

УДК 519.63

ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НА НЕСТАНДАРТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ¹⁾

© 2024 г. П. Н. Вабищевич^{1,2,*}

¹119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия

²677007 Якутск, ул. Кулаковского, 42, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Россия

*e-mail: vabishchevich@gmail.com

Поступила в редакцию 07.02.2024 г.

Переработанный вариант 03.03.2024 г.

Принята к публикации 05.03.2024 г.

При приближенном решении краевых задач для уравнений с частными производными широко используются разностные методы. Наиболее просто строятся сеточные аппроксимации при разбиении расчетной области на прямоугольные ячейки. Обычно узлы сетки совпадают с вершинами ячеек. Помимо таких узловых аппроксимаций применяются также сетки с узлами в центрах ячеек. Краевые задачи удобно формулировать в терминах инвариантных операторов векторного (тензорного) анализа, которым сопоставляются соответствующие сеточные аналоги. В работе строятся аналоги операторов градиента и дивергенции на нестандартных прямоугольных сетках, узлы которых состоят как из вершин расчетных ячеек, так и их центров. Предложенный подход иллюстрируется аппроксимациями краевой задачи для стационарного двумерного уравнения конвекции-диффузии. Отмечены ключевые особенности построения аппроксимаций для векторных задач при ориентации на прикладные задачи механики твердого тела. Библ. 20. Фиг. 6.

Ключевые слова: прямоугольная расчетная сетка, операторы векторного анализа, сеточные операторы, операторно-разностные схемы, уравнение конвекции-диффузии.

DOI: 10.31857/S0044466924070016, EDN: xjilpp

ВВЕДЕНИЕ

Традиционная технология численного решения краевых задач для уравнений с частными производными связана с использованием сеточных (разностных) методов [1, 2]. В методах этого класса ищется приближенное решение в узлах расчетной сетки. Переход от непрерывной задачи к дискретной проводится различными способами. Простейший вариант (непосредственная аппроксимация) связан с прямой заменой дифференциальных выражений в уравнениях и граничных условиях на соответствующие сеточные выражения. Более полно специфика рассматриваемых задач учитывается при применении метода баланса (интегроинтерполяционного метода) [3, 4], когда сеточная задача рассматривается как интегральное следствие (закон сохранения) для отдельных частей расчетной области. Такие аппроксимации особенно уместны при использовании непрямоугольных сеток. В настоящее время в англоязычной литературе такой подход носит название метод конечных объемов (см., например, [5], [6]) и часто рассматривается как самостоятельный класс методов, наряду с методом конечных элементов. К разностным при этом относят методы с использованием сеточных аппроксимаций на прямоугольных сетках.

Приближенное решение удобно строить на основе формулировки краевой задачи с применением операторов векторного (тензорного) анализа, прежде всего, операторов градиента и дивергенции. Такие операторы инвариантны относительно выбора системы координат, что позволяет использовать единый подход для построения дискретных задач на произвольных расчетных сетках. Сама сеточная краевая задача строится с привлечением общих построенных дискретных аналогов операторов

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-11-00058)

векторного анализа. Сеточные операторы векторного анализа должны наследовать основные свойства дифференциальных операторов. При выборе соответствующих гильбертовых пространств сеточных функций основное внимание уделяется условиям сопряженности операторов, выполнению основных интегральных соотношений с операторами векторного анализа. Такие согласованные аппроксимации являются основой MD (Mimetic Discretization) технологии [7, 8], которая развивается в различных направлениях.

Согласованные аппроксимации операторов векторного анализа относительно легко строятся на прямоугольных сетках. В этой связи отметим пионерскую работу [9], более поздние результаты отражены в книге [10]. При использовании произвольных сеток успех достигается при применении метода опорных операторов [11, 12]. Наиболее просто сеточные аналоги операторов векторного анализа на нерегулярных расчетных сетках получаются при использовании триангуляций Делоне и разбиений Вороного [13].

В настоящей работе мы будем рассматривать базовые двумерные эллиптические краевые задачи в прямоугольнике, когда уравнение включает операторы градиента и дивергенции. В расчетной области, которая разбивается на прямоугольные ячейки, сетку можно ввести различными способами. Стандартный вариант связан с выбором вершин ячеек в качестве узлов расчетной сетки. Второй хорошо известный вариант базируется на задании узлов сетки как центров ячеек. Построение разностных аппроксимаций при одновременном использовании этих двух расчетных сеток предложено в работах [14, 15]. В других работах Фрязинова И. В. (см., например, [16, 17]) такая двухсеточная технология применена при рассмотрении различных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Сеточная задача рассматривается на прямой сумме соответствующих гильбертовых пространств сеточных функций, определенных на двух сетках.

Мы строим операторно-разностные аппроксимации на объединенной прямоугольной сетке. Основное внимание уделяется согласованным аппроксимациям операторов градиента и дивергенции. Основные особенности использования сеточных операторов векторного анализа проиллюстрированы на краевой задаче для уравнения конвекции-диффузии со смешанными производными. Отмечены также ключевые моменты построения разностных схем на объединенной сетке для векторных эллиптических уравнений второго порядка.

1. СЕТКИ И СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Аппроксимации по пространству при использовании прямоугольных расчетных сеток будем рассматривать на примере двумерных краевых задач, когда расчетная область Ω — прямоугольник с границей $\partial\Omega$:

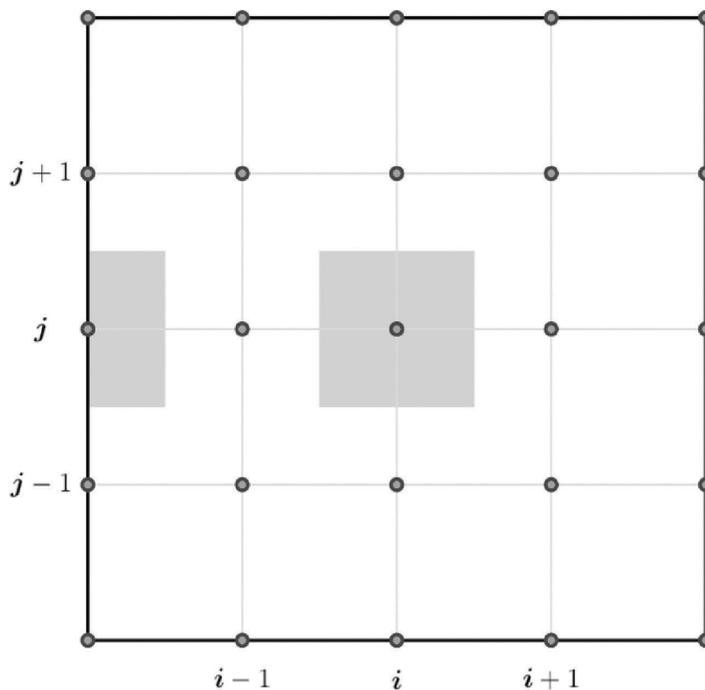
$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \left(x^{(1)}, x^{(2)} \right), 0 < x^{(\alpha)} < l_{\alpha}, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

