ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 7, с. 1217–1232

УДК 519.6

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ НА ЗАДАЧИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ[1)]

© 2024 г. А. А. Белов[1,2,*], Ж. О. Домбровская[1,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия
[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия
**e-mail: aa.belov@physics.msu.ru*
***e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru*

Поступила в редакцию 07.02.2023 г.
Переработанный вариант 07.03.2024 г.
Принята к публикации 03.04.2024 г.

В последние годы большое внимание уделяется устройствам интегральной фотоники на основе нелинейных сред. Предложено обобщение метода матриц переноса на задачи в плоскопараллельных слоистых средах с квадратичной и кубической нелинейностью. Падающее излучение может быть как монохроматической волной, так и немонохроматическим импульсом. Ранее такие задачи удавалось решать только сеточными методами. Предлагаемые подходы существенно расширяют область применимости матричных методов и кардинально превосходят по экономичности известные сеточные методы. Библ. 16. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, слоистые среды, нелинейные среды, условия сопряжения, дисперсия вещества.

DOI: 10.31857/S0044466924070081, **EDN**: xilgen

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Приложения

Интегральной фотоникой называется направление оптики, посвященное разработке наноразмерных устройств, позволяющих управлять излучением в ближнем ИК- и видимом диапазоне. Многие такие устройства сводятся к набору плоскопараллельных либо клиновидных пластин, на которые нормально либо наклонно падает электромагнитное излучение. Важной задачей является нахождение таких толщин слоев, которые обеспечивают заданный спектральный состав отраженного либо прошедшего излучения (см. [1], [2]).

В последние годы большое внимание уделяется устройствам интегральной фотоники на основе нелинейных сред. Напомним (см. [3]), что нелинейной называют среду, у которой диэлектрическая восприимчивость $\chi(\mathbf{E})$ зависит от величины электрического поля $\mathbf{E}$. Традиционно рассматривают *квадратичные* и *кубические* среды. Простейшие материальные уравнения для них имеют вид

$$P = \chi^I E + \chi^{II} E^2, \tag{1}$$

и

$$P = \chi^I E + \chi^{III} E^3 \tag{2}$$

соответственно. Здесь P — модуль вектора поляризации вещества.

Нелинейная интегральная фотоника вызывает большой интерес, поскольку такие устройства представляются перспективной базой для создания различных элементов оптической вычислительной техники (см. [4], [5]). Среди них, например, переключатель с гистерезисом (элемент памяти), логический элемент “и” или “или”, трансфазорный усилитель (оптический транзистор), ограничитель оптической мощности.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 22-71-00070).

1.2. Вычислительные методы

1. Приведенные приложения описываются начально-краевой задачей для нестационарных уравнений Максвелла. Отметим, что нестационарность является принципиально важной. Так, при прохождении монохроматической волны через нелинейную среду генерируется излучение с кратными (удвоенной либо утроенной) частотами. При прохождении немонохроматического импульса картина еще усложняется. При этом становится значимой *частотная дисперсия* среды, т.е. зависимость материальных параметров от частоты. Это представляет значительную трудность для численного расчета. Второй трудностью является наличие *границ раздела сред*, на которых материальные параметры изменяются скачком. На этих границах записывают условия сопряжения (в англоязычной литературе они называются interface conditions). В результате решение оказывается обобщенным, т.е. имеет ограниченную гладкость.

2. Подробный обзор известных подходов приведен в [6]. Многие известные алгоритмы для решения уравнений Максвелла (матричные методы, методы дискретных источников, модальные методы, псевдоспектральные методы, методы мультипольной аппроксимации, методы конечных разностей и конечных элементов в частотной области) дают хорошие результаты для достаточно узких классов задач. Так, матричные методы применимы, если рассеиватель является плоскопараллельным, среды — кусочно-однородными, а излучение — монохроматическим.

Ранее нелинейные задачи удавалось решать только сеточными методами — методами конечных разностей (FD- time domain), конечных элементов (FE- time domain) и конечных объемов (FV-time domain) во временной области. Практически все они сводятся к схеме типа “крест”, в которой электрическое и магнитное поля относятся к целым и полуцелым пространственным ячейкам и временны́м слоям.

Алгоритмы FDTD, FETD, FVTD имеют следующие принципиальные недостатки.

1. Ни в одном из них не реализованы физически корректные условия сопряжения на границах раздела сред. Поэтому методы данного класса не являются полностью консервативными. Это приводит к резкому ухудшению точности и появлению нефизичных пилообразных осцилляций численного решения вблизи границ раздела (см. [7]).

2. Известные способы учета частотной дисперсии вносят существенную неустранимую погрешность (см. [8], [9]).

3. Эти недостатки удалось преодолеть в предложенных нами бикомпактных схемах и методе спектрального разложения (см. [10]). Это двухточечные полностью консервативные схемы, основанные на сеточной аппроксимации интегральных уравнений Максвелла и условий сопряжения на границах раздела сред. Доказано, что бикомпактные схемы сходятся как на гладких, так и на обобщенных решениях. В методе спектрального разложения немонохроматическая задача сводится к набору монохроматических задач с помощью сеточного преобразования Фурье. Это позволяет учитывать произвольный закон частотной дисперсии. Расчеты тестовых и прикладных задач (см. [11]) убедительно показали преимущества бикомпактных схем и метода спектрального разложения по сравнению с другими известными подходами.

4. В настоящей статье предложено обобщение метода спектрального разложения и метода матриц переноса на задачи в слоистых средах с квадратичной и кубической нелинейностью. Предлагаемые подходы существенно расширяют область применимости матричных методов. Ранее данные задачи удавалось решать только сеточными методами. Для финитных импульсов квадратуры в методе спектрального разложения сходятся по экспоненциальному закону. Поэтому предлагаемые методы являются сверхбыстрым. Их трудоемкость кардинально меньше таковой у известных сеточных методов.

2. КВАДРАТИЧНЫЕ СРЕДЫ

2.1. Монохроматическая задача

1. Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из Q плоскопараллельных пластин общей толщиной a. Ориентируем координатную ось z перпендикулярно пластинам; оси x и y расположены в плоскости пластин. Обозначим координаты границ слоев через $0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_Q = a$. При $z < 0$

и $z > a$ расположены полубесконечные диэлектрические среды. Их диэлектрические проницаемости таковы же, как в крайних слоях $0 < z < \xi_1$ и $\xi_{Q-1} < z < a$ соответственно.

2. Пусть пластины состоят из немагнитных диэлектриков. Часть из них является линейными, часть — квадратичными средами. Будем считать все среды изотропными. Тогда вектор поляризации $\mathbf{P}$ параллелен вектору электрического поля $\mathbf{E}$. Материальные уравнения квадратичных слоев имеют вид (1). Для линейных слоев полагаем $\chi^{II} = 0$. Значения $\chi^{I,II}$ на границах раздела меняются скачком. Материальные параметры зависят от частоты, т.е. среды являются частотно диспергирующими.

