ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹⁾

© 2024 г. Т. К. Искаков^{1,2,*}, М. А. Скворцова^{1,2,**}

¹630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия
²630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия
 *e-mail: istima92@mail.ru
 **e-mail: sm-18-nsu@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.
 Переработанный вариант 02.04.2024 г.
 Принята к публикации 02.05.2024 г.

Рассматривается модель конкуренции нескольких видов микроорганизмов, описываемая системой нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределенным запаздыванием. Изучается случай асимптотической устойчивости положения равновесия, соответствующего выживанию только одного вида и вымиранию всех остальных. Указаны условия на начальные численности видов и начальную концентрацию питательного вещества, при которых система приходит в равновесное состояние, при этом установлены оценки скорости стабилизации. Результаты получены с использованием функционала Ляпунова–Красовского. Библ. 17.

Ключевые слова: модель конкуренции видов, хемостат, уравнения с запаздывающим аргументом, бесконечное распределенное запаздывание, положение равновесия, асимптотическая устойчивость, оценки решений, область притяжения, функционал Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0044466924080067, EDN: YATLTK

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает исследования [1] по изучению асимптотических свойств решений системы дифференциальных уравнений с бесконечным распределённым запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(t) &= D(S^0 - S(t)) - \sum_{i=1}^n x_i(t)p_i(S(t)), \\ \frac{d}{dt}x_i(t) &= -Dx_i(t) + \int_{-\infty}^t x_i(\theta)p_i(S(\theta))e^{-D(t-\theta)}K_i(t-\theta)d\theta, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$K_i(s) = \frac{\alpha_i^{r_i+1} s^{r_i}}{r_i!} e^{-\alpha_i s}, \quad \alpha_i > 0, \quad r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad s > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Система была предложена в работе [2] для описания конкуренции нескольких видов микроорганизмов, находящихся в хемостате (хемостат — аппарат для непрерывного культивирования бактерий, обеспечивающий оптимальные температурные условия и постоянное поступление свежей питательной среды при одновременном удалении части бактериальной культуры). Функции и параметры, входящие в систему, имеют следующий биологический смысл: $S(t)$ — концентрация питательного вещества в момент времени t , $S^0 > 0$ — концентрация вводимого питательного вещества, $D > 0$ — скорость поступления питательного вещества, $x_i(t)$ — концентрация i -го вида микроорганизмов в момент времени t . Функции поглощения питательных веществ $p_i(\xi)$ предполагаются строго монотонно возрастающими, локально липшицевыми, при этом $p_i(0) = 0$. Показатели смертности, характерные для видов, считаются незначительными по сравнению со скоростью поступления питательного вещества и в данной модели не учитываются. Каждое ядро $K_i(s)$ связано с преобразованием питательного вещества в жизнеспособные клетки.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Минобрнауки РФ.

Более подробное описание модели содержится в [2]. Некоторые другие модели, описывающие биологические процессы в хемостате, содержатся, например, в [3, 4].

Вместе с системой (1.1) рассмотрим начальные условия

$$\begin{aligned} S(t) &= \varphi_0(t), & t < 0, & & S(+0) &= \varphi_0(0), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), & t < 0, & & x_i(+0) &= \varphi_i(0), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\varphi_i(t) \in C((-\infty, 0])$, $i = 0, 1, \dots, n$, — заданные непрерывные ограниченные функции. Учитывая биологический смысл задачи, будем предполагать, что начальные данные неотрицательны:

$$\varphi_i(t) \geq 0, \quad t \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Отметим, что начальная задача (1.1), (1.3) однозначно разрешима. Более того, в работе [2] было показано, что при условии (1.4) компоненты решения начальной задачи (1.1), (1.3) также неотрицательны при всех $t > 0$ и ограничены сверху.

Теперь рассмотрим положения равновесия системы (1.1) с неотрицательными компонентами, указанные в [2].

При любых значениях параметров у системы (1.1) существует положение равновесия $E_0 = (S^0, 0, \dots, 0)$, соответствующее полному вымиранию всех видов микроорганизмов. В работе [2] было показано, что при выполнении условий

$$p_i(S^0) \leq D \left(\frac{D + \alpha_i}{\alpha_i} \right)^{r_i + 1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

первая компонента $S(t)$ решения начальной задачи (1.1), (1.3) сходится к S^0 при $t \rightarrow +\infty$, а все остальные компоненты $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, стремятся к нулю, т. е.

$$(S(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) \rightarrow (S^0, 0, \dots, 0) \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Оценки скорости сходимости решений к положению равновесия $(S^0, 0, \dots, 0)$ были установлены в работе [1] в случае, когда в формуле (1.5) все неравенства — строгие. При получении оценок в [1] использовались функционалы Ляпунова—Красовского.

При определенных значениях параметров системы (1.1) также имеются положения равновесия $E_i = (S_i^*, 0, \dots, 0, x_i^*, 0, \dots, 0)$, соответствующие выживанию только i -го вида и вымиранию всех остальных. Сформулируем условия, при которых эти решения существуют и имеют неотрицательные компоненты. Вначале введем обозначения [2]. Пусть $\lambda_i \in (0, +\infty]$, $i = 1, \dots, n$, — такие величины, что выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} p_i(S) &< D \left(\frac{D + \alpha_i}{\alpha_i} \right)^{r_i + 1} && \text{при} \quad S < \lambda_i, \\ p_i(S) &> D \left(\frac{D + \alpha_i}{\alpha_i} \right)^{r_i + 1} && \text{при} \quad S > \lambda_i. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу строгой монотонности функций $p_i(S)$ величины λ_i всегда существуют, при этом если $\lambda_i < +\infty$, то

$$p_i(\lambda_i) = D \left(\frac{D + \alpha_i}{\alpha_i} \right)^{r_i + 1}. \quad (1.6)$$

В этом случае положение равновесия E_i имеет вид

$$E_i = (S_i^*, 0, \dots, 0, x_i^*, 0, \dots, 0) = \left(\lambda_i, 0, \dots, 0, \left(\frac{\alpha_i}{D + \alpha_i} \right)^{r_i + 1} (S^0 - \lambda_i), 0, \dots, 0 \right).$$

При условии $\lambda_i < S^0$ компонента решения $x_i(t) = x_i^*$ является положительной.

