УДК 519.613

ОЦЕНКИ p-НОРМ РЕШЕНИЙ И ОБРАТНЫХ МАТРИЦ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦИРКУЛЯНТНОЙ МАТРИЦЕЙ[1)]

© 2024 г. Ю. С. Волков[1,]*, В. В. Богданов[1,]**

[1]630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН, Россия
**e-mail: volkov@math.nsc.ru*
***e-mail: bogdanov@math.nsc.ru*

Поступила в редакцию 07.02.2024 г.
Переработанный вариант 07.02.2024 г.
Принята к публикации 02.05.2024 г.

Рассматривается задача оценки решений и обратных матриц систем линейных уравнений с циркулянтной матрицей в p-норме, $1 \leqslant p < \infty$. Получена оценка для циркулянтной матрицы, имеющей диагональное преобладание. На основе этого результата и идеи разложения матрицы в произведение матриц, связанных с разложением характеристического многочлена, предложена оценка для общей циркулянтной матрицы. Библ. 41.

Ключевые слова: разностное уравнение, циркулянтная матрица, диагональное преобладание, норма обратной матрицы, оценка решения.

DOI: 10.31857/S0044466924080042, **EDN**: YBBTNX

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих приложениях, например, при решении дифференциальных уравнений (см. [1]), восстановлении изображений (см. [2]), при разработке беспроводной связи (см. [3]) и многих других, мы сталкиваемся с необходимостью исследования и решения систем линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

с *циркулянтной матрицей* порядка $m \times m$

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{circ}(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & \ldots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix},$$

называемой также *циркулянтом*, где первая определяющая строка (см. [4], [5]) матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет вид $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$, где $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})^T = \{b_i\}_{i=0}^{m-1} = \{b_i\}$ — вектор правой части системы (1) и $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})^T = \{x_i\}_{i=0}^{m-1} = \{x_i\}$ — искомое решение. Например, в задачах сплайн-интерполяции система (1) с такой матрицей возникает при периодической интерполяции на равномерной сетке (см. [6], [7]).

Можно смотреть на эту задачу, как на задачу решения разностного уравнения

$$a_0 x_i + a_1 x_{i+1} + \ldots + a_{m-1} x_{i+m-1} = b_i, \qquad i = 0, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где $x_{i+m} = x_i$ при $i = 0, \ldots, m-1$. Эта задача является периодическим случаем общей задачи решения разностного уравнения

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-i} x_j = b_i, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

[1)]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0015).

для произвольной дважды бесконечной последовательности $\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Естественно, в общем случае решение $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ тоже не будет уже периодической последовательностью. Примером может выступать задача вычисления констант экстремальной функциональной интерполяции (см. [8], [9]).

С разностным уравнением (2) (или циркулянтом $\boldsymbol{A}$) ассоциируется многочлен

$$Q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{m-1} z^{m-1},$$

называемый *ассоциированным* или *характеристическим*. Во многих случаях приходится рассматривать ленточные циркулянты, если для некоторого $n < m$ будет $a_n \neq 0$ и $a_{n+1} = \ldots = a_{m-1} = 0$, то многочлен будет таким

$$Q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Мы будем рассматривать p-норму ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) вектора $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1})^T$, определяемую следующим образом:

$$\|\boldsymbol{y}\|_\infty := \max\{|y_0|, |y_1|, \ldots, |y_{m-1}|\}$$

и при $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|\boldsymbol{y}\|_p := \big(|y_0|^p + |y_1|^p + \ldots + |y_{m-1}|^p\big)^{1/p}.$$

Операторная (индуцированная) p-норма произвольной $m \times m$ матрицы $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{i,j=0}^{m-1}$ определяется стандартным образом:

$$\|\boldsymbol{B}\|_p := \sup_{\boldsymbol{y}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\|_p}{\|\boldsymbol{y}\|_p}.$$

Для p-норм матриц явные выражения через элементы матрицы есть только для $p = 1$ и $p = \infty$:

$$\|\boldsymbol{B}\|_1 = \max_{0\leqslant j\leqslant m-1} \sum_{i=0}^{m-1} |b_{ij}|,$$

$$\|\boldsymbol{B}\|_\infty = \max_{0\leqslant i\leqslant m-1} \sum_{j=0}^{m-1} |b_{ij}|.$$

При $p = 2$ норма матрицы равна величине наибольшего сингулярного числа матрицы. Напомним, что *сингулярными числами* произвольной матрицы $\boldsymbol{B}$ называются квадратные корни из собственных чисел матрицы $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}^*$ — сопряженная матрица (для вещественной матрицы — транспонированная). Как известно, собственные числа симметрической матрицы $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$ всегда неотрицательны. Приведенное свойство 2-нормы объясняет специальное название этой нормы — *спектральная*.