3. Пусть на описанную структуру из $z = -\infty$ нормально падает плоская электромагнитная волна; а волна, падающая из $z = +\infty$, отсутствует. Приближение плоской волны хорошо работает на оси оптического пучка. При этом мы пренебрегаем краевыми эффектами на границах пучка (дифракционная расходимость, сужение пучка из-за самофокусировки и т.д.)

Пусть падающая волна содержит только одну частоту ω. Такой случай назовем *монохроматическим*. При прохождении такого излучения через квадратичную среду формируется волна с удвоенной частотой 2ω. Обе эти волны испытывают переотражения на границах раздела сред. Будем считать, что показатели преломления для частот ω и 2ω различаются. В этом случае говорят, что условие волнового синхронизма не выполнено.

В монохроматической задаче мы рассматриваем решение, соответствующее установившимся колебаниям. При этом информация о начальных условиях теряется. Поэтому мы не включили их в постановку задачи.

4. В каждом q-м слое электрическое поле удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_q}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\left(1 + 4\pi\chi_q^I\right)\frac{\partial^2 E_q}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\chi_q^{II} E_q^2\right), \quad 1 \leqslant q \leqslant Q. \tag{3}$$

Используется система единиц СГС. Подчеркнем, что уравнение (3) является нестационарным, даже если падающее излучение содержит только одну частоту.

Для каждой спектральной компоненты магнитное поле выражается через электрическое по формуле

$$H_q = \frac{c}{i\omega}\frac{\partial E_q}{\partial z}. \tag{4}$$

Для волны с удвоенной частотой нужно заменить $\omega \to 2\omega$.

На границах раздела сред выполняются условия сопряжения

$$E_q|_{z=\xi_q} = E_{q+1}|_{z=\xi_q}, \quad H_q|_{z=\xi_q} = H_{q+1}|_{z=\xi_q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant Q-1. \tag{5}$$

Эти равенства имеют место для каждой спектральной компоненты.

На границах расчетной области поставим условия излучения (см. [12]) для каждой спектральной компоненты. Для исходной гармоники они принимают вид

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + ik_0^\omega E_0 = 2ik_0\mathcal{E}, \quad \frac{\partial E_Q}{\partial z} - ik_Q^\omega E_Q = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$k_q^\omega = n_q^\omega \omega/c \tag{7}$$

есть волновое число в q-м слое на частоте ω. Линейный показатель преломления равен $n_q^\omega = \sqrt{1 + 4\pi\chi^I(\omega)}$. Для удвоенной частоты имеем

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + ik_0^{2\omega} E_0 = 0, \quad \frac{\partial E_Q}{\partial z} - ik_Q^{2\omega} E_Q = 0. \tag{8}$$

Волновое число для удвоенной частоты $k_q^{2\omega}$ определяется равенством (7) с заменой $\omega \to 2\omega$.

2.2. Нулевое приближение

1. В реальных средах вклад нелинейности в поляризацию вещества является малым: $\chi^{II}E^2/\chi^I E \sim E/E_{\text{ат}}$ для квадратичных сред и $\chi^{III}E^2/\chi^I E^2 \sim (E/E_{\text{ат}})^2$ для кубических. Здесь $E_{\text{ат}} \approx 10^7$ СГСЭ —

характерная величина внутриатомного электрического поля (см. [3]). Для типичных источников излучения $E/E_{\text{ат}} \sim 10^{-4}$. Поэтому к описанной нелинейной задаче можно применить метод последовательных приближений.

2. Нулевое приближение соответствует пространственно однородной среде, причем $\chi^{II} = 0$. Тогда правая часть уравнения (3) равна нулю. Согласно граничному условию (6), в падающем излучении присутствует только частота ω. Поэтому нулевое приближение будет содержать только эту частоту $E^0(z,t) = E^0(z)e^{-i\omega t}$. Тогда в (3) можно заменить $\partial^2/\partial t^2 \to -\omega^2$ и получить уравнение для комплексной амплитуды поля $E^0(z)$

$$\frac{\partial^2 E_q^0}{\partial z^2} + \left(k_q^\omega\right)^2 E_q^0 = 0, \quad 1 \leqslant q \leqslant Q. \tag{9}$$

3. Решение этой задачи хорошо известно. В каждом слое оно представляется суперпозицией плоских монохроматических волн, распространяющихся в обоих направлениях оси z. Запишем это решение в q-слое:

$$E_q^0(z) = A_q \exp\left(ik_q^\omega z\right) + B_q e\left(-ik_q^\omega z\right), \quad 1 \leqslant q \leqslant Q. \tag{10}$$

Далее вычислим магнитное поле согласно (4):

$$H_q^0(z) = n_q^\omega \left[A_q \exp\left(ik_q^\omega z\right) - B_q \exp\left(-ik_q^\omega z\right)\right], \quad 1 \leqslant q \leqslant Q. \tag{11}$$

4. Из условий излучения (6) следует, что

$$A_0 = \mathcal{E}, \quad B_Q = 0. \tag{12}$$

Подставим (10), (11) в условия сопряжения (5)

$$A_q \exp\left(ik_q^\omega \xi_q\right) + B_q \exp\left(-ik_q^\omega \xi_q\right) = A_{q+1} \exp\left(ik_{q+1}^\omega \xi_q\right) - B_{q+1} \exp\left(-ik_{q+1}^\omega \xi_q\right), \tag{13}$$

$$n_q^\omega \left[A_q \exp\left(ik_q^\omega \xi_q\right) - B_q \exp\left(-ik_q^\omega \xi_q\right)\right] = n_{q+1}^\omega \left[A_{q+1} \exp\left(ik_{q+1}^\omega \xi_q\right) - B_{q+1} \exp\left(-ik_{q+1}^\omega \xi_q\right)\right]. \tag{14}$$

Здесь $1 \leqslant q \leqslant Q-1$. Равенства (12)–(14) есть система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов решения (10), (11). Она содержит $2Q-2$ уравнения относительно $2Q-2$ неизвестных. Ее можно решить, например, методом Гаусса для ленточных матриц.

Таким образом, решение в нулевом приближении построено.

5. Полученное решение является реализацией хорошо известного метода матриц переноса. Отметим, что классическая формулировка этого метода (см. [13]) основана на матрицах, выражающих набег фазы полей в q-м слое:

$$M_q = \begin{pmatrix} \cos k_q^\omega d_q & i(n_q^\omega)^{-1} \sin k_q^\omega d_q \\ i n_q^\omega \sin k_q^\omega d_q & \cos k_q^\omega d_q \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Через эти матрицы выражаются амплитудные коэффициенты отражения и преломления и значения поля E в границах раздела сред. Последние позволяют без труда найти поля внутри слоев.

Приведенная нами форма метода матриц рассеяния более предпочтительна в контексте настоящей работы, поскольку она непосредственно обобщается на первое и последующие приближения.

