

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ МЕТОДОМ ДРОБНЫХ ШАГОВ

© 2024 г. М.Б. Гавриков^{1,*}, А.А. Таюрский^{1,**}

¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: mbgavrikov@yandex.ru

**e-mail: tayurskiy2001@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г.

Переработанный вариант 11.03.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

Метод дробных шагов применяется для решения уравнений ионизации электрон-ионной плазмы, содержащей нейтралы, применительно к процессам в стационарных плазменных двигателях (СПД). Использовано расщепление по физическим процессам: эволюция плазмы представлена как суперпозиция чистого переноса во внешнем поле в фазовом пространстве с последующей ионизацией. Для расчета переноса использован метод макрочастиц. Процесс ионизации в случае плоской симметрии рассчитывается по явным аналитическим формулам. Полученные формулы метода дробных шагов сравниваются с численным решением уравнения эволюции плазмы посредством известной физической модели ионизации. Библ. 23. Фиг. 5.

Ключевые слова: метод дробных шагов, ионизация, метод макрочастиц, физическая модель ионизации.

DOI: 10.31857/S0044466924080058, **EDN:** YAWELK

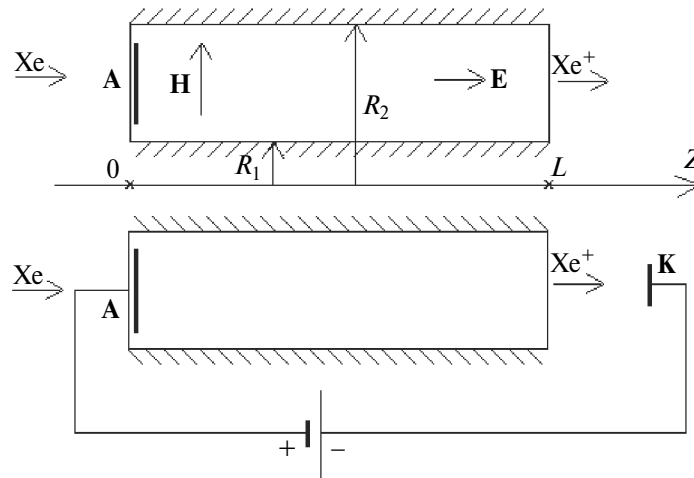
1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим процесс ионизации электрон-ионной плазмы, содержащей нейтралы. Пусть $f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $f_a(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — функции распределения ионов и нейтральных атомов, соответственно. Тогда ионизация атомов задается системой уравнений [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_i \rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{v}} f_i \rangle &= \beta n_i f_a, \\ \frac{\partial f_a}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_a \rangle &= -\beta n_i f_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f_i d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1)$$

где заданы $\beta = \beta(T_e) \geq 0$ — скалярная функция электронной температуры (коэффициент ионизации) и $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — векторная функция, подчиненная условию $\operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = 0$. Часто считается $\beta \equiv \beta_0 = \text{const}$, $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{e}{m_i} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right\}$, где $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ — напряженности электрического и магнитного поля в плазме и плотность плазменного тока, σ — проводимость плазмы (в простейшем случае спитцеровская, $\sigma \sim T_e^{3/2}$).

Применительно к конкретным плазменным установкам система упрощается. Особый интерес представляет процесс ионизации плазмы в стационарных плазменных двигателях (СПД), которые используются для коррекции орбит космических летательных аппаратов. История вопроса отражена в [3–5]. Согласно упрощенной принципиальной схеме, приведенной на фиг. 1, СПД представляет собой коаксиальную камеру с керамическими боковыми стенками, в торцах которой расположены анод и катод с подведенной к ним разностью потенциалов, приводящей к появлению в камере продольного электрического поля $\mathbf{E}$. Кроме того, система обмоток с постоянными токами создает в камере почти радиальное магнитное поле $\mathbf{H}$. Нейтральный газ — ксенон (Xe) подается со стороны анода с постоянной скоростью $\mathbf{v}_a$, ионизируется посредством ударной ионизации электронами, и возникающие ионы Xe^+ ускоряются продольным электрическим полем до скоростей ~ 15 км/с и покидают камеру в сторону катода, нейтрализуясь на нем. В результате возникает реактивная сила тяги, передаваемая жестко связанному с камерой летательному аппарату, на получение которой и направлена работа СПД. Длина типичного [6] СПД-100М составляет $L = 2.5$ см, внутренний и внешний радиусы камеры установки равны



Фиг. 1. Принципиальная схема СПД.

$R_1 = 3.5$ см, $R_2 = 5$ см, время непрерывной работы двигателя после выхода на квазистационарный режим $\sim 10^4$ ч.

Практически важный класс решений системы (1) получим, считая $f_a(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_a(t, \mathbf{x})\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a)$, где $\delta(\mathbf{v})$ есть δ -функция. Тогда, учитывая равенства $(v^i - v_a^i)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) = 0$, $1 \leq i \leq 3$, уравнение кинетики для нейтралов равносильно уравнению для концентрации нейтралов

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_a, \nabla n_a \rangle = -\beta n_i n_a,$$

и система (1) сводится к следующей равносильной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_i \rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{v}} f_i \rangle &= \beta n_i n_a \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_a, \nabla n_a \rangle &= -\beta n_i n_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f_i d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2)$$

В системе (2) n_a исключается из числа неизвестных (см. разд. 3). Для этого, интегрируя по характеристикам второе уравнение (2), выразим в явном виде n_a через n_i и, подставив найденное выражение в первое уравнение (2), получим линейное интегро-дифференциальное уравнение на функцию f_i , которое ниже решается методом дробных шагов.

