

СФЕРИЧЕСКИЕ СПЛАЙН-РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹⁾

© 2024 г. В. Л. Васкевич^{1,2,*}¹630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия²630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия

*e-mail: v.vaskevich@ngsu.ru

Поступила в редакцию 05.03.2024 г.

Переработанный вариант 05.03.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

На единичной сфере трехмерного пространства рассматривается неоднородное бигармоническое уравнение. Принадлежащее сферическому пространству Соболева решение этого уравнения аппроксимируется последовательностью решений этого же уравнения, но со специальными правыми частями, представляющими собой линейные комбинации сдвигов дельта-функции Дирака. Доказано, что при заданных на сфере узлах, определяющих сдвиги, специальные решения уравнения — сферические бигармонические сплайны — существуют, а соответствующие каждому из них веса являются решениями сопутствующей невырожденной системы линейных алгебраических уравнений. Установлена связь качества аппроксимации решения дифференциальной задачи сферическими бигармоническими сплайнами с задачей о скорости сходимости оптимальных весовых сферических кубатурных формул. Библ. 10.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, сферические пространства Соболева, экстремальные функции, сплайны.

DOI: 10.31857/S0044466924080107, EDN: YAMREM

1. ВВЕДЕНИЕ

В трехмерном пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) сферические координаты задаются равенствами

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta, \\ x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Угловые переменные θ и φ здесь изменяются в промежутках $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$ соответственно. Пусть на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^3$ определена непрерывная функция $p(\theta, \varphi)$, подчиненная следующему условию ортогональности:

$$\int p(\theta, \varphi) dS = 0. \quad (1)$$

В сферических координатах оператор Лапласа Δ , с помощью которого задается бигармоническое уравнение, представляется в виде суммы радиальной и угловой части. Угловая его часть имеет при этом вид

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Далее эту угловую часть условимся обозначать символом Δ_S . Для любой функции $u(\theta, \varphi)$ из $C^{(4)}(S)$ определено дифференциальное выражение $\Delta_S^2 u(\theta, \varphi)$, задающее на сфере S непрерывную функцию.

Неоднородное сферическое бигармоническое уравнение [1] записывается как следующее поточечное равенство:

$$\Delta_S^2 u(\theta, \varphi) = p(\theta, \varphi). \quad (2)$$

¹⁾Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Дифференциальный оператор Δ_S^2 является самосопряженным в том смысле, что для любых двух функций f и g из класса $C^{(4)}(S)$ справедливо интегральное соотношение

$$\int (\Delta_S^2 f) g(\theta, \varphi) dS = \int f(\theta, \varphi) (\Delta_S^2 g) dS.$$

Взяв здесь в качестве f решение $u(\theta, \varphi)$ уравнения (2), а в качестве g тождественно единичную функцию, заключаем, что условие (1) необходимо для разрешимости сферического бигармонического уравнения (2).

В исследовании дифференциальных уравнений на сфере S важную роль играют сферические гармоники различных порядков.

Напомним, что функцию $Y = Y(\theta, \varphi)$ называют сферической гармоникой порядка k , если эта функция получается сужением на единичную сферу S некоторого гармонического и однородного по переменным (x, y, z) полинома степени k , [2]. При этом выполняется следующее дифференциальное уравнение сферических гармоник:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + k(k+1)Y = 0.$$

Это означает, что любая сферическая гармоника порядка k представляет собой собственную функцию оператора $-\Delta_S$ с соответствующим собственным числом $\lambda_k = k(k+1)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Вместе с пространством $C^4(S)$ функций, имеющих на сфере S непрерывные производные до четвертого порядка включительно, будем рассматривать также сферические пространства Соболева $H^2 = H^2(S)$.

