

СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПСЕВДОСПЕКТРЫ В ЗАДАЧАХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ¹⁾

© 2024 г. К. В. Демьянко^{1,2}, Г. В. Засько^{1,2}, Ю. М. Нечепуренко^{1,2,*},

¹119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН
²125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия
*e-mail: yumnech@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.02.2024 г.

Переработанный вариант 23.02.2024 г.

Принята к публикации 02.05.2024 г.

Работа посвящена численному анализу чувствительности характеристик пространственной устойчивости пограничных слоев к погрешностям, с которыми задано основное течение. Предлагается использовать для этого структурированные псевдоспектры. Показано, что полученные оценки значительно точнее оценок на основе неструктурированного псевдоспектра. Изложение ведется на примере течения вязкой несжимаемой жидкости над вогнутой поверхностью малой кривизны при параметрах течения благоприятных для развития вихрей Гертлера и волн Толлмина–Шлихтинга. Библ. 28. Фиг. 2.

Ключевые слова: структурированные псевдоспектры, резольвента, пространственная устойчивость, пограничный слой, вихри Гертлера, волны Толлмина–Шлихтинга.

DOI: 10.31857/S0044466924080125, EDN: YAGHYQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория гидродинамической устойчивости рассматривает внешние возмущения основного течения, устойчивость которого представляет интерес. Она изучает их распространение в пространстве или эволюцию во времени. (см. [1]–[3]). Характеристики устойчивости, такие как инкременты нарастания, фазовые и групповые скорости, описывают развитие наиболее неустойчивых возмущений. Вычисление характеристик устойчивости сводят к вычислению собственных значений матриц, зависящих от параметров, отбору ведущих собственных значений и вычислению отвечающих им собственных векторов. Наряду с внешними возмущениями, развивающимися на фоне основного течения, возможны внутренние возмущения основного течения, которые следует рассматривать как возмущения параметров задачи устойчивости, а значит элементов матриц, с помощью которых вычисляют характеристики устойчивости. Настоящая работа посвящена именно таким возмущениям.

Первостепенной задачей, возникающей при постановке проблем собственных значений и выборе алгоритмов их решения в случае возможного возмущения матриц, является оценка того, на сколько могут отличаться собственные значения возмущенной матрицы от собственных значений исходной. В настоящее время используют три типа оценок: мажорантные оценки, асимптотические оценки и псевдоспектры. Каждый из них имеет свою область применимости.

Примером мажорантной оценки является неравенство Бауэра–Файка [4], в котором возмущение собственных значений матрицы простой структуры оценивается через число обусловленности матрицы собственных векторов. Эта и другие подобные оценки (см. [5]) полезны в теоретических исследованиях, однако на практике, за исключением специального случая, когда матрица является нормальной или близкой к таковой, они оказываются слишком завышенными.

При получении асимптотических оценок (см. [6]) предполагается, что норма возмущений мала и для возмущения собственного значения выводится достижимая оценка члена первого порядка малости. Такие оценки хорошо вписываются в вычислительные схемы известных алгоритмов (например, QR-алгоритма) и полезны при численном анализе возможного влияния погрешностей округления. Однако, если требуется оценить возмущение спектра при возмущениях матрицы, норма которых значительно больше погрешностей округления,

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 22-11-00025).

эти оценки не применимы. Такая проблема возникает, например, когда все, либо некоторые элементы матрицы получены в результате физического эксперимента или численного моделирования и имеют достаточно большую погрешность.

Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ через $\Lambda_\varepsilon(A)$ будем обозначать объединение спектров всех возмущенных матриц вида $A + \Delta$ при норме возмущения не превосходящей ε :

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \bigcup_{\|\Delta\|_2 \leq \varepsilon} \lambda(A + \Delta), \quad \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Иначе говоря, $z \in \Lambda_\varepsilon(A)$ в том, и только том случае, когда существует матрица $\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}$ такая, что $\|\Delta\|_2 \leq \varepsilon$ и $z \in \lambda(A + \Delta)$. Множество $\Lambda_\varepsilon(A)$ называют *псевдоспектром* (или ε -*спектром*) матрицы A . Псевдоспектр обладает следующим замечательным свойством:

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z : \|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq 1/\varepsilon\}, \quad (1.1)$$

где I означает единичную матрицу порядка n .

