

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ И ЗАДАЧА О ФЛАТТЕРЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ¹⁾

© 2024 г. Э. А. Бибердорф^{1,*}, А. С. Рудометова¹, Ван Ли², А. Д. Жумабаев²

¹630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

²630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия
*e-mail: math@biberdorf.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

Переработанный вариант 02.04.2024 г.

Принята к публикации 02.05.2024 г.

Предлагается новый метод разделения матричного спектра относительно прямой, основанный на дробно-линейном преобразовании. Отмечается, что он имеет ряд преимуществ в сравнении с подходами, основанными на экспоненциальном преобразовании, а именно, его область применимости шире, а количество итераций, необходимых для его сходимости, значительно меньше. Предложенный метод используется для исследования задач о флаттере бесконечной полосы с различными условиями закрепления кромок, которые после подходящей дискретизации дифференциальных операторов сводятся к спектральным задачам для матриц. Исследование областей устойчивости методом дихотомии спектра относительно мнимой оси позволяет построить нейтральные кривые в плоскости параметров задачи о флаттере. Библ. 18. Фиг. 5.

Ключевые слова: дихотомия спектра, область устойчивости, флаттер, дискретизация дифференциального оператора, нейтральная кривая.

DOI: 10.31857/S0044466924080026, EDN: YBIPXW

ВВЕДЕНИЕ

Информация о расположении спектров линейных операторов используется для решения большого круга прикладных задач. В частности, спектральный критерий применяется в задачах устойчивости, к которым относится проблема флаттера. В задачах такого рода требуется информация о группах собственных значений, находящихся в областях устойчивости или неустойчивости. Следует отметить, что в несимметрическом случае спектр оператора может быть крайне чувствителен к возмущениям и вычислительным погрешностям. Это также необходимо учитывать при разработке вычислительных алгоритмов. С.К. Годунов был участником советского ядерного проекта, в котором к качеству и точности вычислений были особые требования. Сергей Константинович, как автор вычислительных методов, считал, что результат выполнения численного алгоритма должен сопровождаться оценкой его точности. В этом смысле ситуация с классической спектральной задачей в несимметричном случае была, очевидно, неудовлетворительной. Работа над этой проблемой под руководством С.К. Годунова в 80–90-е годы прошлого века привела к изменению самой постановки спектральной проблемы и созданию метода дихотомии матричного спектра, который впоследствии был им системно изложен в монографиях [1], [2].

Данный подход основан на идеях теории устойчивости А.М. Ляпунова, а также продолжает ряд других методов (см. [3]), которые позволяют по спектру специально сконструированной симметричной матрицы судить о расположении собственных значений заданной несимметричной матрицы A .

Результатом применения метода дихотомии к матричному пучку $A - \lambda B$ являются матрицы

$$H = \oint_{\gamma} (\lambda B - A)^{-1} C (\bar{\lambda} B^* - A^*)^{-1} |d\lambda| \quad \text{и} \quad P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda B - A)^{-1} B d\lambda, \quad (0.1)$$

где $C = C^* > 0$ — произвольная матричная нормировка. Норма матрицы H позволяет оценить расстояние от спектра до кривой γ . При этом матрица P представляет собой проектор на правое приводящее подпространство

¹⁾Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

пучка $A - \lambda B$ (инвариантное подпространство матрицы A в случае $B = I$), соответствующее собственным значениям, лежащим внутри контура γ , соответственно, след P равен числу таких собственных значений.

Итерационные алгоритмы дихотомии, не требующие вычисления контурных интегралов, разработаны для многих встречающихся на практике кривых: окружности (см. [4, 5]), мнимой оси (см. [6–9]), кривых второго порядка (см. [10–12]), угла (см. [13]), а также для разделения корней полинома относительно окружности (см. [14]). При этом алгоритм разделения спектра относительно единичной окружности можно назвать базовым, так как он является составной частью остальных существующих алгоритмов дихотомии. Один из его вариантов мы приведем в приложении.

Нужно отметить, что С.К. Годунов с соавторами ранее уже обращался к проблеме флаттера (см. [8]). Однако по причинам, которые мы описываем далее, существовавший на тот момент метод мог применяться только к максимально простой модели флаттера, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящей работе рассматривается новый вариант дихотомии спектра относительно прямой. Его мы представляем в разд. 1. В разд. 2 этот модифицированный метод мы применяем к задаче флаттера для модели, предложенной в 1994 г. А.А. Ильюшиным и И.А. Кийко (см. [15]). С помощью дихотомии спектра дифференциального оператора модели находятся нейтральные кривые на плоскости параметров для бесконечной полосы с различными видами закрепления по краям.

1. ДИХОТОМИЯ МНИМОЙ ОСЬЮ

Подход к разделению спектра матрицы A относительно мнимой оси, применявшийся до сих пор, основан на свойствах экспоненциального отображения, которое переводит левую полуплоскость в единичный круг. Важно, что инвариантные подпространства матрицы, соответствующие собственным значениям, лежащим по разные стороны от мнимой оси, совпадают с инвариантными подпространствами матричной экспоненты, соответствующими частям ее спектра внутри и вне единичной окружности. Поэтому для решения задачи дихотомии мнимой осью достаточно применить алгоритм дихотомии единичной окружностью к матричному пучку $A_0 - \lambda B_0 = e^{\tau A} - \lambda I$. Выбор параметра τ , например, $\tau \approx 1/2\|A\|$, обусловлен не только стремлением обеспечить быструю сходимость при вычислении матричной экспоненты. Дело в том, что для матриц с достаточно большой нормой вычисление матричной экспоненты без предварительной нормировки невозможно в принципе. Однако, вследствие такой нормировки спектр исходной матрицы оказывается прижатым к мнимой оси и применение метода дихотомии приводит к орицательным результатам. В частности, по этой причине дихотомия мнимой осью, использующая экспоненциальное преобразование, не может применяться к матрицам, аппроксимирующим дифференциальные операторы.

