr}(k^2 + \pi^2 n^2) F'' \right) = (1 - \alpha z^2 + \beta z - c) \left(F'' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2) F \right) + 2\alpha F \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$\frac{1}{ikR} F'''(-1) = -c F'(-1) - (\beta + 2\alpha) F(-1), \quad F(-1) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{ikR} F'''(1) = (1 - \alpha + \beta - c) F'(1) - (\beta - 2\alpha) F(1), \quad F(1) = 0, \quad (6)$$

причем неотрицательные параметры α и β удовлетворяют условию (3).

Здесь использованы следующие обозначения: $R = Re H/L$, где Re — число Пекле (аналог числа Рейнольдса), n — число полуволн в поперечном направлении ($n = 1, 2, \dots$), Pr — число Прандтля, Bu — число Бургера, i — мнимая единица.

Краевые условия в (5), (6) с участием третьих производных задают непротекание на горизонтальных границах слоев, а условия для самих функций описывают равенство нулю возмущений давления на этих границах.

Поставленная задача является несамосопряженной, сингулярно возмущенной (для реальных течений величина kR может быть очень большой), а спектральный параметр “ c ”, входит в уравнение и в краевые условия. Задача будет иметь счетное множество СФ $F_m(z)$ и соответствующих им СЗ c_m . Неустойчивые по времени возмущения давления $p(x, y, z; t)$ возникают для тех СФ, которым соответствуют СЗ c_m с положительной мнимой частью $Im(c) > 0$, что следует из представления (1).

Исследуемая задача (4)–(6) в частном случае параметра $\alpha = 0$ обладает симметрией СЗ относительно прямой $Re(c) = 1$.

Теорема. Собственные значения задачи (4)–(6) при вещественных параметрах k, R, Bu, Pr, n и $\alpha = 0$ обладают симметрией относительно прямой $Re(c) = 1$, т.е. если c_m является СЗ задачи, то и величина $\hat{c}_m = 2 - Re(c_m) + iIm(c_m)$ также является СЗ этой задачи.

Доказательство совпадает с доказательством аналогичного факта в работе [6] и основано на анализе вещественной и мнимой частей СФ $F(z)$, соответствующей СЗ c_m .

1. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ

Уравнение (4) не имеет конечных особых точек, поэтому его решение $F(z)$ является целой функцией (см., например, [11]), степенные разложения которой с центром в любой точке z_0 сходятся при всех значениях аргумента z . Метод расчета таких СФ и соответствующих СЗ был разработан ранее в [5], [6] и показал свою высокую точность и быстроедействие. Суть этого подхода состоит в построении степенных разложений $F(z)$ в граничных точках $z = -1$ и $z = 1$ с тождественным удовлетворением краевым условиям и в последующей сшивке этих разложений в некоторой точке $z_* \in (-1, 1)$.

В настоящей работе использовано три степенных разложения искомого решения $F(z)$ в точках $z = -1$, $z = 0$ и $z = 1$ с последующей гладкой сшивкой первого и второго разложения в точке $z_{*,1} = -1/2$ и сшивкой второго и третьего разложения в точке $z_{*,2} = 1/2$. Сходимость таких разложений определяется скоростью убывания коэффициентов этих разложений, которая оказывается равной для всех трех случаев. Поэтому использование трех окрестностей с радиусом $r = 1/2$ для покрытия отрезка $z \in [-1, 1]$ требует гораздо меньшей длины разложений при достижении заданной точности, нежели в случае лишь двух окрестностей с радиусом $r = 1$. Помимо этого, при нахождении четных или нечетных решений $F(z)$ такой подход позволяет явно выделять соответствующие решения, благодаря построению разложения в точке $z = 0$.

Зафиксируем все параметры задачи и, в частности, спектральный параметр c ; решение $F(c; z)$ уравнения (4) представим в виде разложений в точках $z = -1$, $z = 0$ и $z = 1$:

$$F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(c)(z+1)^m, \quad F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(c)z^m, \quad F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(c)(z-1)^m, \quad (7)$$

сходящихся при любых z , $|z| < \infty$, где коэффициенты $a_m(c)$, $b_m(c)$ и $d_m(c)$ зависят от всех параметров задачи, но зависимость от c выделим отдельно, поскольку в дальнейшем этот параметр будем варьировать.

Подставляя представления (7) в уравнение (4), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_m , b_m и d_m , $m = 0, 1, \dots$,

$$a_{m+4} = \left\{ (m+1)(m+2) \left[PrBu(\pi^2 n^2 + k^2) - ikRc \right] a_{m+2} + ikRm(m+1)(1+\alpha)a_{m+1} + \right.$$

$$+ ikR [cBu(\pi^2 n^2 + k^2) - \alpha(m-2)(m+1)] a_m - ikR Bu(\pi^2 n^2 + k^2)(1+\alpha)a_{m-1} + \\ + ikR \alpha Bu(\pi^2 n^2 + k^2)a_{m-2} \Big\} \Big[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \Big]^{-1}, \quad (8)$$

$$b_{m+4} = \Big\{ (m+1)(m+2) \Big[PrBu(\pi^2 n^2 + k^2) + ikR(1-c) \Big] b_{m+2} + ikR \beta m(m+1)b_{m+1} - \\ - ikR [\alpha(m-2)(m+1) + (1-c)Bu(\pi^2 n^2 + k^2)] b_m - ikR \beta Bu(\pi^2 n^2 + k^2)b_{m-1} + \\ + ikR \alpha Bu(\pi^2 n^2 + k^2)b_{m-2} \Big\} \Big[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \Big]^{-1}, \quad (9)$$

$$d_{m+4} = \Big\{ (m+1)(m+2) \Big[PrBu(\pi^2 n^2 + k^2) + (2\beta - c)ikR \Big] d_{m+2} + ikR(\beta - 2\alpha)m(m+1)d_{m+1} - \\ - ikR [Bu(\pi^2 n^2 + k^2)(2\beta - c) + \alpha(m-2)(m+1)] d_m - ikR Bu(\pi^2 n^2 + k^2)(\beta - 2\alpha)d_{m-1} + \\ + ikR \alpha Bu(\pi^2 n^2 + k^2)d_{m-2} \Big\} \Big[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \Big]^{-1}; \quad (10)$$

в этих формулах для коэффициентов a_{-2} , a_{-1} , b_{-2} , b_{-1} , d_{-2} и d_{-1} необходимо положить 0, поскольку в разложениях (7) участвуют лишь коэффициенты с неотрицательными номерами $m \geq 0$.

Асимптотическое поведение коэффициентов a_m , b_m и d_m с ростом номера m может быть исследовано на основе теории Пуанкаре–Перрона анализа полученных рекуррентных уравнений (8), (9) и (10) (см. [12]). Для наиболее медленно убывающих решений коэффициентов a_m , b_m и d_m это асимптотическое поведение зависит от параметра α следующим образом:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{Q}{\sqrt{m}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{Q}{\sqrt{m}}, \quad \frac{d_{m+1}}{d_m} \sim \frac{Q}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad Q = (-ikR\alpha)^{1/4}, \quad \alpha \neq 0, \\ \frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{Q}{m^{2/3}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{Q}{m^{2/3}}, \quad \frac{d_{m+1}}{d_m} \sim \frac{Q}{m^{2/3}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad Q = (ikR)^{1/3}, \quad \alpha = 0.$$

Такая скорость убывания коэффициентов a_m , b_m и d_m обеспечивает быструю сходимость используемых разложений (7) в соответствующих множествах $|z+1| \leq 1/2$, $|z| \leq 1/2$, $|z-1| \leq 1/2$.