Для остальных p-норм ($p \neq 1, \infty$) в общем случае нет выражения через элементы матрицы, для спектральной нормы можно привести такую оценку

$$\|\boldsymbol{B}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{B}\|_E := \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}^2},$$

здесь $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма матрицы, называемая также нормой Фробениуса. Вообще спектральная норма является наименьшей из всех p-норм

$$\|\boldsymbol{B}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{B}\|_p$$

для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Если диагональный элемент в каждой строке матрицы $\boldsymbol{B}$ больше по модулю суммы модулей остальных элементов строки, то такие матрицы принято называть *матрицами с диагональным преобладанием*. В работе [10] для таких матриц предложена очень простая и эффективная оценка ∞-нормы обратной матрицы. Она является точной, однако ее постоянно уточняют для разных специальных случаев и переносят на другие классы матриц (см. [11]). В работах [12], [13] показано, что эта оценка остается справедливой и для бесконечных матриц.

Довольно часто изучаемые матрицы оказываются ленточными. Для ленточных матриц установлено важное свойство — экспоненциальное убывание элементов обратных матриц при удалении от главной диагонали (см. [14], [15]). Правда в случае циркулянтов матрицы являются циклическими ленточными, что вносит свою специфику, для элементов обратных матриц экспоненциальное убывание элементов сменяется на их экспоненциальный рост, т.е. набдюдается эффект цикличности, что также позволяет получить оценки элементов обратных матриц (см. [16], [17]).

Как уже отмечалось, только при $p = 1$ и $p = \infty$ значение нормы для матрицы общего вида выражается через ее элементы. Поэтому вычислить или получить оценки норм при других значениях p непростая задача не только для обратных, но и самих матриц. Известно (см. [18], [19]) выражение для спектральной нормы циркулянтной матрицы, если все ее элементы одного знака или строго знакочередуются

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|. \tag{3}$$

Естественно, в этом случае $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\|_1 = \|\boldsymbol{A}\|_\infty$. Более того, формула (3) останется справедливой, если матрица $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ или ее степень, кратная степени 2, имеет элементы только одного знака (см. [20]).

Как отмечено выше, хоть и не через элементы матрицы, но для спектральной нормы все-таки есть явная формула для вычисления — через собственные и сингулярные числа. А для циркулянтных матриц известно (см., например, [21]) простое правило вычисления собственных значений, а именно, все собственные значения могут быть вычислены по формуле

$$\lambda_k = Q(\omega^k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $\omega = \exp(2\pi\boldsymbol{i}/m) = \cos(2\pi/m) + \boldsymbol{i}\sin(2\pi/m)$, $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$. Это означает, циркулянтная матрица $\boldsymbol{A}$ невырождена, если числа ω^k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, не являются корнями характеристического многочлена $Q(z)$. И есть ряд работ (см. [22]–[24]), в которых все-таки вычисляется спектральная норма циркулянта, но не в произвольном случае, а для матриц со специальными элементами.

Отметим еще работу [25], в которой устанавливаются оценки спектральной нормы и обратной матрицы для некоторых циркулянтов специального вида.

Каких-либо оценок обратных к циркулянтным матрицам для других p-норм кроме $p = 1, 2, \infty$ не известно. Есть только работы [26], [27] по вычислению p-норм самих циркулянтов, причем некоторого частного вида.

Ранее в работе [28] были установлены оценки решений систем линейных уравнений с цикулянтными матрицами в равномерной норме, наша цель распространить такие оценки на случай произвольных p-норм, $p < \infty$. В разделе 2 мы устанавливаем оценку для циркулянтной матрицы с диагональным преобладанием. В разделе 3 приводятся оценки для циркулянтных матриц общего вида через разложение матриц на основе идеи работы [29] о разложении матрицы в произведение матриц, ассоциированных с множителями при разложении характеристического многочлена. В последнем разделе для циркулянтных матриц, возникающих в задачах сплайн-интерполяции, известные оценки спектральной и бесконечной норм обратных матриц переносятся на все p-нормы.