Пространство H^2 на единичной сфере S получается как пополнение по некоторой норме множества сферических полиномов. По определению, сферический полином $f = f(\theta, \varphi)$ — это линейная комбинация сферических гармоник различных порядков:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{k,l} Y_{k,l}(\theta, \varphi), \quad a_{k,l} = a_{k,l}(f). \quad (3)$$

В этом разложении лишь конечное число коэффициентов $a_{k,l}$ не равны нулю, а сферические гармоники $Y_{k,l}(\theta, \varphi)$ при $k \geq 1$ и $l = -k, \dots, 0, \dots, k$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Y_{k,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2k+1}{2\pi}} P_k(\cos \theta); \\ Y_{k,l}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2k+1}{2\pi}} P_k^l(\cos \theta) \cos l\varphi \quad \text{при } l = 1, \dots, k; \\ Y_{k,l}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2k+1}{2\pi}} P_k^{|l|}(\cos \theta) \sin |l|\varphi \quad \text{при } l = -k, -k+1, \dots, -1. \end{aligned}$$

Здесь $P_k(t)$ обозначает полином Лежандра степени k , а через $P_k^l(t)$, где $l = 1, 2, \dots, k$, обозначена присоединенная функция Лежандра степени k .

Сферическая гармоника $Y_{0,0}(\theta, \varphi)$ нулевого порядка тождественно постоянна и равна $1/\sqrt{4\pi}$.

Множество $\{Y_{k,l}(\theta, \varphi) \mid l = -k, -k+1, \dots, 0, \dots, k-1, k\}$ представляет собой ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник порядка k :

$$\int Y_{k,l}(\theta, \varphi) Y_{k,p}(\theta, \varphi) dS = \delta_l^p.$$

Любой сферический полином f имеет конечную норму, определяемую соотношением

$$\|f \mid H^2(S)\| = \left\{ \left| \frac{1}{4\pi} \int f(\theta, \varphi) dS \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2(k+1)^2 \sum_{l=-k}^k |a_{k,l}(f)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Пополнение по этой норме множества всех сферических полиномов представляет собой линейное функциональное пространство, называемое далее *сферическим пространством* Соболева и обозначаемое через $H^2 = H^2(S)$.

Отметим, что норма (4) тождественно единичной функции из пространства H^2 равна единице.

Любая функция f из пространства $H^2(S)$ раскладывается в ряд (3) по базисным сферическим гармоникам, сходящийся по норме (4). Коэффициенты $a_{k,l} = a_{k,l}(f)$ в разложении (3) представимы в виде следующих поверхностных интегралов:

$$a_{0,0}(f) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int f(\theta, \varphi) dS; \quad a_{k,l}(f) = \int f(\theta, \varphi) Y_{k,l}(\theta, \varphi) dS, \quad k \geq 1.$$

Заметим, что $H^2(S)$ — это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_2 = \frac{1}{4\pi} a_{0,0}(f) a_{0,0}(g) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (k+1)^2 \sum_{l=-k}^k a_{k,l}(f) a_{k,l}(g).$$

Объединение сферических гармоник $Y_{k,l}(\theta, \varphi)$ по всем $k = 0, 1, \dots$ и $l = -k, -k+1, \dots, k-1, k$ задает в гильбертовом пространстве H^2 ортогональный базис.

Классы функций, близкие к сферическим пространствам Соболева, рассматривались ранее во многих работах, например, в [3,4].

Разрешимость неоднородного сферического полигармонического уравнения в пространстве H^2 подробно исследована в статье [1], где было доказано, в частности, следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого функционала $l = l(\theta, \varphi)$ из пространства $C^*(S)$, удовлетворяющего условию $(l, 1) = 0$, задача

$$\Delta_S^2 u = l(\theta, \varphi), \quad \int u(\theta, \varphi) dS = 0, \quad (5)$$

имеет решение $u(\theta, \varphi)$, принадлежащее пространству $H^2(S)$. Других решений в пространстве $H^2(S)$ у задачи (5) нет. Это единственное в $H^2(S)$ решение задачи (5) принадлежит также пространству $C^{(1)}(S)$.

Принадлежность решения задачи пространству $H^2(S)$ автоматически влечет за собой непрерывность этого решения на сфере S . Более того, как известно [5,6], каждая функция $f(\theta, \varphi)$ из пространства $H^2(S)$, а значит, и искомое решение задачи, удовлетворяет оценке

$$\sup_{(\theta, \varphi)} |f(\theta, \varphi)| \leq A_2 \|f\|_{H^2(S)}. \quad (6)$$

Здесь A_2 — это константа вложения, определяемая соотношением

$$A_2 = \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \right\}^{1/2}.$$

Постоянная A_2 представляет собой норму оператора вложения сферического пространства Соболева $H^2(S)$ в пространство $C(S)$ непрерывных на единичной сфере функций.