В работе [2] исследовался вопрос о сходимости решений системы (1.1) к положению равновесия E_i , однако вопрос об оценках скорости сходимости пока не рассматривался.

В настоящей работе мы укажем условия на функции и параметры системы, а также на начальные данные, при которых решение начальной задачи (1.1), (1.3) сходится к положению равновесия E_i , при этом мы получим оценки решений, характеризующие скорость сходимости. Так же, как и в работе [1], при получении оценок мы будем использовать функционалы Ляпунова—Красовского.

Отметим, что функционалы Ляпунова–Красовского широко используются для получения оценок решений различных классов систем с запаздыванием (см., например, работы [5–10] о системах с сосредоточенным запаздыванием, работы [11, 12] о системах с распределенным запаздыванием, обзор [13], посвященный применению второго метода Ляпунова для систем с запаздывающим аргументом, и имеющуюся там библиографию). Некоторые результаты об оценках решений биологических моделей, описываемых уравнениями с запаздыванием, содержатся, например, в работах [1, 14–17].

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ E_i

В этом разделе мы укажем достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия E_i , которые получаются с помощью теоремы об устойчивости по первому приближению. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$, т. е. положение равновесия имеет вид

$$E_1 = (S_1^*, x_1^*, 0, \dots, 0) = \left(\lambda_1, \left(\frac{\alpha_1}{D + \alpha_1} \right)^{r_1+1} (S^0 - \lambda_1), 0, \dots, 0 \right).$$

Предположим, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, при котором $x_1^* > 0$, а также, что функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$.

Для начала сведем задачу об устойчивости положения равновесия E_1 к задаче об устойчивости нулевого решения. Сделаем замену переменных

$$S(t) = S_1^* + y_0(t), \quad x_1(t) = x_1^* + y_1(t), \quad x_i(t) = y_i(t), \quad i = 2, \dots, n.$$

Тогда начальная задача (1.1), (1.3) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + F(y(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t (B_i y(\theta) + G_i(y(\theta))) e^{-D(t-\theta)} K_i(t-\theta) d\theta, \tag{2.1}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t < 0, \quad y(+0) = \psi(0),$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_1^* \\ x_1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(t) - E_1,$$

$$A = \begin{pmatrix} -(D + x_1^* p_1'(S_1^*)) & -p_1(S_1^*) & -p_2(S_1^*) & \dots & -p_n(S_1^*) \\ 0 & -D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1^* p_1'(S_1^*) & p_1(S_1^*) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2(S_1^*) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n(S_1^*) \end{pmatrix},$$

$$F(y(t)) = - \begin{pmatrix} x_1^* f_0(y_0(t)) + \sum_{i=1}^n y_i(t) f_i(y_0(t)) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$G_1(y(\theta)) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^* f_0(y_0(\theta)) + y_1(\theta) f_1(y_0(\theta)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$G_2(y(\theta)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2(\theta) f_2(y_0(\theta)) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad G_n(y(\theta)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_n(\theta) f_n(y_0(\theta)) \end{pmatrix},$$

$$f_0(y_0) = p_1(S_1^* + y_0) - p_1(S_1^*) - p_1'(S_1^*) y_0, \tag{2.4}$$

$$f_i(y_0) = p_i(S_1^* + y_0) - p_i(S_1^*), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Рассмотрим систему линейного приближения

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t) + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t B_i y(\theta) e^{-D(t-\theta)} K_i(t-\theta) d\theta. \tag{2.6}$$

Укажем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения данной системы. Для этого выпишем характеристическое уравнение:

$$P(\mu) = \det \left(\mu I - A - \sum_{i=1}^n B_i \int_{-\infty}^t e^{-(D+\mu)(t-\theta)} K_i(t-\theta) d\theta \right) = 0.$$

Учитывая явный вид (1.2) функций $K_i(s)$, $s > 0$, вычислим значение интеграла:

$$\omega_i(\mu) = \int_{-\infty}^t e^{-(D+\mu)(t-\theta)} K_i(t-\theta) d\theta = \left(\frac{\alpha_i}{D + \alpha_i + \mu} \right)^{r_i+1}. \tag{2.7}$$

Тем самым, характеристическое уравнение будет иметь вид

$$P(\mu) = \det \left(\mu I - A - \sum_{i=1}^n \omega_i(\mu) B_i \right) = 0.$$

Используя явный вид матриц A , B_i , $i = 1, \dots, n$, получим

$$P(\mu) = (\mu + D) \left(\mu + D - \omega_1(\mu) p_1(S_1^*) + x_1^* p_1'(S_1^*) \right) \prod_{i=2}^n \left(\mu + D - \omega_i(\mu) p_i(S_1^*) \right) = 0.$$

Наконец, в силу формул (1.6) и (2.7) функцию $P(\mu)$ можно переписать в виде

$$P(\mu) = (\mu + D) \left(\mu + D - \frac{\omega_1(\mu)}{\omega_1(0)} D + x_1^* p_1'(\lambda_1) \right) \prod_{i=2}^n \left(\mu + D - \frac{\omega_i(\mu)}{\omega_i(0)} \frac{p_i(\lambda_i)}{p_i(\lambda_i)} D \right) = 0.$$