2. ЦИРКУЛЯНТНЫЕ МАТРИЦЫ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

Мы говорим, что циркулянтная матрица $\boldsymbol{A}$ является *матрицей с диагональным преобладанием*, если для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ выполняется неравенство

$$|a_k| - \sum_{j=0,\ j\neq k}^{n} |a_j| = r > 0. \tag{4}$$

Заметим, что мы допускаем, что не только центральная диагональ с элементом a_0 может быть доминирующей. Если в нашем определении $k \neq 0$, то считаем, что доминирующая диагональ с элементом a_k состоит из двух кусков, а именно, первый кусок составляет наддиагональ с $m-k$ элементами a_k и второй кусок — поддиагональ с k такими же элементами a_k.

Теорема 1. *Если циркулянтная матрица $\boldsymbol{A}$ имеет диагональное преобладание, то система линейных уравнений* (1) *имеет единственное решение $\boldsymbol{x}$ и при $p < \infty$ справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \frac{\|\boldsymbol{b}\|_p}{r}. \tag{5}$$

Доказательство. Предположим, что у циркулянта $\boldsymbol{A}$ доминируещей является диагональ с элементами a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Пусть $\boldsymbol{y}$ — произвольный вектор $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_{m-1})^T$ и доопределим $y_{i+m} = y_{i-m} = y_i$, $i = 0, \ldots, m-1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|_p &= \|\{a_0 y_i + \ldots + a_n y_{i+n}\}\|_p \geqslant \\
&\geqslant \big|\|\{a_k y_{i+k}\}\|_p - \|\{a_0 y_i + \ldots + a_{k-1} y_{i+k-1} + a_{k+1} y_{i+k+1} + \ldots + a_n y_{i+n}\}\|_p\big| \geqslant \\
&\geqslant \big||a_k|\,\|\{y_{i+k}\}\|_p - \|\{a_0 y_i\}\|_p - \ldots - \|\{a_{k-1} y_{i+k-1}\}\|_p - \\
&\quad - \|\{a_{k+1} y_{i+k+1}\}\|_p - \ldots - \|\{a_n y_{i+n}\}\|_p\big|,
\end{aligned}$$

заметим, что в правой части последнего неравенства стоят нормы векторов $\{a_j y_{i+j}\}$, которые по нашему доопределению по периодичности величин y_j с индексами за пределами множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ совпадают с нормами векторов $\{a_j y_i\}_{i=0}^{m-1}$. Тогда все выражение в правой части неравенства будет равно

$$\big||a_k|\,\|\boldsymbol{y}\|_p - |a_0|\,\|\boldsymbol{y}\|_p - \ldots - |a_{k-1}|\,\|\boldsymbol{y}\|_p - |a_{k+1}|\,\|\boldsymbol{y}\|_p - \ldots |a_n|\,\|\boldsymbol{y}\|_p\big| =$$
$$= \left(|a_k| - \sum_{j=0,\; j\neq k}^{n} |a_j|\right)\|\boldsymbol{y}\|_p = r\|\boldsymbol{y}\|_p.$$

Таким образом,

$$\|\boldsymbol{Ay}\|_p \geqslant r\|\boldsymbol{y}\|_p,$$

что означает, что существует обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ и имеет место оценка

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{r}.$$

Следовательно, для решения $\boldsymbol{x}$ системы (1) получаем

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_p \leqslant \frac{1}{r}\|\boldsymbol{y}\|_p.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если циркулянтная матрица $\boldsymbol{A}$ имеет диагональное преобладание, то

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{r}. \tag{6}$$

Заметим, что теорема 1 справедлива и для случая когда среди чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ есть комплексные.

Следствие 2. Если циркулянтная матрица $\boldsymbol{A}$ с диагональным преобладанием имеет положительную доминирующую диагональ и неположительные остальные, то

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \frac{1}{r}. \tag{7}$$

Справедливость следствия 2 вытекает из того, что в этом случае среди элементов обратной матрицы нет отрицательных элементов [11], поэтому норма обратной матрицы будет вычисляться по формуле (3) и, значит, значение спектральной нормы совпадает с известным значением ∞-нормы. Утверждение останется справедливым и для матриц монотонного вида. Напомним, матрица $\boldsymbol{B}$ есть *матрица монотонного вида*, если все элементы обратной матрицы $\boldsymbol{B}^{-1}$ неотрицательны (см. [30]).