Ранее в работе [9] эта проблема была решена за счет выбора нормировочного параметра τ в виде степени двойки $\tau = 2^{-K}$ и последующем выполнении K дополнительных итераций основного цикла алгоритма.

В настоящей работе в качестве альтернативы экспоненциальному преобразованию рассматривается дробно-линейное преобразование комплексной плоскости $\lambda \rightarrow \xi$, переводящее мнимую ось в единичную окружность:

$$\lambda = \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \quad \text{или} \quad \xi = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \quad (1.1)$$

где λ, ξ — комплексные числа. В результате этой замены исходная спектральная задача для пучка $A - \lambda B$ превращается в задачу о спектре пучка

$$A_0 - \xi B_0 = (A + B) - \xi(A - B). \quad (1.2)$$

Теорема 1. *Разделение спектра пучка $A - \lambda B$ относительно мнимой оси возможно тогда и только тогда, когда спектр пучка $A_0 - \xi B_0$ может быть разделен относительно единичной окружности. При этом их матричные критерии дихотомии (0.1) отличаются множителем 2, а проекторы на приводящие подпространства совпадают.*

Доказательство. Заметим, что если λ — чисто мнимое число, то соответствующее значение ξ (0.1) находится на единичной окружности. Выпишем интегральное представление критерия дихотомии для пучка $A - \lambda B$ и сделаем замену подинтегральной переменной:

$$\begin{aligned} H_\lambda &= \int_{Re(\lambda)=0} (\lambda B - A)^{-1} C (\bar{\lambda} B^* - A^*)^{-1} |d\lambda| = \int_{|\xi|=1} |\xi - 1|^2 (\xi B_0 - A_0)^{-1} C (\bar{\xi} B_0^* - A_0^*)^{-1} \left| d \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right| = \\ &= 2 \int_{|\xi|=1} (\xi B_0 - A_0)^{-1} C (\bar{\xi} B_0^* - A_0^*)^{-1} |d\xi| = 2H_\xi. \end{aligned}$$

То, что нормы матриц H_λ и H_ξ конечны или бесконечны одновременно, говорит о том, что спектры пучков $A - \lambda B$, $A_0 - \xi B_0$ одновременно пересекают мнимую ось и единичную окружность соответственно, тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Далее предположим, что у исходного пучка $A - \lambda B$ отсутствуют собственные значения на мнимой оси. Тогда имеет место разложение

$$A - \lambda B = T \begin{pmatrix} \Lambda_- & \\ & \Lambda_+ \end{pmatrix} S^{-1} - \lambda T S^{-1}, \quad (1.3)$$

где спектры подматрицы Λ_- , Λ_+ лежит соответственно в левой и правой полуплоскостях. При этом матрицы $T = [T_1 | T_2]$ и $S = [S_1 | S_2]$ невырождены, а подматрицы T_1, T_2, S_1, S_2 представляет собой объединение базисных векторов в приводящих подпространствах, соответствующих собственным значениям в левой и правой полуплоскостях.

Для пучка, полученного после замены спектрального параметра, будет верно представление

$$\begin{aligned} A_0 - \xi B_0 &= T \begin{pmatrix} (\Lambda_- + I) - \xi(\Lambda_- - I) & \\ & (\Lambda_+ + I) - \xi(\Lambda_+ - I) \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= T_0 \begin{pmatrix} \Lambda_0 - \xi I & \\ & I - \xi \Lambda_\infty \end{pmatrix} S^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_0 &= T \begin{pmatrix} \Lambda_- - I & \\ & \Lambda_+ + I \end{pmatrix}, \\ \Lambda_0 &= (\Lambda_- + I)(\Lambda_- - I)^{-1}, \quad \Lambda_\infty = (\Lambda_+ - I)(\Lambda_+ + I)^{-1}. \end{aligned}$$

То есть правая приводящая матрица сохраняется неизменной, а базисы левых приводящих подпространств подвергаются невырожденным преобразованиям

$$T_{01} = T_1(\Lambda_- - I), \quad T_{02} = T_2(\Lambda_+ + I),$$

а, значит, сами подпространства не меняются.

Из этого следует, что проекторы на правые и левые приводящие подпространства пучка $A - \lambda B$, соответствующие частям спектра, лежащим в левой и правой полуплоскостях, совпадают с проекторами на правые и левые приводящие подпространства пучка $A_0 - \xi B_0$, соответствующие собственным значениям внутри и вне единичной окружности. Например, проекторы на правые подпространства имеют вид

$$P = S \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad I - P = S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (1.4)$$

Теорема доказана.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что среди собственных значений пучка могут быть бесконечные в случае, если матрица B вырождена. Мнимая ось проходит через бесконечную точку, а бесконечному значению λ соответствует $\xi = 1$. Следовательно, при наличии бесконечных собственных значений у пучка $A - \lambda B$ невозможна дихотомия его спектра мнимой осью, а спектра пучка $A_0 - \xi B_0$ единичной окружностью.