Утверждается, что при выполнении условий

$$x_1^* > 0, \quad p_1'(\lambda_1) > 0, \quad \lambda_1 < \lambda_i, \quad i = 2, \dots, n, \tag{2.8}$$

все корни характеристического уравнения $P(\mu) = 0$ содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu < 0\}$. Действительно, пусть число $\mu \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Re} \mu \geq 0$. В этом случае из определения (2.7) следует, что $|\omega_i(\mu)| \leq |\omega_i(0)|$, а в силу монотонности функций $p_i(S)$ имеем $p_i(\lambda_1) < p_i(\lambda_i)$, $i = 2, \dots, n$. Тогда

$$\left| \mu + D - \frac{\omega_1(\mu)}{\omega_1(0)} D + x_1^* p_1'(\lambda_1) \right| \geq |\mu + D + x_1^* p_1'(\lambda_1)| - \left| \frac{\omega_1(\mu)}{\omega_1(0)} D \right| \geq x_1^* p_1'(\lambda_1) > 0,$$

$$\left| \mu + D - \frac{\omega_i(\mu)}{\omega_i(0)} \frac{p_i(\lambda_1)}{p_i(\lambda_i)} D \right| \geq |\mu + D| - \left| \frac{\omega_i(\mu)}{\omega_i(0)} \frac{p_i(\lambda_1)}{p_i(\lambda_i)} D \right| > 0,$$

тем самым, число $\mu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, не может быть корнем характеристического уравнения.

Итак, при выполнении условий (2.8) нулевое решение линейной системы (2.6) асимптотически устойчиво, а следовательно, асимптотически устойчиво положение равновесия E_1 системы (1.1). Всюду далее будем предполагать, что условия (2.8) выполняются.

3. ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО

В этом параграфе мы рассмотрим линейную систему (2.6) в предположении, что выполнены условия (2.8), гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения. Мы построим функционал Ляпунова–Красовского, с помощью которого установим оценки решений линейной системы (2.6), характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности. В дальнейшем на основе построенного функционала будут получены условия на начальные данные и оценки решений исходной системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия E_1 .

Принимая во внимание результаты работ [1, 12], рассмотрим функционал Ляпунова–Красовского следующего вида:

$$V(t, y) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta, \tag{3.1}$$

где матрицы $H = H^* > 0$, $\Upsilon_i(\theta) = \Upsilon_i^*(\theta) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и величина $m > 0$ будут определены ниже.

Вычислим производную от функционала $V(t, y)$ вдоль решения системы (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y) &= \left\langle H \frac{d}{dt} y(t), y(t) \right\rangle + \left\langle Hy(t), \frac{d}{dt} y(t) \right\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \langle \Upsilon_i(\theta) y(t), y(t) \rangle d\theta - \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-m\theta} \langle \Upsilon_i(\theta) y(t-\theta), y(t-\theta) \rangle d\theta - \\ &- m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta. \end{aligned}$$

Поскольку $y(t)$ — решение (2.6), то производная переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y) &= \left\langle H \left(Ay(t) + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty B_i y(t-\xi) e^{-D\xi} K_i(\xi) d\xi \right), y(t) \right\rangle + \\ &+ \left\langle Hy(t), \left(Ay(t) + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty B_i y(t-\xi) e^{-D\xi} K_i(\xi) d\xi \right) \right\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \langle \Upsilon_i(\xi) y(t), y(t) \rangle d\xi - \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-m\xi} \langle \Upsilon_i(\xi) y(t-\xi), y(t-\xi) \rangle d\xi - \\ &- m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta. \end{aligned}$$

Положим

$$\Upsilon_i(\xi) = \delta_i e^{-D\xi} K_i(\xi) e^{m\xi/2} B_i^* B_i, \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y) &= \langle (HA + A^* H) y(t), y(t) \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-D\xi} K_i(\xi) \left(\delta_i e^{m\xi/2} \langle B_i^* B_i y(t), y(t) \rangle + \langle HB_i y(t - \xi), y(t) \rangle + \right. \\ &\left. + \langle B_i^* H y(t), y(t - \xi) \rangle - \delta_i e^{-m\xi/2} \langle B_i^* B_i y(t - \xi), y(t - \xi) \rangle \right) d\xi - \\ &- m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$H = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & 0 & \dots & 0 \\ h_{01} & h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{01} & h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \tilde{H}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Учитывая явный вид матриц $B_i, i = 1, \dots, n$, получим

$$B_i^* H = B_i^* \tilde{H}_i, \quad HB_i = \tilde{H}_i^* B_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} &\langle HB_i y(t - \xi), y(t) \rangle + \langle B_i^* H y(t), y(t - \xi) \rangle - \delta_i e^{-m\xi/2} \langle B_i^* B_i y(t - \xi), y(t - \xi) \rangle = \\ &= \langle \tilde{H}_i^* B_i y(t - \xi), y(t) \rangle + \langle B_i^* \tilde{H}_i y(t), y(t - \xi) \rangle - \delta_i e^{-m\xi/2} \langle B_i^* B_i y(t - \xi), y(t - \xi) \rangle \leq \\ &\leq \frac{e^{m\xi/2}}{\delta_i} \langle \tilde{H}_i^* \tilde{H}_i y(t), y(t) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y) &\leq \langle (HA + A^* H) y(t), y(t) \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-(D-m/2)\xi} K_i(\xi) \left\langle \left(\delta_i B_i^* B_i + \frac{1}{\delta_i} \tilde{H}_i^* \tilde{H}_i \right) y(t), y(t) \right\rangle d\xi - \\ &- m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta. \end{aligned}$$

В силу обозначения (2.7) данную оценку можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq - \langle Uy(t), y(t) \rangle - m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta, \tag{3.5}$$