Следствие 2 говорит о том, что для спектральной нормы оценка (6) неулучшаемая как и для норм при $p = 1$ и $p = \infty$.

Пример 1. Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ — трехдиагональная и $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$. Это хорошо известная матрица задачи интерполяции кубическими сплайнами на равномерной сетке. Диагональ, соответствующая $a_1 = 4$, является доминирующей, условия теоремы 1 выполнены, следовательно имеем оценку решения

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \frac{1}{2}\|\boldsymbol{b}\|_p.$$

В работе [31] явно вычислена обратная к такой матрице размерности 4. Применение равенства (3) демонстрирует точность полученной оценки для спектральной нормы.

Следствие 3. Пусть $\boldsymbol{A}$ — двухдиагональная циркулянтная матрица $(n = 1)$ с условием $|a_0| \neq |a_1|$, тогда $r = \big||a_0| - |a_1|\big|$. Если числа a_0 и a_1 вещественны и имеют одинаковый знак, то значение диагонального преобладания равно $r = |a_0 - a_1| = |Q(-1)|$. Если числа a_0 и a_1 противоположного знака, то $r = |a_0 + a_1| = |Q(1)|$.

Таким образом, следствие 3 показывает, что любая двухдиагональная циркулянтная матрица с разными по модулю значениями на диагоналях является матрицей с диагональным преобладанием, для нее выполнено условие (4). Конечно, в общем случае это неверно.

3. ЦИРКУЛЯНТЫ ОБЩЕГО ВИДА

Пусть $\boldsymbol{A}$ произвольный невырожденный циркулянт. Используя идею работы [29] по разложению циркулянтной матрицы в произведение матриц, ассоциированных с множителями при разложении характеристического многочлена $Q(z)$, установим оценки решения системы (1) в p-норме.

Заметим, что множество коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ однозначно определяет как циркулянтную матрицу $\boldsymbol{A}$, так и ее ассоциированный многочлен $Q(z)$. Более того, множество циркулянтных матриц $\boldsymbol{A}$ размера $m \times m$ и множество многочленов $Q(z)$ изоморфно относительно умножения. Правда здесь нужно сделать оговорку, мы рассматриваем степень многочленов по модулю m, т.е. если при перемножении двух многочленов степень результирующего многочлена получается больше $m-1$, то каждый моном $a_k z^k$ при $k \geqslant m$ заменяется на моном $a_k z^{k-m}$, где $0 \leqslant k-m \leqslant m-1$.

Лемма 1. *Предположим, что многочлен $Q(z)$, соответствующий циркулянту $\boldsymbol{A}$, разложен в произведение многочленов $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$, соответствующих некоторым циркулянтным матрицам $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$, и эти матрицы определяются множествами чисел $a_0^1, a_1^1, \ldots, a_{n-k}^1$ и $a_0^2, a_1^2, \ldots, a_k^2$ соответственно. Тогда $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$.*

Доказательство. Для многочленов первой и второй степени справедливость леммы устанавливается прямыми вычислениями. Для общего случая доказательство легко следует из того, что любой многочлен разлагается на линейные и квадратичные множители.

Теорема 2. *Если все корни характеристического многочлена $Q(z)$ циркулянтной матрицы $\boldsymbol{A}$ положительны и не равны 1, то для решения системы* (1) *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \frac{\|\boldsymbol{b}\|_p}{|Q(1)|}. \tag{8}$$

Для нормы обратной матрицы имеем

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{|Q(1)|},$$

причем если матрица четного порядка, то

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|Q(1)|}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Если все корни характеристического многочлена $Q(z)$ циркулянтной матрицы $\boldsymbol{A}$ отрицательны и не равны -1, то для решения системы* (1) *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \frac{\|\boldsymbol{b}\|_p}{|Q(-1)|}. \tag{10}$$

Для нормы обратной матрицы имеем

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{|Q(-1)|},$$

причем если матрица четного порядка, то

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|Q(-1)|}. \tag{11}$$

Доказательство. Справедливость неравенств (8) и (10) следует из следствия 3 и леммы 1, следовательно будут справедливы и оценки для p-норм обратной матрицы рассматриваемой системы уравнений.