Конкретные формулы метода дробных шагов получим ограничившись случаем плоской симметрии, когда $\mathbf{x} = (0, 0, z)$, $\mathbf{v} = (0, v_y, v_z)$, $\mathbf{F} = (0, F_y, F_z)$, $\mathbf{v}_a = (0, 0, v_a)$, $v_a > 0$, $f_i = f(t, z, v_y, v_z)$, $n_a = n_a(t, z)$, $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial/\partial z$, $\nabla_{\mathbf{v}} = (0, \partial/\partial v_y, \partial/\partial v_z)$. При этом $\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$, $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, $H_x = \text{const}$, $E_z = \text{const}$, $\mathbf{j} = 0$, $F_y = \frac{e}{m_i c} v_z H_x$, $F_z = \frac{e}{m_i} E_z - \frac{e}{m_i c} v_y H_x$, а система (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + F_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + F_z \frac{\partial f}{\partial v_z} &= \beta n n_a \delta(v_y) \delta(v_z - v_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} &= -\beta n n_a, \quad n = \int_{\mathbb{R}^2} f dv_y dv_z, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq z \leq L, \end{aligned} \quad (3)$$

которая ниже и решается методом дробных шагов.

Приближение плоской симметрии часто применяется в работах по СПД [7, 8] и исходит из допущения, что радиальные процессы в СПД не вносят существенный вклад в ионизацию атомов Xe и ускорение возникающих ионов вдоль оси z . В частности, можно пренебречь радиальным движением электронов, их рассеянием на боковых стенках установки и пристеночной проводимостью [9]. Математический переход к случаю плоской симметрии получается, если выпрямить коаксиальную камеру установки посредством экспоненциального отображения. Тогда ось r перейдет в ось x , ось φ — в ось y , в частности, H_x — это радиальная компонента магнитного поля.

Наконец, подчеркнем, что в предыдущей постановке, как обычно в исследованиях по СПД, считается, что индукционное электромагнитное поле, порожденное переменными токами и зарядами, пренебрежимо мало, а $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ это внешнее электромагнитное поле, создаваемое постоянными токами обмоток СПД и разностью потенциалов между анодом и катодом.

В разд. 2 рассмотрена общая схема метода дробных шагов применительно к системам (2), (3). В разд. 3 кратко изложен в необходимом объеме метод макрочастиц. В разд. 4 рассмотрена численная реализация метода дробных шагов для системы (3). В разд. 5 метод дробных шагов сравнивается с известным способом численного решения системы (2), основанном на физическом моделировании ионизации [10–12]. Показано, что 1) для достаточно сильных электрических полей E_z метод дробных шагов пригоден для практических вычислений, 2) из сравнения концентраций ионов и атомов Хе следует, что расчеты по двум указанным методам качественно совпадают. Учитывая, что физическая модель ионизации [10–12] не имеет математического обоснования, предпочтение при численном исследовании ионизации следует отдать методу дробных шагов. В то же время оба метода расчета дополняют друг друга. С одной стороны, принимая во внимание качественное совпадение результатов расчета, метод дробных шагов можно рассматривать как математическое обоснование алгоритма физического моделирования ионизации. С другой стороны, метод дробных шагов при численной реализации требует больших вычислительных ресурсов (см. разд. 3), поэтому при необходимости его можно заменить на алгоритм физического моделирования ионизации.

Полученные методы дробных шагов легко обобщаются для численного решения системы (2) в случае осевой симметрии и с учетом индукционных электромагнитных полей.

2. МЕТОД ДРОБНЫХ ШАГОВ

Представим кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_n(f) + \mathcal{L}_u(f), \quad \mathcal{L}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f \rangle - \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{v}} f \rangle, \quad \mathcal{L}_u(f) \stackrel{\text{def}}{=} \beta n n_a \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a),$$

где $f = f_i$, $n = n_i$. Для численного решения кинетического уравнения используем расщепление по физическим процессам или метод дробных шагов [13, 14], суть которого в данном случае в следующем. Допустим, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ мы умеем численно (или аналитически) решать задачи Коши для уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_n(f), \quad f|_{t=t_0} = f^0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_u(f), \quad f|_{t=t_0} = f^0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t. \quad (5)$$

Тогда задача Коши

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_n(f) + \mathcal{L}_u(f), \quad f|_{t=t_0} = f^0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t, \quad (6)$$

решается следующим образом. Пусть $\bar{f}$ — значение решения задачи Коши в момент времени $t = t_0 + \Delta t$, тогда

$$\frac{\bar{f} - f^0}{\Delta t} = \mathcal{L}_n(\bar{f}). \quad (7)$$

Пусть f^1 — значение решения задачи Коши $\partial f / \partial t = \mathcal{L}_u(f)$, $f|_{t=t_0} = f^0$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ в момент времени $t = t_0 + \Delta t$, тогда

$$\frac{f^1 - \bar{f}}{\Delta t} = \mathcal{L}_u(f^1). \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим

$$(\bar{f} - \Delta t \mathcal{L}_n(\bar{f})) = f^0, \quad (f^1 - \Delta t \mathcal{L}_u(f^1)) = \bar{f}.$$

Умножая обе части второго равенства на $I - \Delta t \mathcal{L}_n$, где I — единичный оператор, имеем

$$(I - \Delta t \mathcal{L}_n)(I - \Delta t \mathcal{L}_u)f^1 = (I - \Delta t \mathcal{L}_n)\bar{f} = f^0,$$