где

$$U = -HA - A^*H - \sum_{i=1}^n \omega_i \left(-\frac{m}{2}\right) \left(\delta_i B_i^* B_i + \frac{1}{\delta_i} \tilde{H}_i^* \tilde{H}_i\right). \quad (3.6)$$

Наша цель — подобрать элементы матрицы H , величину $m > 0$ и числа $\delta_i > 0, i = 1, \dots, n$, так, чтобы было выполнено матричное неравенство $U > 0$. Имеем

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0n} \\ u_{01} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{02} & u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{0n} & u_{1n} & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$u_{00} = 2h_{00}(D + x_1^* p_1'(S_1^*)) - \omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \left(\delta_1 (x_1^* p_1'(S_1^*))^2 + \frac{h_{01}^2}{\delta_1}\right),$$

$$u_{01} = h_{00} p_1(S_1^*) + h_{01}(2D + x_1^* p_1'(S_1^*)) - \omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \left(\delta_1 x_1^* p_1'(S_1^*) p_1(S_1^*) + \frac{h_{01} h_{11}}{\delta_1}\right),$$

$$u_{11} = 2h_{01} p_1(S_1^*) + 2h_{11} D - \omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \left(\delta_1 p_1^2(S_1^*) + \frac{h_{11}^2}{\delta_1}\right),$$

$$u_{0i} = h_{00} p_i(S_1^*), \quad i = 2, \dots, n,$$

$$u_{1i} = h_{01} p_i(S_1^*), \quad i = 2, \dots, n,$$

$$u_{ii} = 2h_{ii} D - \omega_i \left(-\frac{m}{2}\right) \left(\delta_i p_i^2(S_1^*) + \frac{h_{ii}^2}{\delta_i}\right), \quad i = 2, \dots, n.$$

Выберем числа $h_{ii}, i = 1, \dots, n$, так, чтобы величины $u_{ii}, i = 1, \dots, n$, принимали максимальное значение:

$$h_{11} = \delta_1 D \left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^{-1}, \quad (3.7)$$

$$h_{ii} = \delta_i D \left(\omega_i \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^{-1}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

В этом случае

$$u_{11} = 2h_{01} p_1(S_1^*) - \delta_1 \left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^{-1} \left[\left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^2 p_1^2(S_1^*) - D^2\right],$$

$$u_{ii} = \delta_i \left(\omega_i \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^{-1} \left[D^2 - \left(\omega_i \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^2 p_i^2(S_1^*)\right], \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Числа h_{00}, h_{01} выберем так, чтобы выполнялись равенства $u_{01} = 0, u_{00} = u_{11}$, т. е.

$$h_{01} = \frac{\delta_1}{p_1(S_1^*)} \left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^{-1} \left[\sqrt{W} - \left[(D + \gamma_1)^2 + p_1^2(S_1^*)\right]\right], \quad (3.10)$$

$$h_{00} = \frac{\delta_1}{p_1^2(S_1^*)} (D + \gamma_1) \left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^{-1} \times \left[\left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^2 \frac{\gamma_1 p_1^2(S_1^*)}{(D + \gamma_1)} + \left[(D + \gamma_1)^2 + p_1^2(S_1^*)\right] - \sqrt{W}\right], \quad (3.11)$$

где

$$W = \left[(D + \gamma_1)^2 + p_1^2(S_1^*)\right]^2 + p_1^2(S_1^*) \left[\left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)\right)^2 (2D\gamma_1 + \gamma_1^2 + p_1^2(S_1^*)) - D^2\right],$$

$$\gamma_1 = x_1^* p_1'(S_1^*) > 0.$$

Тогда

$$u_{00} = u_{11} = \delta_1 \left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2} \right) \right)^{-1} \left\{ 2 \left[\sqrt{W} - \left[(D + \gamma_1)^2 + p_1^2(S_1^*) \right] \right] - \left[\left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2} \right) \right)^2 p_1^2(S_1^*) - D^2 \right] \right\}, \quad u_{01} = 0.$$

Величину $m > 0$ найдем из условий $u_{ii} > 0, i = 0, 1, \dots, n$. Условие $u_{00} = u_{11} > 0$ дает

$$\left(\omega_1 \left(-\frac{m}{2} \right) \right)^2 p_1^2(S_1^*) < D^2 + 2D\gamma_1. \quad (3.12)$$

Условия $u_{ii} > 0, i = 2, \dots, n$, дают

$$\left(\omega_i \left(-\frac{m}{2} \right) \right)^2 p_i^2(S_i^*) < D^2, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Заметим, что в силу обозначений (1.6), (2.7) при $m = 0$ условие (3.12) эквивалентно неравенству $\gamma_1 = x_1^* p_1'(\lambda_1) > 0$, а условия (3.13) — неравенствам $\lambda_1 < \lambda_i, i = 2, \dots, n$, т. е. при $m = 0$ неравенства (3.12), (3.13) совпадают с (2.8). Следовательно, в силу непрерывности функций $\omega_i(\mu), i = 1, \dots, n$, условия (3.12), (3.13) выполнены и при некотором $m > 0$.