Если все корни $Q(z)$ положительны, то в разложении характеристического многочлена на линейные множители каждому множителю соответствует двухдиагональная матрица с диагоналями разных знаков. Кроме того, каждая элементарная матрица в разложении будет иметь диагональное преобладание в силу того, что на одной из диагоналей элементы равны 1, а на другой равны соответствующему корню многочлена, отличному от 1. Это означает, что все элементы обратной матрицы одного знака (если корень меньше 1, то положительны и при больше 1 наоборот). Следовательно, обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$, получаемая как произведение матриц с элементами одного знака, также будет содержать элементы только одного знака. Таким образом, для нормы обратной матрицы будет выполняться соотношение (3), означающее $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$. А для матриц четного порядка

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|Q(1)|},$$

что означает справедливость (9).

Если корни $Q(z)$ отрицательны, умножение матрицы $\boldsymbol{A}$ слева и справа на диагональную матрицу $\boldsymbol{D} := \operatorname{diag}\{-1, +1, \ldots, (-1)^m\}$ сводит ситуацию к случаю когда все корни положительны, в характеристическом многочлене переменная z заменится на $-z$. Тогда будут доказаны равенства (11).

Теоремы 2 и 3 доказаны.

Условие того, что точное значение норм в теоремах 2 и 3 имеет место только для матриц четного порядка существенно. В работах [32], [33] для частного случая симметрической матрицы показано, что если порядок циркулянта нечетен, то ∞-норма обратной матрицы строго меньше величины $1/|Q(1)|$ при положительных корнях характеристического многочлена и строго меньше $1/|Q(-1)|$ при отрицательных корнях.

Следствие 4. Если характеристический многочлен представлен в виде произведения $Q(z) = Q_1(z)Q_2(z)$, причем все корни многочлена $Q_1(z)$ положительны, а многочлена $Q_2(z)$ — отрицательны, и $Q(\pm 1) \neq 0$, тогда для решения системы (1) справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \frac{\|\boldsymbol{b}\|_p}{|Q_1(1)Q_2(-1)|}.$$

Мы показали как получить оценки решения системы уравнений (1) с циркулянтной матрицей если корни характеристического многочлена $Q(z)$ произвольные вещественные. Но в общем случае корни могут быть комплексными.

Пусть характеристический многочлен имеет вид $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ с комплексными корнями, не лежащими на окружности $|z| = 1$, т.е. $z_1 = \bar{z}_2 \in \mathbb{C}$. Как отмечалось ранее, следствие 3 останется верным и для комплексных коэффициентов, следовательно

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{(|z_1| - 1)^2}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Предположим, что все корни характеристического многочлена $Q(z) = a_n(z - z_1)\ldots(z - z_n)$, соответствующего циркулянтной матрице $\boldsymbol{A}$, комплексные и не лежат на окружности $|z| = 1$, тогда*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{|a_n(|z_1| - 1)\ldots(|z_n| - 1)|}. \tag{12}$$

Следствие 5. Предположим, что характеристический многочлен $Q(z)$, соответствующий циркулянтной матрице $\boldsymbol{A}$, не имеет корней на окружности $|z| = 1$ и представлен в виде $Q(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_k)Q_1(z)Q_2(z)$, причем все корни многочлена $Q_1(z)$ положительны, а многочлена $Q_2(z)$ — отрицательны, тогда

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{|(|z_1| - 1)\ldots(|z_k| - 1)Q_1(1)Q_2(-1)|}. \tag{13}$$

Пример 2. Пусть $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $n = 2$. Многочлен $Q(z)$ не имеет вещественных корней. Применение теоремы 4 приводит к оценке $\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{b}\|_p$. но матрица $\boldsymbol{A}$ имеет диагональное преобладание с $r = 2$. Тогда теорема 1 дает более точную оценку $\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{b}\|_p/2$.