Известно также [2], что в $H^2(S)$ существует функция вложения, для которой в (6) достигается точное равенство. Функцией вложения $G(\theta, \varphi)$ является, например, сумма следующего абсолютно сходящегося ряда:

$$G(\theta, \varphi) = 1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} P_k(\cos \theta). \quad (7)$$

Здесь $0 \leq \theta \leq \pi$, а полином Лежандра $P_k(t)$ степени k удовлетворяет равенствам

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |P_k(t)| = P_k(+1) = 1.$$

Учитывая это, заключаем, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно по θ , где $0 \leq \theta \leq \pi$.

Функция вложения пространства H^2 в пространство $C(S)$ неединственна: для произвольного $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ любая функция вида $G(\theta - \theta_0, \varphi)$ также удовлетворяет всем требуемым условиям.

2. СФЕРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ И СПЛАЙН-РЕШЕНИЯ

Вместе с неоднородным сферическим бигармоническим уравнением (2) будем рассматривать уравнения с более общей нежели просто непрерывная функция правой частью. Точнее, будем иметь дело с линейными дифференциальными уравнениями вида

$$\Delta_S^2 u = l(\theta, \varphi), \quad (8)$$

где правая часть $l = l(\theta, \varphi)$ представляет собой линейный и ограниченный на пространстве $C(S)$ функционал, значение которого на тождественно постоянной функции равно нулю:

$$(l(\theta, \varphi), 1) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, правая часть l неоднородного уравнения (8) принадлежит пространству $C^*(S)$, сопряженному к $C(S)$.

Из-за принадлежности линейного функционала $l(\theta, \varphi)$ пространству $C^*(S)$ и в силу оценки (6) этот же функционал $l(\theta, \varphi)$ ограничен и на пространстве $H^2(S)$. При этом справедливо неравенство

$$\|l \mid H^{2*}(S)\| \leq A_2 \|l \mid C^*(S)\|.$$

Принадлежность функционала $l(\theta, \varphi)$ сопряженному пространству $H^{2*}(S)$ означает сходимость к нему частичных сумм ряда по сферическим гармоникам

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (l, Y_{k,l}) Y_{k,l}(\theta, \varphi)$$

по норме

$$\|l \mid H^{2*}(S)\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \sum_{l=-k}^k |(l(\theta, \varphi), Y_{k,l}(\theta, \varphi))|^2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Решение $u(\theta, \varphi)$ уравнения (8), принадлежащее классу H^2 , представимо при этом в следующем виде:

$$u(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \sum_{l=-k}^k (l, Y_{k,l}) Y_{k,l}(\theta, \varphi).$$

В качестве важного примера неоднородного сферического бигармонического уравнения рассмотрим уравнение

$$\Delta_S^2 u = l(\mathbf{x} \mid \Theta^{(0)}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad |\Theta^{(0)}| = 1,$$

со специальной правой частью $l(\mathbf{x} \mid \Theta^{(0)})$, определив действие этого линейного функционала следующим образом.

Для вектора $\mathbf{x} = (x, y, z)$ из пространства $\mathbb{R}^3$ и лежащей на сфере S точки $\Theta^{(0)}$ полагаем, что линейный функционал $l(\mathbf{x} \mid \Theta^{(0)})$, действует на пробную функцию $f(\mathbf{x})$ по формуле

$$(l(\mathbf{x} \mid \Theta^{(0)}), f(\mathbf{x})) = f(\Theta^{(0)}) - \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta') dS_{\Theta'}. \quad (10)$$

Таким образом, действие $l(\mathbf{x} \mid \Theta^{(0)})$ на непрерывную функцию $f(x, y, z)$ представляет собой разность между значением функции $f(x, y, z)$ в точке $\Theta^{(0)}$ сферы и ее же средним значением по сфере S . В частности, на тождественно постоянной функции функционал $l(\mathbf{x} \mid \Theta^{(0)})$ обращается в нуль, а его носитель сосредоточен на сфере S .