Итак, для разделения спектра пучка $A - \lambda B$ относительно мнимой оси нужно применить алгоритм дихотомии единичной окружностью к пучку (1.2). Полученные при этом матрицы H и P являются искомыми критерием дихотомии и проектором на правое приводящее подпространство пучка, соответствующее собственным значениям, лежащим в левой полуплоскости.

1.1. Пример

Продemonстрируем свойства нового подхода на простом примере с помощью спектрального портрета. Одномерные спектральные портреты — это эффективный способ визуализации спектра, основанный на методе дихотомии матричного спектра. Пусть $\gamma(x) = \{\lambda, \operatorname{Re} \lambda = x\}$ — параметризованное семейство прямых на комплексной плоскости, параллельных мнимой оси. Заметим, что разделение спектра пучка $A - \lambda B$ относительно прямой $\gamma(x)$ равносильно разделению спектра пучка $A - (\lambda + x)B = (A - xB) - \lambda B$ со сдвинутым параметром относительно мнимой оси. Таким образом, каждому значению параметра x можно сопоставить норму матричного критерия дихотомии $H(x)$, вычисленного для пучка $(A - xB) - \lambda B$. График функции $\log_{10} \|H(x)\|$ дает следующую информацию о расположении спектра. Если для фиксированного x значение этой функции ограничено, то на прямой $\gamma(x)$ отсутствуют собственные значения пучка $A - \lambda B$. Если в окрестности точки x функция $\log_{10} \|H(x)\|$ неограниченно растет (график функции образует «пик»), то вблизи прямой $\gamma(x)$ лежат точки

спектра пучка. В примере мы увидим, что бывают ситуации, когда вычисленный график $\log_{10} \|H(x)\|$ образует «полочку» вместо того, чтобы стремиться к бесконечности. Это происходит из-за того, что если в процессе итераций текущий параметр $\omega = \|H(x)\|$ превышает предельно допустимое значение, то алгоритм прерывает свою работу, выходным значением параметра дихотомии объявляется $\omega_{\max}$, а проектор $P(x)$ не вычисляется.

Дополнительную информацию о спектре можно получить из графика функции $\text{tr}P(x)$. Это кусочно-постоянная функция, значение которой в точке x совпадает с числом собственных значений, лежащих левее прямой $\gamma(x)$. Функция $\text{tr}P(x)$ меняет свое значение (график образует «ступеньку»), если на прямой $\gamma(x)$ лежат собственные значения пучка. Очевидно, что число собственных значений, лежащих вблизи $\gamma(x)$ совпадает с высотой «ступеньки».

Также для иллюстрации работы итерационного алгоритма дихотомии будем использовать функцию $k(x)$, значения которой будут совпадать с числом итераций, потребовавшихся для сходимости.

В качестве примера рассмотрим двухдиагональную матрицу A размера 5×5 , у которой на главной диагонали стоят числа 6, 7, 8, 9, 10, а на побочной — 7, 8, 9, 10. Для данной матрицы мы построим спектральные портреты, используя три варианта сведения задачи о разделении спектра относительно прямой к задаче о единичной окружности. Первый способ — использование экспоненциального преобразования $e^{\tau A}$ (см. [1], [6]). Вторым способом — использование экспоненты со специальной нормировкой $\tau = 2^{-K} \approx 1/2\|A\|$ и проведение K дополнительных итераций алгоритма дихотомии единичной окружностью (см. [9]). Третий способ — использование дробно-линейного преобразования.

На фиг. 1 изображены графики функций $\log_{10} \|H(x)\|$ и $k(x)$, полученные тремя способами. Из них видно, что новый метод дает наименьшие значения для обеих функций. Причем число итераций для нового метода меньше в разы. Если рассмотреть подробнее окрестность прямой, на которой находится собственное значение (см. фиг. 1, средний рисунок), можно видеть, что все три графика в окрестности прямой $x = 8$, на которой лежит собственное значение матрицы образуют полочку. Заметим, что наиболее широкую полочку имеет график, полученный с использованием экспоненциального преобразования. Остальные два графика довольно близки и имеют значительно более узкую полочку. Это означает, что метод, использующий экспоненциальное преобразование со специальной нормировкой и предложенный нами метод, основанный на дробно-линейном преобразовании, имеют более широкую область применимости и могут эффективно работать в окрестности прямых, на которых лежат собственные значения.

Отметим также, что во всех точках x , в которых вычислялся проектор $P(x)$, вне зависимости от использованного метода имеют место следующие относительные оценки

$$\frac{\|P^2(x) - P(x)\|}{\|P(x)\|} \leq 10^{-10}, \quad \frac{\|AP(x) - P(x)A\|}{\|A\|\|P(x)\|} \leq 10^{-13}.$$

2. ФЛАТТЕР БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

Рассмотрим математическую модель панельного флаттера (см. [15]). Пусть пластина постоянной толщины h из материала плотности ρ , занимающая в плоскости xy область G с кусочно-гладкой границей Γ обтекается с одной стороны потоком газа с вектором скорости $\vec{v} = (v_x, v_y) = (v \cos \theta, v \sin \theta)$. Уравнение в безразмерной форме для возмущенного состояния пластины $u(t, x, y)$ имеет вид

$$D\Delta^2 u + \gamma \vec{v} \nabla u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь Δ^2 — бигармонический оператор, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, γ — показатель адиабаты газа.