Учет краевых условий (5) и (6) дает связь коэффициентов a_m и d_m , $m = 0, 1, 2, 3$:

$$a_0 = 0, \quad a_3 = -\frac{ikR}{6} [c a_1 + (1+\alpha)a_0], \quad (11)$$

$$d_0 = 0, \quad d_3 = \frac{ikR}{6} [(2\beta - c) d_1 - (\beta - 2\alpha)d_0]. \quad (12)$$

Теперь построим линейно-независимые решения уравнения (4) в виде (7). Поскольку в точках $z = -1$ и $z = 1$ задано по два условия (5) и (6), то в этих точках достаточно построить по два независимых решения, а в точке $z = 0$ необходимо построить четыре независимых решения.

Сначала определим два решения $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$ в виде разложений по степеням $(z+1)^m$. Для этого полагаем $a_0^{(1)} = 0$ и задаем коэффициенты $a_1^{(1)}$ и $a_2^{(1)}$ решения $F_1(c; z)$ следующими:

$$a_1^{(1)} = 1, \quad a_2^{(1)} = 0;$$

значение $a_3^{(1)}$ определим по (11), а все последующие $a_m^{(1)}$ вычислим по рекурсии (8), где полагаем $a_{-1}^{(1)} = a_{-2}^{(1)} = 0$.

Для второго решения $F_2(c; z)$ полагаем $a_0^{(2)} = 0$, коэффициенты $a_1^{(2)}$ и $a_2^{(2)}$ задаем следующими:

$$a_1^{(2)} = 0, \quad a_2^{(2)} = 1,$$

а все последующие $a_m^{(2)}$ вычислим аналогично предыдущему.

Линейная комбинация $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$ является общим решением $F(c; z)$ уравнения (4) с краевыми условиями (5) в точке $z = -1$:

$$F(c; z) = t_1 F_1(c; z) + t_2 F_2(c; z), \quad (13)$$

где t_1 и t_2 — произвольные коэффициенты.

Теперь построим четыре независимых решения $F_j(c; z)$, $j = \{3, 4, 5, 6\}$, в виде разложений в точке $z = 0$, задав по четыре первых коэффициента $b_0^{(j)}$, $b_1^{(j)}$, $b_2^{(j)}$ и $b_3^{(j)}$.

Для функции $F_3(c; z)$ полагаем

$$b_0^{(3)} = 1, \quad b_1^{(3)} = 0, \quad b_2^{(3)} = 0, \quad b_3^{(3)} = 0,$$

а все последующие коэффициенты $b_m^{(3)}$ вычислим по рекурсии (9), где полагаем $b_{-1}^{(3)} = b_{-2}^{(3)} = 0$.

Для функции $F_4(c; z)$ полагаем

$$b_0^{(4)} = 0, \quad b_1^{(4)} = 1, \quad b_2^{(4)} = 0, \quad b_3^{(4)} = 0,$$

а все последующие коэффициенты $b_m^{(4)}$ вычислим аналогично предыдущему.

Для функции $F_5(c; z)$ полагаем

$$b_0^{(5)} = 0, \quad b_1^{(5)} = 0, \quad b_2^{(5)} = 1, \quad b_3^{(5)} = 0,$$

а все последующие коэффициенты $b_m^{(5)}$ вычислим по рекурсии (9).

Наконец, для функции $F_6(c; z)$ полагаем

$$b_0^{(6)} = 0, \quad b_1^{(6)} = 0, \quad b_2^{(6)} = 0, \quad b_3^{(6)} = 1,$$

а все последующие коэффициенты $b_m^{(6)}$ вычислим аналогично.

Линейная комбинация $F_j(c; z)$, $j = \{3, 4, 5, 6\}$, также является общим решением $F(c; z)$ уравнения (4):

$$F(c; z) = t_3 F_3(c; z) + t_4 F_4(c; z) + t_5 F_5(c; z) + t_6 F_6(c; z), \quad (14)$$

где t_j , $j = \{3, 4, 5, 6\}$, — произвольные коэффициенты.

Теперь построим два решения $F_7(c; z)$ и $F_8(c; z)$ в виде разложений по степеням $(z-1)^m$. Для этого, в соответствии с условием (12), полагаем $d_0^{(7)} = 0$ и задаем коэффициенты $d_1^{(7)}$ и $d_2^{(7)}$ решения $F_7(c; z)$ следующими:

$$d_1^{(7)} = 1, \quad d_2^{(7)} = 0;$$

значение $d_3^{(7)}$ определим по (12), а все последующие $d_m^{(7)}$ вычислим по рекурсии (10), где полагаем $d_{-1}^{(7)} = d_{-2}^{(7)} = 0$.

Для второго решения $F_8(c; z)$ полагаем $d_0^{(8)} = 0$, коэффициенты $d_1^{(8)}$ и $d_2^{(8)}$ задаем следующими:

$$d_1^{(8)} = 0, \quad d_2^{(8)} = 1,$$

а все последующие $d_m^{(8)}$ вычислим аналогично функции $F_7(c; z)$.

Линейная комбинация $F_7(c; z)$ и $F_8(c; z)$ является общим решением $F(c; z)$ уравнения (4) с краевыми условиями (6) в точке $z = 1$:

$$F(c; z) = t_7 F_7(c; z) + t_8 F_8(c; z), \quad (15)$$

где t_7 и t_8 — произвольные коэффициенты.

Имея представления искомого решения $F(z)$ в трех окрестностях точек $z = -1$, $z = 0$ и $z = 1$, теперь сведем задачу нахождения СФ и соответствующих СЗ к гладкой сшивке построенных разложений в некоторых точках $z_* \in (-1, 1)$. Для этого потребуем совпадения функции (13) и ее трех производных в точке $z_{*,1} = -1/2$ с функцией (14) и ее тремя производными, т.е.

$$t_1 F_1^{(q)}(c; z_{*,1}) + t_2 F_2^{(q)}(c; z_{*,1}) - \sum_{m=3}^6 t_m F_m^{(q)}(c; z_{*,1}) = 0, \quad q = \{0, 1, 2, 3\}. \quad (16)$$

Аналогично этому запишем условие сшивки функции (14) в точке $z_{*,2} = 1/2$ с функцией (15):

$$\sum_{m=3}^6 t_m F_m^{(q)}(c; z_{*,2}) - t_7 F_7^{(q)}(c; z_{*,2}) - t_8 F_8^{(q)}(c; z_{*,2}) = 0, \quad q = \{0, 1, 2, 3\}. \quad (17)$$

Систему восьми уравнений (16), (17) относительно искомых весовых коэффициентов t_m , $m = \{1, 2, \dots, 8\}$, запишем в матричном виде

$$\mathbf{A}(c) \mathbf{t} = \mathbf{0}; \quad (18)$$

зависимость элементов матрицы $\mathbf{A}$ от спектрального параметра c здесь указана явно.