По своему определению, псевдоспектр является достижимой оценкой возможного перемещения собственных значений при норме возмущений не превосходящих заданного ε . Нарисовав в заданной области комплексной плоскости линии уровня нормы резольвенты мы получим так называемый *спектральный портрет* матрицы A , дающий в силу (1.1) псевдоспектр для любого заданного ε . Если задано множество допустимых возмущений $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$, то можно оценить сверху величину $\|\Delta\|_2$, где $\Delta \in \mathcal{M}$, и выбрать эту верхнюю оценку в качестве ε . Тогда мы получим верхнюю оценку возможного смещения собственных значений при допустимых возмущениях матрицы:

$$\bigcup_{\Delta \in \mathcal{M}} \lambda(A + \Delta) \subset \Lambda_\varepsilon(A).$$

Понятие псевдоспектра было независимо введено в работах С.К. Годунова (см. [7], [8]) и Л. Трефетена (см. [9], [10]). С этим понятием тесно связан ряд математических результатов, в которых фигурирует резольвента и различные ее нормы, например, оценка чувствительности спектрального проектора на инвариантное подпространство, отвечающее заданному подмножеству спектра [11]–[14], оценка нормы матрицы Грина [15], оценка нормы матричной экспоненты [10]. Следует отметить, что оценки нормы матричной экспоненты, полученные на основе псевдоспектров, завышены. Более точные оценки предложены, например, в работах [16], [17] и основаны на решениях уравнений Ляпунова.

Псевдоспектры используют в задачах гидродинамической устойчивости (см., например, [3], [18], [19]). Однако полученные результаты скорее позволяют судить о кластеризации спектра, чем о возможном смещении собственных значений при возмущении параметров течений. Связано это с тем, что использование псевдоспектра для оценки чувствительности спектра к возмущению элементов матрицы имеет один большой недостаток: псевдоспектр не позволяет учесть специфику возмущения. Из-за этого, полученные оценки на практике могут оказаться сильно завышенными. Более того, если A — это конечномерный аналог неограниченного оператора, то при параметре дискретизации стремящемся к бесконечности максимальная норма допустимого возмущения может стремиться к бесконечности, и, как следствие, псевдоспектр будет стремиться ко всей комплексной плоскости. При этом минимальные по абсолютной величине собственные значения матрицы (а именно они как правило представляют наибольший интерес) могут возмущаться не слишком сильно.

Эту проблему в значительной мере позволяет решить обобщение псевдоспектра, называемое структурированным псевдоспектром [20], [21], ориентированное на возмущения, представимые в виде $\Delta = BSC$, где B и C фиксированные квадратные (структурирующие) матрицы порядка n , $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и справедливо вложение

$$\mathcal{M} \subset \bigcup_{\|S\|_2 \leq \varepsilon} BSC.$$

Выбирая подходящим образом структурирующие матрицы, можно более точно локализовать возмущения и соответственно множество спектров возмущенных матриц, чем это позволяет сделать неструктурированный псевдоспектр [22].

В настоящей работе мы покажем как работают структурированные псевдоспектры в задачах гидродинамической устойчивости на примере проблем собственных значений, возникающих при исследовании пространственной устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости над вогнутой поверхностью малой кривизны (основное течение) при параметрах течения благоприятных для развития вихрей Гертлера и волн Толлмина–Шлихтинга. Во втором разделе мы дадим определение структурированного псевдоспектра и приведем его основные свойства. В третьем разделе опишем рассматриваемую задачу гидродинамической устойчивости и вы-

бор структурирующих матриц. В четвертом разделе приведем и обсудим результаты исследования чувствительности собственных значений к возмущению поля скорости основного течения. Итог работы подведем в пятом разделе.

Всюду далее мы будем использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ — соответственно вторая и бесконечная нормы матриц и векторов, $\text{diag}(d)$ — диагональная матрица с диагональными элементами равными компонентам вектора d .

2. СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПСЕВДОСПЕКТРЫ

Структурированным псевдоспектром матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называют множество вида

$$\Lambda_\varepsilon(A; B, C) = \bigcup_{\|S\|_2 \leq \varepsilon} \lambda(A + BSC), \quad S \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

где B и $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — фиксированные матрицы. В частности, $\Lambda_\varepsilon(A; I, I) = \Lambda_\varepsilon(A)$.