Осталось подобрать числа $\delta_i > 0, i = 1, \dots, n$. Учитывая структуру матрицы U , для произвольного вектора $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \langle Uz, z \rangle &= u_{00}z_0^2 + u_{00}z_1^2 + \sum_{i=2}^n u_{ii}z_i^2 + \sum_{i=2}^n 2u_{0i}z_0z_i + \sum_{i=2}^n 2u_{1i}z_1z_i \\ &\geq \left(u_{00} - \sum_{i=2}^n \beta_{0i}u_{0i} \right) z_0^2 + \left(u_{00} - \sum_{i=2}^n \beta_{1i}u_{1i} \right) z_1^2 + \sum_{i=2}^n \left(u_{ii} - \frac{u_{0i}}{\beta_{0i}} - \frac{u_{1i}}{\beta_{1i}} \right) z_i^2, \end{aligned}$$

где $\beta_{0i} > 0, \beta_{1i} > 0, i = 2, \dots, n$. Положим

$$\beta_{0i} = \frac{u_{00}}{2(n-1)u_{0i}}, \quad \beta_{1i} = \frac{u_{00}}{2(n-1)u_{1i}}, \quad i = 2, \dots, n,$$

тогда

$$\langle Uz, z \rangle \geq \frac{u_{00}}{2} z_0^2 + \frac{u_{00}}{2} z_1^2 + \sum_{i=2}^n \left(u_{ii} - \frac{2(n-1)(u_{0i}^2 + u_{1i}^2)}{u_{00}} \right) z_i^2.$$

Учитывая явный вид (3.9) величин $u_{ii}, i = 2, \dots, n$, выберем числа $\delta_i, i = 2, \dots, n$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_i &= \left(\omega_i \left(-\frac{m}{2} \right) \right) \left[D^2 - \left(\omega_i \left(-\frac{m}{2} \right) \right)^2 p_i^2(S_i^*) \right]^{-1} \\ &\quad \times \frac{4(n-1)(u_{0i}^2 + u_{1i}^2)}{u_{00}}, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Величину δ_1 можно выбрать произвольно, например,

$$\delta_1 = 1. \quad (3.15)$$

Тем самым, функционал $V(t, y)$ полностью определен, при этом справедлива оценка

$$\langle Uz, z \rangle \geq \frac{u_{00}}{2} z_0^2 + \frac{u_{00}}{2} z_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{u_{ii}}{2} z_i^2,$$

откуда следует, что матрица U является положительно определенной.

Заметим, что при выполнении всех вышеперечисленных условий матрица H также положительно определена. Действительно, из формулы (3.6) вытекает, что $HA + A^*H \leq -U$, т. е. матрица H является решением матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* \geq U > 0.$$

Так как все собственные значения матрицы A содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, то $H = H^* > 0$.
Теперь найдем такую величину $\sigma > 0$, чтобы было выполнено неравенство

$$U \geq \sigma H. \tag{3.16}$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix} \frac{u_{00}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{u_{00}}{2} \end{pmatrix} \geq \sigma_1 \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix}, \quad \frac{u_{ii}}{2} \geq \sigma_i h_{ii}, \quad i = 2, \dots, n,$$

где

$$\sigma_1 = \frac{u_{00}}{4(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)} \left[(h_{00} + h_{11}) - \sqrt{(h_{00} + h_{11})^2 - 4(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)} \right],$$

$$\sigma_i = \frac{u_{ii}}{2h_{ii}}, \quad i = 2, \dots, n,$$

то положим

$$\sigma = \min \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \}, \tag{3.17}$$

откуда следует, что

$$\langle Uz, z \rangle \geq \frac{u_{00}}{2} z_0^2 + \frac{u_{00}}{2} z_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{u_{ii}}{2} z_i^2 \geq \sigma \langle Hz, z \rangle.$$

Тогда, учитывая неравенство (3.5), получим оценку на производную функционала $V(t, y)$:

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\sigma \langle Hy(t), y(t) \rangle - m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle \Upsilon_i(\theta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta.$$

Полагая

$$\varepsilon = \min \{ \sigma, m \},$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\varepsilon V(t, y),$$

откуда

$$V(t, y) \leq V(0, y) e^{-\varepsilon t}, \quad t > 0.$$

Отсюда следует оценка для решения $y(t)$ линейной системы (2.6):

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\|} V^{1/2}(0, y) e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0.$$

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В предыдущем разделе мы построили функционал Ляпунова–Красовского для линеаризованной системы (2.6) вида (3.1), указав значения матриц $H = H^* > 0$, $\Upsilon_i(\xi) = \Upsilon_i^*(\xi) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и числа $m > 0$, при которых матрица U из (3.6) будет положительно определенной. Это влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2.6). Обозначим через $u_{\min}^H > 0$ минимальное собственное значение положительно определенной матрицы $U_H = H^{-1/2} U H^{-1/2}$.

Определим матрицы H_i , $i = 1, \dots, n$:

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{01} & h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_i = \tilde{H}_i, \quad i = 2, \dots, n, \tag{4.1}$$

где $\tilde{H}_i$, $i = 2, \dots, n$, заданы в (3.4). Отметим, что

$$H = \sum_{i=1}^n H_i. \tag{4.2}$$

Для получения оценок решений начальной задачи (2.1) мы будем использовать следующий функционал Ляпунова–Красовского:

$$\widehat{V}(t, y) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle (\Upsilon_i(\theta) + Q_i(\theta))y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta, \tag{4.3}$$

где матрица H определена в (3.3), (3.7), (3.8), (3.10), (3.11), матрицы $\Upsilon_i(\xi)$ — в (3.2), число $m > 0$ — в (3.12), (3.13), числа $\delta_i > 0$ — в (3.14), (3.15),

$$Q_i(\xi) = \frac{u_{\min}^H}{4\omega_i(-\frac{m}{2})} e^{-D\xi} K_i(\xi) e^{m\xi/2} H_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.4}$$

Введем неубывающие функции $c_i(\kappa)$, $\kappa > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$c_0(\kappa) = \sup C_0(\kappa), \quad C_0(\kappa) = \{ \tau > 0 : |f_0(y_0)| < \kappa |y_0| \quad \forall y_0 \quad |y_0| < \tau \}, \tag{4.5}$$

$$c_i(\kappa) = \sup C_i(\kappa), \quad C_i(\kappa) = \{ \tau > 0 : |f_i(y_0)| < \kappa \quad \forall y_0 \quad |y_0| < \tau \}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.6}$$

где функции $f_i(y_0)$, $i = 0, 1, \dots, n$, определены в (2.4), (2.5). Отметим, что множество $C_0(\kappa)$ не пусто, поскольку в силу формулы Тейлора $f_0(y_0) = o(y_0)$. Множества $C_i(\kappa)$, $i = 1, \dots, n$, также непустые в силу непрерывности в нуле функций $f_i(y_0)$, $i = 1, \dots, n$.