Полагая $\Theta = \frac{1}{r}\mathbf{x}$, где $r = |\mathbf{x}|$, получаем следующее разложение функционала $l(\Theta \mid \Theta^{(0)})$ в ряд по сферическим гармоникам:

$$l(\Theta \mid \Theta^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^k Y_{k,l}(\Theta^{(0)}) Y_{k,l}(\Theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} P_k(\cos \omega^{(0)}). \quad (11)$$

Последнее равенство здесь справедливо по теореме сложения для сферических гармоник [8]. В равенстве (11) $\cos \omega^{(0)}$ — это скалярное произведение векторов Θ и $\Theta^{(0)}$, то есть $\omega^{(0)}$ представляет собой угол между векторами Θ и $\Theta^{(0)}$.

Ряд (11) сходится по норме пространства $H^{2*}(S)$ и, следовательно, функционал $l(\Theta | \Theta^{(0)})$ принадлежит пространству $H^{2*}(S)$.

Принадлежащее классу $H^2(S)$ решение неоднородного сферического бигармонического уравнения с функционалом $l(\Theta | \Theta^{(0)})$ в правой части представимо как следующий абсолютно сходящийся ряд:

$$\begin{aligned} G(\Theta \cdot \Theta^{(0)}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \sum_{l=-k}^k Y_{k,l}(\Theta^{(0)}) Y_{k,l}(\Theta) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi k^2(k+1)^2} P_k(\Theta \cdot \Theta^{(0)}). \end{aligned}$$

Сумма $G(\Theta \cdot \Theta^{(0)})$ этого ряда известна как функция Грина сферического бигармонического оператора Δ_S^2 . По переменной Θ она принадлежит пространству $H^2(S)$ и при этом ортогональна на S тождественно постоянной функции. Согласно теореме 1 по переменной Θ функция $G(\Theta \cdot \Theta^{(0)})$ непрерывна на S и более того принадлежит классу $C^{(1)}(S)$.

Еще один важный класс неоднородных сферических бигармонических уравнений образуют уравнения вида

$$\Delta_S^2 u = \sum_{j=1}^N c_j \delta(\Theta - \Theta^{(j)}), \quad |\Theta| = |\Theta^{(j)}| = 1. \quad (12)$$

Правая часть в (12) представляет собой линейную комбинацию сдвигов дельта-функции Дирака на заданные и принадлежащие сфере S векторы $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$. Необходимым условием существования у уравнения (12) решения из пространства $H^2(S)$ является обращение в нуль функционала в его правой части на любой тождественно постоянной функции, то есть равенство

$$\sum_{j=1}^N c_j = 0. \quad (13)$$

Это же равенство (13) является достаточным для существования у уравнения (12) решения из пространства $H^2(S)$, ортогонального к тому же тождественно постоянной функции на сфере S .

Если условие (13) выполнено, то справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^N c_j \delta(\Theta - \Theta^{(j)}) = \sum_{j=1}^N c_j l(\Theta | \Theta^{(j)}),$$

в котором каждый из функционалов $l(\Theta | \Theta^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$, задается формулой вида (10). Решение уравнения (12) из пространства $H^2(S)$ в этом случае имеет вид

$$u_N(\theta, \varphi) = u_N(\Theta) = \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)}), \quad \sum_{j=1}^N c_j = 0, \quad (14)$$

где $G(\Theta \cdot \Theta^{(j)})$ — это введенная выше функция Грина задачи (8), (9).

Определяемая равенством (14) функция $u_N(\Theta)$ непрерывна на сфере S и более того принадлежит классу $C^{(1)}(S)$.

Произвольную функцию $u_N(\Theta)$ вида (14) условимся называть *сферическим $H^2(S)$ -сплайном*. Входящие в представление (14) точки $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, единичной сферы называем узлами сплайна $u_N(\Theta)$, а коэффициенты c_j — его весами. Нетривиальные $H^2(S)$ -сплайны существуют лишь при условии, что $N \geq 2$.