Конструктивное определение структурированного псевдоспектра дает следующая формула:

$$\Lambda_\varepsilon(A; B, C) = \lambda(A) \bigcup \{z : \|C(zI - A)^{-1}B\|_2 \geq 1/\varepsilon\}.$$

При ее обосновании используют одно утверждение, представляющее самостоятельный интерес. А именно: если комплексное число z не принадлежит спектру матрицы A и норма структурированной резольвенты в точке z равна $s > 0$, то z является собственным значением возмущенной матрицы $A + BSC$, где $S = vu^*/s$, а v и u соответственно нормированные правый и левый сингулярные векторы структурированной резольвенты, отвечающие ее максимальному сингулярному числу s , то есть $C(zI - A)^{-1}Bv = su$. Отметим, что указанная матрица S — это минимальная по норме матрица, делающая z собственным значением возмущенной матрицы $A + BSC$.

Построение структурированного спектрального портрета в заданной области комплексной плоскости сводится к вычислению линий уровня максимального сингулярного числа структурированной резольвенты $R(z) = C(zI - A)^{-1}B$ в узлах заданной прямоугольной сетки по z . Если для этого использовать метод Ланцоша, то вычислительные затраты при каждом значении z составят несколько десятков умножений матриц $R(z)$ и $R(z)^*$ на вектор. В случае плотных матриц небольшого порядка ($n \leq 10^4$ для вычислений на современном персональном компьютере) целесообразно выполнить разложение Шура $A = QTQ^*$, где Q — унитарная матрица, а T — верхняя треугольная (форма Шура), вычислить матрицы $\tilde{C} = CQ$ и $\tilde{B} = Q^*B$ и использовать тождество $R(z) = \tilde{C}(zI - T)^{-1}\tilde{B}$. Это позволит умножать на вектор матрицы $R(z)$ и $R(z)^*$ за $O(n^2)$ арифметических операций с небольшой мультипликативной константой. Суммарные вычислительные затраты на построение спектрального портрета составят $O(n^3) + O(Nn^2)$ арифметических операций, где N — число узлов сетки по z .

3. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

Следуя работам [23], [24], рассмотрим типичную задачу пространственной устойчивости пограничного слоя, а именно течение вязкой несжимаемой жидкости над вогнутой пластиной бесконечного размаха и постоянного радиуса кривизны, помещенной под нулевым углом атаки и с нулевым углом скольжения в однородный набегающий поток. Будем использовать ортогональные криволинейные координаты (x, y, z) , где y — расстояние до пластины по нормали к поверхности, x — расстояние от передней кромки пластины до основания этой нормали вдоль поверхности пластины, z — поперечная координата. Будем предполагать, что требуется исследовать устойчивость основного течения к внешним возмущениям вида

$$(u', v', w', p') = \text{Real}\{(u, v, w, p)e^{i(\beta z - \omega t)}\}, \quad (3.1)$$

которые сгенерированы гармоническим источником [23], расположенным на некотором расстоянии от передней кромки пластины. Здесь u, v, w и p — зависящие от x и y комплекснозначные амплитуды продольной, нормальной и поперечной компонент скорости и давления соответственно, t — время, β и ω — поперечное волновое число и угловая частота соответственно, а i — мнимая единица.

Предполагая толщину пограничного слоя малой по сравнению с радиусом кривизны пластины, обезразмеренные линеаризованные уравнения распространения амплитуд возмущений можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} u + V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L_{\beta\omega} u, \\
U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + V \frac{\partial v}{\partial y} + 2G\ddot{\sigma}^2 U u + Re \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + L_{\beta\omega} v, \\
U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + i\beta Re p &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L_{\beta\omega} w, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\beta w &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь

$$L_{\beta\omega} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + i\omega,$$

$U(x, y)$ и $V(x, y)$ — заданные продольная и нормальная компоненты скорости основного течения соответственно, Re — число Рейнольдса, $G\ddot{\sigma}$ — число Гертлера (случай $G\ddot{\sigma} = 0$ соответствует плоской пластине). Для возмущений предполагается прилипание на поверхности пластины и затухание вдали от пограничного слоя:

$$u = v = w = 0, \quad \text{при } y = 0, y = +\infty. \tag{3.3}$$

Следуя работе [24], аппроксимируем уравнения (3.2) с краевыми условиями (3.3) по y методом Галеркина—коллокаций [25] с базисными и пробными функциями, представляющими собой модификацию функций предложенных в работах [26], [27], а именно,

$$\psi_i(y) = \ell_i(y)e^{-(y-y_i)/2}, \quad \phi_i(y) = \tilde{\ell}_i(y)e^{-(y-y_i)/2},$$