Будем искать решение (2.1) в виде $u(t, x, y) = \varphi(x, y)e^{\omega t}$. Возмущенное движение пластины будет устойчивым, если $\text{Re}(\omega) < 0$, и неустойчивым, если $\text{Re}(\omega) > 0$. Условие $\text{Re}(\omega) = 0$ таким образом будет определять критические параметры потока газа или пластины.

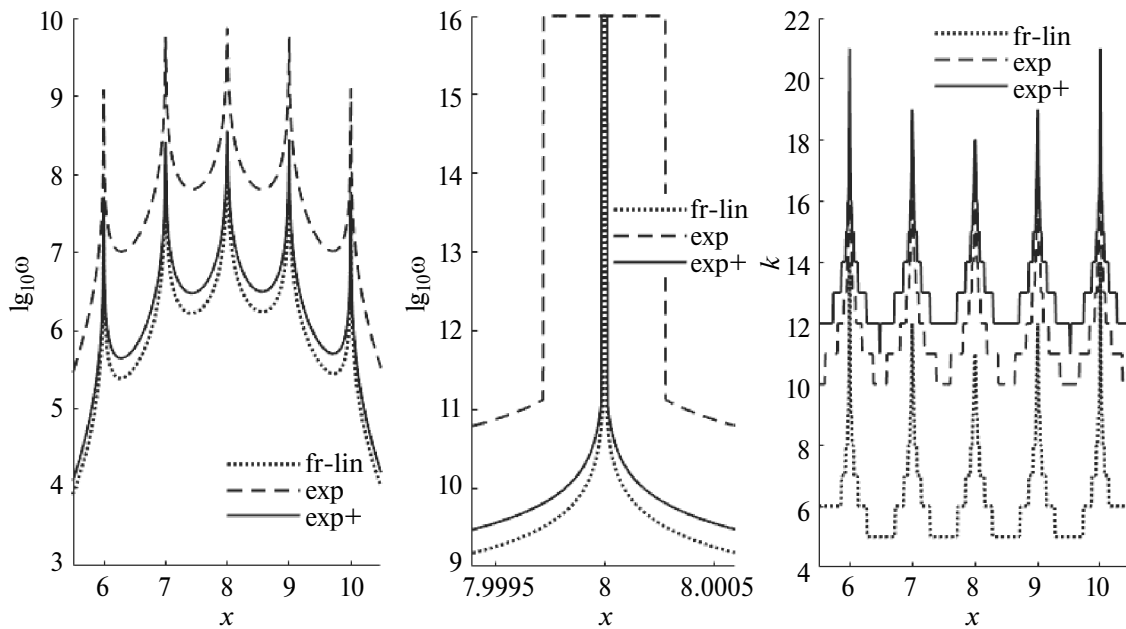
Для амплитуды колебания пластины $\varphi(x, y)$ получаем уравнение

$$D\Delta^2 \varphi + \gamma \vec{v} \nabla \varphi + (\gamma \omega + \rho h \omega^2) \varphi = 0, \quad (2.2)$$

которое вместе с подходящими условиями на границе

$$M_1(\varphi) = 0, \quad M_2(\varphi) = 0, \quad x, y \in \Gamma, \quad (2.3)$$

составляет задачу на собственные значения.



Фиг. 1. Линейный спектральный портрет матрицы A (слева и в центре) и число потребовавшихся итераций (справа). Использование экспоненциального отображения — сплошная линия, экспоненциального отображения со специальной нормировкой — штрих, дробно-рационального отображения — пунктир.

Далее в работе будем рассматривать пластину в виде упругой бесконечной полосы. Пусть в плоскости xy она занимает область $G : \{|x| < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Решение (2.2), ограниченное на бесконечности, будем искать в виде $\varphi(x, y) = \psi(y)e^{-i\alpha x}$, где α — вещественный параметр. Тогда для $\psi(y)$ получаем уравнение

$$D \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \alpha^4 \psi \right) + \gamma v_y \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha \gamma v_x \psi = (\gamma \omega + \rho h \omega^2) \psi. \quad (2.4)$$

Поставим две краевые задачи, соответствующие разным типам закрепления кромок полосы при $y = 0$ и $y = 1$. В случае шарнирного закрепления кромок

$$\begin{aligned} y = 0 : \psi &= 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \\ y = 1 : \psi &= 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

при жестком закреплении кромок полосы

$$\begin{aligned} y = 0 : \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ y = 1 : \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для аппроксимации поставленных задач нужно провести дискретизацию дифференциальных операторов с учетом заданных граничных условий. В итоге получим задачу на собственные значения ω

$$(C + (\gamma \omega + \rho h \omega^2)I)\psi = 0, \quad (2.7)$$

где I — единичная матрица, а матрица C имеет вид

$$C = D[D_4 - 2\alpha^2 D_2 + \alpha^4 I] + \gamma v_y D_1 - i\alpha \gamma v_x I.$$

Заметим, что математическая формулировка условий жесткого закрепления совпадает с граничными условиями для уравнения Орра—Зоммерфельда, когда в качестве основного течения берется течение Пуазейля в бесконечном плоском канале. Поэтому для условий (2.6) мы используем аппроксимацию производных, которая применяется в таких случаях в многочисленных работах по гидродинамике, в том числе в исследованиях

спектров оператора Орра—Зоммерфельда. При этом аппроксимация решения производится в точках Гаусса—Лобатто $y_j = \cos(j\pi/N)$, $j = 0, \dots, N$, а матрицы D_1 , D_2 и D_4 представляют собой матричные коллокационные производные первого, второго и четвертого порядков, учитывающие однородные условия Дирихле и Неймана (подробное описание см. [17]). Можно отметить, что в гидродинамических задачах, а также в тестах на основе задачи Штурма—Лиувилля применение данной аппроксимации дифференциального оператора позволяет получить с высокой точностью собственные значения с небольшим модулем. Большие собственные значения вычисляются неточно. Однако в задачах устойчивости важна точность критических собственных значений, которые, как правило, невелики по модулю.