Будем рассматривать неравномерные прямоугольные сетки, когда Ω разбивается на ячейки линиями $x^{(\alpha)} = \text{const}$, $\alpha = 1, 2$:

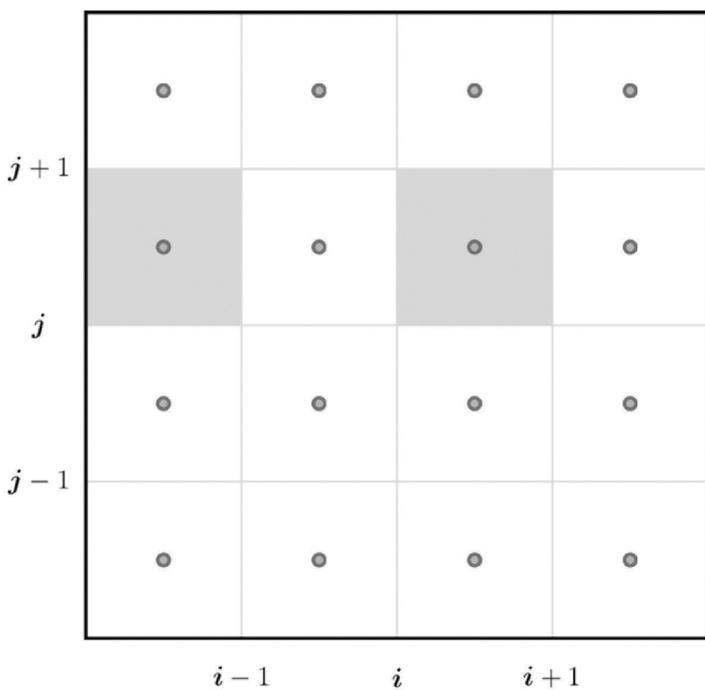
$$\begin{aligned} x^{(1)} = x_i^{(1)} &= x_{i-1}^{(1)} + h_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad x_0^{(1)} = 0, \quad x_{N_1}^{(1)} = l_1, \\ x^{(2)} = x_j^{(2)} &= x_{j-1}^{(2)} + h_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad x_0^{(2)} = 0, \quad x_{N_2}^{(2)} = l_2. \end{aligned}$$

Узлы сетки связываются с ячейками. Стандартные разностные аппроксимации связаны с совпадающими с вершинами ячеек узлами сетки — узловая (node-center) аппроксимация (фиг. 1). Вторым используемым классом расчетных сеток характеризуется тем, что узлами сетки являются центры ячеек — центроидная (cell-center) аппроксимация (фиг. 2).

Будем использовать объединенную сетку, узлы которой состоят как из вершин ячеек, так и их центров (фиг. 3). Подобные сетки введены в вычислительную практику в обзорной работе Самарского А. А. и Фрязинова И. В. [15]. Более подробное рассмотрение вопросов аппроксимации краевых задач для скалярных эллиптических и параболических уравнений второго порядка выполнено, например, в [16, 17]. При выделении приближенного решения на каждой отдельной (исходной узловой и сопряженной центроидной) сетках задача рассматривалась на гильбертовом пространстве сеточных векторных функций — прямой сумме сеточных гильбертовых пространств скалярных функций.

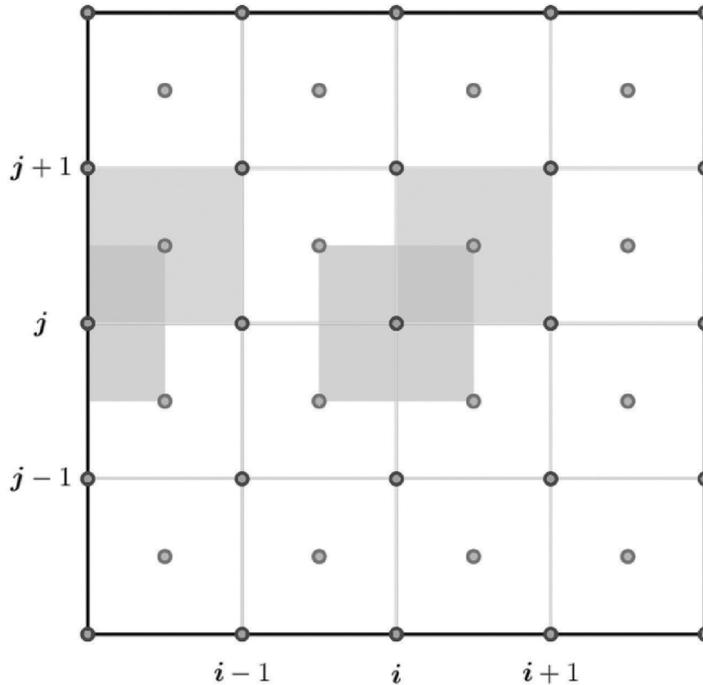


Фиг. 1. Узлы сетки и контрольные объемы при узловой аппроксимации.



Фиг. 2. Узлы сетки и контрольные объемы при центроидной аппроксимации.

Мы не будем усложнять дискретную задачу и будем работать с сеточными скалярными функциями на объединенной сетке.



Фиг. 3. Узлы и контрольные объемы для объединенной сетки.

Для функций $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, зададим гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Аналогично вводятся гильбертовы пространства сеточных функций на введенных сетках.