2.3. Первое приближение

1. Рассмотрим q-й слой. Пусть $\chi_q^{II} \neq 0$. Найденное выше решение (10) есть комплексная амплитуда электрического поля. Восстановим временну́ю зависимость, домножая на $\exp(-i\omega t)$. Подставим это выражение в правую часть уравнения (3) и получим уравнение для поправки первого приближения

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta E_q^1 - \frac{1}{c^2}\left(1 + 4\pi\chi_q^I\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta E_q^1 = \\ = \frac{4\pi}{c^2}\chi_q^{II}\left[A_q \exp\left(ik_q^\omega z\right) + B_q \exp\left(-ik_q^\omega z\right)\right]^2 \exp\left(-2i\omega t\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь значения восприимчивости $\chi^{I,II}$ относятся к частоте 2ω.

Поправка δE_q^1 считается малой по сравнению с нулевым приближением. Поэтому среду для нее можно считать линейной. Влияние нелинейности является эффектом второго порядка малости, которым можно пренебречь. Правая часть уравнения (16) соответствует "перекачке" энергии из основной гармоники в кратную.

2. Видно, что в правой части (16) имеется только удвоенная частота 2ω. Поэтому решение может зависеть от времени только как $\exp(-2i\omega t)$, т.е. $\delta E_q^1(z,t) = \delta E_q^1(z)\exp(-2i\omega t)$. Заменяя $\partial^2/\partial t^2 \to -4\omega^2$, получим уравнение для комплексной амплитуды первой поправки

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta E_q^1 + \left(k_q^{2\omega}\right)^2 \delta E_q^1 = -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2 \chi_q^{II}\left[A_q^2 \exp\left(2ik_q^{\omega}z\right) + 2A_qB_q + B_q^2\exp\left(-2ik_q^{\omega}z\right)\right]. \tag{17}$$

Здесь коэффициенты A_q, B_q известны из нулевого приближения.

3. Построим общее решение уравнения (17). Оно состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Первое имеет вид

$$C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}z\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}z\right), \tag{18}$$

где C_q, D_q — произвольные постоянные.

Частное решение будем искать в виде

$$\alpha_q \exp\left(2ik_q^{\omega}z\right) + \beta_q \exp\left(-2ik_q^{\omega}z\right) + \gamma_q, \tag{19}$$

где α_q, β_q, γ_q — некоторые коэффициенты. Чтобы найти их, подставим (19) в (17). После несложных выкладок получим

$$\begin{aligned}
\alpha_q &= -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2\chi_q^{II}\frac{A_q^2}{\left(k_q^{2\omega}\right)^2 - 4\left(k_q^{\omega}\right)^2},\\
\beta_q &= -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2\chi_q^{II}\frac{B_q^2}{\left(k_q^{2\omega}\right)^2 - 4\left(k_q^{\omega}\right)^2},\\
\gamma_q &= -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2\chi_q^{II}\frac{2A_qB_q}{\left(k_q^{2\omega}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку условие волнового синхронизма не выполнено, то $k_q^{2\omega} \neq 2k_q^{\omega}$ ни в одном слое. Поэтому знаменатели в (20) не обращаются в нуль.

Таким образом, амплитуда поправки первого порядка малости для электрического поля равна

$$\delta E_q^1 = C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}z\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}z\right) + \alpha_q \exp\left(2ik_q^{\omega}z\right) + \beta_q \exp\left(-2ik_q^{\omega}z\right) + \gamma_q. \tag{21}$$

Вычислим поправку первого порядка для магнитного поля

$$\delta H_q^1 = n_q^{2\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}z\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}z\right)\right] + n_q^{\omega}\left[\alpha \exp\left(2ik_q^{\omega}z\right) - \beta\exp\left(-2ik_q^{\omega}z\right)\right]. \tag{22}$$

4. Определим коэффициенты C_q, D_q. Из условий излучения (8) следует, что

$$C_1 = 0, \quad D_Q = 0. \tag{23}$$

Из условий сопряжения при $z = \xi_q$, $1 \leqslant q \leqslant Q-1$, получаем

$$\begin{aligned}
&C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right) -\\
&\qquad - C_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) - D_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) =\\
&\quad = \alpha_{q+1}\exp\left(2ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \beta_{q+1}\exp\left(-2ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \gamma_{q+1} -\\
&\qquad - \alpha_q \exp\left(2ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \beta_q\exp\left(-2ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \gamma_q,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$n_q^{2\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - D_q\exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right)\right] -$$

$$- n_{q+1}^{2\omega}\left[C_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) - D_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right)\right] =$$
$$= n_{q+1}^{\omega}\left[\alpha_{q+1}\exp\left(2ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) - \beta_{q+1}\exp\left(-2ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right)\right] -$$
$$- n_q^{\omega}\left[\alpha_q\exp\left(2ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \beta_q\exp\left(-2ik_q^{\omega}\xi_q\right)\right]. \quad (25)$$

Здесь предполагается, что среды по обе границы раздела являются квадратичными без волнового синхронизма. В частности, если одна из сред (например, $(q+1)$-я) является линейной, то для нее $\chi^{II} = 0$, и коэффициенты $\alpha_{q+1} = \beta_{q+1} = 0$.

Матрица линейной системы (23)–(25) аналогична матрице линейной системы (12)–(14) для коэффициентов нулевого приближения. Она также легко обращается методом Гаусса для ленточных матриц.

5. Таким образом, коэффициенты в выражении для поправки первого порядка вычислены. В изотропном случае поля нулевого приближения и поправки первого порядка имеют одинаковую поляризацию. Поэтому окончательно выражения для полей в первом приближении имеют вид

$$E_q^1(z,t) = E_q^0(z)e^{-i\omega t} + \delta E_q^1(z)e^{-2i\omega t}, \quad H_q^1(z,t) = H_q^0(z)e^{-i\omega t} + \delta H_q^1(z)e^{-2i\omega t}. \quad (26)$$

Полученное решение является новым.

2.4. Волновой синхронизм

1. Наибольший интерес для практики представляет случай, когда фазовые скорости распространения света на основной и на кратной частотах совпадают. В этом случае говорят, что выполняется условие *волнового синхронизма*. При этом происходит конструктивная интерференция этих волн, и амплитуда кратной гармоники нарастает по мере ее распространения в среде.

2. Реализовать это условие можно с помощью двойного лучепреломления в анизотропном кристалле (см. [3]). В отрицательном одноосном кристалле скорости волн основной частоты и второй гармоники могут быть одинаковы, если они имеют разные поляризации: основная гармоника является обыкновенной волной, а кратная — необыкновенной.

Формально задачи в анизотропных средах выходят далеко за пределы рассмотренных простейших постановок. Однако в описанном выше частном случае направления поляризации основной гармоники (т.е. нулевого приближения) и удвоенной гармоники (т.е. поправки первого порядка) соответствуют собственным состояниями поляризации кристалла, поэтому их поляризаци не изменяются при распространении волны. Значит, амплитуды этих волн описываются скалярными уравнениями, и к ним можно применить предложенный подход.

3. Пусть q-й слой рассеивателя выполнен из отрицательного одноосного анизотропного кристалла. Обозначим главные показатели преломления через n_o (для обыкновенной волны) и n_e (для необыкновенной). Пусть частотная дисперсия является нормальной: с ростом частоты показатель преломления увеличивается.