Первые четыре строки матрицы $\mathbf{A}(c)$ формируются в соответствии с системой уравнений (16):

$$\begin{aligned} A_{q+1,1} &= F_1^{(q)}(c; z_{*,1}), & A_{q+1,2} &= F_2^{(q)}(c; z_{*,1}), & A_{q+1,7} &= A_{q+1,8} = 0, \\ A_{q+1,m} &= -F_m^{(q)}(c; z_{*,1}), & q &= \{0, 1, 2, 3\}, & m &= \{3, 4, 5, 6\}, \end{aligned} \quad (19)$$

а вторые четыре строки — в соответствии с системой (17):

$$\begin{aligned} A_{q+5,1} &= A_{q+5,2} = 0, & A_{q+5,7} &= -F_7^{(q)}(c; z_{*,2}), & A_{q+5,8} &= -F_8^{(q)}(c; z_{*,2}), \\ A_{q+5,m} &= F_m^{(q)}(c; z_{*,2}), & q &= \{0, 1, 2, 3\}, & m &= \{3, 4, 5, 6\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для нетривиального решения этой однородной системы (18) потребуем равенства нулю ее детерминанта

$$W(c) = \det(\mathbf{A}(c)) = 0, \quad (21)$$

что и определяет характеристическое уравнение для искомых собственных значений.

Решая уравнение (21) относительно величины c , получаем искомые СЗ — комплексные значения скорости бегущей волны, зависящие от всех параметров задачи (4)–(6). Найденные при этом коэффициенты t_m , $m = \{1, 2, \dots, 8\}$, позволяют (с точностью до произвольного множителя) найти соответствующую СФ $F(c; z)$ в виде комбинации разложений (13)–(15).

Решение уравнения (21) будем строить с помощью итерационного метода Ньютона:

$$c^{(l+1)} = c^{(l)} - \frac{W(c^{(l)})}{W'(c^{(l)})}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

а начальные приближения $c^{(0)}$ будем брать на основе метода продолжения по параметру k и из полученных далее асимптотических разложений для СЗ при $k \rightarrow 0$.

Необходимая для метода Ньютона производная $W'(c^{(l)})$ находилась с помощью явно-го дифференцирования по спектральному параметру “ c ”, разложений для всех производных $F_m^{(q)}(c; z_{*,1})$, $F_m^{(q)}(c; z_{*,2})$, $m = \{1, 2, \dots, 8\}$, $q = \{0, 1, 2, 3\}$, что позволило избежать использования

конечно-разностной производной $(W(c + \Delta c) - W(c))/\Delta c$ и связанной с ней погрешности при малых $|\Delta c|$.

2. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ПРИ $k \rightarrow 0$

Построим асимптотическое разложение СФ и СЗ при $k \rightarrow 0$ для ненулевых параметров R , Bu , Pr и $n \in \mathbb{N}$. Метод такого построения описан, например, в [8] и применен в [9] для задачи нахождения СЗ для течений типа Куэтта или Пуазейля и в задаче с краевыми условиями $F''(\pm 1) = 0$, соответствующими равенству нулю потоков плавучести на горизонтальных границах слоя. При этих условиях возникали два конечных СЗ при $k \rightarrow 0$ и счетное число неограниченно растущих СЗ.

В настоящей работе для краевой задачи с условиями на функцию $F(\pm 1) = 0$, в отличие от результатов исследования в [9], ограниченных СЗ при $k \rightarrow 0$ не возникает, и имеется лишь счетное множество СЗ c_m , у которых мнимая часть отрицательна и по модулю неограниченно возрастает.

2.1. Вывод характеристического соотношения

Полагая все величины в задаче, кроме k , фиксированными, представим искомую СФ $F(z)$ и соответствующее ей СЗ “ c ”, в виде разложений по степеням параметра ikR :

$$F(z) = \varphi_0(z) + ikR \varphi_1(z) + \dots, \quad c = \frac{\chi_{-1}}{ikR} + \chi_0 + ikR \chi_1 + \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (23)$$

Это приводит к цепочке краевых задач относительно функций $\varphi_m(z)$ и величин χ_{m-1} , $m = 0, 1, \dots$. Первая из них, для функции $\varphi_0(z)$ и величины χ_{-1} , имеет вид

$$\varphi_0''''(z) + (\chi_{-1} - \lambda^2) \varphi_0''(z) - \chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr} \varphi_0(z) = 0, \quad z \in [-1, 1], \quad (24)$$

$$\varphi_0'''(-1) = -\chi_{-1} \varphi_0'(-1), \quad \varphi_0(-1) = 0, \quad \varphi_0'''(1) = -\chi_{-1} \varphi_0'(1), \quad \varphi_0(1) = 0, \quad (25)$$

где обозначено

$$\lambda = \pi n \sqrt{Pr Bu}. \quad (26)$$

Уравнение (24) содержит производные степени 0, 2 и 4, а краевые условия (25) обладают четностью, поэтому решение $\varphi_0(z)$ этой задачи может быть либо четным, либо нечетным. Эти решения представим, соответственно, в виде

$$\varphi_{0,ev}(z) = A_1 \cosh(\omega_1 z) + A_2 \cosh(\omega_2 z), \quad \varphi_{0,od}(z) = B_1 \sinh(\omega_1 z) + B_2 \sinh(\omega_2 z). \quad (27)$$

Подстановка любого из представлений (27) в систему (24)–(26) приводит к характеристическому уравнению для искомых величин ω_1 и ω_2 , которые являются корнями биквадратного уравнения

$$\omega^4 + (\chi_{-1} - \lambda^2) \omega^2 - \chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr} = 0. \quad (28)$$

Четыре корня этого уравнения расположены двумя парами так, что в каждой паре корни отличаются лишь знаком. Некратные корни ω_1^2 и ω_2^2 этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(\chi_{-1} - \lambda^2)^2 + 4\chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr} \neq 0; \quad (29)$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся только этим условием.

Решение уравнения (28) запишем относительно величин ω_1^2 и ω_2^2 :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\lambda^2 - \chi_{-1} \pm \sqrt{(\lambda^2 - \chi_{-1})^2 + 4\chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr}} \right]. \quad (30)$$

В последующем исследовании задачи (24), (25) представим решение $\varphi_0(z)$ в виде четной или нечетной функции, чему соответствует два следующих случая.