Далее нас интересует решение следующей экстремальной задачи: для известной непрерывной на единичной сфере функции $p(\theta, \varphi)$ с условием ортогональности (1) найти сферический $H^2(S)$ -сплайн $u_N(\Theta)$ с заданными узлами $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, наименее уклоняющийся от решения $u(\Theta)$ дифференциальной задачи

$$\Delta_S^2 u(\theta, \varphi) = p(\theta, \varphi), \quad \int u(\theta, \varphi) dS = 0,$$

в норме пространства $H^2(S)$.

Решение этой экстремальной задачи, как будет доказано в следующем разделе, существует и единственно в классе функций, ортогональных на S тождественной единице. Обозначив это решение как $u_N^{(0)}(\theta, \varphi) = u_N^{(0)}(\Theta)$, назовем его *сплайн-решением* исходной дифференциальной задачи.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО СПЛАЙН-РЕШЕНИЯ

Установим разрешимость сформулированной в предыдущем разделе экстремальной задачи и попутно докажем для нее теорему единственности.

Теорема 2. Среди всех $H^2(S)$ -сплайнов с заданным на единичной сфере множеством узлов $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, т.е. среди функций вида

$$u_N(\theta, \varphi) = u_N(\Theta) = \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)}), \quad \sum_{j=1}^N c_j = 0,$$

существует в точности один, отклоняющийся в $H^2(S)$ -норме от решения $u(\Theta)$ исходной краевой задачи (1), (2) на минимально возможное значение.

Доказательство. Функция $u(\Theta)$, как установлено, принадлежит пространству $H^2(S)$. Зафиксировав на единичной сфере множество узлов $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, где $N \geq 2$, рассмотрим следующий числовой параметр

$$S_N = \inf \left\{ \|u(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)})\|_{H^2(S)} \mid \sum_{j=1}^N c_j = 0 \right\}. \quad (15)$$

Ясно, что число S_N неотрицательно и конечно.

Сферический $H^2(S)$ -сплайн $u_N^{(0)}(\Theta)$ с весовым вектором $c^{(0)} = (c_1^0, \dots, c_N^0)$ отклоняется от функции $u(\Theta)$ на минимально возможное значение $H^2(S)$ -нормы тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\|u(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j^0 G(\Theta \cdot \Theta^{(j)})\|_{H^2(S)} = S_N. \quad (16)$$

Это означает, что весовой вектор $c^{(0)} = (c_1^0, \dots, c_N^0)$ доставляет на гиперплоскости $\sum_{j=1}^N c_j = 0$ пространства $\mathbb{R}^n$ минимум квадратичной функции $\psi(c)$ переменных $c = (c_1, \dots, c_N)$, задаваемой равенством

$$\psi(c) = \|u(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)})\|_{H^2(S)}^2.$$

Запишем $\psi(c)$ в общепринятом для квадратичных функций виде, т.е. следующим образом:

$$\psi(c) = \sum_{i,j=1}^N g_{ij} c_i c_j + 2 \sum_{j=1}^N b_j c_j + C. \quad (17)$$

С этой целью заметим, что разность $v(\Theta) = u(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)})$ является решением следующей дифференциальной задачи:

$$\Delta_S^2 v(\Theta) = p(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j \delta(\Theta - \Theta^{(j)}), \quad \int v(\Theta) dS = 0.$$

Как известно [1], в этом случае справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|v(\Theta)\|_{H^2(S)}^2 &= (p(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j \delta(\Theta - \Theta^{(j)}), v(\Theta)) = \\ &= \int p(\Theta) v(\Theta) dS - \sum_{j=1}^N c_j v(\Theta^{(j)}). \end{aligned}$$

Запишем это равенство в эквивалентной форме, подставив в правую часть разложение $v(\Theta) = u(\Theta) - \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)})$. В результате получим

$$\psi(c) = \sum_{i,j=1}^N G(\Theta^{(i)} \cdot \Theta^{(j)}) c_i c_j - 2 \sum_{j=1}^N c_j u(\Theta^{(j)}) + \int p(\Theta) u(\Theta) dS.$$

Это означает, что в стандартном представлении (17) достаточно взять

$$g_{ij} = G(\Theta^{(i)} \cdot \Theta^{(j)}), \quad b_j = -u(\Theta^{(j)}), \quad C = \int p(\Theta) u(\Theta) dS.$$

Исходная экстремальная задача эквивалентна, таким образом, стандартной задаче на поиск условного экстремума неотрицательной квадратичной функции $\psi(c)$, решаемой методом неопределенных множителей Лагранжа.