откуда

$$f^1 - f^0 = \Delta t(\mathcal{L}_n + \mathcal{L}_u)(f^1) - \Delta t^2 \mathcal{L}_n \mathcal{L}_u(f^1)$$

или

$$\frac{f^1 - f^0}{\Delta t} = (\mathcal{L}_n + \mathcal{L}_u)(f^1) - \Delta t \mathcal{L}_n \mathcal{L}_u(f^1) = (\mathcal{L}_n + \mathcal{L}_u)(f^1) + O(\Delta t) \quad (9)$$

и, значит, f^1 — решение на верхнем слое ($t = t_0 + \Delta t$) задачи Коши (6) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Заметим, что в правых частях (7), (8) могут стоять любые добавки порядка $O(\Delta t)$. Тогда все равно приходим к равенству (9). Обратимся теперь к решению задач Коши (4), (5). Выше, по умолчанию, предполагалось, что эти задачи решаются на отрезке $[0, L]$ с определенными граничными условиями. На левой границе $z = 0$ ставится условие зеркального отражения, а правая граница $z = L$ считается свободной: ион, достигающий правую границу с положительной z -й скоростью, покидает область $[0, L]$.

3. МЕТОД МАКРОЧАСТИЦ

Задача Коши (4) численно решается методом макрочастиц. Ключевым моментом при дискретизации уравнения (4) является выбор конечномерных агрегатов, аппроксимирующих неизвестное решение, совокупность которых образует аппроксимирующее пространство. В физической литературе [15] функция распределения f обычно аппроксимируется конечной суммой δ -функций:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \cong \sum_{j=1}^N q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t)), \quad (10)$$

где $q_j > 0$ не зависят от t , $\sum_{j=1}^N q_j = \text{const}$ не зависит от N , $\mathbf{x}_j(t)$, $\mathbf{v}_j(t)$ — заданные функции. В методе макрочастиц эти функции ищутся из решения уравнения характеристик

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \mathbf{v}_j, \quad \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = F(t, \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j), \quad \mathbf{x}_j(0), \mathbf{v}_j(0) — \text{заданы} \quad (11)$$

и называются макрочастицами, а величины q_j — массами макрочастиц. Значения q_j , $\mathbf{x}_j(0)$, $\mathbf{v}_j(0)$, $1 \leq j \leq N$, определяются начальной функцией распределения $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(0, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, которая считается известной. Например, фиксируем разбиение фазового пространства в сумму N областей D_j , $1 \leq j \leq N$ (не обязательно компактных!), с кусочно-гладкими границами и непересекающимися и непустыми внутренностями. Тогда положим

$$q_j = \int_{D_j} f_0 d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_j(0) = \frac{1}{q_j} \int_{D_j} \mathbf{x} f_0 d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_j(0) = \frac{1}{q_j} \int_{D_j} \mathbf{v} f_0 d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Иными словами, q_j — масса, $(\mathbf{x}_j(0), \mathbf{v}_j(0))$ — центр тяжести области D_j . Детали см. в [16]. При дискретизации (10) параметры плазменной среды в канале СПД задаются обобщенными функциями (для концентрации числа частиц это прямо следует из (10)), что серьезно затрудняет верификацию получаемых численных результатов и сравнение их с экспериментальными данными. В [17] указанный недостаток преодолевается коррекцией аппроксимации (10) путем применения к ее правой части линейного интегрального преобразования по $\mathbf{x}$ с симметричным или вырожденным ядром. Другая возможность — переход на язык конечных регулярных борелевских мер [18]. Каждая функция распределения в момент времени t порождает конечную регулярную борелевскую меру $\mu(t)$ на σ -алгебре S всех борелевских подмножеств фазового пространства:

$$\mu(t)(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad E \in S.$$

При этом уравнение (4) переписывается в виде эволюционного уравнения относительно $\mu(t)$ [19]. Тогда дискретизация (10) может рассматриваться как аппроксимация $\mu(t) \cong \mu_N(t)$, где

$$\mu_N(t)(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N q_j \Psi(\mathbf{x}_j(t), \mathbf{v}_j(t)),$$

и используется отождествление конечных регулярных борелевских мер с непрерывными положительными линейными функционалами на пространстве финитных ($\equiv$ с компактным носителем) непрерывных функций фазового пространства $\{\Psi\}$ с нормой максимум модуля [18]. В [19] дано обоснование метода макрочастиц (более точно, установлена слабая сходимость $\mu_N(t) \rightarrow \mu(t)$ при $N \rightarrow +\infty$ для всех t из конечного отрезка $[0, T]$) применительно к численному решению систем уравнений Максвелла–Власова и Власова–Пуассона при условии вычисления средних величин со сглаживанием.

Для практических вычислений предпочтительней использовать следующую дискретизацию:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \cong \sum_{j=1}^N q_j \delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t)), \quad \varepsilon > 0, t \geq 0,$$

где, как и в (10), $q_j > 0$ и не зависят от t , $\mathbf{x}_j(t)$, $\mathbf{v}_j(t)$ — заданные функции, которые в методе макрочастиц удовлетворяют уравнению характеристик (11), а q_j , $\mathbf{x}_j(0)$, $\mathbf{v}_j(0)$ однозначно определяются начальной функцией $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. При этом функция δ_ε удовлетворяет следующим ограничениям:

- 1) $\delta_\varepsilon \geq 0$;
- 2) $\int_{\mathbb{R}^3} \delta_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;
- 3) δ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к δ -функции в нуле, что означает справедливость предельного равенства

$$U(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} U(\mathbf{x}) \delta_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

для любой непрерывной ограниченной функции $U(\mathbf{x})$;

- 4) $\text{supp} \delta_\varepsilon$ — компактен, $0 \in \text{supp} \delta_\varepsilon$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam} \text{supp} \delta_\varepsilon = 0$.