2.2. Четные решения $\varphi_0(z)$

Представляя решение $\varphi_{0,ev}(z)$ задачи (24), (25) в виде (27):

$$\varphi_{0,ev}(z) = A_1 \cosh(\omega_1 z) + A_2 \cosh(\omega_2 z), \quad (31)$$

получаем, что искомая величина χ_{-1} удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\omega_2(\omega_2^2 + \chi_{-1}) \cosh \omega_1 \sinh \omega_2 = \omega_1(\omega_1^2 + \chi_{-1}) \cosh \omega_2 \sinh \omega_1. \quad (32)$$

В частном случае $Pr = 1$ находим из (30) значения $\omega_1^2 = \lambda^2$ и $\omega_2^2 = -\chi_{-1}$, подстановка которых в уравнение (32) дает соотношение $\cosh \sqrt{-\chi_{-1}} = 0$. Решение этого уравнения дает возможность получить явный вид счетного множества искомых значений $\chi_{-1,m}$:

$$\chi_{-1,m} = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + m \right)^2, \quad m = 0, 1, \dots, \quad Pr = 1. \quad (33)$$

Теперь построим представление для величин $\chi_{-1,m}$ при малых отклонениях числа Прандтля Pr от единицы. Будем искать значения $\chi_{-1,m}$ в виде

$$\chi_{-1,m} = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + m \right)^2 (1 + \Delta_m^{(ev)}). \quad (34)$$

Подстановка этого представления в уравнение (32) и учет соотношений (30) позволяет для величины $\Delta_m^{(ev)}$ построить разложение по степеням $(Pr - 1)^q$, что дает

$$\Delta_m^{(ev)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2(m + 1/2)^2} \left[\lambda + \frac{2\pi^2(m + 1/2)^2 \operatorname{cth} \lambda}{\lambda^2 + \pi^2(m + 1/2)^2} \right] (Pr - 1) + O((Pr - 1)^2), \quad m = 0, 1, \dots. \quad (35)$$

2.3. Нечетные решения $\varphi_{0,od}(z)$

Представляя решение $\varphi_{0,od}(z)$ задачи (24), (25) в виде (27):

$$\varphi_{0,od}(z) = B_1 \sinh(\omega_1 z) + B_2 \sinh(\omega_2 z), \quad (36)$$

получаем, что искомая величина χ_{-1} удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\omega_1(\omega_1^2 + \chi_{-1}) \cosh \omega_1 \sinh \omega_2 = \omega_2(\omega_2^2 + \chi_{-1}) \cosh \omega_2 \sinh \omega_1. \quad (37)$$

В частном случае $Pr = 1$ находим из (30) значения $\omega_1^2 = \lambda^2$ и $\omega_2^2 = -\chi_{-1}$, подстановка которых в уравнение (37) дает соотношение $\sinh \sqrt{-\chi_{-1}} = 0$. Решение этого уравнения дает возможность получить явный вид счетного множества искомых значений $\chi_{-1,m}$:

$$\chi_{-1,m} = \pi^2 m^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad Pr = 1. \quad (38)$$

Теперь построим представление для величин $\chi_{-1,m}$ при малых отклонениях числа Прандтля Pr от единицы. Будем искать значения $\chi_{-1,m}$ в виде, аналогичном (34):

$$\chi_{-1,m} = \pi^2 m^2 (1 + \Delta_m^{(od)}). \quad (39)$$

Подстановка этого представления в уравнение (37) и учет соотношений (30) позволяет для величины $\Delta_m^{(od)}$ построить разложение по степеням $(Pr - 1)^q$, что дает

$$\Delta_m^{(od)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 m^2} \left[\lambda + \frac{2\pi^2 m^2 \operatorname{th} \lambda}{\lambda^2 + \pi^2 m^2} \right] (Pr - 1) + O((Pr - 1)^2), \quad m = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Завершая рассмотрение СФ и СЗ на основе асимптотики (23) при $k \rightarrow 0$ и результатов (34), (35) и (39), (40), убеждаемся, что все полученные СЗ имеют большие отрицательные мнимые части и соответствуют устойчивости соответствующих длинноволновых возмущений при достаточно малых k .

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе полученных асимптотических разложений при $k \rightarrow 0$ для неограниченно растущих СЗ был разработан и протестирован алгоритм расчета СЗ c_m для заданного номера m , продемонстрировавший высокую точность результатов. Анализ эффективности этого алгоритма показал, что использование трех окрестностей разложений СФ $F(z)$ с центрами в точках $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ и сшивкой в точках $z_{*,1} = -1/2$ и $z_{*,2} = 1/2$ дало ускорение работы алгоритма в среднем в 7 раз по сравнению с использованием лишь двух разложений в точках $z = -1$ и $z = 1$ и сшивкой в точке $z_* = 0$. При этом относительная точность вычислений СЗ и СФ была фиксирована и достигала 10^{-20} .

Дополнительной гарантией того, что в плоскости комплексного спектрального параметра “ c ”, не было “пропущено”, ни одного СЗ исследуемой задачи, служило использование обобщенного принципа аргумента для функции $W(c)$ из (21). Поскольку функция $W(c)$ является детерминантом матрицы, все элементы которой являются значениями производных искомого решения $F(c; z)$ с различными краевыми условиями, а спектральный параметр “ c ”, входит в эти разложения лишь степенным образом, то функция $W(c)$ не имеет конечных полюсов. Поэтому для локализации нулей функции $W(c)$ в некоторой области $\mathfrak{D}$ справедлив обобщенный принцип аргумента (см. [13]):

$$M = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathfrak{D}} \frac{W'(c)}{W(c)} dc, \quad \sum_{j=1}^M c_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathfrak{D}} c \frac{W'(c)}{W(c)} dc, \quad (41)$$

где M — число комплексных нулей функции $W(c)$ внутри области $\mathfrak{D}$, а $\sum_{j=1}^M c_j$ — сумма координат этих нулей.

Далее опишем результаты численного анализа СЗ при различных физических параметрах задачи. Расчет траекторий $c_m(k)$ при изменении волнового числа k начинался с малых чисел k , а начальными приближениями в итерационном методе Ньютона при этом служили полученные в пп. 2.2 и 2.3 асимптотики СЗ. Затем при непрерывном возрастании k использовался метод продолжения по параметру k и метод Ньютона. При быстром изменении СЗ шаг по переменной k соответственно уменьшался, а при медленном изменении СЗ шаг по k адаптировался так, чтобы зависимость $c_m(k)$ была достаточно непрерывной.

Нумерация СЗ $c_m(k)$ проводилась так, что при $k \rightarrow 0$ все СЗ упорядочивались в соответствии с ростом модуля мнимой части $\operatorname{Im}(c_m(k))$. Учет асимптотики (23) и зависимостей (34), (35), (39), (40) позволяет расположить $c_m(k)$ следующим образом: СЗ $c_1(k)$ соответствует первой четной СФ с асимптотикой СЗ (34), (35) для $m = 0$; СЗ $c_2(k)$ соответствует первой нечетной СФ с асимптотикой СЗ (39), (40) для $m = 1$; $c_3(k)$ соответствует второй четной СФ с асимптотикой СЗ (34), (35) для $m = 1$; $c_4(k)$ соответствует асимптотике второй нечетной СФ с асимптотикой СЗ (39), (40) для $m = 2$, и т.д.

При возрастании волнового числа k от бесконечно малых положительных значений (отметим, что $k = 0$ мы не можем положить в силу нефизичности получаемого уравнения) все СЗ на комплексной плоскости выходят из особой точки $c = \infty$ с мнимой частью $\operatorname{Im}(c) = -\infty$ в соответствии с асимптотикой (23), (34), (35) либо (39), (40).

Далее, с ростом числа k , все СЗ поднимаются к вещественной оси, некоторые из них могут попадать в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(c) > 0$, что соответствует неустойчивости исследуемого течения.