При узловых аппроксимациях (фиг. 1) сеточная функции y_{ij} задается в узлах сетки ω^n :

$$\omega^n = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_{ij} \mid \mathbf{x}_{ij} = \left(x_i^{(1)}, x_j^{(2)} \right), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2 \right\}.$$

С отдельным узлом \mathbf{x}_{ij} мы связываем часть расчетной области Ω_{ij} . В частности, для внутренних узлов $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ имеем

$$\Omega_{ij} = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \left(x^{(1)}, x^{(2)} \right), x_{i-1/2}^{(1)} < x^{(1)} < x_{i+1/2}^{(1)}, x_{j-1/2}^{(2)} < x^{(2)} < x_{j+1/2}^{(2)} \right\},$$

при использовании обозначений

$$x_{i+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(x_{i+1}^{(1)} + x_i^{(1)} \right), i = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad x_{j+1/2}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(x_{j+1}^{(2)} + x_j^{(2)} \right), j = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Для узлов на границе расчетной области (см. фиг. 1) части расчетной области выделяются аналогично. Для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega^n$ пространству $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ сопоставим конечномерное гильбертово пространство $H(\omega^n)$, в котором

$$(y, v)_n = \sum_{\mathbf{x} \in \omega^n} y(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) V^n(\mathbf{x}), \quad \|y\|_n = (y, y)_n^{1/2},$$

где

$$V^n(\mathbf{x}) = \text{meas}(\Omega_{ij}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{ij} \in \omega^n.$$

При центроидных аппроксимациях (фиг. 2) сеточная функции $y_{i+1/2,j+1/2}$ задается в узлах сетки ω^c :

$$\omega^c = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2} \mid \mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2} = \left(x_{i+1/2}^{(1)}, x_{j+1/2}^{(2)} \right), i = 0, 1, \dots, N_1 - 1, j = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \right\}.$$

С узлом $\mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2}$ связывается ячейка расчетной области $\Omega_{i+1/2,j+1/2}$:

$$\Omega_{i+1/2,j+1/2} = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \left(x^{(1)}, x^{(2)} \right), x_i^{(1)} < x^{(1)} < x_{i+1}^{(1)}, x_j^{(2)} < x^{(2)} < x_{j+1}^{(2)} \right\},$$

$$V^c(\mathbf{x}) = \text{meas}(\Omega_{i+1/2,j+1/2}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2} \in \omega^c.$$

Для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega^c$, зададим конечномерное гильбертово пространство $H(\omega^c)$, в котором

$$(y, v)_c = \sum_{\mathbf{x} \in \omega^c} y(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) V^c(\mathbf{x}), \quad \|y\|_c = (y, y)_c^{1/2}.$$

Для объединенной сетки имеем $\omega = \omega^n \cup \omega^c$. Для узлов этой сетки будем использовать обозначения \mathbf{x}_k , $k = 0, 1, \dots, N_1 + N_2 + 2N_1N_2$. С отдельным узлом связывается часть области

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \begin{cases} \Omega_{i,j}, & \mathbf{x}_k \in \omega^n, \\ \Omega_{i+1/2,j+1/2}, & \mathbf{x}_k \in \omega^c, \end{cases} \quad V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{cases} V^n(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \omega^n, \\ V^c(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \omega^c. \end{cases}$$

Определим пространство $H(\omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} y(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}), \quad \|y\| = (y, y)^{1/2},$$

для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$, на объединенной сетке.

2. СЕТОЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Разностные аппроксимации краевой задачи (1), (4) будем проводить на основе метода баланса (интегроинтерполяционного метода) [1], метода конечного объема [5, 6]. Мы приходим к дискретной задаче для сеточных функций при интегрировании исходного уравнения по соответствующему конечному объему, при записи закона сохранения (баланса) на дискретном уровне. Для узлов $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ij}$ сетки ω^n в качестве контрольных объемов выступают Ω_{ij} , а для $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2} \in \omega^c - \Omega_{i+1/2,j+1/2}$.

Мы ориентируемся на формулировку исследуемых проблем с использованием инвариантных (не зависящих от выбора системы координат) операторов векторного (тензорного) анализа. В технологии VAGO (Vector Analysis Grid Operator) [13] мы строим дискретные аналоги таких операторов. При применении MD (Mimetic Discretization) подхода [7, 8] мы отслеживаем основные свойства дискретных операторов векторного анализа. Это особенно важно при аппроксимациях на общих нерегулярных расчетных сетках, когда покоординатное представление не имеет большого значения.

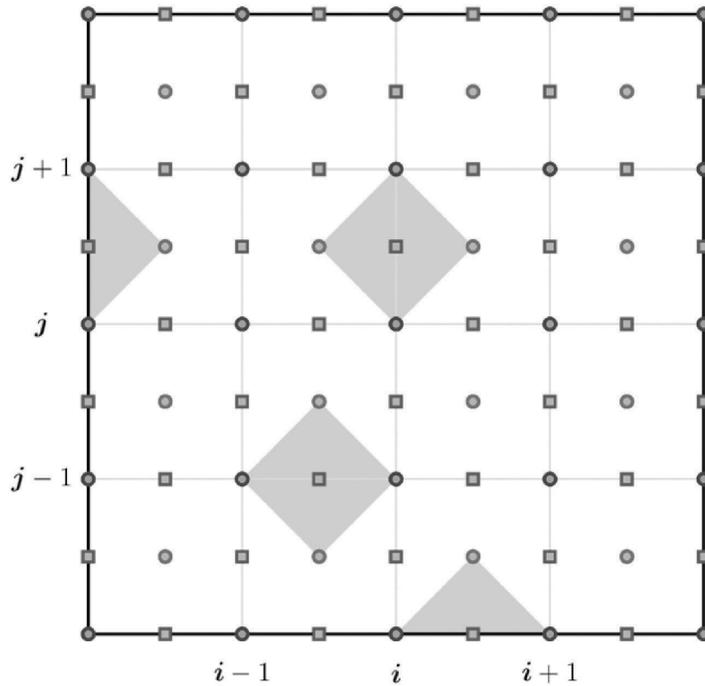
Помимо скалярных сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$, будем рассматривать векторные функции на своей сетке ω^* с узлами $\mathbf{x}_m \in \omega^*$, $m = 0, 1, \dots, 2N_1N_2 + N_1 + N_2 - 1$. Узлы этой сетки расположены на пересечении граней контрольных объемов для узлов сеток ω^n и ω^c :

$$\omega^* = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_m \mid \mathbf{x}_m = \left(x_i^{(1)}, x_{j+1/2}^{(2)} \right), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \right. \\ \left. \left(x_{i+1/2}^{(1)}, x_j^{(2)} \right), i = 0, 1, \dots, N_1 - 1, j = 0, 1, \dots, N_2 \right\}.$$

Контрольные объемы (фиг. 4) есть четырехугольники с ортогональными диагоналями. Такой ортогональный четырехугольник, связанный с отдельным узлом $\mathbf{x}_m \in \omega^*$, обозначим через Ω_m^* , $m = 0, 1, \dots, 2N_1N_2 + N_1 + N_2 - 1$.