Введем обозначения:

$$v(H) = \|H\| \|H^{-1}\|, \tag{4.7}$$

$$\kappa_0 = \min \left\{ \frac{u_{\min}^H}{8x_1^* \sqrt{(n+1)v(H)}}, \frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{2}x_1^* \omega_1(-\frac{m}{2}) \sqrt{v(H)}} \right\}, \tag{4.8}$$

$$\kappa_1 = \min \left\{ \frac{u_{\min}^H}{8\sqrt{(n+1)v(H)}}, \frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{2}\omega_1(-\frac{m}{2}) \sqrt{v(H)}} \right\}, \tag{4.9}$$

$$\kappa_i = \min \left\{ \frac{u_{\min}^H}{8\sqrt{(n+1)v(H)}}, \frac{u_{\min}^H}{4\omega_i(-\frac{m}{2}) \sqrt{v(H)}} \right\}, \quad i = 2, \dots, n, \tag{4.10}$$

$$\rho = \min \{ c_0(\kappa_0), c_1(\kappa_1), c_2(\kappa_2), \dots, c_n(\kappa_n) \}, \tag{4.11}$$

$$\widehat{V}(0, \psi) = \langle H\psi(0), \psi(0) \rangle + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{-\theta}^0 e^{m\eta} \langle (\Upsilon_i(\theta) + Q_i(\theta))\psi(\eta), \psi(\eta) \rangle d\eta d\theta. \tag{4.12}$$

Теорема. Пусть выполнены условия (2.8), тогда для решения начальной задачи (2.1) с начальными данными из множества

$$\mathcal{E} = \left\{ \psi(t) \in C((-\infty, 0]) : \sup_{t \leq 0} |\psi_0(t)| < \rho, \quad \sqrt{\|H^{-1}\|} \widehat{V}^{1/2}(0, \psi) < \rho \right\}, \tag{4.13}$$

где ρ и $\widehat{V}(0, \psi)$ определены в (4.11) и (4.12) соответственно, справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\|} \widehat{V}^{1/2}(0, \psi) e^{-\varepsilon_0 t/2}, \tag{4.14}$$

где

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{u_{\min}^H}{4}, m \right\}. \tag{4.15}$$

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько частей.

1) Продифференцируем функционал Ляпунова–Красовского (4.3) вдоль решения начальной задачи (2.1), проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям в предыдущем разделе, и получим аналог (3.5):

$$\frac{d}{dt} \widehat{V}(t, y) \leq - \left\langle \left(U - \sum_{i=1}^n \int_0^\infty Q_i(\theta) d\theta \right) y(t), y(t) \right\rangle +$$

$$\begin{aligned}
 &+2 \left\langle Hy(t), \left(F(y(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t G_i(y(\theta)) e^{-D(t-\theta)} K_i(t-\theta) d\theta \right) \right\rangle - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t e^{-m(t-\theta)} \langle Q_i(t-\theta)y(\theta), y(\theta) \rangle d\theta - \\
 &\quad - m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle (\Upsilon_i(\theta) + Q_i(\theta))y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta.
 \end{aligned}$$

Используя (2.7), (4.2) и (4.4), несложно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\infty Q_i(\theta) d\theta = \frac{u_{\min}^H}{4} \sum_{i=1}^n H_i = \frac{u_{\min}^H}{4} H.$$

Следовательно, в силу обозначения $u_{\min}^H$ и формулы (4.2) имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \widehat{V}(t, y) &\leq -\frac{u_{\min}^H}{4} \langle Hy(t), y(t) \rangle + \sum_{i=0}^n I_i(t) - \\
 &- m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle (\Upsilon_i(\theta) + Q_i(\theta))y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

где

$$I_0(t) = 2 \langle Hy(t), F(y(t)) \rangle - \frac{1}{4} u_{\min}^H \langle Hy(t), y(t) \rangle, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 I_i(t) &= 2 \left\langle Hy(t), \int_{-\infty}^t G_i(y(\theta)) e^{-D(t-\theta)} K_i(t-\theta) d\theta \right\rangle - \frac{1}{4} u_{\min}^H \langle Hy(t), y(t) \rangle - \\
 &- \int_{-\infty}^t e^{-m(t-\theta)} \langle Q_i(t-\theta)y(\theta), y(\theta) \rangle d\theta, \quad i = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$H_i, i = 1, \dots, n$, определены в (4.1).

2) Покажем, что существует такое число $t^* > 0$, что при всех $t \in [0, t^*)$ выполнены неравенства $I_i(t) \leq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

2а) Оценим $I_0(t)$ из (4.17):

$$I_0(t) \leq 2\sqrt{\|H\|} \|F(y(t))\| \langle Hy(t), y(t) \rangle^{1/2} - \frac{1}{4} u_{\min}^H \langle Hy(t), y(t) \rangle.$$

В силу определения $F(y(t))$ в (2.2) и неравенства $\sum_{i=0}^n |y_i| \leq \sqrt{n+1} \left(\sum_{i=0}^n y_i^2 \right)^{1/2}$ имеем

$$\begin{aligned}
 I_0(t) &\leq \langle Hy(t), y(t) \rangle^{1/2} \left(\left[2\sqrt{\|H\|} x_1^* |f_0(y_0(t))| - \frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{(n+1)\|H^{-1}\|}} |y_0(t)| \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^n |y_i(t)| \left[2\sqrt{\|H\|} |f_i(y_0(t))| - \frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{(n+1)\|H^{-1}\|}} \right] \right).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Покажем, что выражения в квадратных скобках отрицательны при $t = 0$. Тогда в силу непрерывности функций $f_i(y_0), i = 0, 1, \dots, n$, и компоненты решения $y_0(t)$ будет существовать такое число $t_0 > 0$, что данные выражения будут отрицательными при всех $t \in [0, t_0)$. В этом случае будет выполнено $I_0(t) \leq 0, t \in [0, t_0)$.