Выбор $\delta_\varepsilon(\mathbf{x})$ предопределяет вычислительный алгоритм метода макрочастиц. Конкретные примеры $\delta_\varepsilon(\mathbf{x})$ содержатся в [15, 20–22], в частности, как правило, выполнено условие $\text{supp} \delta_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]^3$, что ниже предполагается.

В случае плоской симметрии координаты макрочастиц суть $z_j(t)$, $\mathbf{v}_j(t)$, $\mathbf{v} = (v_y, v_z)$, а задача Коши на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ для уравнения характеристик (11) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v_z, \quad \frac{dv_y}{dt} = F_y(t, z, \mathbf{v}), \quad \frac{dv_z}{dt} = F_z(t, z, \mathbf{v}), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t, \\ z(t_0) &= z_j(t_0), \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_j(t_0), \\ F_y &= \frac{e}{m_i c} v_z H_x, \quad F_z = \frac{e}{m_i} E_z - \frac{e}{m_i c} v_y H_x, \quad E_z = \text{const}, \quad H_x = \text{const}. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) — линейная с постоянными коэффициентами и может быть легко решена в явном виде. Однако с учетом граничных условий ее практическую интеграцию целесообразно проводить численно, например, по схеме leap-frog [15, 20–22]. Если $z_j(t)$, $\mathbf{v}_j(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ — решение задачи Коши (12), то имеем

$$\begin{aligned} f^0 &= \sum_j q_j \delta_\varepsilon(z - z_j(t_0)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t_0)), \\ \bar{f} &= \sum_j q_j \delta_\varepsilon(z - z_j(t_0 + \Delta t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t_0 + \Delta t)). \end{aligned} \quad (13)$$

В общем случае при учете индукционных электромагнитных полей для вычисления поля $\mathbf{F}$ необходимо численно решить систему уравнений в частных производных для нахождения полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Если последняя система решается разностным методом, то метод макрочастиц необходимо дополнить двумя группами формул: формулами вычислений средних величин, для которых на разностной сетке сохранялись бы масса, импульс и т.д., и интерполяционными формулами, позволяющими по сеточным значениям полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ вычислить значение $\mathbf{F}$ в точках — местоположениях макрочастиц. Подробности см. в [15, 20–22].

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ

Решение уравнения (5) получается из аналитического решения системы, дополненной естественными начальными и граничными условиями:

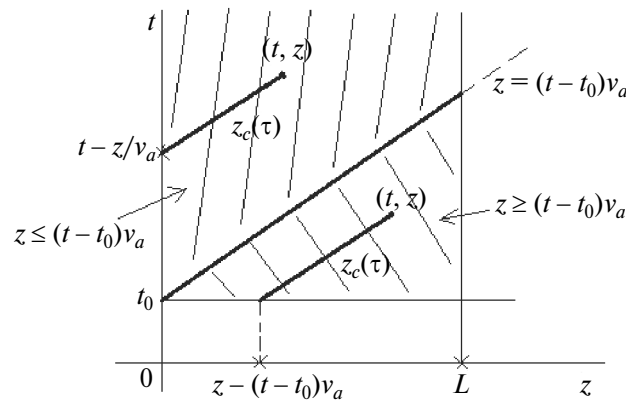
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \beta n n_a \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a), \quad f|_{t_0} = \bar{f}, \quad \mathbf{v}_a = (0, v_a), \quad v_a > 0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t, \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} &= -\beta n n_a, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t, \\ n_a|_{z=0} &= n_{a0}(t), \quad n_a|_{t=t_0} = n_a^0(z), \quad 0 \leq z \leq L, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\bar{f}$ вычисляется по (13), $n_{a0}(t)$, $n_a^0(z)$ — известные функции, удовлетворяющие условию согласованности $n_{a0}(0) = n_a^0(0)$. Как уже отмечалось во введении, функция

$$n_a$$

выражается через n посредством явных формул. Действительно, характеристики уравнения переноса концентрации n_a имеют вид $z_c(t) = v_a t + C$, $C = \text{const}$. Пусть $X = \ln n_a$, тогда для любого C имеем

$$\frac{d}{dt} X(t, z_c(t)) = \frac{\partial X}{\partial t} + v_a \frac{\partial X}{\partial z} = -\beta n.$$



Фиг. 2. Геометрическая иллюстрация формул (15).

Откуда элементарным интегрированием получается явная формула:

$$n_a(t, z) = \begin{cases} n_{a0} \left(t - \frac{z}{v_a} \right) \exp \left[-\beta \int_{t-z/v_a}^t n(\tau, z + (\tau - t)v_a) d\tau \right], & t \geq t_0, \quad z \leq (t - t_0)v_a, \\ n_a^0(z - (t - t_0)v_a) \exp \left[-\beta \int_{t_0}^t n(\tau, z + (\tau - t)v_a) d\tau \right], & t \geq t_0, \quad z \geq (t - t_0)v_a. \end{cases} \quad (15)$$

Легко проверить, что обе формулы (15) на прямой $z = (t - t_0)v_a$ совпадают и непосредственной подстановкой обеих формул (15) в уравнение переноса атомов несложно убедиться в его справедливости. Характеристика, проходящая через точку (t, z) , имеет вид $z(t) = z + (\tau - t)v_a$ и соответствует константе $C = z - tv_a$, откуда получается геометрическая иллюстрация формул (15) (фиг. 2).

Итак, из уравнения переноса атомов n_a по явной формуле нелинейно выражается через n .