Для векторных сеточных функций $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \omega^*$ определим гильбертово пространство $\mathbf{H}(\omega^*)$ со скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega^*} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) V^*(\mathbf{x}), \quad \|\mathbf{y}\| = (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2},$$



Фиг. 4. Контрольные объемы для векторных величин и узлы сеток ω и ω^* .

где

$$V^*(\mathbf{x}) = \text{meas}(\Omega_m^*), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in \omega^*.$$

Рассмотрение сеточных операторов векторного анализа мы начнем с оператора градиента. Для приближенного вычисления $\mathbf{v} = \text{grad } u$ для заданной функции $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, в узлах сетки ω^* положим

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}^*) = \text{grad}_h y(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \mathbf{x}^* \in \omega^*, \tag{1}$$

где сеточный оператор градиента $\text{grad}_h : H(\omega) \rightarrow \mathbf{H}(\omega^*)$. Для внутренних узлов ($\mathbf{x}_m^* \in \Omega$) сетки ω^* градиент $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \{\tilde{v}_1(\mathbf{x}), \tilde{v}_2(\mathbf{x})\}$ вычисляется по правилу

$$\tilde{v}_1(\mathbf{x}_m^*) = \begin{cases} \frac{2}{h_{i+1}^{(1)} + h_i^{(1)}} (y(\mathbf{x}_{i+1/2, j+1/2}) - y(\mathbf{x}_{i-1/2, j+1/2})), & \mathbf{x}_m^* = (x_i^{(1)}, x_{j+1/2}^{(2)}), \\ \frac{1}{h_i^{(1)}} (y(\mathbf{x}_{i+1, j}) - y(\mathbf{x}_{i, j})), & \mathbf{x}_m^* = (x_{i+1/2}^{(1)}, x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{2}$$

$$\tilde{v}_2(\mathbf{x}_m^*) = \begin{cases} \frac{1}{h_j^{(2)}} (y(\mathbf{x}_{i, j+1}) - y(\mathbf{x}_{i, j})), & \mathbf{x}_m^* = (x_i^{(1)}, x_{j+1/2}^{(2)}), \\ \frac{2}{h_{j+1}^{(2)} + h_j^{(2)}} (y(\mathbf{x}_{i+1/2, j+1/2}) - y(\mathbf{x}_{i+1/2, j-1/2})), & \mathbf{x}_m^* = (x_{i+1/2}^{(1)}, x_j^{(2)}). \end{cases}$$

Для сеточного оператора градиента в узлах сетки ω^* на границе $\partial\Omega$ можно использовать расчетные формулы (2), считая, что

$$\mathbf{x}_{-1/2, j+1/2} = (0, x_{j+1/2}^{(2)}), \quad \mathbf{x}_{N_1+1/2, j+1/2} = (l_1, x_{j+1/2}^{(2)}), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$\mathbf{x}_{i+1/2, -1/2} = (x_{i+1/2}^{(1)}, 0), \quad \mathbf{x}_{i+1/2, N_2+1/2} = (x_{i+1/2}^{(1)}, l_2), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Тем самым нормальная компонента градиента аппроксимируется по значениям в приграничных узлах сетки ω^c и на границе области.

Аппроксимации (1), (2) можно получить, отталкиваясь от интегрального определения градиента. Для контрольного объема Ω_m^* имеем

$$\int_{\Omega_m^*} \text{grad } u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_m^*} u(\mathbf{x}) \mathbf{n} \, d\mathbf{x}, \quad (3)$$

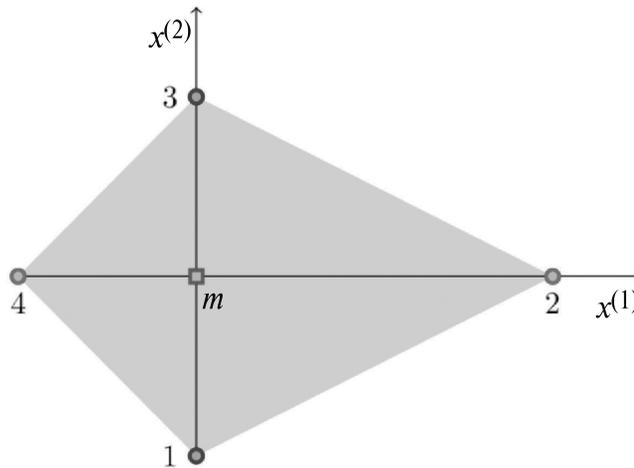
где \mathbf{n} — внешняя нормаль к $\partial\Omega_m^*$. С учетом этого сеточный оператор градиента в узле $\mathbf{x}_m \in \omega^*$ определяется согласно

$$(\text{grad}_h y)(\mathbf{x}_m) = \frac{1}{V^*(\mathbf{x})} \int_{\partial\Omega_m^*} \tilde{y}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \, d\mathbf{x}, \quad (4)$$

где $\tilde{y}(\mathbf{x})$ — кусочно-линейная интерполяция на частях границы контрольного объема $\partial\Omega_m^*$ по значениям сеточной функции $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$. Тем самым для интегрирования по контуру в правой части (3) мы используем квадратурную формулу трапеций. При использовании обозначений фиг. 5 из (4) получим

$$(\text{grad}_h y)(\mathbf{x}_m) = \left\{ \frac{y(\mathbf{x}_2) - y(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|}, \frac{y(\mathbf{x}_3) - y(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} \right\}. \quad (5)$$

Для $\mathbf{x}_m \in \partial\Omega$ аппроксимация градиента выполняется, когда контрольный объем Ω_m^* вырождается в треугольник.



Фиг. 5. К аппроксимации градиента.

Аналогичный подход будем использовать при построении сеточного оператора дивергенции. По заданному векторному полю $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в узлах $\mathbf{x} \in \omega^*$ приближенно вычисляется $y(\mathbf{x}) = \text{div } \mathbf{v}$ в узлах $\mathbf{x} \in \omega$.