Отрицательность выражения в первой квадратной скобке в (4.19) при $t = 0$ эквивалентна следующему неравенству:

$$|f_0(\psi_0(0))| < \frac{u_{\min}^H}{8x_1^* \sqrt{(n+1)v(H)}} |\psi_0(0)|, \tag{4.20}$$

где $v(H)$ определено в (4.7). Из первого неравенства в определении множества $\mathcal{E}$ (см. (4.13)) и из (4.11) вытекает, что $|\psi_0(0)| < c_0(\kappa_0)$. Следовательно, в силу (4.5) имеем

$$|f_0(\psi_0(0))| < \kappa_0 |\psi_0(0)|.$$

Учитывая определение κ_0 в (4.8), получаем выполнение неравенства (4.20).

Отрицательность i -го выражения под суммой в (4.19), $i = 1, \dots, n$, при $t = 0$ эквивалентна неравенству

$$|f_i(\psi_0(0))| < \frac{u_{\min}^H}{8\sqrt{(n+1)v(H)}}.$$

Это неравенство выполняется в силу (4.13), (4.11), (4.9), (4.10) и (4.6).

2б) В данной части доказательства оценим $I_1(t)$ из (4.18). В силу (4.1) и того, что вектор-функция $G_1(y(\theta))$, определенная в (2.3), имеет только одну ненулевую компоненту, верно равенство

$$\langle Hz, G_1(y(\theta)) \rangle = \langle H_1 z, G_1(y(\theta)) \rangle, \quad z \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4.21}$$

Выпишем $I_1(t)$, учитывая (4.4) и (4.21):

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{-\infty}^t 2 \langle H_1 y(t), G_1(y(\theta)) \rangle e^{-D(t-\theta)} K_1(t-\theta) d\theta - \frac{1}{4} u_{\min}^H \langle H_1 y(t), y(t) \rangle - \\ &\quad - \frac{u_{\min}^H}{4\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)} \int_{-\infty}^t \langle H_1 y(\theta), y(\theta) \rangle e^{-D(t-\theta)} K_1(t-\theta) e^{-m(t-\theta)/2} d\theta. \end{aligned}$$

Так как H_1 является эрмитовой неотрицательно определенной матрицей, то существует $(H_1)^{1/2}$. Тогда, используя неравенство

$$\begin{aligned} 2 \langle H_1 y(t), G_1(y(\theta)) \rangle &= 2 \left\langle (H_1)^{1/2} y(t), (H_1)^{1/2} G_1(y(\theta)) \right\rangle \leq \\ &\leq \frac{u_{\min}^H e^{m(t-\theta)/2}}{4\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)} \|(H_1)^{1/2} y(t)\|^2 + \frac{4\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) e^{-m(t-\theta)/2}}{u_{\min}^H} \|(H_1)^{1/2} G_1(y(\theta))\|^2 \end{aligned}$$

и (2.7), получим

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \int_{-\infty}^t \left(\frac{4\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)}{u_{\min}^H} \langle H_1 G_1(y(\theta)), G_1(y(\theta)) \rangle - \frac{u_{\min}^H}{4\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right)} \langle H_1 y(\theta), y(\theta) \rangle \right) \times \\ &\quad \times e^{-D(t-\theta)} K_1(t-\theta) e^{-m(t-\theta)/2} d\theta. \tag{4.22} \end{aligned}$$

В силу определений матриц H и H_1 имеем

$$\langle H_1 y(\theta), y(\theta) \rangle \geq \frac{1}{\|H^{-1}\|} (y_0^2(\theta) + y_1^2(\theta)) \geq \frac{1}{2\|H^{-1}\|} (|y_0(\theta)| + |y_1(\theta)|)^2.$$

Используя данное неравенство и формулу (4.21), из (4.22) получим оценку

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \frac{4\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \|H\|}{u_{\min}^H} \int_{-\infty}^t \left[\|G_1(y(\theta))\|^2 - \left(\frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{2}\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \sqrt{v(H)}} \right)^2 (|y_0(\theta)| + |y_1(\theta)|)^2 \right] \times \\ &\quad \times e^{-D(t-\theta)} K_1(t-\theta) e^{-m(t-\theta)/2} d\theta. \tag{4.23} \end{aligned}$$

Если мы покажем, что выражение в квадратных скобках отрицательно при всех $\theta \leq 0$, то в силу непрерывности будет существовать такое число $t_1 > 0$, что данное выражение будет отрицательным при всех $\theta < t_1$,

следовательно, $I_1(t) \leq 0$ при $t \in [0, t_1)$. Отрицательность выражения в квадратных скобках при $\theta \leq 0$ в (4.23) эквивалентна неравенству

$$\|G_1(\psi(\theta))\| < \frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{2}\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \sqrt{v(H)}} (|\psi_0(\theta)| + |\psi_1(\theta)|).$$

В силу (2.3) справедливость данного неравенства вытекает из оценки

$$x_1^* |f_0(\psi_0(\theta))| + |\psi_1(\theta)| |f_1(\psi_0(\theta))| < \frac{u_{\min}^H}{4\sqrt{2}\omega_1 \left(-\frac{m}{2}\right) \sqrt{v(H)}} (|\psi_0(\theta)| + |\psi_1(\theta)|). \quad (4.24)$$

Проведя рассуждения, подобные рассуждениям после (4.20), и используя первое неравенство в (4.13), а также (4.11), (4.8), (4.9), (4.5), (4.6), несложно показать выполнение неравенства (4.24).