где $\ell_i(y)$ — это элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа для сетки Лагерра—Гаусса—Радо $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_y}$, ненулевые узлы которой являются корнями производной многочленов Лагерра степени $n_y + 1$, а $\tilde{\ell}_i(y)$ — это элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа для сетки $y_1 < \dots < y_{n_y}$. Функции $\psi_i(y)$ будем использовать в качестве базисных функций для компонент скорости и пробных функций для уравнений переноса импульса. Функции $\phi_i(y)$ будем использовать в качестве базисных функций для давления и пробных функций для уравнения неразрывности. Через D_{y_0} и D_y будем обозначать прямоугольную матрицу размера $(n_y + 1) \times n_y$ и квадратную порядка n_y , которые при умножении на вектор значений в узлах $y_1 < \dots < y_{n_y}$ функции, принимающей нулевое значение в узле y_0 , дают вектор приближенных значений первой производной этой функции в узлах $y_0 < \dots < y_{n_y}$ и $y_1 < \dots < y_{n_y}$, соответственно. Через K_0 обозначим квадратную диагональную матрицу порядка $n_y + 1$ значений квадратных корней весов квадратурной формулы Лагерра—Гаусса—Радо, а через K — ее подматрицу отвечающую внутренним узлам сетки. Через Π обозначим прямоугольную матрицу размера $(n_y + 1) \times n_y$ проектирования с сетки $y_1 < \dots < y_{n_y}$ на сетку $y_0 < \dots < y_{n_y}$, через u, v, w, p — вектора значений соответствующих функций во внутренних узлах расчетной сетки.

Вводя дополнительные переменные

$$\tilde{v} = \frac{1}{Re} \frac{dv}{dx}, \quad \tilde{w} = \frac{1}{Re} \frac{dw}{dx},$$

полученную после аппроксимации системы (3.2) систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по x сведем к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dq}{dx} = A(x)q \tag{3.4}$$

относительно неизвестной вектор-функции $q = (u^T, v^T, w^T, \tilde{v}^T, \tilde{w}^T, p^T)^T$, где

$$A = \begin{bmatrix}
0 & -F_y & -i\beta I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & ReI & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & ReI & 0 \\
V_x + 2G\ddot{\sigma}^2 U & V_y + V_D - L_{\beta\omega} & 0 & ReU & 0 & ReG_y \\
0 & 0 & V_D - L_{\beta\omega} & 0 & ReU & i\beta ReI \\
V_y - V_D + L_{\beta\omega} & UF_y - U_y & i\beta U & -F_y & -i\beta I & 0
\end{bmatrix}$$

является квадратной блочной матрицей блочного порядка 6, состоящей из квадратных блоков порядка n_y , некоторые из которых зависят от x . Здесь U, V, U_y, V_x, V_y — диагональные матрицы значений соответствующих

компонент скорости основного течения и их производных во внутренних узлах сетки по y , $V_D = KVD_yK^{-1}$ — дискретный аналог оператора $V\partial/\partial y$, $L_{\beta\omega} = L_\beta + i\omega I$ — дискретный аналог оператора $L_{\beta\omega}$, где $L_\beta = -K^{-1}D_{y0}^TK_0^2D_{y0}K^{-1} - \beta^2I$ — дискретный аналог оператора $\partial^2/\partial y^2 - \beta^2$, матрицы $F_y = K^{-1}\Pi^TK_0^2D_{y0}K^{-1}$ и $G_y = -F_y^T$ — дискретные аналоги оператора $\partial/\partial y$ соответственно в уравнении неразрывности (действующего на компоненту скорости) и в уравнениях движения (действующего на давление).

Значения компонент скорости основного течения будем считать изначально заданными в узлах некоторой сетки по x и y , отличной от сетки используемой для аппроксимации уравнений распространения амплитуд возмущений. В численных экспериментах, описанных в данной работе, эти значения рассчитывались на основе уравнения Блазиуса [1]. Значения производных компонент скорости основного течения будем считать вычисленными с помощью некоторых сеточных операторов дифференцирования. В качестве элементов диагональных матриц U , V , U_y , V_x и V_y будем брать результаты линейной интерполяции соответствующих сеточных функций в точки $(x, y_1), \dots, (x, y_{n_y})$ при рассматриваемом значении x .