4. ЦИРКУЛЯНТЫ В ЗАДАЧАХ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В настоящей работе мы предложили подход, который позволяет устанавливать оценки решения системы уравнений (1) с произвольной невырожденной циркулянтной матрицей, если корни соответствующего характеристического многочлена $Q(z)$ не лежат на окружности $|z| = 1$. Наш метод основан на концепции диагонального преобладания и на идее разложения матрицы в произведение матриц, связанных с разложением характеристического многочлена. Установленные оценки точны, указаны случаи с точным значением p-норм. Но если характеристический многочлен имеет комплексные корни, то оценки (12), (13), по-видимому, не точны.

Исторически первая работа по получению эффективной оценки нормы обратной матрицы была установлена в 1963 г. в связи с изучением задачи интерполяции кубическими сплайнами [10]. Пристальное внимание к циркулянтным матрицам также возникло при рассмотрении задач интерполяции сплайнами для случая равномерной сетки и периодических краевых условий. Здесь возникают именно ленточные циркулянты (см. [6]).

В 1973 г. при получении оценок погрешности интерполяции на равномерной сетке периодическим полиномиальным сплайном нечетной степени $2k - 1$ Альбасини и Хоскинс (см. [34]) нашли оценки спектральной и бесконечной норм обратных матриц к циркулянтным матрицам $\boldsymbol{C}_{2k-1}$, возникающим здесь при интерполяции, $n = 2k - 2$. Эти оценки имеют вид

$$\|\boldsymbol{C}_{2k-1}^{-1}\|_2 = \|\boldsymbol{C}_{2k-1}^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{(2k)!}{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}, \tag{14}$$

где B_{2k} — числа Бернулли. Позже [35] эти же неравенства были установлены совсем простым путем через разложение матрицы $\boldsymbol{C}_{2k-1}$ в произведение трехдиагональных циркулянтов, имеющих диагональное преобладание. Здесь же было показано, что выражение в правой части неравенства (14) равно $1/|Q_{2k-1}(-1)|$, где $Q_{2k-1}(z)$ — характеристический многочлен, ассоциированный с исходной матрицей $\boldsymbol{C}_{2k-1}$. Тогда мы можем сказать, что применение теоремы 1 и следствия 1 устанавливает справедливость такой же оценки

$$\|\boldsymbol{C}_{2k-1}^{-1}\|_p \leqslant \frac{(2k)!}{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}, \tag{15}$$

для всех p-норм, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Методы работы [34] были обобщены и расширены на случай любых симметрических циркулянтов с положительными элементами [32]. Это позволило рассмотреть задачу периодической сплайн интерполяции для случая сплайнов четной степени $2k$ и установить оценки бесконечной нормы обратной матрицы к циркулянтной матрице $\boldsymbol{C}_{2k}$, возникающей в этой задаче, здесь $n = 2k$. Эта же оценка

$$\|\boldsymbol{C}_{2k}^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{(2k)!}{|E_{2k}|}, \tag{16}$$

где E_{2k} — числа Эйлера, с помощью более простой техники работы [35] выписана в работе [36]. Так как здесь также оценка выписывается через величину $Q_{2k}(-1)$ путем разложение циркулянта $\boldsymbol{C}_{2k}$ в произведение трехдиагональных матриц с диагональным преобладанием, то оценка (16) будет справедливой и для всех p-норм, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Следовательно,

$$\|\boldsymbol{C}_{2k}^{-1}\|_p \leqslant \frac{(2k)!}{|E_{2k}|}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{17}$$

Упомянем еще работу [37], в которой вся рассматриваемая техника применена к задаче приближения гистосплайнами. Установленные там оценки бесконечной нормы соответствующих обратных матриц возникших там циркулянтов также распространяются на любые p-нормы при $p < \infty$.

Заметим, что числа Бернулли и числа Эйлера выражаются через константы Фавара [38], которые хорошо известны в теории приближения, их обычно определяют как сумму ряда

$$\mathcal{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(n+1)}}{(2\nu+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Однако их лучше определять (см. [39], [40]) по рекуррентной формуле

$$\mathcal{K}_0 = 1, \qquad \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathcal{K}_n = \frac{\pi}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{K}_k\mathcal{K}_{n-1-k}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Тогда оценки (15) и (17) можно объединить в единое неравенство

$$\|\boldsymbol{C}_n^{-1}\|_p \leqslant \frac{\pi^n}{2^n\mathcal{K}_n}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{18}$$

Необходимость получения оценок вида (18) возникает при получении оценок погрешности приближения в задачах интерполяции периодическими полиномиальными сплайнами на равномерных сетках. История задачи изучения точных оценок погрешности интерполяции, сходимости процессов интерполяции и связанных аспектов приведена в обзоре (см. [41]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilde A.C.* Differential equations involving circulant matrices // Rocky Mountain J. Math. 1983. V. 13. № 1. P. 1–14.