Пусть угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и главной осью кристалла таков, что выполняется условие волнового синхронизма, т.е. $n_o^{\omega} = n_e^{2\omega}$. При этом падение излучения на рассеиватель может оказаться как нормальным, так и наклонным. Это зависит от взаимной ориентации главной оси кристалла и плоскостей, образующих границы слоев. Ниже приведены формулы для случая нормального падения. Обобщение на наклонное падение описано далее в разд. 5.

4. Амплитуда поправки первого порядка описывается уравнением (17), в котором нужно положить $k_q^{2\omega} = 2k_q^{\omega}$. Общее решение однородного уравнения по-прежнему выражается формулой (18). Частное решение неоднородного уравнения будем искать в следующем виде:

$$\alpha z\exp\left(2ik_q^{\omega}z\right) + \beta z\exp\left(-2ik_q^{\omega}z\right) + r. \quad (27)$$

Коэффициенты α, β, γ определяются подстановкой этого решения в уравнение (17). Они имеют вид

$$\alpha_q = -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2\chi_q^{II}\frac{A_q^2}{4ik_q^{\omega}}, \quad \beta_q = -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2\chi_q^{II}\frac{B_q^2}{4ik_q^{\omega}}, \quad \gamma_q = -\frac{16\pi}{c^2}\omega^2\chi_q^{II}\frac{A_qB_q}{2ik_q^{\omega}}. \quad (28)$$

Приведем окончательное формулы поправок первого порядка малости для амплитуд электрического и магнитного полей

$$\delta E_q^1 = (C_q + \alpha_q z)\exp\left(ik_q^{2\omega} z\right) + (D_q + \beta_q z)\exp\left(-ik_q^{2\omega} z\right) + \gamma_q, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\delta H_q^1 = (n_e)_q^{2\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{2\omega} z\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega} z\right)\right] + \\ + \frac{c}{2i\omega}\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{2\omega} z\right) + \beta_q \exp\left(-ik_q^{2\omega} z\right)\right] + \\ + (n_e)_q^{2\omega} z\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{2\omega} z\right) - \beta_q \exp\left(-ik_q^{2\omega} z\right)\right].\end{aligned} \tag{30}$$

Напомним, что временная зависимость этих поправок выражается множителем $\exp(-2i\omega t)$.

5. Остается определить коэффициенты C_q, D_q. Найдем их из граничных условий и условий сопряжения. Имеем

$$C_0 = 0, \quad D_Q = 0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - \\ - C_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) + D_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) = \\ = \alpha_{q+1}\xi_q \exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) + \beta_{q+1}\xi_q \exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) + \gamma_{q+1} - \\ - \alpha_q\xi_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - \beta_q\xi_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - \gamma_q,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}(n_e)_q^{2\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - (n_e)_{q+1}^{2\omega}\left[C_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) - D_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right)\right] = \\ = \frac{ic}{2\omega}\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) + \beta_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - \right. \\ \left. - \alpha_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) - \beta_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right)\right] + \\ + (n_e)_{q+1}^{2\omega}\xi_q\left[\alpha_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right) - \beta_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{2\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - (n_e)_q^{2\omega}\xi_q\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{2\omega}\xi_q\right) - \beta_q \exp\left(-ik_q^{2\omega}\xi_q\right)\right].\end{aligned} \tag{33}$$

Если одна из сред линейна, то для нее коэффициенты α, β, γ обращаются в нуль.

Таким образом, решение полностью построено. Оно ранее было неизвестно.

3. КУБИЧЕСКИЕ СРЕДЫ

3.1. Постановка задачи

1. Пусть среда является изотропной, и ее материальное уравнение описывается равенством (2). Постановка *монохроматической* задачи в слоистой среде с кубической нелинейностью практически дословно повторяет п. 2.1 с одним отличием. В правой части уравнения (3) нужно заменить $\chi_q^{II} E^2 \to \chi_q^{III} E^3$.

2. При прохождении излучения в такой среде генерируется волна с утроенной частотой. Будем считать, что из-за дисперсии показатели преломления для частот ω и 3ω различаются, т.е. условие волнового синхронизма не выполнено. Для утроенной гармоники отсутствуют волны, падающие из $z = \pm\infty$.

3.2. Последовательные приближения

1. Нулевое приближение соответствует случаю $\chi_q^{III} = 0$. Поэтому его вывод полностью повторяет п. 2.2, а поля даются формулами (10), (11).

2. Построим поправку первого порядка малости. Пусть в q-м слое $\chi_q^{III} \neq 0$. Подставим решение для нулевого приближения в правую часть волнового уравнения. Его правая часть зависит от времени

как $\exp(-3i\omega t)$. Предполагая такую же временную зависимость у поправки первого приближения, получим уравнение для ее амплитуды $\delta E_q^1(z)$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta E_q^1 + (k_q^{3\omega})^2 \delta E_q^1 = -\frac{36\pi}{c^2}\omega^3 \chi_q^{III}\left[A_q \exp\left(ik_q^{\omega} z\right) + B_q \exp\left(-ik_q^{\omega} z\right)\right]^3. \tag{34}$$

Представим общее решение как сумму общего решения однородного уравнения

$$C_q \exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right) \tag{35}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\alpha_q \exp\left(3ik_q^{\omega} z\right) + \beta_q \exp\left(ik_q^{\omega} z\right) + \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega} z\right) + \delta_q \exp\left(-3ik_q^{\omega} z\right). \tag{36}$$

Коэффициенты α_q, β_q, γ_q, δ_q имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_q &= -\frac{36\pi}{c^2}\omega^3 \chi_q^{III} \frac{A_q^3}{\left(k_q^{3\omega}\right)^2 - 9\left(k_q^{\omega}\right)^2}, \quad \beta_q = -\frac{36\pi}{c^2}\omega^3 \chi_q^{III} \frac{3A_q^2 B_q}{\left(k_q^{3\omega}\right)^2 - \left(k_q^{\omega}\right)^2}, \\ \gamma_q &= -\frac{36\pi}{c^2}\omega^3 \chi_q^{III} \frac{3A_q B_q^2}{\left(k_q^{3\omega}\right)^2 - \left(k_q^{\omega}\right)^2}, \quad \delta_q = -\frac{36\pi}{c^2}\omega^3 \chi_q^{III} \frac{B_q^3}{\left(k_q^{3\omega}\right)^2 - 9\left(k_q^{\omega}\right)^2}. \end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, поправки первого порядка малости для электрического и магнитного полей равны

$$\begin{aligned} \delta E_q^1 = C_q \exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right) + \\ + \alpha_q \exp\left(3ik_q^{\omega} z\right) + \beta_q \exp\left(ik_q^{\omega} z\right) + \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega} z\right) + \delta_q \exp\left(-3ik_q^{\omega} z\right), \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \delta H_q^1 = n_q^{3\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right)\right] + \\ + n_q^{\omega}\left[\alpha_q \exp\left(3ik_q^{\omega} z\right) - \delta_q \exp\left(-3ik_q^{\omega} z\right)\right] + \\ + \frac{n_q^{\omega}}{3}\left[\beta_q \exp\left(ik_q^{\omega} z\right) - \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega} z\right)\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