Перейдем к описанию внутренних возмущений основного течения, как параметра задачи устойчивости. Будем предполагать, что компоненты скорости основного течения задаются с некоторой погрешностью, такой что их относительные возмущения — это независимые случайные величины, принимающие значения в интервале $[-\delta, \delta]$, где $0 < \delta < 1$. Векторы погрешностей основного течения и их сеточных производных в точках $(x, y_1), \dots, (x, y_{n_y})$, полученные так же, как для самого основного течения, будем обозначать через $\delta_U, \delta_V, \delta_{U_y}, \delta_{V_x}, \delta_{V_y}$ и предполагать, что справедливы следующие неравенства:

$$\|\delta_*\|_\infty \leq c_*\delta, \|\delta_{*x}\|_\infty \leq c_{*x}\delta, \|\delta_{*y}\|_\infty \leq c_{*y}\delta,$$

где c_*, c_{*x}, c_{*y} — некоторые неотрицательные константы. Эти константы не зависят от сетки $y_1 < \dots < y_{n_y}$, выбираемой для амплитуд возмущений, и могут быть легко вычислены, если известны матрицы операторов сеточного дифференцирования для компонент основного течения.

При сделанных предположениях матрица возмущения матрицы A будет иметь следующий вид:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & 0 & \Delta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{53} & 0 & \Delta_{55} & 0 \\ \Delta_{61} & \Delta_{62} & \Delta_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{41} &= \text{diag}(\delta_{V_x}) + 2G\ddot{o}^2 \text{diag}(\delta_U), \quad \Delta_{42} = \text{diag}(\delta_{V_y}) + K\text{diag}(\delta_V)D_yK^{-1}, \\ \Delta_{44} &= \text{Re} \text{diag}(\delta_U), \quad \Delta_{53} = K\text{diag}(\delta_V)D_yK^{-1}, \quad \Delta_{55} = \Delta_{44}, \quad \Delta_{63} = i\beta \text{diag}(\delta_U), \\ \Delta_{61} &= \text{diag}(\delta_{V_y}) - K\text{diag}(\delta_V)D_yK^{-1}, \quad \Delta_{62} = \text{diag}(\delta_U)F_y - \text{diag}(\delta_{U_y}), \end{aligned}$$

а для норм блоков матрицы Δ будут справедливы следующие верхние оценки:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{41}\|_2/\delta &\leq h_{41} = c_{V_x} + 2c_U G\ddot{o}^2, \quad \|\Delta_{42}\|_2/\delta \leq h_{42} = c_{V_y} + c_V \|KD_yK^{-1}\|_2, \\ \|\Delta_{44}\|_2/\delta &\leq h_{44} = c_U \text{Re}, \quad \|\Delta_{53}\|_2/\delta \leq h_{53} = c_V \|KD_yK^{-1}\|_2, \quad \|\Delta_{55}\|_2/\delta \leq h_{55} = h_{44}, \\ \|\Delta_{61}\|_2/\delta &\leq h_{61} = h_{42}, \quad \|\Delta_{62}\|_2/\delta \leq h_{62} = c_{U_y} + c_U \|F_y\|_2, \quad \|\Delta_{63}\|_2/\delta \leq h_{63} = c_U |\beta|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\Delta\|_2 \leq \delta \|H\|_2$, где H — квадратная матрица порядка 6 с указанными выше ненулевыми элементами h_{kl} .

Для структурирования возмущений введем в рассмотрение две блочно-диагональные матрицы вида

$$B = \text{diag}(0, 0, 0, b_4I, b_5I, b_6I), \quad C = \text{diag}(c_1M, c_2M, c_3M, c_4I, c_5I, 0)$$

и псевдообратные к ним матрицы

$$B^+ = \text{diag}(0, 0, 0, I/b_4, I/b_5, I/b_6), \quad C^+ = \text{diag}(M^{-1}/c_1, M^{-1}/c_2, M^{-1}/c_3, I/c_4, I/c_5, 0).$$