Решение задачи Коши для уравнения имеет, очевидно, вид

$$f = \bar{f} + \int_{t_0}^t \beta n(t, z) n_a(\tau, z) d\tau \cdot \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a). \quad (16)$$

Если известны концентрации n, n_a , то (16) при $t = t_0 + \Delta t$ дает значение f^1 . Для нахождения величин n, n_a , проинтегрируем равенство (16) по скоростному пространству:

$$n = \int_{\mathbb{R}^2} f d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f} d\mathbf{v} + \int_{t_0}^t \beta n n_a d\tau = \sum_j q_j \delta_\epsilon(z - z_j(t_0 + \Delta t)) + \int_{t_0}^t \beta n n_a d\tau,$$

где использована формула (13) для $\bar{f}$. Отсюда следует $\partial n / \partial t = \beta n n_a$ и вместе с уравнением переноса для атомов получаем систему уравнений для нахождения n, n_a :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \beta n n_a, \quad \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} = -\beta n n_a, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq t_0, \quad (17)$$

с очевидным начальным условием для n :

$$n|_{t=t_0} = n^0(z) = \sum_j q_j \delta_\epsilon(z - z_j(t_0 + \Delta t)).$$

Оказывается, нелинейная система (17) может быть решена в явном виде [23]. Выпишем ее решение в полуполосе $0 \leq z \leq L, t \geq t_0$, ограничиваясь наиболее важным физическим случаем $n_{a0}(t) \equiv n_{a0} = \text{const}$. Общий случай см. в [23].

Теорема 1 (см. [23]). *Решение системы в полуполосе $0 \leq z \leq L$, $t \geq t_0$, удовлетворяющее указанным выше начальным и граничным условиям, имеет вид*

$$n(t, z) = n^0(z) \frac{\exp N(z)}{1 + \frac{\beta}{v_a} \int_0^z n^0(p) e^{N(p)} dp + \frac{\beta}{v_a} \int_0^{z-v_a(t-t_0)} n_a^0(p) e^{N(p)} dp},$$

$$n_a(t, z) = n_a^0(z - (t - t_0)v_a) \frac{\exp N(z - v_a(t - t_0))}{1 + \frac{\beta}{v_a} \int_0^z n^0(p) e^{N(p)} dp + \frac{\beta}{v_a} \int_0^{z-v_a(t-t_0)} n_a^0(p) e^{N(p)} dp},$$

$$(t - t_0)v_a \leq z \leq L, \quad t \geq t_0,$$

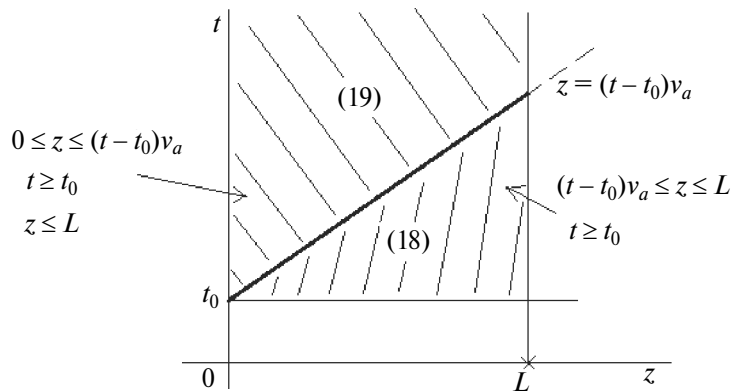
$$n(t, z) = n^0(z) \frac{\exp N(z)}{\frac{\beta}{v_a} \int_0^z n^0(p) e^{N(p)} dp + \exp \left[- \left(t - t_0 - \frac{z}{v_a} \right) \beta n_{a0} \right]},$$

$$n(t, z) = n_{a0}(z) \frac{\exp[-(t - t_0 - z/v_a)\beta n_{a0}]}{\frac{\beta}{v_a} \int_0^z n^0(p) e^{N(p)} dp + \exp \left[- \left(t - t_0 - \frac{z}{v_a} \right) \beta n_{a0} \right]},$$

$$0 \leq z \leq (t - t_0)v_a, \quad t \geq t_0, z \leq L,$$

где $N(z) = \frac{\beta}{v_a} \int_0^z [n^0(p) + n_a^0(p)] dp$.

Геометрическая иллюстрация решения (18), (19) представлена на фиг. 3.



Фиг. 3. Геометрическая иллюстрация формул (18), (19).

Очевидно, что на граничной прямой $z = (t - t_0)v_a$ оба комплекта формул (18), (19) совпадают. Вернемся к вычислению f^1 , считая $z_j = z_j(t_0 + \Delta t)$, $v_j = v_j(t_0 + \Delta t)$:

$$f^1 = \bar{f} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \beta n(\tau, z) n_a(\tau, z) d\tau \cdot \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cong \bar{f} + \Delta t \beta n(t_0, z) n_a(t_0, z) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) =$$

$$= \bar{f} + \Delta t \beta n^0(z) n_a^0(z) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) = \bar{f} + \Delta t \beta \sum_j q_j \delta_\varepsilon(z - z_j) n_a^0(z) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cong$$

$$\cong \bar{f} + \Delta t \beta \sum_j q_j \delta_\varepsilon(z - z_j) n_a^0(z_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) =$$

$$= \sum_j q_j \delta_\varepsilon(z - z_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j) + \sum_j \beta \Delta t q_j n_a^0(z_j) \delta_\varepsilon(z - z_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a).$$