3. Коэффициенты C_q, D_q определяются подстановкой (38), (39) в условия излучения и сопряжения. Они удовлетворяют системе уравнений

$$C_1 = 0, \quad D_Q = 0, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} C_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right) - \\ - C_{q+1} \exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) + D_{q+1} \exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) = \\ = \alpha_{q+1} \exp\left(3ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \beta_{q+1} \exp\left(ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \\ + \gamma_{q+1} \exp\left(-ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \delta_{q+1} \exp\left(-3ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) - \\ - \alpha_q \exp\left(3ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \beta_q \exp\left(ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \\ - \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \delta_q \exp\left(-3ik_q^{\omega}\xi_q\right), \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} n_q^{3\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - n_{q+1}^{3\omega}\left[C_{q+1} \exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) - D_{q+1} \exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right)\right] = \\ = n_{q+1}^{\omega}\left[\alpha_{q+1} \exp\left(3ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) - \delta_{q+1} \exp\left(-3ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - n_q^{\omega}\left[\alpha_q \exp\left(3ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \delta_q \exp\left(-3ik_q^{\omega}\xi_q\right)\right] + \\ + \frac{n_{q+1}^{\omega}}{3}\left[\beta_{q+1} \exp\left(ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) - \gamma_{q+1} \exp\left(-ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - \frac{n_q^{\omega}}{3}\left[\beta_q \exp\left(ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega}\xi_q\right)\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

Как и ранее, если одна из сред линейна, то для нее коэффициенты α, β, γ, δ равны нулю.

4. Окончательно выражения для полей в первом приближении имеют вид

$$E_q^1 = E_q^0 e^{-i\omega t} + \delta E_q^1 e^{-3i\omega t}, \quad H_q^1 = H_q^0 e^{-i\omega t} + \delta H_q^1 e^{-3i\omega t}. \tag{43}$$

Напомним, что в изотропной среде векторы нулевого приближения и поправки первого порядка малости параллельны. Полученное решение является новым.

3.3. Волновой синхронизм

В этом случае $(n_e)_q^{3\omega} = (n_o)_q^{\omega}$, $k_q^{3\omega} = 3k_q^{\omega}$. Построение решения проводится аналогично п. 2.4. Опуская несложные, но громоздкие выкладки, приведем окончательный результат.

Поправка первого порядка малости для электрического и магнитного полей имеет следующий вид:

$$\delta E_q^1 = (C_q + \alpha_q z)\exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) + (D_q + \delta_q z)\exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right) + \beta_q \exp\left(ik_q^{\omega} z\right) + \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega} z\right), \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\delta H_q^1 = (n_e)_q^{3\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right)\right] + \\ + \frac{c}{3i\omega}\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) + \delta_q \exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right)\right] + \\ + (n_e)_q^{3\omega} z\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{3\omega} z\right) - \delta_q \exp\left(-ik_q^{3\omega} z\right)\right] + \\ + \frac{(n_e)_q^{3\omega}}{3}\left[\beta_q \exp\left(ik_q^{\omega} z\right) - \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega} z\right)\right].\end{aligned} \tag{45}$$

Коэффициенты C_q, D_q определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}C_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) + D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right) - \\ - C_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) + D_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) = \\ = \alpha_{q+1}\xi_q \exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) + \beta_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \\ + \gamma_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) + \delta_{q+1}\xi_q \exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) - \\ - \alpha_q \xi_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) - \beta_q \exp\left(ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \\ - \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \delta_q \xi_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right),\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}(n_e)_q^{3\omega}\left[C_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) - D_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - (n_e)_{q+1}^{3\omega}\left[C_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) - D_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right)\right] = \\ = \frac{c}{3i\omega}\left[\alpha_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) + \delta_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right)\right] + \\ + (n_e)_{q+1}^{3\omega}\xi_q\left[\alpha_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right) - \delta_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{3\omega}\xi_q\right)\right] + \\ + \frac{(n_e)_{q+1}^{3\omega}}{3}\left[\beta_{q+1}\exp\left(ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right) - \gamma_{q+1}\exp\left(-ik_{q+1}^{\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - \frac{c}{3i\omega}\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) + \delta_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - (n_e)_q^{3\omega}\xi_q\left[\alpha_q \exp\left(ik_q^{3\omega}\xi_q\right) - \delta_q \exp\left(-ik_q^{3\omega}\xi_q\right)\right] - \\ - \frac{(n_e)_q^{3\omega}}{3}\left[\beta_q \exp\left(ik_q^{\omega}\xi_q\right) - \gamma_q \exp\left(-ik_q^{\omega}\xi_q\right)\right].\end{aligned} \tag{47}$$

Как и в случае квадратичных сред, векторы нулевого приближения и первой поправки ортогональны друг другу.

4. ВЕРИФИКАЦИЯ

1. Построенные поправки первого порядка малости удовлетворяют известным *качественными закономерностям* (см. [3]). Во-первых, для квадратичных сред поправка пропорциональна квадрату поля нулевого приближения, а для кубических сред — кубу. Во-вторых, в случае волнового синхронизма амплитуда кратной гармоники линейно растет по мере распространения волны в среде. Это непосредственно видно из формул (29) и (44).

2. Вычислим *невязку* на исходном волновом уравнении. Пусть q-й слой является квадратичной средой. Подставим решение (26) в уравнение (3). В нелинейных слоях последнее не будет выполнено тождественно, поскольку решение является приближенным. Найдем разность левой и правой частей этого уравнения. Нулевое приближение E_0 удовлетворяет уравнению (9), а поправка δE_1 — уравнению (17). Поэтому часть слагаемых в невязке сократится. Также вычислим вторую производную по t, учитывая явную зависимость нулевого приближения и поправки от времени. Окончательно невязка примет вид

$$\psi_q^1(z,t) = \frac{4\pi}{c^2}\chi_q^{II}\omega^2\left[9E_q^0(z)\delta E_q^1(z)e^{-3i\omega t} + 16\left(\delta E_q^1(z)\right)^2 e^{-4i\omega t}\right]. \tag{48}$$

3. Видно, что невязка содержит размерные величины и, тем самым, зависит от выбранной системы единиц. Это неудобно для количественных оценок. Введем *относительную невязку*, нормированную на левую часть уравнения. Рассмотрим

$$\tilde{\psi}_q^1 = \frac{\psi_q}{\|(E_q^1)_{zz}\| + n_q^2/c^2\|(E_q^1)_{tt}\|} \approx \frac{c^2}{n_q^2\omega^2}\frac{\psi_q}{2\|E_q^0 + 4\delta E_q^1\|}. \tag{49}$$