При шарнирном закреплении кромок используем метод дискретизации дифференциальных операторов, учитывающий условия вида (2.5), предложенный в работе [18]:

$$D_1 = \begin{pmatrix} u_1 & c_{21} & \cdots & c_{N1} \\ c_{12} & u_2 & \cdots & c_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1N} & c_{2N} & \cdots & u_N \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} v_1 & b_{21} & \cdots & b_{N1} \\ b_{12} & v_2 & \cdots & b_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} & \cdots & v_N \end{pmatrix}, \quad D_4 = D_2^2,$$

где

$$y_j = \frac{j\pi}{N+1}, \quad u_j = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} y_j, \quad v_j = -\frac{(N+1)^2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{2\sin^2 y_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j-1} \frac{\pi \sin y_i}{\cos y_j - \cos y_i}, \quad b_{ij} = (-1)^{i+j-1} \frac{2\pi^2 \sin y_j \sin y_i}{(\cos y_j - \cos y_i)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j.$$

Для проверки адекватности такой дискретизации воспользуемся тем, что для задачи о продольном обтекании (т.е. при $\vec{v} = (v_x, 0)$) полосы с шарнирно закрепленными кромками можно найти (см., например, [16]) точные собственные значения λ (связанные с частотой ω соотношением $\gamma\omega + \rho h\omega^2 = -\lambda$):

$$\lambda_n = (\alpha^2 + n^2\pi^2)^2 D - i\alpha\gamma v_x. \quad (2.8)$$

Определим относительную погрешность вычисленных собственных значений матрицы C по формуле

$$\Delta_n = \frac{|\lambda_n(C) - \lambda_n|}{|\lambda_n|}.$$

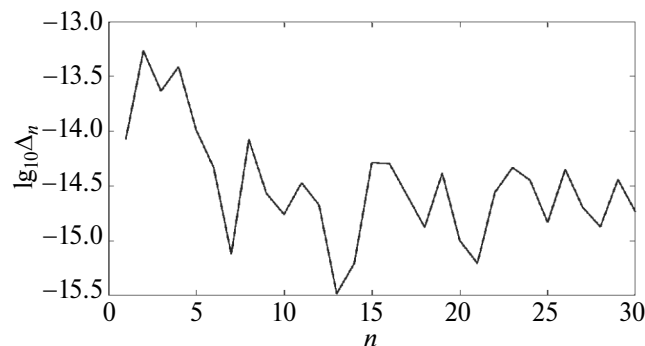
На фиг. 2 показано, что максимум погрешности собственных чисел дискретизованного оператора в сравнении с собственными числами дифференциального оператора, найденными в явном виде по формуле (2.8), приблизительно равен 10^{-13} . Это позволяет считать выбранный метод дискретизации дифференциального оператора для случая шарнирного закрепления достаточно точным.

Вспомним, что по исходной постановке задачи о флаттере нас интересует расположение частот ω относительно мнимой оси. Квадратичную спектральную задачу (2.7) можно привести к линейной относительно ω задаче

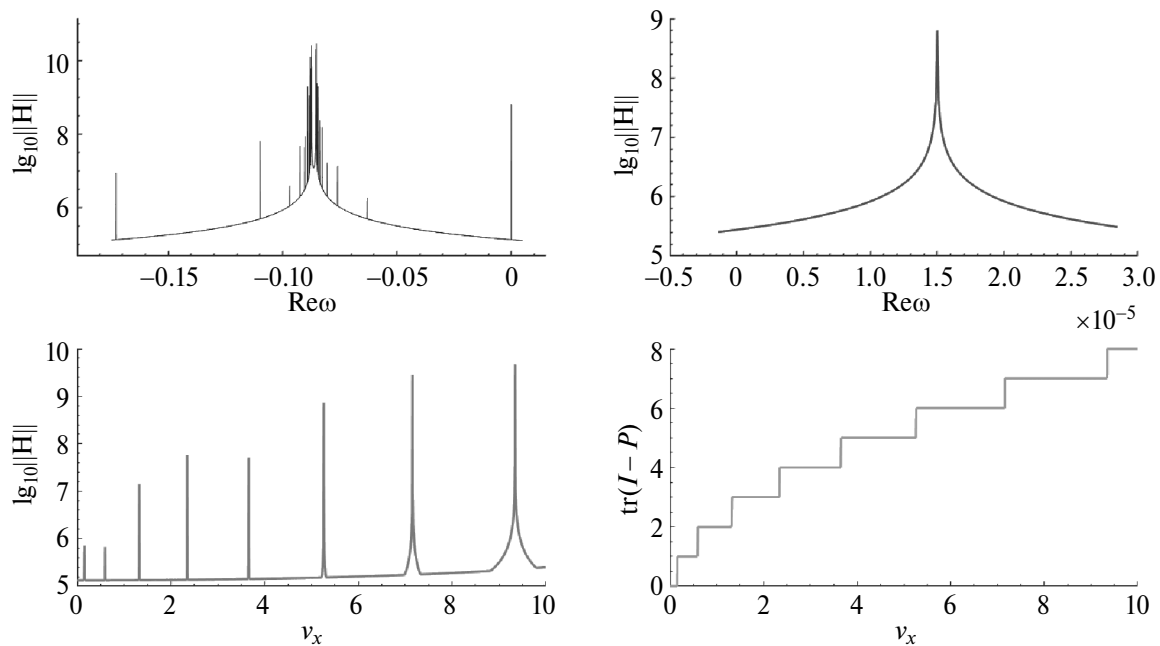
$$(A - \omega B)\varphi = 0 \quad (2.9)$$