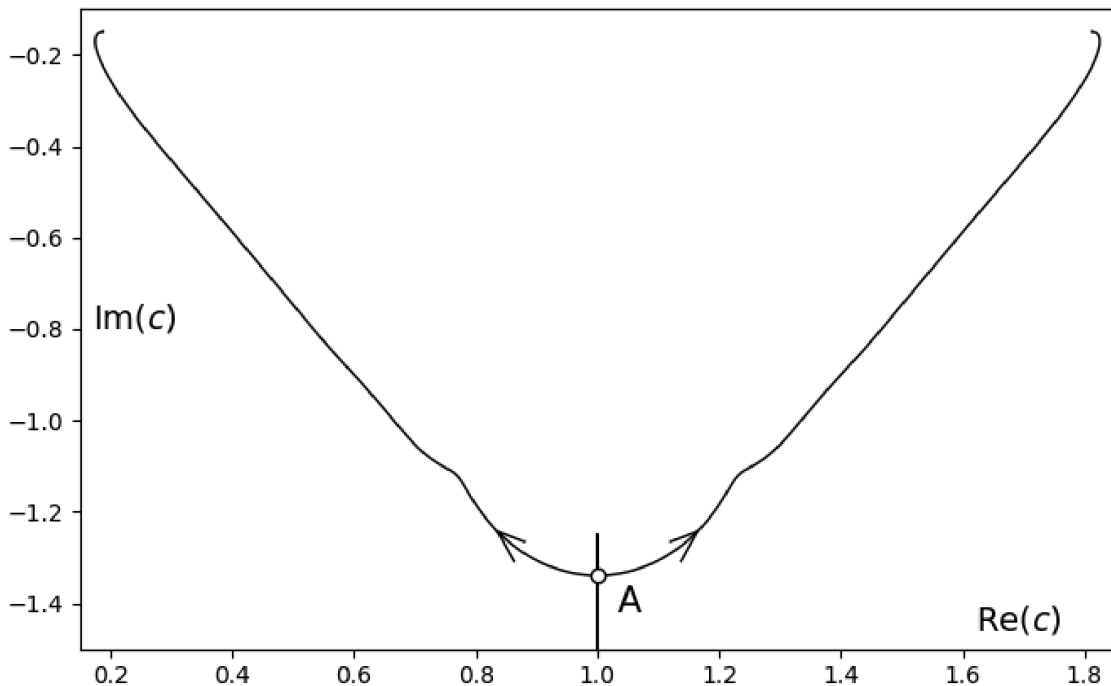
Затем эти СЗ переходят в нижнюю полуплоскость $\text{Im}(c) < 0$, и далее с ростом k они расходятся направо или налево довольно сложным образом.

В частном случае линейного профиля (2) основного течения $U(z)$, т.е. когда параметр $\alpha = 0$, все СЗ, как было отмечено во Введении, располагаются на комплексной плоскости симметрично относительно оси $\text{Re}(c) = 1$. Опишем динамику нескольких первых СЗ для параметров задачи $\alpha = 0$, $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$.

При возрастании числа k все СЗ поднимаются по прямой $\text{Re}(c) = 1$ из точки $\text{Im}(c) = -\infty$ в соответствии с асимптотикой (34), (35) либо (39), (40). Первое СЗ $c_1(k)$ при значении $k \approx 1.03$ попадает в верхнюю полуплоскость $\text{Im}(c) > 0$ и в интервале значений $k \in (1.03, 112.6)$ остается в этой области, соответствующей неустойчивости исследуемого течения.

Динамика всех СЗ при росте числа k оказывается весьма сложной и заслуживает детального описания.

При значении $k \approx 2.56$ СЗ $c_3(k)$, находясь на прямой $\text{Re}(c) = 1$, останавливается, затем движется вниз, а при $k_* \approx 2.945$ оно сталкивается с СЗ $c_4(k)$ и образует первое двойное СЗ $c_3(k_*) = c_4(k_*) \approx 1 - 1.3387i$. При дальнейшем росте числа k это СЗ распадается на два простых СЗ, симметричных относительно прямой $\text{Re}(c) = 1$, движущихся в нижней полуплоскости $\text{Im}(c) < 0$ направо и налево и стремящихся при $k \rightarrow +\infty$ к предельным точкам $c = 0$ и $c = 2$. На фиг. 1. даны траектории этих СЗ при возрастании k на отрезке $[2.56, 2500]$; точка А соответствует первому двойному СЗ при $k_* \approx 2.945$, а стрелочки показывают направления изменения этих СЗ при росте значения k .



Фиг. 1. Образование первого двойного СЗ задачи с параметрами $\alpha = 0$, $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$ из $c_3(k)$ и $c_4(k)$ и последующая эволюция этих СЗ.

Второе двойное СЗ образуется аналогичным образом из СЗ $c_7(k)$ и $c_8(k)$ при $k_* \approx 14.5$, $c_7(k_*) = c_8(k_*) \approx 1 - 1.028i$. При дальнейшем росте числа k это СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся в полуплоскости $\text{Im}(c) < 0$ к предельным точкам $c = 0$ и $c = 2$, аналогично показанным траекториям СЗ на фиг. 1.

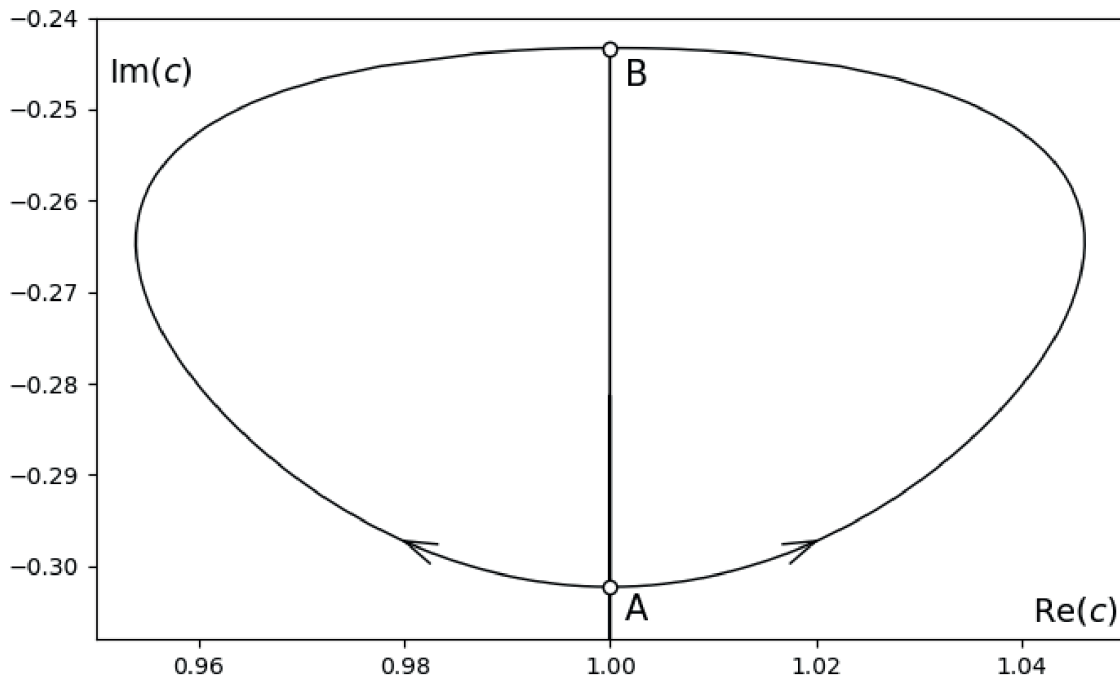
Третье двойное СЗ образуется аналогичным образом из СЗ $c_2(k)$ и $c_5(k)$ при $k_* \approx 15.68$, $c_2(k_*) = c_5(k_*) \approx 1 - 0.145i$. При дальнейшем росте числа k это СЗ распадается на два простых симметричных СЗ. При изменении k в интервале $(162, 459)$ оба этих СЗ попадают в верхнюю полуплоскость

$\text{Im}(c) > 0$, а затем возвращаются в полуплоскость $\text{Im}(c) < 0$ и движутся к предельным точкам $c = 0$ и $c = 2$.