Приравняв нулю частные производные от вспомогательной функции $\psi_1(c, \lambda) = \psi(c) + 2\lambda \sum_{j=1}^N c_j$, получим сопутствующую задаче на условный экстремум систему линейных уравнений. В покомпонентном виде эта система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N G(\Theta^{(i)} \cdot \Theta^{(j)}) c_j + \lambda &= u(\Theta^{(i)}), \\ i &= 1, \dots, N; \\ \sum_{j=1}^N c_j &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть G — это квадратная $N \times N$ —матрица с элементами g_{ij} , $\mathbf{u}$ — это вектор-столбец значений функции $u(\Theta)$ в узлах сплайна, а P — это вектор-строка длины N с единичными элементами. С учетом этих обозначений запишем систему (17) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Q этой сопутствующей системы линейных уравнений задается равенством

$$Q = \begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Это симметричная и, как доказано, к примеру, в [7], положительно определенная матрица. В частности, система (18) не вырождена.

Таким образом, решение $(c^{(0)}, \lambda^{(0)})$ системы (18), сопутствующей задаче на условный экстремум, существует и единственно.

По определению, точка $(c^{(0)}, \lambda^{(0)})$ является стационарной для функции $\psi_1(c, \lambda) = \psi(c) + 2\lambda \sum_{j=1}^N c_j$. Из теории условного экстремума известно, что соответствующая компонента $c^{(0)}$ доставляет квадратичной функции $\psi(c)$ минимум на гиперплоскости $\sum_{j=1}^N c_j = 0$, если на этой гиперплоскости положительно определена квадратичная форма

$$\Phi(c) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial c_i \partial c_j} c_i c_j = 2 \sum_{i,j=1}^N g_{ij} c_i c_j.$$

Установим, что это условие действительно выполняется.

Заметим, что при любом ненулевом $c = (c_1, \dots, c_N)$ с условием $\sum_{j=1}^N c_j = 0$ дифференциальная задача

$$\Delta_S^2 u_N = \sum_{j=1}^N c_j \delta(\Theta - \Theta^{(j)}), \quad \int u_N(\Theta) dS = 0$$

имеет в $H^2(S)$ единственное решение. Это решение — нетривиальный сферический сплайн, задаваемый равенством

$$u_N(\Theta) = \sum_{j=1}^N c_j G(\Theta \cdot \Theta^{(j)}).$$

При этом справедливы соотношения

$$\sum_{i,j=1}^N g_{ij} c_i c_j = \sum_{i,j=1}^N G(\Theta^{(i)} \cdot \Theta^{(j)}) c_i c_j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^N c_i \delta(\Theta - \Theta^{(i)}), u_N(\Theta) \right) = \|u_N\|_{H^{2*}(S)}^2 > 0.$$

Таким образом, квадратичная форма

$$\Phi(c) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial c_i \partial c_j} c_i c_j = 2 \sum_{i,j=1}^N g_{ij} c_i c_j$$

положительно определена.

Следовательно, сферический сплайн со свойством минимальности (16) существует. Это означает, что сплайн-решение рассматриваемой дифференциальной задачи также существует. Установим его единственность.