Применение теоремы о дивергенции к контрольному объему Ω_k для узла $\mathbf{x}_k \in \omega$ дает

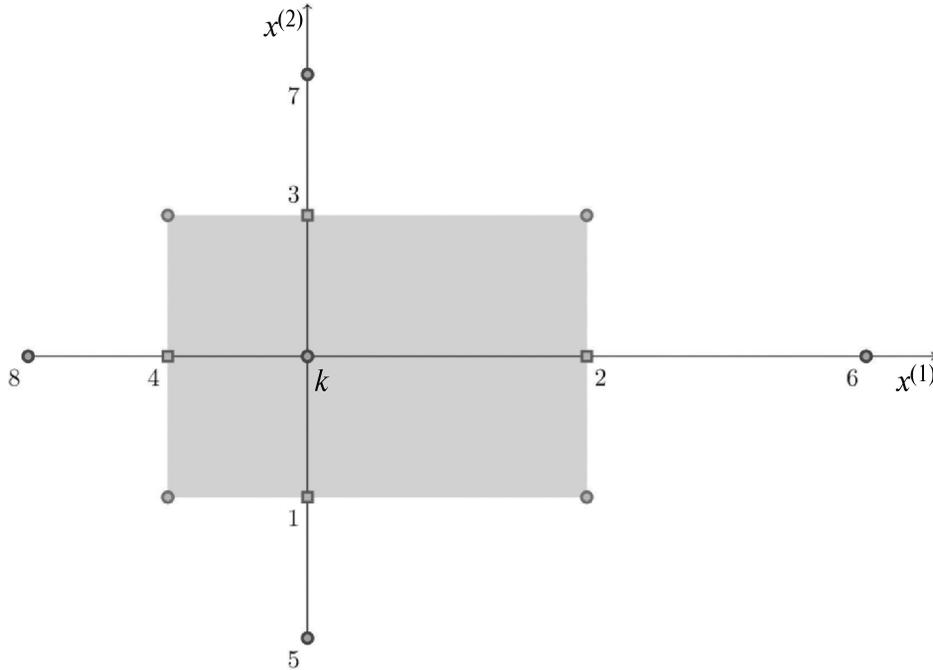
$$\int_{\Omega_k} \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Сеточный оператор дивергенции $\text{div}_h : \mathbf{H}(\omega^*) \rightarrow H(\omega)$ с учетом (6) определим согласно

$$(\text{div}_h \mathbf{w})(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2V(\mathbf{x})} \int_{\partial\Omega_k} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}, \quad (7)$$

где $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ — кусочно-постоянная интерполяция сеточной векторной функции $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega^*$, на частях границы контрольного объема $\partial\Omega_k$. Конкретное представление сеточного оператора дивергенции в обозначениях фиг. 6 запишется в виде

$$(\text{div}_h \mathbf{w})(\mathbf{x}_k) = \frac{w_1(\mathbf{x}_2) - w_1(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{w_2(\mathbf{x}_3) - w_2(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}. \quad (8)$$



Фиг. 6. К аппроксимации дивергенции.

Тем самым мы имеем стандартную аппроксимацию для

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial w_2}{\partial x^{(2)}}$$

на неравномерной прямоугольной сетке. Аналогично (2) можно ориентироваться на запись

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{w})(\mathbf{x}_k) = \begin{cases} 2 \frac{w_1(\mathbf{x}_{i+1/2,j}) - w_1(\mathbf{x}_{i-1/2,j})}{h_{i+1}^{(1)} + h_i^{(1)}} + 2 \frac{w_2(\mathbf{x}_{i,j+1/2}) - w_2(\mathbf{x}_{i,j-1/2})}{h_{j+1}^{(2)} + h_j^{(2)}}, \\ \mathbf{x}_k = (x_i^{(1)}, x_j^{(2)}), \\ \frac{w_1(\mathbf{x}_{i+1,j+1/2}) - w_1(\mathbf{x}_{i,j+1/2})}{h_{i+1}^{(1)}} + \frac{w_2(\mathbf{x}_{i+1/2,j+1}) - w_2(\mathbf{x}_{i+1/2,j})}{h_{j+1}^{(2)}}, \\ \mathbf{x}_k = (x_{i+1/2}^{(1)}, x_{j+1/2}^{(2)}) \end{cases} \quad (9)$$

при сформулированных ранее предположениях об узлах вне расчетной области Ω .

MD технологии связываются с согласованностью аппроксимаций градиента и дивергенции. Для достаточно гладких функций непрерывного аргумента имеет место ключевое равенство

$$\operatorname{div}(u\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Из него следует, что для функций $u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

При выполнении такого соотношения на сеточном уровне

$$(\mathbf{w}, \operatorname{grad}_h y) = -(y, \operatorname{div}_h \mathbf{w}) \quad (10)$$

мы говорим о согласованной аппроксимации градиента и дивергенции. В условиях (10) для $y(\mathbf{x}) \in H_0(\omega), \mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}(\omega^*)$ мы имеем

$$\operatorname{grad}_h^* = - \operatorname{div}_h, \quad (11)$$

где

$$H_0(\omega) = \{y(\mathbf{x}) \mid y(\mathbf{x}) \in H(\omega), \quad y(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\}.$$

Равенство (10) доказывается прямыми вычислениями при, например, использовании представлений (2) и (9). Из (11) сразу же следует, что сеточный оператор Лапласа $\text{div}_h \text{grad}_h : H_0(\omega) \rightarrow H_0(\omega)$ является самосопряженным и отрицательным.

3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ

Вопросы построения приближенных решений на объединенной сетке мы проиллюстрируем на примере краевой задачи для эллиптического уравнения со смешанными производными. Искомое решение $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, является решением уравнения конвекции-диффузии

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 c_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{12}$$

Будем считать, что для коэффициентов диффузии выполнены условия симметричности: $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Уравнение (12) рассматривается в предположении равномерной эллиптичности, когда

$$\kappa_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \xi_\alpha \xi_\beta \leq \kappa_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, \quad \kappa_1 > 0, \tag{13}$$

для произвольных ξ_α , $\alpha = 1, 2$. Конвективный перенос в уравнении (12) определяется вектором $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \{c_1(\mathbf{x}), c_2(\mathbf{x})\}$. Будем считать поле скорости бездивергентным, так что

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} = 0. \tag{14}$$

Для простоты, граничные условия возьмем в виде

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{15}$$

На множестве функций, удовлетворяющих (15), определим дифференциальный оператор \mathcal{D} выражением

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad x \in \Omega.$$

Удобно записать оператор диффузии \mathcal{D} с использованием операторов векторного анализа:

$$\mathcal{D}u = -\text{div} (K(\mathbf{x}) \text{grad} u), \tag{16}$$

где $K(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с элементами $k_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, $\alpha, \beta = 1, 2$. В \mathcal{H} оператор \mathcal{D} является самосопряженным и положительно-определенным:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq \delta \mathcal{I}, \quad \delta = \pi^2 \kappa_1 (l_1^{-2} + l_2^{-2}), \tag{17}$$

где κ_1 — постоянная в (13), а \mathcal{I} — единичный оператор.