с матрицами удвоенной размерности

$$A = \begin{pmatrix} A & \gamma I \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\rho h I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$



Фиг. 2. График погрешности $\log_{10} \Delta_n$ в зависимости от номера собственного значения n , $N = 30$.



Фиг. 3. Спектральные портреты в случае шарнирного закрепления и продольного обтекания при $\alpha = 1$. Для верхних графиков скорость фиксирована $v_x = 0.1606$; $N = 10$.

Это возможно, так как собственные значения ω_j у задач (2.7) и (2.9) совпадают, а собственные векторы имеют вид

$$\Psi_j \quad \text{и} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \Psi_j \\ \omega_j \Psi_j \end{pmatrix}$$

соответственно.

К матричному пучку $A - \omega B$ применим описанный в первом разделе алгоритм дихотомии собственных значений ω мнимой осью.

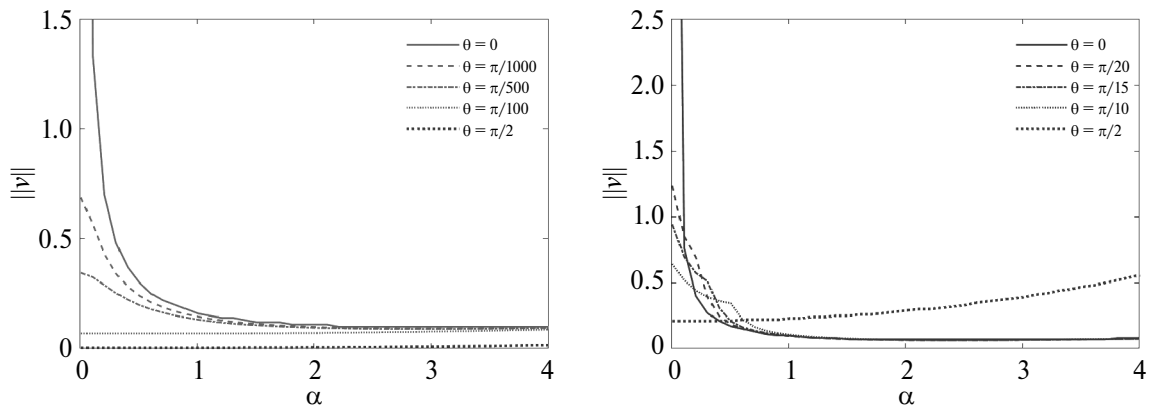
На фиг. 3 изображены одномерные спектральные портреты пучка $A - \omega B$ в случае шарнирного закрепления и продольного обтекания при $\alpha = 1$. На графиках в верхней части рисунка представлена зависимость нормы критерия дихотомии прямой, параллельной мнимой оси, от расположения прямой при фиксированной скорости потока $|v| = v_x = 0.1606$. При этом правый верхний рисунок представляет собой увеличенную часть левого верхнего рисунка. Видно, что при указанном значении скорости самый правый пик графика лежит справа от нуля, следовательно в правой полуплоскости находится как минимум одно собственное значение, что полностью соответствует теоретическим результатам (см. [16]).

В нижней части фиг. 3 изображена зависимость критерия дихотомии мнимой осью от модуля скорости также в случае шарнирного закрепления и продольного обтекания. Левый нижний график показывает, при каких значениях скорости собственные значения пучка $A - \omega B$ проходят через мнимую ось. На графике справа внизу изображен график следа проектора на подпространство, соответствующее собственным значениям пучка, лежащим в правой полуплоскости, расположение ступеней этого графика (т.е. значений скорости, при которых меняется количество собственных значений в правой полуплоскости) совпадает с положением пиков на левом графике.