Пусть существуют два разных сферических сплайна $u_N^{(1)}(\Theta)$ и $u_N^{(2)}(\Theta)$ с одинаковыми узлами $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, и свойством минимальности (16). Тогда разности $v_N^{(1)}(\Theta) = u(\Theta) - u_N^{(1)}(\Theta)$ и $v_N^{(2)}(\Theta) = u(\Theta) - u_N^{(2)}(\Theta)$ имеют в $H^2(S)$ одну и ту же минимальную норму:

$$\|v_N^{(1)}\|_{H^2(S)} = \|v_N^{(2)}\|_{H^2(S)} = S_N.$$

В гильбертовом пространстве $H^2(S)$ справедливо известное тождество параллелограмма

$$\left\| \frac{v_N^{(1)} + v_N^{(2)}}{2} \right\|_{H^2}^2 + \left\| \frac{v_N^{(1)} - v_N^{(2)}}{2} \right\|_{H^2}^2 = \frac{\|v_N^{(1)}\|_{H^2}^2}{2} + \frac{\|v_N^{(2)}\|_{H^2}^2}{2}.$$

Воспользовавшись им, получим строгое неравенство

$$\left\| \frac{v_N^{(1)} + v_N^{(2)}}{2} \right\|_{H^2(S)}^2 = S_N^2 - \left\| \frac{u_N^{(1)} - u_N^{(2)}}{2} \right\|_{H^2(S)}^2 < S_N^2. \quad (19)$$

Последнее строгое неравенство справедливо в силу предположения, что функции $u_N^{(1)}(\Theta)$ и $u_N^{(2)}(\Theta)$ различны.

Полусумма $\frac{u_N^{(1)} + u_N^{(2)}}{2}$ представляет собой некоторый сферический сплайн с тем же самым набором узлов, что и у сплайнов $u_N^{(1)}(\Theta)$ и $u_N^{(2)}(\Theta)$, т.е.

$$\frac{u_N^{(1)} + u_N^{(2)}}{2} = \sum_{j=1}^N c_j^{(3)} G(\Theta \cdot \Theta^{(j)}) = u_N^{(3)}(\Theta).$$

Учитывая это, получаем равенство

$$\left\| \frac{v_N^{(1)} + v_N^{(2)}}{2} \right\|_{H^2(S)}^2 = \|u(\Theta) - u_N^{(3)}(\Theta)\|_{H^2(S)}^2.$$

Таким образом и в силу (19), норма $\|u(\Theta) - u_N^{(3)}(\Theta)\|_{H^2(S)}$ должна быть строго меньше величины S_N . Но это противоречит определению S_N как точной нижней грани равенством (15). Следовательно, функции $u_N^{(1)}(\Theta)$ и $u_N^{(2)}(\Theta)$ обязаны совпадать.

Перепишем первые N уравнений системы (18) в виде равенств

$$\lambda = u(\Theta^{(j)}) - \sum_{i=1}^N G(\Theta^{(j)} \cdot \Theta^{(i)}) c_i, \quad j = 1, \dots, N;$$

или, что в силу определения сплайна $u_N^{(0)}(\Theta)$ то же самое:

$$\lambda = u(\Theta^{(j)}) - u_N^{(0)}(\Theta^{(j)}), \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, получаем

Следствие 1. Сферический $H^2(S)$ -сплайн $u_N^{(0)}(\Theta)$ с весовым вектором $c^{(0)} = (c_1^0, \dots, c_N^0)$ в каждом из своих узлов $\Theta^{(j)}$ отклоняется от значения $u(\Theta^{(j)})$ на одно и то же значение. Это значение равно нулю в том и только том случае, если сплайн $u_N^{(0)}(\Theta)$ является интерполяционным.

Задавшись на сфере S множеством узлов $\Theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, рассмотрим соответствующее им множество сферических весовых кубатурных формул вида

$$\int p(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) dS \approx \sum_{j=1}^N c_j f(\Theta^{(j)}). \quad (20)$$

При этом предположим, что выполнены равенства

$$\sum_{j=1}^N c_j = \int p(\theta, \varphi) dS = 0. \quad (21)$$

Функционал погрешности $l_N(\Theta)$ весовой формулы (20) задается следующим равенством [2,9,10]:

$$(l_N, f) = \int p(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) dS - \sum_{j=1}^N c_j f(\Theta^{(j)}) \quad \forall f \in C(S).$$

Этот функционал линеен и ограничен на пространстве $C(S)$ и в силу условия (21) точен на любой тождественно постоянной функции: $(l_N, 1) = 0$.