Четвертое двойное СЗ образуется аналогичным образом из СЗ $c_{11}(k)$ и $c_{12}(k)$ при $k_* \approx 36.2$, $c_{11}(k_*) = c_{12}(k_*) \approx 1 - 0.902i$. При дальнейшем росте числа k это СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся в полуплоскости $\text{Im}(c) < 0$ к предельным точкам $c = 0$ и $c = 2$.

Пятое двойное СЗ образуется аналогичным образом из СЗ $c_6(k)$ и $c_9(k)$ при $k_* \approx 42.3$, $c_6(k_*) = c_9(k_*) \approx 1 - 0.266i$. При дальнейшем росте числа k это СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся в полуплоскости $\text{Im}(c) < 0$ к предельным точкам $c = 0$ и $c = 2$.

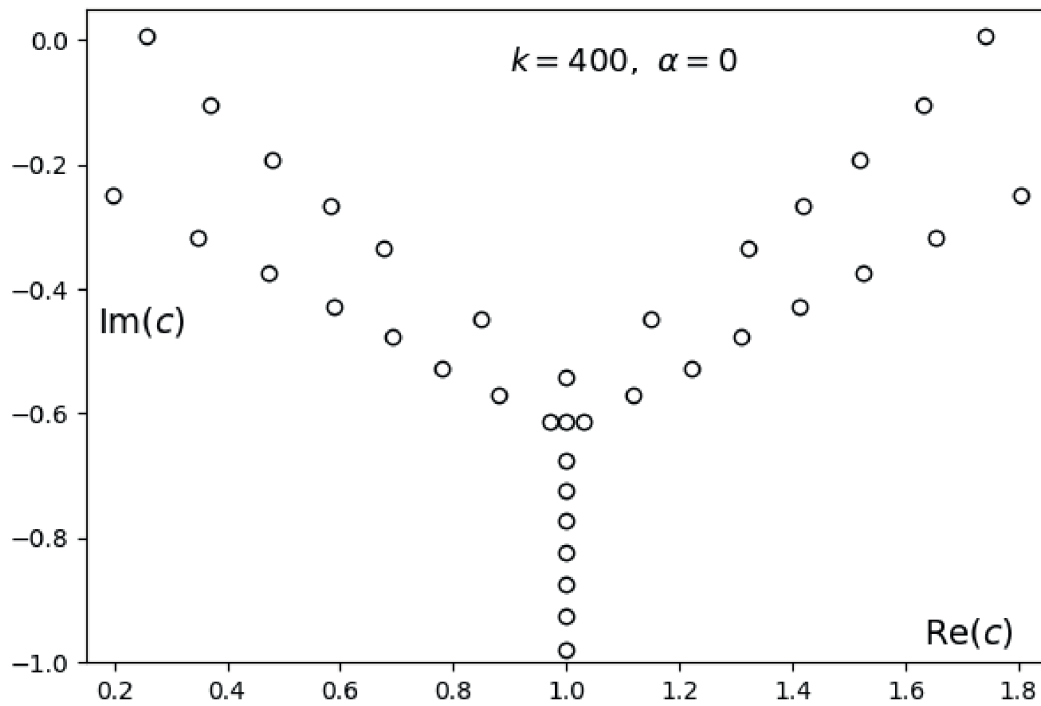
Шестое двойное СЗ образуется аналогичным образом из СЗ $c_{10}(k)$ и $c_{13}(k)$ при $k_* \approx 85.4$, $c_{10}(k_*) = c_{13}(k_*) \approx 1 - 0.302i$. Однако при дальнейшем росте числа k траектории этих СЗ отличаются от представленных на фиг. 1. При $k > 85.4$ это СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся по симметричным дугам, а при значении $k_* \approx 106.75$ эти два СЗ опять сталкиваются в точке $c_{10}(k_*) = c_{13}(k_*) \approx 1 - 0.243i$ и образуют седьмое двойное СЗ. На фиг. 2 даны траектории этих двух СЗ при возрастании k на отрезке $[85.4, 106.75]$; точке А соответствует двойное СЗ при $k_* \approx 85.4$, а точке В — двойное СЗ при $k_* \approx 106.75$. С ростом k это двойное СЗ опять распадается на два простых, которые расходятся вверх и вниз по прямой $\text{Re}(c) = 1$. Одно из этих СЗ, которое идет вниз, при значении $k_* \approx 109.66$ сталкивается с СЗ $c_{14}(k)$ и образует очередное восьмое двойное СЗ. А СЗ, образовавшееся после распада седьмого двойного СЗ и которое идет вверх, при значении $k_* \approx 113.2$ наконец сталкивается с СЗ $c_1(k)$ и образует девятое двойное СЗ $c_1(k_*) \approx 1 - 0.052i$. При последующем росте k это двойное СЗ распадается на два простых симметричных СЗ, движущихся в полуплоскости $\text{Im}(c) < 0$ к предельным точкам $c = 0$ и $c = 2$, аналогично показанным траекториям на фиг. 1.



Фиг. 2. Образование двух двойных СЗ задачи с параметрами $\alpha = 0$, $R = 10$, $\text{Pr} = 4$, $\text{Bu} = 0.0001$, $n = 1$ из $c_{10}(k)$ и $c_{13}(k)$ при $k \in [85.4, 106.75]$.

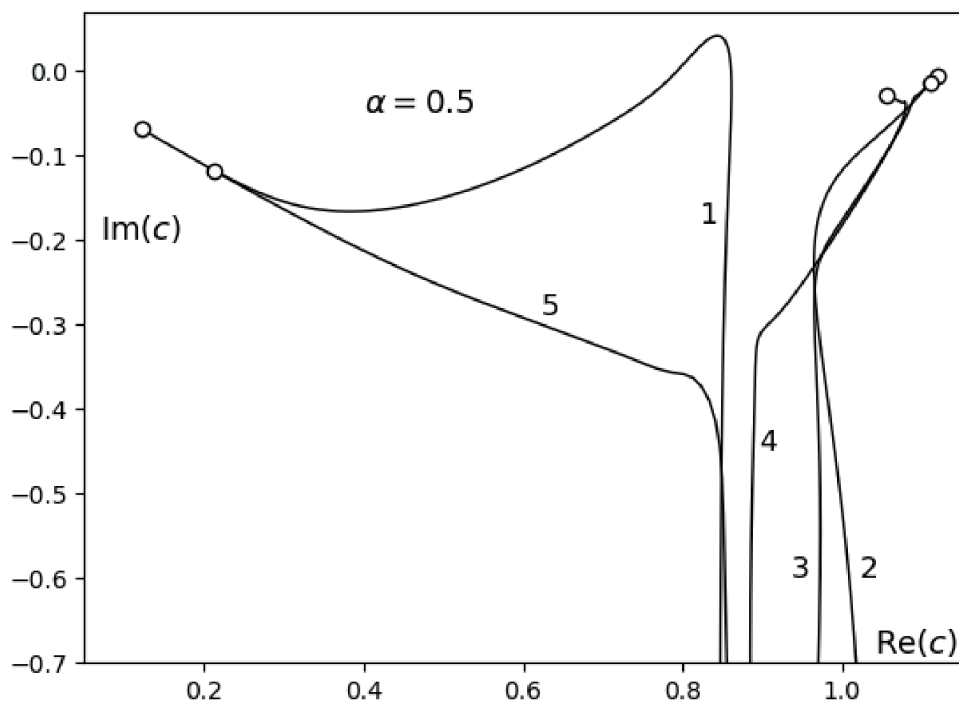
На фиг. 3 приведены первые 37 СЗ этой задачи при значении волнового числа $k = 400$, при этом лишь $c_2(k)$ и $c_5(k)$ расположены в верхней полуплоскости. Такое симметричное расположение СЗ задачи Орра—Зоммерфельда часто называют портретом “спектрального галстука”, (см., например, [14], [15]).