Здесь учтена характерная зависимость решения от времени и координаты $\left(E_q^0\right)_{tt} = -\omega^2 E_q^0$, $\left(E_q^0\right)_{zz} \sim$ $\sim -k_q^2 E_q^0$, $\left(\delta E_q^1\right)_{tt} = -4\omega^2\delta E_q^1$, $\left(\delta E_q^1\right)_{zz} \sim -4k_q^2\delta E_q^1$. Подставляя (48) в (49), получим

$$\left|\tilde{\psi}_q^1\right| \le \frac{2\pi\chi_q^{II}}{n_q^2}\frac{9\left|E_q^0(z)\delta E_q^1(z)\right| + 16\left|(\delta E_q^1(z))^2\right|}{\left\|E_q^0 + 4\delta E_q^1\right\|}. \tag{50}$$

4. Для сравнения вычислим невязку на нулевом приближении E_q^0. Поскольку оно удовлетворяет уравнению (9), то невязка равна правой части, т.е. нелинейности в (3)

$$\left|\tilde{\psi}_q^0\right| \leqslant \frac{2\pi\chi_q^{II}}{n_q^2}\left|E_q^0(z)\right|. \tag{51}$$

Поправка δE_q^1 предполагается малой по сравнению с нулевым приближением. Видно, что отношение $\left\|\tilde{\psi}_q^1/\tilde{\psi}_q^0\right\|$ по порядку величины составляет $\left\|\delta E_q^1/E_q^0\right\|$, т.е. тоже является величиной *первого порядка малости*. Иными словами, первое приближение точнее удовлетворяет исходному уравнению, чем нулевое. Это верифицирует правильность построенного решения. Примеры конкретных значений $|\tilde{\psi}|$ для реальных сред приведены далее.

5. Аналогично рассматривается случай кубических сред. Нормированная невязка для первого приближения имеет вид

$$|\tilde{\psi}_q^1| \le 4\pi\chi_q^{III}\frac{75|E_q^0(z)^2\delta E_q^1(z)| + 147|E_q^0(z)(\delta E_q^1(z))^2| + 81|(\delta E_q^1(z))^3|}{\left\|E_q^0 + 9\delta E_q^1\right\|}. \tag{52}$$

Нормированная невязка нулевого приближения равна

$$|\tilde{\psi}_q^0| = \frac{2\pi\chi_q^{II}}{n_q^2}|E_q^0(z)|^2. \tag{53}$$

Нетрудно видеть, что отношение $\left\|\tilde{\psi}_q^1/\tilde{\psi}_q^0\right\|$ имеет порядок величины $\left\|\delta E_q^1/E_q^0\right\|^2$.

5. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ

Решение, построенное в предыдущих пунктах, можно обобщить на случай наклонного падения излучения на рассеиватель. Это обобщение основано на том, что для изотропных сред поляризация волн основной и удвоенной частот (т.е. нулевого приближения и первой поправки соответственно) по-прежнему одинакова.

При наклонном падении в матричных методах рассматривают не амплитуды полей, а их *тангенциальные проекции* на границу раздела. Кроме того, по сравнению со случаем нормального падения меняется *набег фазы* при прохождении волны через каждый слой рассеивателя.

Пусть угол падения, т.е. угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и нормалью к плоскостям рассеивателя, равен θ. Для учета наклонного падения в приведенных выше формулах нужно заменить $k \to k\cos\theta$ для всех спектральных компонент. При s-поляризации поле E параллельно границе раздела. Поэтому формулы для E остаются в силе. Поле H имеет как тангенциальную, так и нормальную компоненты. Поэтому в приведенных выше формулах нужно заменить $H \to H/\cos\theta$. Аналогично для p-поляризации необходимо заменить $E \to E/\cos\theta$, оставляя без изменений H.

6. НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

1. Пусть теперь на структуру, описанную в п. 2.1, падает не монохроматическая волна, а волновой пакет, содержащий спектр частот. Такой случай будем называть *немонохроматическим*. К постановке задачи нужно добавить начальное условие. Будем считать его нулевым $E|_{t=0} = 0$.

2. Ранее для линейных гиперболических задач мы предложили *метод спектрального разложения*. Напомним его суть. Выполним численное преобразование Фурье падающих волновых пакетов по формуле трапеций, используя одинаковые сетки по времени и наборы частот $\{\omega_m\}$, $\omega_{m+1} - \omega_m = \Delta\omega_m$:

$$\tilde{f}^{0,a}(\omega_m) = \sum_{k=0}^{K} f^{0,a}(\zeta_k) e^{-i\omega t_k} g_k \Delta\zeta_k. \tag{54}$$

Здесь $g_0 = g_K = 0.5$, $g_k = 1$, $k \neq 0, K$ — веса квадратурной формулы трапеций.

Тем или иным методом решим монохроматические задачи, соответствующие различным частотам ω_m. Соответствующие решения обозначим $\tilde{E}(z_n, \omega_m)$, $\tilde{H}(z_n, \omega_m)$. Напомним, что в каждой из этих задач реализуются свои значения $\varepsilon(z_n, \omega_m)$. Поэтому предлагаемый подход позволяет учитывать произвольный гладкий закон частотной дисперсии.

Просуммируем полученные спектральные амплитуды решения по всем частотам ω_m:

$$\begin{aligned} E(t_k, z_n) &= \sum_{m=0}^{M} \widetilde{E}(\omega_m, z_n) \exp(i\omega t_k) g_m \Delta\omega_m, \\ H(t_k, z_n) &= \sum_{m=0}^{M} \widetilde{H}(\omega_m, z_n) \exp(i\omega t_k) g_m \Delta\omega_m. \end{aligned} \tag{55}$$

Это дает решение $E(z,t)$, $H(z,t)$ исходной нестационарной задачи.

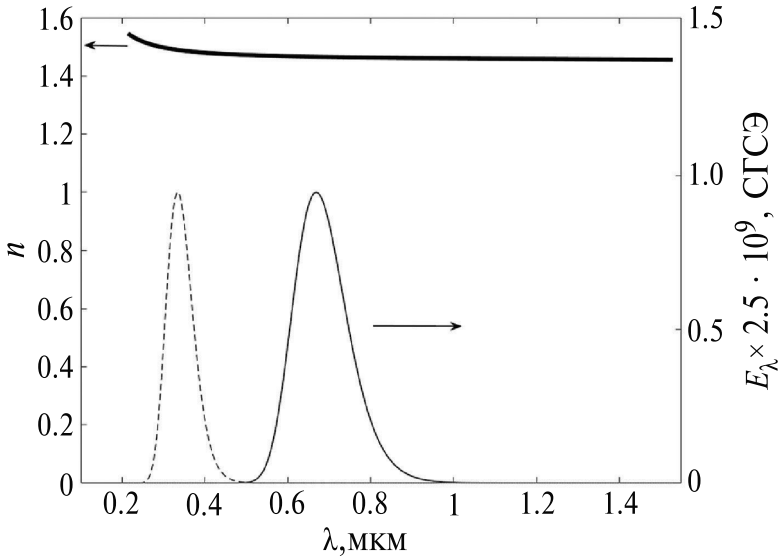
3. Для решения линейных монохроматических задач в работе [14] предложено использовать метод матриц рассеяния. Такой алгоритм был назван нестационарным матричным методом.