Оператор конвективного переноса в уравнении (12) имеет недивергентную (характеристическую) форму [18]

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^2 c_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad x \in \Omega,$$

тем самым

$$\mathcal{C}_1 u = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} u. \tag{18}$$

Принимая во внимание условие (14), оператор конвективного переноса можно записать в дивергентной (консервативной) форме

$$\mathcal{C}_2 u = \text{div}(\mathbf{c}(\mathbf{x})u). \tag{19}$$

На множестве функций (15) для операторов \mathcal{C}_α , $\alpha = 1, 2$, справедливо равенство

$$\mathcal{C}_1^* = -\mathcal{C}_2. \quad (20)$$

Для оператора конвективного переноса в симметричной форме имеем

$$\mathcal{C}_0 u = \frac{1}{2} (\mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } u + \text{div}(\mathbf{c}(\mathbf{x})u)). \quad (21)$$

С учетом (21) получим

$$\mathcal{C}_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2), \quad \mathcal{C}_0 = -\mathcal{C}_0^*. \quad (22)$$

Отметим, что ключевое свойство кососимметричности оператора \mathcal{C}_0 справедливо и для векторов $\mathbf{c}(x)$, для которых условие (14) не выполнено.

Принимая во внимание введенные обозначения, краевую задачу (12), (15) запишем в виде операторного уравнения

$$\mathcal{D}u + \mathcal{C}u = f, \quad (23)$$

где $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ для всех $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — при выполнении (14). Для решения уравнения (23) с учетом (17), (22) имеем априорную оценку

$$\|u\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|. \quad (24)$$

При переходе от (12)–(15) к дискретной задаче мы хотим наследовать подобные свойства непрерывной задачи.

При аппроксимации краевой задачи для эллиптического уравнения (12)–(15) дифференциальным операторам диффузии \mathcal{D} и конвекции \mathcal{C} сопоставляются сеточные операторы D и C . Ищется приближенное решение $y(\mathbf{x}) \in H_0$ из уравнения

$$Dy + Cy = \varphi, \quad (25)$$

где, в простейшем случае $f(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, положим $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$.

С учетом (16) для сеточного оператора диффузии используется представление

$$(Dy)(\mathbf{x}_k) = -\text{div}_h (K(\mathbf{x}) \text{grad}_h y), \quad \mathbf{x}_k \in \omega \cap \Omega. \quad (26)$$

Принимая во внимание (11), для $y(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \in H_0(\omega)$ имеем

$$(Dy, v) = (K(\mathbf{x}) \text{grad}_h y, \text{grad}_h v).$$

Это равенство и симметричность $K(\mathbf{x})$ обеспечивает самосопряженность сеточного оператора диффузии. При ограничениях (13) получим

$$(Dy, y) \geq \kappa_1 \|\text{grad}_h y\|^2. \quad (27)$$

Положительная определенность оператора D следует из сеточного аналога неравенства Фридрикса

$$\|\text{grad}_h y\|^2 \geq M \|y\|^2 \quad (28)$$

для $y(\mathbf{x}) \in H_0(\omega)$ с постоянной M , которая не зависит от сетки. Это неравенство устанавливается также, как это делается для обычных прямоугольных неравномерных сеток (см., например, [19]). Из (27), (28) следует сеточный аналог (17)

$$D = D^* \geq \delta_h I, \quad \delta_h = \kappa_1 M. \quad (29)$$

Построение сеточных аналогов операторов конвективного переноса удобно начать с аппроксимации оператора \mathcal{C}_2 . В соответствии с определением (19) при построении сеточного оператора дивергенции мы должны определить аппроксимации нормальной компоненты вектора $\mathbf{c}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$ к соответствующей грани контрольного объема для узла $\mathbf{x} \in \omega$. Приближение сеточной функции $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$,

в узлах сетки ω^* можно выполнить различными способами. В контрольном объеме Ω_m^* для узла $\mathbf{x} \in \omega^*$ выделим две компоненты вектора $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ вдоль диагоналей Ω_m^* . Имеем $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \{c_n(\mathbf{x}), c_c(\mathbf{x})\}$, причем $c_n(\mathbf{x})$ соответствует диагонали по узлам сетки ω^n , а $c_c(\mathbf{x})$ — диагонали по узлам сетки ω^c . Если при аппроксимации оператора дивергенции на границе контрольного объема задействована $c_n(\mathbf{x})$, то будем аппроксимировать $y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega^*$, по узлам сетки ω^n , а при задействовании $c_c(\mathbf{x})$ проведем аппроксимацию по узлам сетки ω^c . По такому правилу строятся аппроксимации $\bar{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega^*$, в

$$(C_2y)(\mathbf{x}_k) = \operatorname{div}_h(\mathbf{c}(\mathbf{x})\bar{y}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x}_k \in \omega. \quad (30)$$

Формула (30) при использовании обозначений на фиг. 6 с учетом (8) соответствует заданию сеточного оператора конвективного переноса в дивергентной форме

$$(C_2y)(\mathbf{x}_k) = \frac{c_1(\mathbf{x}_2)\bar{y}_1(\mathbf{x}_2) - c_1(\mathbf{x}_4)\bar{y}_1(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{c_2(\mathbf{x}_3)\bar{y}_2(\mathbf{x}_3) - c_2(\mathbf{x}_1)\bar{y}_2(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y}_2(\mathbf{x}_1) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_5) + y(\mathbf{x}_k)), & \bar{y}_1(\mathbf{x}_2) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_6) + y(\mathbf{x}_k)), \\ \bar{y}_2(\mathbf{x}_3) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_7) + y(\mathbf{x}_k)), & \bar{y}_1(\mathbf{x}_4) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_8) + y(\mathbf{x}_k)). \end{aligned}$$

Тем самым аппроксимация выполняется на обычном пятиточечном шаблоне *крест*.