Итак, согласно формуле (20), функция распределения f^1 получается из $\bar{f}$ вбрасыванием макрочастиц в точки с координатами $z_j = z_j(t_0 + \Delta t)$, скоростями $\mathbf{V}_a$ и массами $\Delta t \beta q_j n_a^0(z_j(t_0 + \Delta t))$. В цепочке (20) имеется два приближенных равенства. Первое — это формула прямоугольников для вычисления интеграла на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Второе — $\delta_\varepsilon(z - z_j) n_a^0(z) \cong \delta_\varepsilon(z - z_j) n_a^0(z_j)$ следует из обращения функции $\delta_\varepsilon(z - z_j) n_a^0(z)$ в нуль вне ε -окрестности точки z_j (напомним, $\text{supp} \delta_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$), поэтому $\delta_\varepsilon(z - z_j) n_a^0(z) = \delta_\varepsilon(z - z_j) (n_a^0(z_j) + O(\varepsilon)) \cong$

$\cong \delta_\varepsilon(z - z_j)n_a^0(z_j)$. Приближенные равенства в цепочке (20) понимаются в слабом смысле, как приближенные равенства определяемых функциями распределениями линейных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных финитных функций в фазовом пространстве (см. разд. 3). Согласно (20), начальное количество макрочастиц за n временных шагов увеличивается в 2^n раз, т.е. растет экспоненциально, что является недостатком метода дробных шагов. Однако в сильном продольном электрическом поле, типичном для СПД, количество покидаемых через правую границу макрочастиц, как показывают расчеты, тоже растет экспоненциально. В итоге в канале СПД остается ограниченное сверху и пригодное для расчета число макрочастиц (см. ниже). С другой стороны, в методе дробных шагов нет необходимости в использовании эйлеровой сетки в расчетной области для нахождения координат новых макрочастиц, что является преимуществом этого метода. Кроме того, можно увеличить порядок по Δt точности вычисления интеграла в цепочке преобразований (20), если посредством явных формул (18), (19) разложить $n(t, z)$, $n_a(t, z)$ по степеням $t - t_0 \leq \Delta t$ и ограничиться несколькими первыми членами разложений (при этом надо пользоваться формулами (18), справедливыми при $(t - t_0)v_a \leq z$). Для этой цели полезно преобразовать формулы (18), (19) с учетом тождеств

$$(e^{N(p)})' = \frac{\beta}{v_a} e^{N(p)} (n^0(p) + n_a^0(p)), \quad \frac{\beta}{v_a} \int_0^z n^0(p) e^{N(p)} dp = e^{N(z)} - 1 - \frac{\beta}{v_a} \int_0^z n_a^0(p) e^{N(p)} dp.$$

Тогда, например, формулы (18) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} n(t, z) &= n^0(z) \left\{ 1 - \frac{\beta}{v_a} \int_{z-v_a(t-t_0)}^z n_a^0(p) \exp \left[-\frac{\beta}{v_a} \int_p^z (n_a^0(q) + n^0(q)) dq \right] dp \right\}^{-1}, \\ n_a(t, z) &= n_a^0(z - (t - t_0)v_a) \left\{ \exp \left[\frac{\beta}{v_a} \int_{z-v_a(t-t_0)}^z (n_a^0(p) + n^0(p)) dp \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{v_a} \int_{z-v_a(t-t_0)}^z n_a^0(p) \exp \left[-\frac{\beta}{v_a} \int_{z-v_a(t-t_0)}^p (n_a^0(q) + n^0(q)) dq \right] dp \right\}^{-1}, \\ &\quad (t - t_0)v_a \leq z \leq L. \end{aligned}$$

Однако в настоящей работе мы ограничимся аппроксимациями (20).

5. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Сравним метод дробных шагов с численным методом, основанном на физическом моделировании ионизации [10–12]. Его суть применительно к случаю плоской симметрии в следующем. Выберем эйлерову сетку $z_k = kh$, $0 \leq k \leq M$, $h = L/M$, на отрезке $[0, L]$. Тогда из физических соображений, согласно уравнению (3), следует, что в момент времени t в единицу времени в ячейке $[z_{k-1}, z_k]$, $1 \leq k \leq M$, вследствие ионизации, рождается ионов в количестве

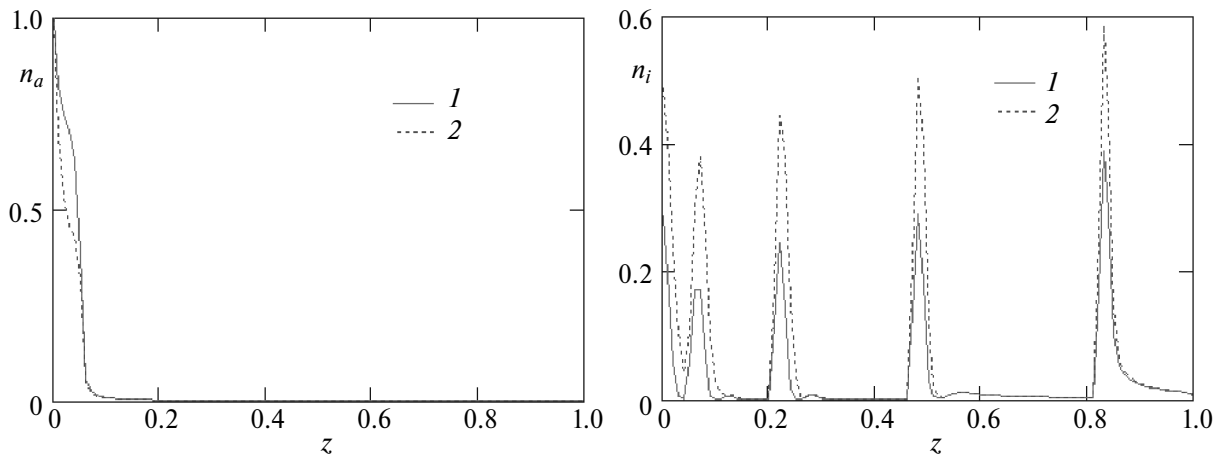
$$\int_{[z_{k-1}, z_k] \times \mathbb{R}^2} \beta n(t, z) n_a(t, z) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) dz d\mathbf{v} = \beta \int_{z_{k-1}}^{z_k} n(t, z) n_a(t, z) dz.$$