В настоящей работе предложено обобщение этого подхода на случай нелинейных сред. Разложим падающий импульс на монохроматические компоненты. Решим каждую монохроматическую задачу с помощью полученных выше обобщений метода матриц переноса. Затем численно выполним обратное преобразование Фурье.

4. Обоснование предлагаемого подхода заключается в следующем. Как отмечено выше, в реальных задачах вклад нелинейности в поляризацию мал по сравнению с линейным слагаемым. Поэтому возможно применение метода последовательных приближений. Приближения определяются из линейных задач. Метод спектрального разложения применяется к этим линейным задачам. Сеточная погрешность квадратур для интегралов Фурье может быть уменьшена вплоть до ошибок компьютерного округления. Поэтому точность метода спектрального разложения соответствует точности самих последовательных приближений.

7. ПРИМЕР РАСЧЕТА

1. В качестве примера рассмотрим рассеиватель, состоящий из одного слоя калийдигидрофосфата (KDP) толщиной 0.5 мкм, расположенного в воздухе. Пусть излучение распространяется перпендикулярно оптической оси. Соответствующий линейный показатель преломления указанного материала возьмем согласно [15, 16]. Зависимость показателя преломления от длины волны приведена на фиг. 1. Этот материал обладает квадратичной нелинейностью. Соответствующая восприимчивость равна $\chi^{II} = 3 \cdot 10^{-9}$ СГСЭ (см. [3]). Вклад частотной дисперсии χ^{II} является величиной второго порядка малости, поэтому данным эффектом пренебрежем.



Фиг. 1. Зависимость линейного показателя преломления от длины волны для кристалла KDP (жирная линия). Спектр падающего импульса (тонкая сплошная линия) и спектр импульса, соответствующего кратным гармоникам (штриховая линия).

2. Рассмотрим задачу в монохроматической постановке. Пусть на рассеиватель падает излучение с длиной волны $\lambda = 0.25$ мкм, амплитуда составляет $\mathcal{E} = 10^6$ СГСЭ. Этот случай можно рассматривать как изотропный согласно п. 2.2, 2.3. Пространственная развертка нормированной невязки (49) приведена на фиг. 2. В линейных средах она по построению равна нулю. В нелинейном материале невязка составляет не более 1%. Таким образом, исходное волновое уравнение выполняется с хорошей точностью.

На фиг. 3 приведены амплитуды нулевого приближении и поправки первого порядка малости для электрического поля. Видно, что электрическое поле непрерывно. Это подтверждает выполнение условий сопряжения. Условия излучения выполнены по построению. Поэтому данное решение удовлетворяет всем условиям задачи, и метод можно считать верифицированным.

Видно также, что амплитуда поправки увеличивается по мере распространения волны в среде. Поэтому наибольшее влияние нелинейность оказывает после прохождения рассеивателя. Здесь наибольшая амплитуда поправки достигает $\sim 20\%$ от амплитуды нулевого приближения.

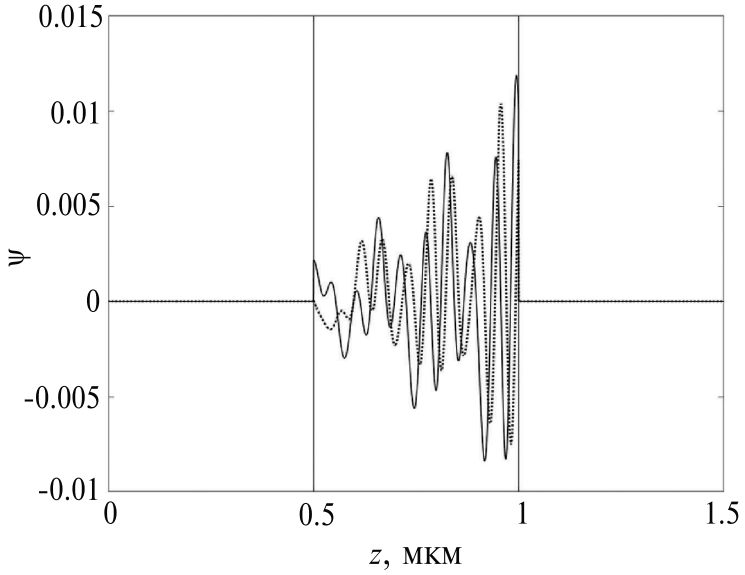
3. Пусть теперь падающее излучение является гауссовым импульсом

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-t^2/t_0^2\right). \tag{56}$$

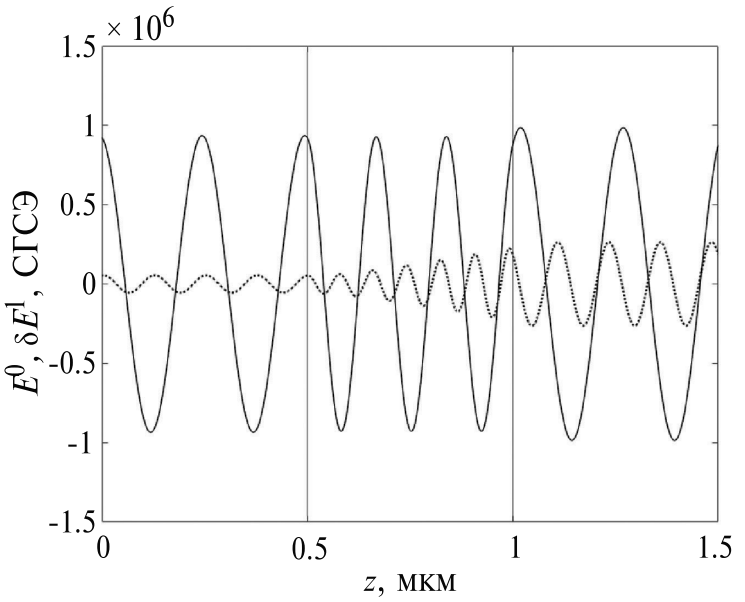
Его спектр также имеет гауссов профиль, показанный на фиг. 1. Вместе с ним приведен спектр импульса, в котором все гармоники удвоены. Увеличим толщину рассеивателя до 5 мкм, чтобы пространственная развертка импульса умещалась в нем целиком.