Если профиль скорости (2) основного течения $U(z)$ не является линейным, т.е. параметр $\alpha > 0$, то множество СЗ уже не обладает симметрией относительно прямой $\text{Re}(c) = 1$, и при возрастании числа k образования двойных СЗ при проведенных расчетах уже не выявлено.



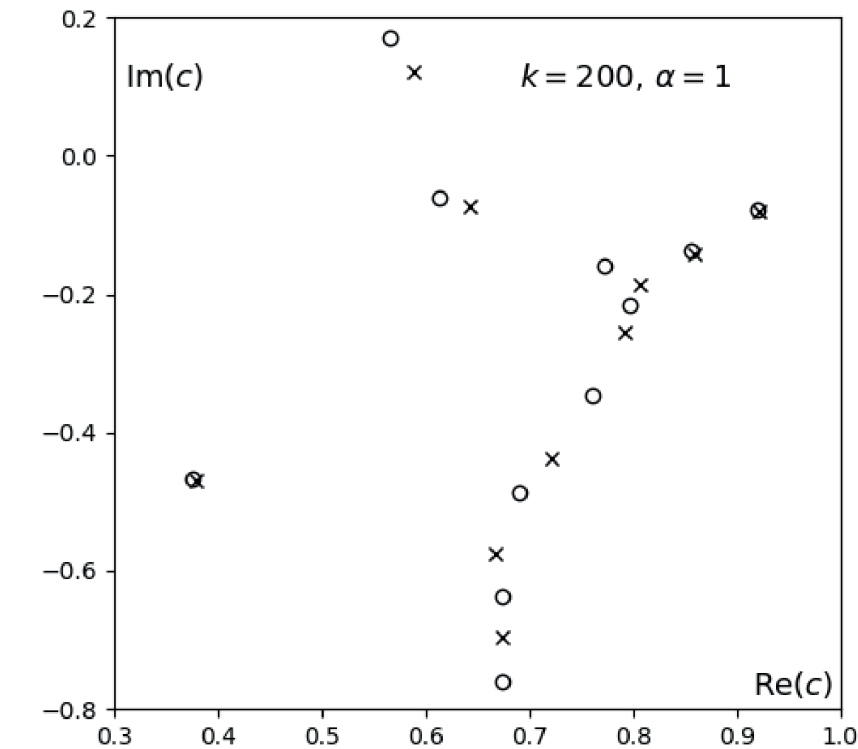
Фиг. 3. Комплексные СЗ задачи для параметров $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$.

На фиг. 4 приведены траектории первых пяти СЗ для параметров $\alpha = 0.5$, $R = 10$, $Pr = 1$, $Bu = 0.1$, $n = 1$ при непрерывном возрастании k в интервале $(0, 100)$; здесь показаны участки траекторий $c_m(k)$ в области $\text{Im } c > -0.7$. Цифры 1–5 указывают номера соответствующих траекторий, а кружочки — положения этих СЗ при $k = 100$. Отметим, что СЗ $c_1(k)$ при значениях $k \in (2.14, 5.95)$ расположено в верхней полуплоскости, что соответствует неустойчивости течения.



Фиг. 4. Траектории СЗ задачи для параметров $\alpha = 0.5$, $R = 10$, $Pr = 1$, $Bu = 0.1$, $n = 1$.

На фиг. 5 показаны первые 21 СЗ задачи для параметров $\alpha = 1$, $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$, $k = 200$. Кружочками отмечены СЗ, соответствующие четным СФ, а крестиками — СЗ для нечетных СФ. Необходимо отметить, что СЗ при $Re(c) > 0.9$ и при $Re(c) < 0.4$ расположены на этой фигуре парами, так что в каждой паре расстояние между СЗ составляет порядка 10^{-3} , а с ростом значения волнового числа k это расстояние еще уменьшается.



Фиг. 5. Комплексные СЗ задачи для параметров $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$.

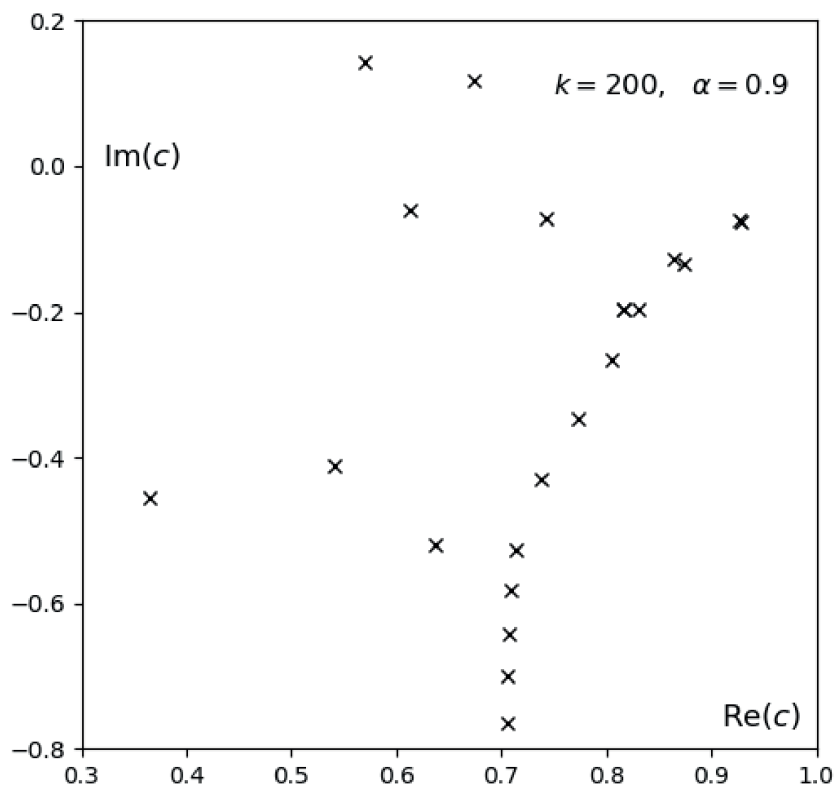
При $\alpha \neq 1$ четных и нечетных СФ уже нет, и все СЗ перестраиваются весьма сложным образом. На фиг. 6 эти СЗ показаны крестиками для $\alpha = 0.9$ и с остальными параметрами такими же, как на фиг. 5. Отметим, что расстояние порядка 10^{-3} между двумя СЗ здесь сохраняется только для двух правых СЗ при $Re(c) > 0.9$.