В частности, в пространстве $H^2(S)$ дифференциальная задача

$$\Delta_S^2 v = l_N(\Theta), \quad \int v(\Theta) dS = 0,$$

как уже установлено, имеет единственное решение $v_N(\Theta)$. Эта функция $v_N(\Theta)$ представляет собой разность между решением $u(\Theta)$ исходной задачи (1), (2) и сферическим $H^2(S)$ -сплайном $u_N(\Theta)$, имеющим в качестве весов компоненты вектора $c = (c_1, \dots, c_N)$, т.е. веса рассматриваемой кубатурной формулы. При этом справедливы равенства

$$\|u(\Theta) - u_N(\Theta) \mid H^2(S)\|^2 = (l_N(\Theta), v_N(\Theta)) = \|l_N(\Theta) \mid H^{2*}(S)\|^2. \quad (22)$$

Функция $v_N(\Theta) = u(\Theta) - u_N(\Theta)$ со свойством (22) является экстремальной для функционала $l_N(\Theta)$, [9, 10].

Таким образом, сферический $H^2(S)$ -сплайн $u_N^{(0)}(\Theta)$ с весовым вектором $c^{(0)} = (c_1^0, \dots, c_N^0)$ отклоняется от функции $u(\Theta)$ на минимально возможное значение $H^2(S)$ -нормы тогда и только тогда, когда весовой функционал погрешности

$$(l_N^{(0)}, f) = \int p(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) dS - \sum_{j=1}^N c_j^0 f(\Theta^{(j)}), \quad \forall f \in C(S),$$

имеет в сопряженном пространстве $H^{2*}(S)$ минимально возможную норму. Иными словами, тогда и только тогда, когда сферическая кубатурная формула

$$\int p(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) dS \approx \sum_{j=1}^N c_j^0 f(\Theta^{(j)})$$

с весами $c_1^0, \dots, c_N^0$ оптимальна в пространстве $H^2(S)$.

Таким образом, исследование сходимости сплайн-решений к решению дифференциальной задачи при неограниченном увеличении узлов сплайна тесно связано с установлением сходимости к нулю последовательности норм функционалов погрешности оптимальных кубатурных формул, [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васкевич В.Л. Полигармоническое уравнение на сфере трехмерного пространства // Матем. заметки СВФУ. 2022. Т. 29. № 3. С. 22–30.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
3. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1962. 256 с.
4. Игнатов М.И., Певный А.Б. Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991. 125 с.

5. Васкевич В.Л. Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Докл. АН. 2010. Т. 433. № 4. С. 441–446.
6. Васкевич В.Л. Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. матем. ж. 2008. Т. 49. № 5. С. 1019–1027.
7. Васкевич В.Л. Сферические кубатурные формулы в пространствах Соболева // Сиб. матем. ж. 2017. Т. 58. № 3. С. 530–542.
8. Muller C. Spherical harmonics. Berlin: Springer-Verlag. 1966. 46 p.
9. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996. 484 с.
10. Sobolev S. L., Vaskevich V. L. *The Theory of Cubature Formulas*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1997. XXII+416 pp.

SPHERICAL SPLINE SOLUTIONS OF THE INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION

V. L. Vaskevich^{a,b,*}

^a Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Acad. Koptyug Ave., 4, Novosibirsk, 630090 Russia

^b Novosibirsk State University, Pirogov St., 1, Novosibirsk, 630090 Russia

*e-mail: v.vaskevich@g.nsu.ru

Received 05 March, 2024

Revised 05 March, 2024

Accepted 05 May, 2024

Abstract. An inhomogeneous biharmonic equation is considered on the unit sphere in three-dimensional space. The solution of this equation, belonging to the Sobolev space on the sphere, is approximated by a sequence of solutions of the same equation but with specific right-hand sides, represented as linear combinations of shifts of the Dirac delta function. It is proven that, given specified nodes on the sphere determining the shifts, special solutions of the equation — spherical biharmonic splines — exist, and the weights corresponding to each are solutions of an associated non-degenerate system of linear algebraic equations. The connection between the approximation quality of the differential problem solution by spherical biharmonic splines and the problem of the convergence rate of optimal weighted spherical cubature formulas is established.

Keywords: biharmonic equation, Sobolev spaces on spheres, extremal functions, splines.