Для операторов конвективного переноса имеет место соотношение

$$C_1u = C_2u - u \operatorname{div} \mathbf{c}.$$

Согласованные аппроксимации соответствуют тому, что подобное равенство выполнено и на сеточном уровне, когда

$$C_1y = C_2y - y \operatorname{div}_h \mathbf{c}. \quad (32)$$

В методе опорных операторов [11, 12] соотношение типа (32) используется для построения одного сеточного оператора при выбранной аппроксимации другого сеточного оператора. При (31), (32) для сеточного оператора конвективного переноса в недивергентной форме C_1 получим

$$(C_1y)(\mathbf{x}_k) = \frac{c_1(\mathbf{x}_2)w_1(\mathbf{x}_2) + c_1(\mathbf{x}_4)w_1(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{c_2(\mathbf{x}_3)w_2(\mathbf{x}_3) + c_2(\mathbf{x}_1)w_2(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} w_2(\mathbf{x}_1) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_k) - y(\mathbf{x}_5)), & w_1(\mathbf{x}_2) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_6) - y(\mathbf{x}_k)), \\ w_2(\mathbf{x}_3) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_7) - y(\mathbf{x}_k)), & w_1(\mathbf{x}_4) &= \frac{1}{2}(y(\mathbf{x}_k) - y(\mathbf{x}_8)). \end{aligned}$$

Для оператора конвективного переноса в кососимметричной форме C_0 в соответствии с (21) используется представление

$$C_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2). \quad (34)$$

С учетом (31) и (33) из (34) следует

$$(C_0y)(\mathbf{x}_k) = \frac{c_1(\mathbf{x}_2)y(\mathbf{x}_6) + c_1(\mathbf{x}_4)y(\mathbf{x}_8)}{2|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{c_2(\mathbf{x}_3)y(\mathbf{x}_7) + c_2(\mathbf{x}_1)y(\mathbf{x}_5)}{2|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}. \quad (35)$$

Ключевая особенность аппроксимаций (31), (33) и (35) связана с тем, что мы можем работать с узлами только одной сетки. Например, для $y(\mathbf{x}) \in H(\omega^n)$ имеем $(C_0y)(\mathbf{x}) \in H(\omega^n)$, а для $y(\mathbf{x}) \in H(\omega^c)$ имеем $(C_0y)(\mathbf{x}) \in H(\omega^c)$. Аналогичные свойства имеет и сеточный оператор диффузии D , определяемый согласно (26), в случае диагональной матрицы $K(\mathbf{x})$ ($k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0$, $\alpha \neq \beta = 1, 2$).

Для сеточных операторов конвективно переноса устанавливаются аналоги равенств (20), (22) в пространстве $H_0(\omega)$:

$$C_1^* = -C_2, \quad C_0^* = -C_0. \quad (36)$$

В силу (29) и (36) для приближенного решения $y(\mathbf{x}) \in H_0(\omega)$ сеточной задачи конвекции-диффузии (25) получим априорную оценку

$$\|y\| \leq \frac{1}{\delta_h} \|\varphi\|,$$

которая является сеточным аналогом оценки (24) для решения дифференциальной задачи.

4. ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Операторно-разностные аппроксимации на объединенных сетках можно применять при приближенном решении краевых задач для векторных уравнений. В качестве типичного примера будем рассматривать уравнение

$$-\operatorname{div}(a(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{u})) - \operatorname{grad}(b(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (37)$$

для искомого вектора $\mathbf{u} = \{u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})\}$. В уравнении (37) через $\varepsilon(\mathbf{u})$ обозначена симметричная часть градиента векторной функции \mathbf{u} :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^t).$$

Дополним это уравнение однородными граничными условиями Дирихле

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (38)$$

На достаточно гладкие коэффициенты уравнения (37) накладываются ограничения $a(\mathbf{x}) \geq \varkappa > 0$, $b(\mathbf{x}) \geq 0$. Примером уравнения (37) выступают уравнение Ламе в линейной теории упругости.

В пространстве векторных функций $\mathbf{L}_2(\Omega)$ для скалярного произведения и нормы положим

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}.$$

На множестве функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих (38), определим операторы

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = -\operatorname{div}(a(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{u})), \quad \mathcal{B}\mathbf{u} = -\operatorname{grad}(b(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}), \quad (39)$$

для которых

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (\mathcal{B}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} b(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

В силу этого операторы \mathcal{A}, \mathcal{B} являются симметричными и неотрицательными при неотрицательных коэффициентах $a(\mathbf{x}), b(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq 0, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}^* \geq 0. \quad (40)$$

При отмеченных ограничениях $a(\mathbf{x}) \geq \varkappa > 0$ неравенство Корна [20] для векторных функций обеспечивает положительную определенность оператора \mathcal{A} . При разностной аппроксимации краевой задачи (37), (38) мы наследуем ключевые свойства (40) сеточных аналогов операторов \mathcal{A}, \mathcal{B} .

При приближенном решении двумерной задачи (37), (38) ищется сеточная векторная функция $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$, с компонентами $y_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, 2$. При построении сеточного аналога оператора \mathcal{A} сначала определяется тензор второго ранга (матрица), который связывается с градиентом векторной функции. Принимая во внимание (5) и работая с отдельными компонентами вектора, для $\operatorname{grad}_h \mathbf{y}$ получим

$$(\operatorname{grad}_h \mathbf{y})(\mathbf{x}_m) = \begin{pmatrix} \frac{y_1(\mathbf{x}_2) - y_1(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} & \frac{y_1(\mathbf{x}_3) - y_1(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} \\ \frac{y_2(\mathbf{x}_2) - y_2(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} & \frac{y_2(\mathbf{x}_3) - y_2(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_m \in \omega^*, \quad (41)$$

при использовании обозначений фиг. 5. Для элементов тензора

$$\varepsilon_h(\mathbf{y}) = \{(\varepsilon_h(\mathbf{y}))_{\alpha\beta}\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

это дает

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h(\mathbf{y}))_{11}(\mathbf{x}_m) &= \frac{y_1(\mathbf{x}_2) - y_1(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|}, & (\varepsilon_h(\mathbf{y}))_{22}(\mathbf{x}_m) &= \frac{y_2(\mathbf{x}_3) - y_2(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}, \\ (\varepsilon_h(\mathbf{y}))_{12}(\mathbf{x}_m) &= (\varepsilon_h(\mathbf{y}))_{21}(\mathbf{x}_m) = \frac{y_1(\mathbf{x}_3) - y_1(\mathbf{x}_1)}{2|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} + \frac{y_2(\mathbf{x}_2) - y_2(\mathbf{x}_4)}{2|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|}, & \mathbf{x}_m \in \omega^*. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогично (8) (см. фиг. 6) определяется вектор

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \sigma)(\mathbf{x}_k) &= \left\{ \frac{\sigma_{11}(\mathbf{x}_2) - \sigma_{11}(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{\sigma_{12}(\mathbf{x}_3) - \sigma_{12}(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\sigma_{21}(\mathbf{x}_2) - \sigma_{21}(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{\sigma_{22}(\mathbf{x}_3) - \sigma_{22}(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} \right\}, & \mathbf{x}_k \in \omega, \end{aligned} \quad (43)$$