На фиг. 7 представлены СЗ для $\alpha = 0.5$ и с остальными параметрами такими же, как на фиг. 5 и фиг. 6.

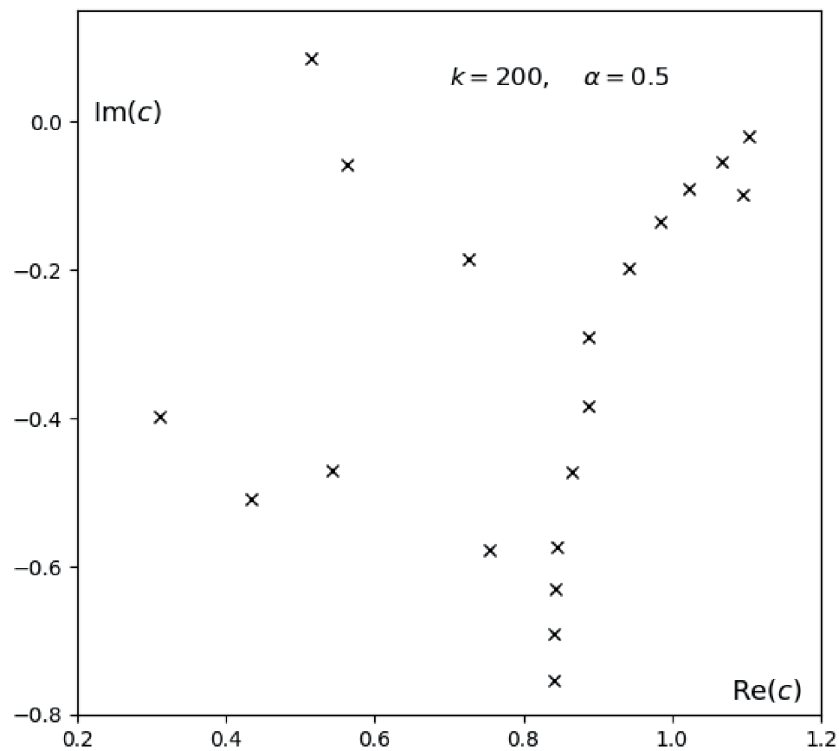
При дальнейшем уменьшении величины α такая перестройка СЗ становится еще более заметной, и при значении $\alpha = 0$ все СЗ выстраиваются симметричным образом, образуя портрет “спектрального галстука”, аналогичного показанному на фиг. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан аналитико-численный метод решения спектральной несамосопряженной задачи, описывающей малые возмущения океанских течений с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида. Модель основана на уравнении потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Расчет собственных функций и собственных значений задачи проводился с помощью покрытия исходного отрезка интегрирования $z \in [-1, 1]$ системой окрестностей и использования степенных разложений в каждой окрестности с последующей гладкой сшивкой. Построенные асимптотические разложения для СЗ при малых волновых числах k являлись начальными приближениями в итерационном методе Ньютона с использованием метода продолжения. Показано, что в случае линейного профиля скорости $U(z)$ основного потока при определенных числах k_* возникают двойные СЗ на прямой $Re(c) = 1$.



Фиг. 6. Комплексные СЗ задачи для параметров $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$.



Фиг. 7. Комплексные СЗ задачи для параметров $R = 10$, $Pr = 4$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$.

Предложенный метод показал свою высокую эффективность как по точности, так и по быстродействию. Относительная погрешность во всех расчетах не превышала величины 10^{-20} , а скорость вычислений оказалась в среднем в 7 раз выше скорости метода разложения решения лишь в двух граничных точках $z = -1$ и $z = 1$ (см. [3]–[10]). Это объясняется наличием множителя 2^{-m} , возникающего

в разложениях при покрытии отрезка $z \in [-1, 1]$ тремя окрестностями, по сравнению с множителем 1, участвующим в разложениях при использовании всего лишь двух окрестностей.

С помощью разработанного подхода рассчитаны траектории комплексных СЗ для различных физических параметров задачи при изменении волнового числа k . Кратко представлена сложная картина возникновения неустойчивости моделируемого течения и дано подробное описание поведения СЗ при возрастании волнового числа k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н. П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // Фундамент. и прикл. гидрофизика. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. Kuzmina N. P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // Ocean Sci. 2016. V. 12. P. 1269–1277.
<https://doi.org/10.5194/os-12-1269-2016>
3. Кузьмина Н. П., Скороходов С. Л., Журбас Н. В., Лыжков Д. А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
4. Кузьмина Н. П., Скороходов С. Л., Журбас Н. В., Лыжков Д. А. Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
5. Скороходов С. Л., Кузьмина Н. П. Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
6. Скороходов С. Л., Кузьмина Н. П. Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 867–888.
7. Кузьмина Н. П., Скороходов С. Л., Журбас Н. В., Лыжков Д. А. О влиянии трения и диффузии плавучести на динамику геострофических океанских течений с линейным вертикальным профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 6. С. 676–688.
8. Скороходов С. Л., Кузьмина Н. П. Спектральный анализ малых возмущений геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2010–2023.
9. Скороходов С. Л., Кузьмина Н. П. Аналитико-численный метод для анализа малых возмущений океанских геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 2043–2053.
10. Кузьмина Н. П., Скороходов С. Л., Журбас Н. В., Лыжков Д. А. О видах неустойчивости геострофического течения с вертикальным параболическим профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 3. С. 1–10.
11. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.
12. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
14. Шкаликов А. А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 3. С. 89–112.
15. Скороходов С. Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.

ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE SPECTRAL PROBLEM IN A MODEL OF GEOSTROPHIC OCEAN CURRENTS

S. L. Skorokhodov^{a,*} and N. P. Kuzmina^{b,**}

^a*Federal Research Center “Computer Science and Control”, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia*

^b*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia*

**e-mail: sskorokhodov@gmail.com*

***e-mail: kuzmina@ocean.ru*

Received January 12, 2024

Revised February 9, 2024

Accepted February 15, 2024

Abstract. A new efficient analytical-numerical method is developed for solving a problem for the potential vorticity equation in the quasi-geostrophic approximation with allowance for vertical diffusion of mass and momentum. The method is used to analyze small perturbations of ocean currents of finite transverse scale with a general parabolic vertical profile of velocity. For the arising spectral nonself-adjoint problem, asymptotic expansions of the eigenfunctions and eigenvalues are constructed for small wave numbers and the existence of a countable set of complex eigenvalues with an unboundedly decreasing imaginary part is shown. On the integration interval, a system of three neighborhoods is introduced and a solution in each of them is constructed in the form of power series expansions, which are matched smoothly, so that the eigenfunctions and eigenvalues are efficiently calculated with high accuracy. For a varying wave number, the trajectories of complex eigenvalues are computed for various parameters of the problem and the existence of double eigenvalues is shown. The complex picture of instability developing in the simulated flow depending on physical parameters of the problem is briefly described.

Keywords: spectral non-self-adjoint problem, asymptotic expansions, high-accuracy numerical method, double eigenvalues.