Поэтому на временном шаге $[t_0, t_0 + \Delta t]$ в ячейке $[z_{k-1}, z_k]$ число родившихся ионов приблизительно равно $\beta h \Delta t n(t_0, z_{k-1/2}) n_a(t_0, z_{k-1/2})$, $z_{k-1/2} = (k - 1/2)h$, а их скорость равна v_a . На этом основано физическое моделирование ионизации в методе макрочастиц: на шаге Δt вбрасывается M новых макрочастиц с координатами $z_{k-1/2}$, $1 \leq k \leq M$, скоростью v_a и массой $Q_k = \beta h \Delta t n(t_0, z_{k-1/2}) n_a(t_0, z_{k-1/2})$. Таким образом, число новых макрочастиц в методе физического моделирования ионизации за n временных шагов равно Mn , т.е. растет линейно, что является преимуществом указанного метода.

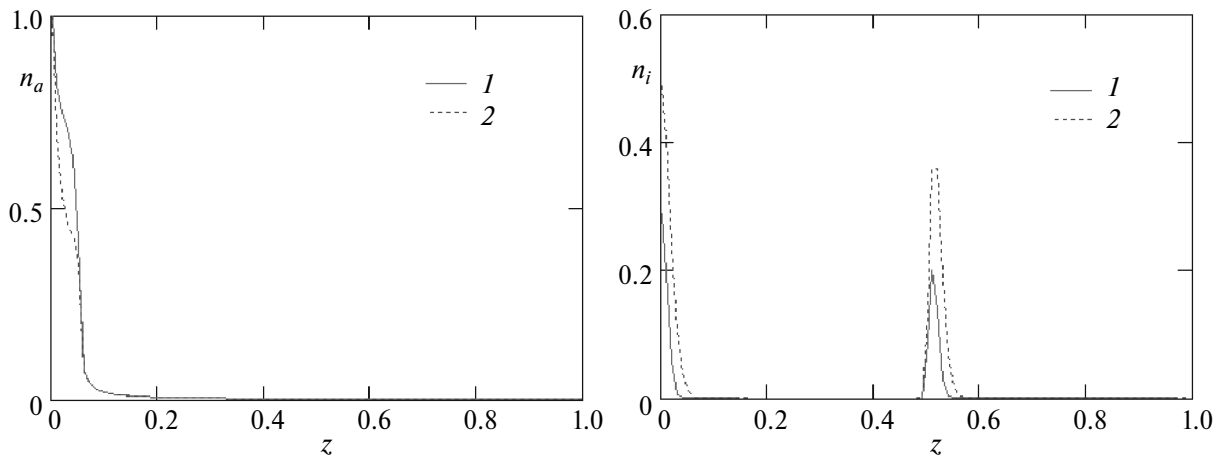
Движение макрочастиц рассчитывалось по системе уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dv_y}{dt} = \varepsilon H_x v_z, \quad \frac{dv_z}{dt} = \varepsilon (E_z - H_x v_y), \quad \varepsilon = [t] \omega_{ci}, \quad \omega_{ci} = \frac{e[H]}{cm_i},$$

для следующих параметров $[t] = 10^{-4}$ с, $[H] = 200$ Гс, $m_i = 0.9018 \cdot 10^{-22}$ г, $e = 4.803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, $\varepsilon = 1$, $H_x = 1$. Здесь квадратные скобки обозначают характерный масштаб соответствующей физической величины.



Фиг. 4. Концентрация атомов $n_a(t, z)$ и ионов $n_i(t, z)$ при $t = 0.5$ и $E_z = 10$, посчитанная методами дробных шагов — 1 и физического моделирования ионизации — 2.



Фиг. 5. Концентрация атомов $n_a(t, z)$ и ионов $n_i(t, z)$ при $t = 0.5$ и $E_z = 100$, посчитанная методами дробных шагов — 1 и физического моделирования ионизации — 2.

Более подробно численный алгоритм, включающий полуявную разностную схему расчета уравнения переноса n_a , при котором значения n_i снимаются с нулевого слоя, изложен в [16]. Проведены расчеты для двух вариантов $E_z = 10$ и $E_z = 100$.