для тензора второго ранга $\sigma(\mathbf{x})$, заданного в узлах $\mathbf{x}_m \in \omega^*$. В нашем случае $\sigma(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})(\varepsilon_h(\mathbf{y}))(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_m \in \omega^*$. Расчетные формулы (42), (43) позволяют определить сеточный аналог оператора \mathcal{A} следующим образом:

$$(\mathcal{A}\mathbf{y})(\mathbf{x}_k) = -\operatorname{div}_h (a(\mathbf{x}) \varepsilon_h(\mathbf{y}))(\mathbf{x}_k) \quad \mathbf{x}_k \in \omega \cap \Omega. \quad (44)$$

На подпространстве

$$\mathbf{H}_0(\omega) = \{\mathbf{y}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}(\omega), \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\}$$

для сеточного оператора A получим

$$(\mathcal{A}\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} a(\mathbf{x}) \varepsilon_h(\mathbf{y}) : \varepsilon_h(\mathbf{v}) V(\mathbf{x}).$$

При $a(\mathbf{x}) \geq 0$ это дает

$$A = A^* \geq 0.$$

Для установления положительной определенности A при $a(\mathbf{x}) \geq \varkappa > 0$ необходимо провести более детальное рассмотрение, следуя, например, [12].

Отметим ключевые моменты в построении сеточного аналога оператора \mathcal{B} . Для векторных сеточных функций $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$, сначала рассчитывается приближение для дивергенции в узлах сетки ω^* . При использовании обозначений на фиг. 5 положим

$$(\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{y})(\mathbf{x}_m) = \frac{y_1(\mathbf{x}_2) - y_1(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} + \frac{y_2(\mathbf{x}_3) - y_2(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|}, \quad \mathbf{x}_m \in \omega^*. \quad (45)$$

Сеточный оператор градиента в узлах сетки ω (см. фиг. 6) определим для сеточной скалярной функции $w(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega^*$:

$$(\widetilde{\operatorname{grad}}_h w)(\mathbf{x}_k) = \left\{ \frac{w(\mathbf{x}_2) - w(\mathbf{x}_4)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|}, \frac{w(\mathbf{x}_3) - w(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} \right\}, \quad \mathbf{x}_k \in \omega. \quad (46)$$

Введенные аппроксимации градиента (46) $(\widetilde{\operatorname{grad}}_h : H(\omega^*) \rightarrow \mathbf{H}(\omega))$ и дивергенции (45) $(\widetilde{\operatorname{div}}_h : \mathbf{H}(\omega) \rightarrow H(\omega^*))$ являются согласованными в смысле выполнения на $\mathbf{H}_0(\omega)$ равенства

$$\widetilde{\operatorname{grad}}_h^* = -\widetilde{\operatorname{div}}_h. \quad (47)$$

Сеточный аналог оператора \mathcal{B} определим как

$$(\mathcal{B}\mathbf{y})(\mathbf{x}_k) = -\widetilde{\operatorname{grad}}_h (b(\mathbf{x}) \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}_k \in \omega \cap \Omega. \quad (48)$$

С учетом (47) получим

$$(\mathcal{B}\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (b(\mathbf{x}) \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{y}, \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}).$$

Для $b(\mathbf{x}) \geq 0$ это дает

$$B = B^* \geq 0.$$

Тем самым при аппроксимациях (44), (48) наследуются отмеченные выше (смотри (40)) основные свойства операторов \mathcal{A}, \mathcal{B} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Strikwerda J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 2004.
3. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения // Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, ноябрь 1958 г.). Ереван: Изд-во АН ЛрмССР, 1960. С. 148–160.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 1. С. 4–63.
5. Eymard R., Gallouet T., Herbin R. Finite volume methods // Handbook of Numerical Analysis. V. 7. Amsterdam: North Holland, 2000. P. 713–1020.
6. Li R., Chen Z., Wu W. Generalized Difference Methods for Differential Equations: Numerical Analysis of Finite Volume Methods. New York: Marcel Dekker, 2000.
7. Shashkov M. Conservative Finite-Difference Methods on General Grids. Boca Raton: CRC press, 1996.
8. da Veiga L. B., Lipnikov K., Manzini G. The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems. Berlin: Springer, 2014.
9. Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 3. С. 449–465.
10. Castillo J. E., Miranda G. F. Mimetic Discretization Methods. Boca Raton: CRC Press, 2013.
11. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 7. С. 1317–1327.
12. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. и др. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Изд. Критерий, 1996.
13. Vabishchevich P. N. Finite-difference approximation of mathematical physics problems on irregular grids // Computational Methods in Applied Mathematics. 2005. V. 5. № 3. P. 294–330.
14. Фрязинов И. В. Об одной аппроксимации смешанных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 3. С. 644–660.
15. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики // Успехи матем. наук. 1976. Т. 31. № 6(192). С. 167–197.
16. Фрязинов И. В. Об одной разностной аппроксимации задач для эллиптического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 1. С. 102–118.
17. Фрязинов И. В. Аппроксимация двумерных эллиптических и параболических уравнений на паре согласованных сеток // Матем. моделирование. 1994. Т. 6. № 4. С. 53–64.
18. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: URSS, 1999.
19. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
20. Duvaut G., Lions J. L. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

OPERATOR-DIFFERENCE APPROXIMATIONS ON NON-STANDARD RECTANGULAR GRIDS

P. N. Vabishchevich^{a,b,*}

^a 119991 Moscow, Lenin Hills, 1, Lomonosov Moscow State University

^b 677007 Yakutsk, Kulakovsky Str., 42, Northeastern Federal University named after M. K. Ammosov

*e-mail: vabishchevich@gmail.com

Received February 7, 2024

Revised March 3, 2024

Accepted March 5, 2024

Abstract. In the approximate solution of boundary value problems for partial differential equations, difference methods are widely used. Grid approximations are most simply constructed when dividing the calculated area into rectangular cells. Usually the grid nodes coincide with the vertices of the cells. In addition to such nodal approximations, grids with nodes in the centers of cells are also used. It is convenient to formulate boundary value problems in terms of invariant operators of vector (tensor) analysis, which are compared with the corresponding grid analogues. The paper builds analogues of gradient and divergence operators on non-standard rectangular grids, the nodes of which consist of both the vertices of the calculated cells and their centers. The proposed approach is illustrated by approximations of the boundary value problem for the stationary two-dimensional convection-diffusion equation. The key features of the construction of approximations for vector problems with orientation to applied problems of solid mechanics are noted.

Keywords: rectangular computational grid, vector analysis operators, grid operators, operator-difference schemes, convection-diffusion equation.