2. *Carrasquinha E., Amado C., Pires A.M., Oliveira L.* Image reconstruction based on circulant matrices // Signal Processing: Image Communication. 2018. V. 63. P. 72–80.

3. *Tse D., Viswanath P.* Fundamentals of wireless communication. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. 564 p.

4. *Marcus M., Minc H.* A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1964. 180 p. Перевод: *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.

5. *Davis P.J.* Circulant matrices. New York: Wiley, 1979. 250 p.

6. *Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.* The theory of splines and their applications. New York: Acad. Press, 1967. 284 p. Перевод: *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.

7. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

8. *Субботин Ю.Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
Перевод: *Subbotin Yu.N.* On the relations between finite differences and the corresponding derivatives // Am. Math. Soc. Translations. 1967. P. 23–42.

9. *Субботин Ю.Н.* Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
Перевод: *Subbotin Yu.N.* Interpolation by functions with n-th derivative of minimum norm // Am. Math. Soc. Translations. 1969. P. 31–63.

10. *Ahlberg J.H., Nilson E.N.* Convergence properties of the spline fit // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1963. V. 11. № 1. P. 95–104.

11. *Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л.* Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. № 6. С. 1248–1254.
Перевод: *Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L.* Norm estimates for the inverses of matrices of monotone type and totally positive matrices // Siberian Math. J. 2009. V. 50, n. 6. P. 982–987.

12. *Volkov Yu.S., Novikov S.I.* Estimates for solutions of bi-infinite systems of linear equations // Eur. J. Math. 2022. V. 8, n. 2. P. 722-731.

13. *Волков Ю.С., Новиков С.И.* Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 814–830.
Перевод: *Volkov Yu.S., Novikov S.I.* Estimates of solutions to infinite systems of linear equations and the problem of interpolation by cubic splines on the real line // Siberian Math. J. 2022. V. 63. № 4. P. 677–690.

14. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. № 4. P. 616–619.

15. *de Boor C.* Odd-degree spline interpolation at a biinfinite knot sequence // Approximation Theory: Proc. Int. Colloq., Bonn, 1976 / Ed. R. Schaback, K. Scherer. Lect. Notes Math., 556. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976. P. 30–53.

16. *Волков Ю.С.* Об оценке элементов матрицы, обратной к циклической ленточной матрице // Сиб. журн. вычисл. матем. 2003. Т. 6. № 3. С. 263–267.

17. *Волков Ю.С.* Обратные циклических ленточных матриц и сходимость процессов интерполяции для производных периодических интерполяционных сплайнов // Сиб. журн. вычисл. матем. 2010. Т. 13. № 3. С. 243–253.
Перевод: *Volkov Yu.S.* Inverses of cyclic band matrices and the convergence of interpolation processes for derivatives of periodic interpolation splines // Numer. Anal. Appl. 2010. V. 3. № 3. P. 199–207.

18. *Merikoski J.K., Haukkanen P., Mattila M., Tossavainen T.* The spectral norm of a circulant matrix // JP J. Algebra, Number Theory Appl. 2018. V. 40. № 4. P. 495–500.

19. *Jiang Z., Zhou J.* A note on spectral norms of even-order r-circulant matrices // Appl. Math. Comput. 2015. V. 250. P. 368–378.

20. *Lindner M.* Circulant matrices: norm, powers, and positivity // Opuscula Math. 2018. V. 38. № 6. P. 849–857.

21. *Searle S. R.* On inverting circulant matrices // Linear Algebra Appl. 1979. V. 25. P. 77–89.

22. *Solak S.* On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers // Appl. Math. Comput. 2005. V. 160. № 1. P. 125–132.

23. *Ipek A.* On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries // Appl. Math. Comput. 2011. V. 217. № 12. P. 6011–6012.