2в) Оценивая $I_i(t)$ из (4.18), $i = 2, \dots, n$, так же, как $I_1(t)$ в пункте 2б), мы получим существование положительных t_i , таких, что $I_i(t) \leq 0$ при всех $t \in [0, t_i)$.

3) Положим $t^* = \min\{t_0, t_1, \dots, t_n\} > 0$, тогда

$$\sum_{i=0}^n I_i(t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*).$$

Следовательно, при $t \in (0, t^*)$ из (4.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \widehat{V}(t, y) &\leq -\frac{u_{\min}^H}{4} \langle Hy(t), y(t) \rangle - \\ &- m \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t e^{-m(t-\eta)} \langle (\Upsilon_i(\theta) + Q_i(\theta))y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta d\theta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Используя (4.3) и (4.15), получим

$$\frac{d}{dt} \widehat{V}(t, y) + \varepsilon_0 \widehat{V}(t, y) \leq 0.$$

Из данного неравенства вытекает справедливость оценки (4.14) при $t \in (0, t^*)$.

4) Покажем, что данная оценка выполнена при всех $t > 0$. Докажем от противного: пусть $t^* > 0$ — это такое максимальное конечное число, что оценка (4.14) справедлива при $t \in (0, t^*]$. Следовательно, из (4.14) и второго неравенства в определении $\mathcal{E}$ из (4.13) при $t \in (0, t^*]$ имеем

$$|y_0(t)| \leq \|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\|} \widehat{V}^{1/2}(0, \psi) < \rho.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям в пункте 2), получим существование такого числа $t^{**} > t^* > 0$, что $I_i(t) \leq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, при $t \in [t^*, t^* + t^{**})$, где $I_i(t)$ определены в (4.17) и (4.18). Тогда из (4.16) вытекает (4.25) при $t \in [t^*, t^* + t^{**})$, следовательно, оценка (4.14) справедлива при $t \in (0, t^* + t^{**})$, откуда получаем противоречие. Это значит, что оценка (4.14) выполнена при всех $t > 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Если в формулировке теоремы величину $u_{\min}^H > 0$ заменить на $\sigma > 0$ из (3.17), то результат останется справедливым, поскольку в силу (3.16) выполнено неравенство $u_{\min}^H \geq \sigma$.

Авторы выражают благодарность Г. В. Демиденко и И. И. Матвеевой за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скворцова М.А., Бискак Т. (Искаков Т.К.) Оценки решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов // Сиб. журн. индустриал. матем. 2022. Т. 25. № 4. С. 193–205.
2. Wolkowitz G.S.K., Xia H., Wu J. Global dynamics of a chemostat competition model with distributed delay // J. Math. Biology. 1999. V. 38. P. 285–316.
3. Wolkowitz G.S.K., Xia H. Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57. № 4. P. 1019–1043.

4. *MacDonald N.* Time delays in chemostat models // in: *Microbial Population Dynamics*, M.J. Bazin, ed., CRC Press, Florida. 1982. P. 33–53.
5. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Вестник НГУ. Сер.: матем., мех., информатика*. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.
6. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сиб. матем. журн.* 2007. Т. 48. № 5. С. 1025–1040.
7. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Сиб. матем. журн.* 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.
8. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // *Сиб. матем. журн.* 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352.
9. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сиб. матем. журн.* 2019. Т. 60. № 5. С. 1063–1079.
10. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 4. С. 612–620.
11. *Ыскак Т. (Искаков Т.К.)* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2020. Т. 17. С. 2204–2215.
12. *Ыскак Т. (Искаков Т.К.)* Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределенным запаздыванием // *Челябинский физ.-матем. журн.* 2023. Т. 8. № 4. С. 542–552.
13. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // *Functional Differential Equations and Applications* (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Ser.: Springer Proceed. in Math. Statist. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.
14. *Skvortsova M.A.* Asymptotic properties of solutions to a system describing the spread of avian influenza // *Сиб. электрон. матем. известия*. 2016. Т. 13. С. 782–798.
15. *Скворцова М.А.* Оценки решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*. 2020. Т. 188. С. 84–105.
16. *Скворцова М.А., Ыскак Т. (Искаков Т.К.)* Асимптотическое поведение решений в одной модели «хищник-жертва» с запаздыванием // *Сиб. матем. журн.* 2021. Т. 62. № 2. С. 402–416.
17. *Скворцова М.А.* Оценки решений для одной биологической модели // *Матем. труды*. 2022. Т. 25. № 1. С. 152–176.

ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF A BIOLOGICAL MODEL WITH INFINITE DISTRIBUTED DELAY

T. K. Iskakov^{a,b,*}, M. A. Skvortsova^{a,b,**}

^a Novosibirsk State University, Pirogov St., 1, Novosibirsk, 630090 Russia

^b Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Acad. Koptyug Ave., 4,
Novosibirsk, 630090 Russia

*e-mail: istima92@mail.ru

**e-mail: sm-18-nsu@yandex.ru

Received 02 April, 2024

Revised 02 April, 2024

Accepted 02 May, 2024

Abstract. A model of competition between several microorganism species described by a system of nonlinear differential equations with infinite distributed delay is considered. The case of asymptotic stability of the equilibrium point corresponding to the survival of only one species and the extinction of all others is studied. The conditions for the initial numbers of species and the initial concentration of the nutrient at which the system reaches an equilibrium state are specified, and estimates of the stabilization rate are established. The results are obtained using the Lyapunov–Krasovskii functional.

Keywords: model of species competition, chemostat, delay differential equations, infinite distributed delay, equilibrium point, asymptotic stability, estimates for solutions, attraction domain, Lyapunov–Krasovskii functional.