4. В нелинейной среде электрическое поле влияет на показатель преломления. Для квадратичной среды он равен

$$n_q(E) = \sqrt{n_q + 4\pi\chi_q^{II} E_q} \approx n_q + 2\pi\chi_q^{II} E_q. \tag{57}$$



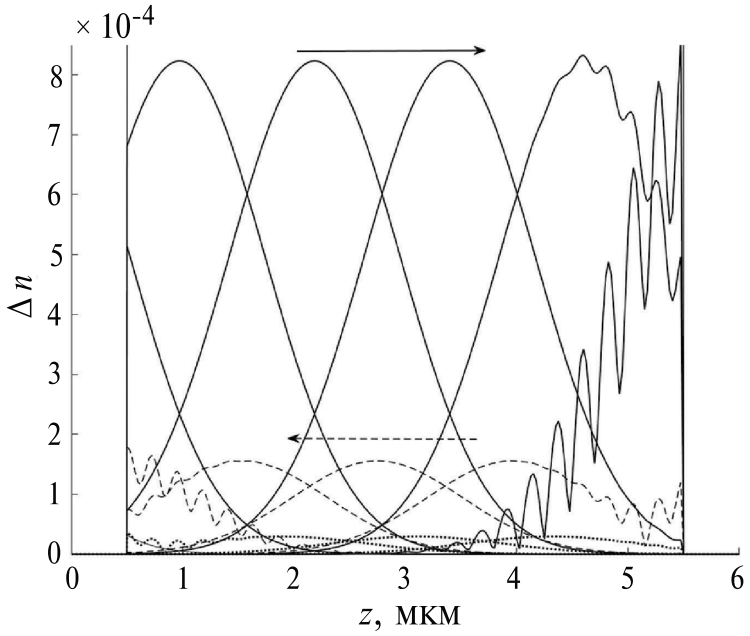
Фиг. 2. Нормированная невязка (49). Сплошная линия — $\mathrm{Re}\,\tilde{\psi}$, пунктир — $\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}$. Вертикальные линии — границы раздела сред.



Фиг. 3. Амплитуды нулевого приближения (сплошная линия) и поправки первого порядка малости (пунктир). Вертикальные линии — границы раздела сред.

На фиг. 4 показано отклонение показателя преломления от линейного $\Delta n_q = n_q(E) - n_q$ в несколько последовательных моментов времени. Для иллюстрации значение линейного показателя преломления взят в середине частотного диапазона. Видно, что эволюция показателя преломления имеет вид импульса, который распространяется в среде. Он проникает в среду и движется слева направо (сплошные линии), доходит до правой границы, частично отражается от нее и распространяется в обратную сторону (штриховые линии). Затем он частично отражается от левой границы, распространяется слева направо (пунктир) и т.д.

Этот эффект представляет интерес для оптических вычислений. Пусть имеется два импульса. Один из них (сильный) играет роль накачки (в англоязычной литературе он называется pump). Этот



Фиг. 4. Пространственно-временная модуляция показателя преломления немонохроматическим импульсом. Стрелками указано направление распространения импульса показателя преломления. Остальные обозначения — см. текст.

импульс модулирует показатель преломления. Одновременно запускают второй (слабый) импульс, его часто называют probe. Он рассеивается на среде с модулированным в пространстве и времени показателе преломления. Такая схема перспективна для оптического вычисления свертки либо произведения этих двух импульсов.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построены обобщения метода матриц переноса на ряд актуальных задач нелинейной оптики в слоистых средах. Рассмотрены среды с квадратичной и кубической нелинейностью, при наличии и при отсутствии волнового синхронизма, как в монохроматическом, так и в немонохроматическом случае. Предложенные подходы имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными. Во-первых, они существенно расширяют область применимости матричных методов. Ранее такие задачи удавалось решать только сеточными методами. Во-вторых, для финитных импульсов квадратуры в методе спектрального разложения сходятся по экспоненциальному закону, т.е. при уменьшении шага сеток по частоте и времени вдвое число верных знаков примерно удваивается (см. [14]). Такая сходимость напоминает ньютоновскую. Поэтому предлагаемые методы являются сверхбыстрыми. Их трудоемкость кардинально меньше таковой у известных сеточных методов.

Авторы искренне благодарны Л. А. Севастьянову за ценные замечания и обсуждения и А. Н. Боголюбову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусев Е. Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993.

2. *Гусев Е. Л.* Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Докл. АН. 1996. Т. 346. № 3. С. 324–326.

3. *Ахманов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004.

4. *MacGillivray W. R., Smith S. D., MacKenzie H. A., Tooley F. A. P.* Photonic logic // Optica Acta: Inter. J. of Optic. 1985. V. 32. N 5. P. 511–524.

5. *Фишер Р., Мюллер Р.* Нелинейные оптические устройства — основные элементы будущих цифровых оптических компьютеров? // Квантовая электроника. 1989. Т. 16. № 8. С. 1723–1730.

6. *Белов А. А., Домбровская Ж. О.* Прецизионные методы решения одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 51–65.

7. *Домбровская Ж. О., Боголюбов А. Н.* Немонотонность схемы fdtd при моделировании границ раздела между диэлектриками // Ученые записки физического факультета Московского Университета. 2017. № 4. С. 1740302.

8. *Petropoulos P. G.* Stability and phase error analysis of fdtd in dispersive dielectrics // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1994. V. 42. N 1. P. 62–69.

9. *Young J. L., Kittichartphayak A., Kwok Y. M., Sullivan D.* On the dispersion errors related to (fd)2/td type schemes // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1995. V. 43. N 8. P. 1902–1910.

10. *Белов А. А., Домбровская Ж. О.* Бикомпактная разностная схема для уравнений Максвелла в слоистых средах // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 15–19.

11. *Белов А. А., Домбровская Ж. О.* Тестирование бикомпактных схем для одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 1532–1550.

12. *Свешников А. Г.* Принципы излучения // Докл. АН. 1950. Т. 3. № 5. С. 517–520.

13. *Macleod H. A.* Thin-film optical filters. Fourth edition. Taylor and Francis. Boca Raton London New York, 2010.

14. *Белов А. А., Боголюбов А. Н., Домбровская Ж. О., Жбанников С. О.* Сверх- быстрый метод расчёта одномерных задач фотоники // Физические основы приборостроения. 2020. Т. 9. № 2. С. 2–9.

15. *Zernike F.* Refractive indices of ammonium dihydrogen phosphate and potassium dihydrogen phosphate between 2000 a and 1.5 μ // J. Opt. Soc. Am. 1964. Т. 54. N 10. С. 1215–1220.

16. *Polyanskiy M. N.* Refractive index database. `https://refractiveindex.info`. Accessed on 2022-02-13.

GENERALIZATION OF THE SCATTERING MATRIX METHOD TO PROBLEMS IN NONLINEAR DISPERSING MEDIA

A. A. Belov[a,b]*, Zh. O. Dombrovskaya[a,]**

[a] *119991 Moscow, Lenin HIlls, 1, p. 2, Lomonosov Moscow State University, Russia*
[b] *117198 Moscow, Miklukho-Maklaya Str., 6, RUDN, Russia*
**e-mail: aa.belov@physics.msu.ru*
***e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru*

Received 7 February, 2023
Revised 7 March, 2024
Accepted 3 April, 2024

Abstract. In recent years, much attention has been paid to integrated photonics devices based on nonlinear media. A generalization of the transfer matrix method to problems in plane-parallel layered media with quadratic and cubic nonlinearity is proposed. Incident radiation can be either a monochromatic wave or a non-monochromatic pulse. Previously, such problems could only be solved using grid methods. The proposed approaches significantly expand the field of applicability of matrix methods and radically exceed the efficiency of the known grid methods.

Keywords: Maxwell's equations, layered media, nonlinear media, conjugation conditions, dispersion of matter.