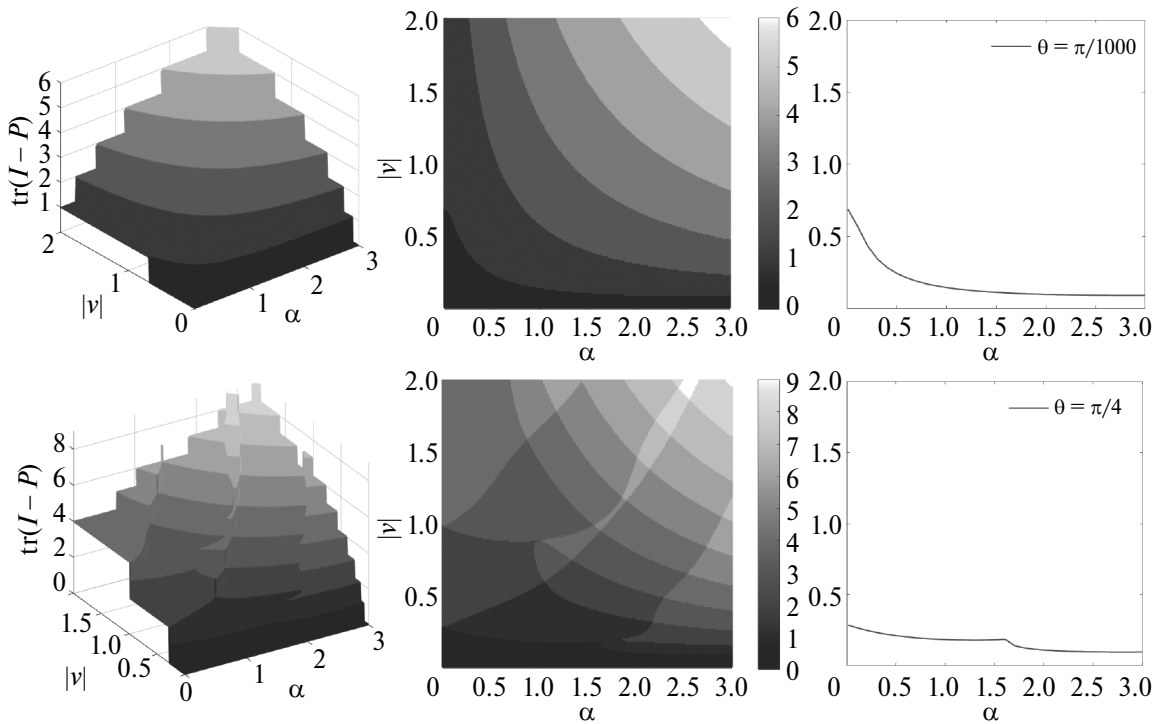
Заметим, что на плоскости параметров $\alpha, v = |\vec{v}|$ при фиксированном угле обтекания θ множества точек, при которых $\text{tr}(I - P)$ равен определенному натуральному значению, образуют области, в общем случае не односвязные. Так как нейтральная кривая является множеством таких α, v , при которых первое собственное значение переходит в правую полуплоскость, то ее можно представить как границу области на плоскости α, v , в которой $\text{tr}(I - P) = 0$. Заметим, что след проектора весьма удобно использовать как критерий в расчетах, так как на нейтральной кривой он меняется сразу на целое число.

На фиг. 4 изображены нейтральные кривые для разных углов обтекания. Видно, что характер кривых при шарнирном и жестком закреплении существенно различается.

Различие между шарнирным и жестким закреплении границ полосы также демонстрируется на фиг. 5. На нем разным цветом раскрашены области на плоскости параметров, в которых $\text{tr}(I - P)$ принимает различные значения. Видно, что в случае жесткого закрепления структура этих областей, а значит, и зависимость спек-



Фиг. 4. Нейтральные кривые, слева – шарнирное закрепление, справа – жесткое закрепление; $N = 40$.



Фиг. 5. Функция $\text{tr}(I - P)$ от α , $v = |\vec{v}|$, ее проекция и нейтральная кривая $\text{tr}(I - P) = 0$. Верхний ряд – шарнирное закрепление при $\theta = \pi/100$, нижний ряд – жесткое закрепление при $\theta = \pi/4$; $N = 40$.

тра задачи от параметров, существенно сложнее. Это, в частности, объясняет негладкость нейтральных кривых (см. фиг. 4, справа).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый способ разделения матричного спектра относительно прямой, основанный на дробно-линейном преобразовании. По сравнению с подходами, основанными на экспоненциальном преобразовании, он обладает несколькими преимуществами. Во-первых, для его реализации не требуется вычисление матричной экспоненты. Во-вторых, в случае его применения к матричному пучку нет необходимости вычислять обратную матрицу. На примерах было показано, что область его применимости шире, чем у метода, использующего экспоненту, а число итераций, требующихся для его сходимости, значительно меньше.

С помощью нового метода мы исследовали задачу о флаттере бесконечной полосы. В случае продольного обтекания полосы с шарнирно закрепленными кромками данные, полученные в ходе вычислений, хорошо согласуются с имеющимися аналитическими результатами. Также данный подход был использован для постро-

ения нейтральных кривых в области параметров задачи. Их изображения приведены при различных значениях угла между направлением набегающего потока и осью x .

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведен один из существующих алгоритмов дихотомии единичной окружностью. Заметим, что условия сходимости основного цикла могут быть сформулированы по-разному. Можно следить за относительной сходимостью, как это сделано ниже, или за абсолютной. В условие можно также включать сходимость проектора P_k . Кроме того, опираясь на оценки сходимости (например, [14], теорема 5), можно априорно оценить число итераций, необходимых для сходимости алгоритма при условии $\|H\| \leq \omega_{\max}$. Эту оценку также можно использовать в качестве верхней границы числа итераций. При этом нужно принимать во внимание, что она, как правило, очень завышена, так как в обычной ситуации для сходимости с высокой точностью достаточно нескольких итераций.

Алгоритм дихотомии матричного спектра относительно единичной окружности

Дано: матричный пучок $A_0 - \lambda B_0$, ε_{it} — требуемая точность итерационного процесса, $\omega_{\max}$, $\mu_{\max}$ — максимальные значения критерия дихотомии и числа обусловленности матрицы.