24. *Zhou J., Jiang Z.* Spectral norms of circulant-type matrices with binomial coefficients and harmonic numbers // Int. J. Comput. Meth. 2014. V. 11. № 5. Art. No. 1350076.

25. *Pan V.Y., Svadlenka J., Zhao L.* Estimating the norms of random circulant and Toeplitz matrices and their inverses // Linear Algebra Appl. 2015. V. 468. P. 197–210.

26. *Sahasranand K.R.* The p-norm of circulant matrices via Fourier analysis // Concr. Oper. 2022. V. 9. № 1. P. 71–78.

27. *Bouthat L., Khare A., Mashreghi J., Moreau-Guerin F.* The p-norm of circulant matrices // Linear Multilinear Algebra. 2022. V. 70. № 21. P. 7176–7188.

28. *Volkov Yu.S., Novikov S.I.* Estimates for solutions of systems of linear equations with circulant matrices // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2099. Art. No. 012019.

29. *Волков Ю.С.* О неотрицательном решении системы уравнений с симметрической циркулянтной матрицей // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 2. С. 170–180.
Перевод: *Volkov Yu.S.* Nonnegative solutions to systems with symmetric circulant matrix // Math. Notes. 2001. V. 70. № 2. P. 154–162.

30. *Collatz L.* Functional analysis and computational mathematics. New York: Academic Press, 1966. 473 p.
Перевод: *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.

31. *Fuyong L.* The inverse of circulant matrix // Appl. Math. Comput. 2011. V. 217, n. 21. P. 8495–8503.

32. *Hoskins W.D., Meek D.S.* The infinity norm of a certain type of symmetric circulant matrix // Math. Comput. 1977. V. 31. № 139. P. 733–737.

33. *Киндалев Б.С.* Точная оценка нормы обратной матрицы для симметрического циркулянта // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. Вып. 121: Аппроксимация сплайнами. С. 37–45.

34. *Albasiny E.L., Hoskins W.D.* Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh // J. Inst. Math. Appl. 1973. V. 12. № 3. P. 303–318.

35. *Kershaw D.* A bound on the inverse of a band matrix which occurs in interpolation by periodic odd order splines // J. Inst. Math. Appl. 1977. V. 20. № 2. P. 227–228.

36. *Dubeau F.* On band circulant matrices in the periodic spline interpolation theory // Linear Algebra Appl. 1985. V. 72. P. 177–182.

37. *Dubeau F., Savoie J.* On circulant matrices for certain periodic spline and histospline projections // Bull. Australian Math. Soc. 1987. V. 36. № 1. P. 49–59.

38. *Abramovitz M., Stegun I.A.* (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. National Bureau of Standards, Washington, 1972. 1046 p.
Перевод: *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.) Справичник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

39. *Волков Ю.С.* Об одной задаче экстремальной функциональной интерполяции и константах Фавара // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 34–37.
Перевод: *Volkov Yu.S.* One problem of extremal functional interpolation and the Favard constants // Dokl. Math. 2020. V. 102. № 3. P. 474–477.

40. *Volkov Yu.S.* Efficient computation of Favard constants and their connection to Euler polynomials and numbers // Сиб. электрон. матем. известия. 2020. Т. 17. С. 1921–1942.

41. *Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.* 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 52–67.
Перевод: *Volkov Yu.S., Subbotin Yu.N.* Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 288. Suppl. 1. P. S222–S237.

ESTIMATES OF THE p-NORMS OF SOLUTIONS AND INVERSE MATRICES OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH A CIRCULANT MATRIX

Yu. S. Volkov[a,*], **V. V. Bogdanov**[a,**]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Acad. Koptyug Ave., 4, Novosibirsk, 630090 Russia*

**e-mail: volkov@math.nsc.ru*

***e-mail: bogdanov@math.nsc.ru*

Received 07 February, 2024

Revised 07 February, 2024

Accepted 02 May, 2024

Abstract. The problem of estimating solutions and inverse matrices of systems of linear equations with a circulant matrix in the p-norm, $1 < p < w$, is considered. An estimate is obtained for a circulant matrix with diagonal dominance. Based on this result and the idea of decomposing a matrix into a product of matrices related to the decomposition of the characteristic polynomial, an estimate is proposed for a general circulant matrix.

Keywords: difference equation, circulant matrix, diagonal dominance, norm of inverse matrix, solution estimate.