Как следует из приведенных результатов (фиг. 4, 5), качественная картина расчетов по двум представленным методам практически одинакова — различаются только максимальные значения концентраций ионов и атомов. Более того, для достаточно больших E_z количество макрочастиц в канале СПД с течением времени стабилизируется и их количество ограничено. Например, для $E_z = 2 \cdot 10^4$, $\epsilon = 1$, $H_x = 1$ число частиц в канале имеет порядок $\sim 2 \cdot 10^3$. Подчеркнем, что стабилизация количества макрочастиц в канале СПД со временем наступает для любых электрических полей, однако для практических вычислений важно, чтобы это количество было как можно меньше, тем более при расчете на персональном компьютере. Полученное совпадение концентраций n_i , n_a следует признать удовлетворительным, поскольку результаты расчетов по методу макрочастиц нельзя сравнивать в норме C , а самое большее в L_p , $p \geq 1$, так что в остальных точках могут быть существенные расхождения результатов, которые с течением времени, как правило, нарастают. В любом случае за эталонный следует брать результат, полученный по методу дробных шагов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе метод дробных шагов применяется для решения гибридной (кинетической по ионам, гидродинамической по нейтралам) системы уравнений ионизации электрон-ионной плазмы, содержащей нейтралы, применительно к процессам в стационарных плазменных двигателях (СПД), используемых для коррекции орбит летательных аппаратов. Основная идея метода основана на расщеплении по физическим процессам: эво-

люция плазмы представлена как суперпозиция чистого переноса во внешнем поле в фазовом пространстве и последующей ионизации. Процесс ионизации в случае плоской симметрии, которым в работе для простоты и ограничились, рассчитывается по явным аналитическим формулам. Полученные формулы метода дробных шагов сравниваются на примере расчета концентрации атомов и ионов с численным решением уравнений динамики плазмы посредством известной физической модели ионизации.

Метод дробных шагов расчета ионизации не требует использования эйлеровой сетки разбиения счетной области на ячейки, а количество вбрасываемых макрочастиц экспоненциально зависит от числа временных шагов. Результаты сравнения двух методов расчета ионизации, основанных на радикально различных идеях, демонстрирующие их качественную идентичность, следует считать удовлетворительными, поскольку расчеты по методу макрочастиц сравниваются не в равномерной метрике, а самое большее, в интегральной норме. Из сравнения двух методов следует, что метод дробных шагов можно рассматривать как математическое обоснование физической модели ионизации, а последнюю следует использовать, когда ужесточаются требования к объему вычислительных ресурсов при расчете методом дробных шагов. Метод дробных шагов показан к применению при расчете ионизации в сильных продольных электрических полях, типичных для СПД, когда недостаток метода, связанный с экспоненциальным ростом числа макрочастиц компенсируется экспоненциальным ростом числа макрочастиц, покидающих канал СПД через правую границу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И.* Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978.
2. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006. 576 с.
3. *Козубский К.Н., Мурашко В.М., Рылов В.П., Трифонов Ю.В., Ходенко В.П., Ким В.П., Попов Г.А., Обухов В.А.* СПД работает в космосе // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 277–292.
4. *Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V.* History of the Hall Thrusters Development in USSR // Paper IEPC-2007-142. 30th International Electric Propulsion Conference. September 17–20, 2007. Florence. Italy.
5. *Ким В.П., Семенкин А.В., Хартов С.А.* Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
6. *Mitrofanova O.A., Gnizdor R.Yu., Murashko V.M., Koryakin A.I., Nesterenko A.N.* New Generation of SPT-100. 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany. September 11–15, 2011, 7 p. IEPC-2011-041.
7. *Garrigues L., Heron A., Adam J.C., Boeuf J.P.* Hybrid and Particle-In-Cell Models of a Stationary Plasma Thruster // Plasma Source Sci. Technol. 9. 2000. P.219–226.
8. *Morozov A.I., Savelyev V.V.* Fundamentals of Stationary Plasma Thruster Theory // Reviews of Plasma Physics. P. 203–391.
9. *Морозов А.И.* Эффект пристеночной проводимости в хорошо замагниченной плазме // ПМТФ. 1968. № 3. С. 19–23.
10. *Волков Б.И., Якунин С.А.* Математические задачи плазмooптики. М.: Знание, 1982. 64 с. Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Математика, кибернетика”; № 11.
11. *Быков А.А., Попов В.Ю., Свешников А.Г., Якунин С.А.* Внутренние переходные слои потенциала в сильно замагниченной плазме // Матем. моделирование. Т. 1. № 6. 1989. С. 33–47.
12. *Свешников А.Д., Якунин С.А.* Математическое моделирование нестационарных процессов в плазмooптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 5. С. 1141–1157.
13. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
14. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
15. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых схем. М.: ТОО Янус, 1995. 624 с.
16. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Гибридная модель стационарного плазменного двигателя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 35. 48 с.

17. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избранные труды / Сост. Г.И. Змиевская, В.Д. Левченко. М.: Физматлит, 2001. 288 с.
18. Халмош П. Теория меры. М.: Иностранлит., 1953. 291 с.
19. Арсеньев А.А. Лекции о кинетических уравнениях. М.: Наука, 1992. 216 с.
20. Березин Ю.А., Вишневский В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980. 95 с.
21. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
22. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.
23. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 30. 36 с.

NUMERICAL SOLUTION OF THE IONIZATION EQUATIONS BY STEP FRACTIONS

М. Б. Гавриков^{a,*}, А. А. Таюрский^{a,**}

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047 Russia*

^{*}*e-mail: mbgavrikov@yandex.ru*

^{**}*e-mail: tayurskiy2001@mail.ru*

Received 11 March, 2024

Revised 11 March, 2024

Accepted 05 May, 2024

Abstract. The fractional steps method is applied to solve electron-ion plasma ionization equations involving neutrals, with a focus on processes in stationary plasma thrusters (SPT). The approach is based on splitting by physical processes: plasma evolution is represented as a superposition of pure transport in an external field in phase space followed by ionization. The particle-in-cell method is used for calculating transport. In the case of planar symmetry, the ionization process is calculated using explicit analytical formulas. The derived formulas of the fractional steps method are compared with the numerical solution of the plasma evolution equation through a well-known physical ionization model.

Keywords: fractional steps method, ionization, particle-in-cell method, physical ionization model.