Если $\text{cond}(A_0 - B_0) > \mu_{\max}$,

то дихотомия невозможна, конец расчетов.

иначе

$$H_0 = (A_0 - B_0)^{-1}(A_0 A_0^* + B_0 B_0^*)(A_0^* - B_0^*)^{-1}$$

Цикл пока $\|H_k - H_{k-1}\| > \varepsilon_{it} \|H_k\|$

Если $\|H_k\| \geq \mu_{\max}$ или $\text{cond}(A_k + B_k) > \mu_{\max}$,

то дихотомия невозможна, конец расчетов

иначе

$$V_{k+1} = (A_k + B_k)^{-1} A_k, \quad U_{k+1} = I_n - V_{k+1},$$

$$H_{k+1} = U_{k+1} H_k U_{k+1}^* + V_{k+1} H_k V_{k+1}^*,$$

$$qr \left(\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$P_k = -(A_{k+1} - B_{k+1})^{-1} B_{k+1};$$

Конец цикла

Результат: критерий дихотомии $\omega = \|H_k\|$, проектор P_k .

Если $\|H_k\|$, вычисленная на шаге k , превосходит заданное значение $\omega_{\max}$, это значит, что окружность пересекает пятна ε -спектра для достаточно малого ε . Таким образом, алгоритм диагностирует ситуацию, когда внутренняя и внешняя части спектра не могут быть разделены достаточно надежно. В этом случае алгоритм прекращает свою работу, проектор не вычисляется.

О точности полученных результатов можно судить по величине невязки равенства $P^2 = P$, определяющего проектор. В случае задачи о спектре матрицы A (не пучка) для проверки точности можно использовать свойство перестановочности $AP = PA$ матрицы и проектора на инвариантное подпространство (см. [1]). Для матричного пучка $A - \lambda B$ аналогом этого равенства служат соотношения $QA = AP$ и $QB = BP$, где Q — проектор на левое приводящее подпространство. Как правило для решения задачи не требуется вычислять проектор Q , поэтому эти равенства для проверки точности обычно не используются.

В приведенных в статье примерах мы использовали следующие константы

$$\omega_{\max} = 10^{16}, \quad \mu_{\max} = 10^{10}, \quad \varepsilon_{it} = 10^{-5}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997. С. 388.
2. Годунов С.К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. С. 216.
3. Крейн М.Г., Неймарк М.А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. ГНТИ Украины, Харьков, 1936. С. 40.

4. Годунов С.К. Круговая дихотомия матричного спектра// Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27. № 5. С. 24–37.
5. Булгаков А.Я., Годунов С. К. Круговая дихотомия матричного спектра// Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 5. С. 59–70.
6. Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1991. С. 228.
7. Godunov S.K., Sadkane M. Spectral Analysis of Symplectic Matrices with Application to the Theory of Parametric Resonance// SIAM J. on Matrix Analysis and Applications. 2006. V. 28. Iss. 4. P. 1083–1096.
8. Буньков В.Г., Годунов С.К., Курзин В.Б., Садкане М. Применение нового математического аппарата «Одномерные спектральные портреты матрицы» к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток лопастей Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. 40. № 6. С. 3–13.
9. Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И. Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости// СибЖВМ. 2018. Т. 21. № 2. С. 139–153.
10. Godunov S.K., Sadkane M. Elliptic dichotomy of a matrix spectrum // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248. P. 205–232.
11. Malyshev A.N., Sadkane M. On parabolic and elliptic spectral dichotomy// SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18. P. 265–278.
12. Блинова М.А., Попова Н.И., Бибердорф Э.А. Приложение дихотомии матричного спектра к исследованию устойчивости течений // Марчуковские научные чтения - 2017. Тр. Междунар. науч. конф. 2017. С. 106–112.
13. Бибердорф Э.А. Алгоритм разделения матричного спектра относительно угла// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 5. С. 742–756.
14. Бибердорф Э.А. Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // СибЖИМ. 2000. Т. 3. № 1. С. 16–32.
15. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171.
16. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. Москва: Наука, 2006.
17. Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB. SIAM. Philadelphia, 2000. P. 163.
18. Семисалов Б.В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1111–1135.

A METHOD FOR SEPARATING THE MATRIX SPECTRUM BY A STRAIGHT LINE AND AN INFINITE STRIP FLUTTER PROBLEM

E. A. Biberdorf^{a,*}, A. S. Rudometova^a, Wang Li^b, A.D. Jumabaev^b

^a*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Acad. Koptug Ave., 4,
Novosibirsk, 630090 Russia*

^b*Novosibirsk State University, Pirogov St., 1, Novosibirsk, 630090 Russia*

**e-mail: math@biberdorf.ru*

Received 02 April, 2024

Revised 02 April, 2024

Accepted 02 May, 2024

Abstract. A new method for separating the matrix spectrum relative to the straight line is proposed, based on a fractional-linear transformation. It is noted that it has a number of advantages over approaches based on an exponential transformation, namely, its applicability area is wider, and the number of iterations required for its convergence is significantly smaller. The proposed method is used to study the problems of infinite strip flutter with various edge fixing conditions, which after suitable discretization of differential operators are reduced to spectral problems for matrices. The study of stability regions by the method of spectrum dichotomy relative to the imaginary axis allows one to construct neutral curves in the plane of parameters of the flutter problem.

Keywords: spectrum dichotomy, stability region, flutter, differential operator discretization, neutral curve.