Здесь M — невырожденная матрица, обратная к которой имеет единичную вторую норму: $\|M^{-1}\|_2 = 1$, а b_* и c_* — положительные числа. Тогда матрица $S = B^+\Delta C^+$ будет иметь ту же блочную структуру, что и матрица Δ , причем $\Delta = BSC$, а нормы ненулевых блоков матрицы S будут оцениваться следующим образом:

$$\begin{aligned} \|S_{41}\|_2/\delta &\leq \tilde{h}_{41} = h_{41}/(b_4c_1), \quad \|S_{42}\|_2/\delta \leq \tilde{h}_{42} = (c_{V_y} + c_V \|KD_yK^{-1}M^{-1}\|_2)/(b_4c_2), \\ \|S_{44}\|_2/\delta &\leq \tilde{h}_{44} = h_{44}/(b_4c_4), \quad \|S_{53}\|_2/\delta \leq \tilde{h}_{53} = c_V \|KD_yK^{-1}M^{-1}\|_2/(b_5c_3), \\ \|S_{55}\|_2/\delta &\leq \tilde{h}_{55} = h_{55}/(b_5c_5), \quad \|S_{61}\|_2/\delta \leq \tilde{h}_{61} = (c_{V_y} + c_V \|KD_yK^{-1}M^{-1}\|_2)/(b_6c_1), \\ \|S_{62}\|_2/\delta &\leq \tilde{h}_{62} = (c_{U_y} + c_U \|F_yM^{-1}\|_2)/(b_6c_2), \quad \|S_{63}\|_2/\delta \leq \tilde{h}_{63} = h_{63}/(b_6c_3). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|S\|_2 \leq \delta \|\tilde{H}\|_2$, где \tilde{H} — квадратная матрица порядка b с указанными выше ненулевыми элементами \tilde{h}_{kl} .

В качестве матрицы M будем выбирать эрмитову положительно определенную матрицу $(-L_\beta)^{-1/2}$, нормированную на ее минимальное собственное значение. При таком выборе матрицы M нормы матриц $F_y M^{-1}$ и $KD_y K^{-1} M^{-1}$ будут оставаться ограниченными с ростом числа узлов сетки Лагерра–Гаусса–Радо, что обеспечит ограниченность нормы матрицы S . Параметры структурирования b_* и c_* будем выбирать решая задачу минимизации:

$$\|\tilde{H}\|_2 \|C(z_0 I - A)^{-1} B\|_2 \rightarrow \min, \quad (3.6)$$

по этим параметрам, где z_0 — некоторая контрольная точка на комплексной плоскости, выбираемая в области представляющих интерес собственных значений матрицы A .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы обсудим результаты расчета спектра возмущенной матрицы A системы (3.4) и его локализации с помощью псевдоспектров при $x = 2$ и $n_y = 32$, обеспечивающем сходимость результатов по шагу сетки. Будем использовать следующие два набора значений параметров задачи (3.4): $Re = 2.003 \times 10^5$, $G\ddot{o} = 3.66$, $\beta = 0.2106$, $\omega = 0.1885$ и $Re = 4.674 \times 10^5$, $G\ddot{o} = 6.92$, $\beta = 6.433 \times 10^{-3}$, $\omega = 21.99$, взятых из работ [23], [24] и благоприятных для развития вихрей Гертлера и волн Толлмина–Шлихтинга соответственно. Конфигурации, соответствующие этим наборам, будем обозначать через G и TS .

Будем возмущать поле скоростей основного течения как описано в предыдущем разделе, полагая $\delta = 10^{-3}$. Собственные значения возмущенных матриц $A + \Delta$ будем обозначать на рисунках белыми точками, собственные значения исходной матрицы A — черными. Примерно половина собственных значений матрицы A отвечает собственным модам, амплитуда которых сильно нарастает вниз по потоку, а сами эти моды распространяются вверх по потоку [28]. Такие моды удовлетворяют уравнениям вязкой несжимаемой жидкости, но их вклад в решения наблюдаемые на практике, пренебрежимо мал. Поэтому, эти моды исключают из рассмотрения (см. [23], [24], [28]). Оставшиеся, физически значимые собственные значения при рассмотренном значении x включают одно ведущее (с наибольшей вещественной частью) собственное значение, представляющее наибольший интерес (на рисунках оно отмечено косым черным крестом). Мода, отвечающая этому собственному значению, для набора G является вихрем Гертлера, а для набора TS — волной Толлмина–Шлихтинга. Обе эти моды неустойчивые, т.е. вещественные части соответствующих им собственных значений положительны. Естественный ламинарно–турбулентный переход происходит вследствие развития таких мод вниз по потоку.

Мы локализуем спектры возмущенных матриц с помощью неструктурированного псевдоспектра и с помощью структурированного псевдоспектра. Для этого мы строим в областях собственных значений, представляющих наибольший интерес, неструктурированный и структурированный спектральные портреты, то есть линии уровня функций

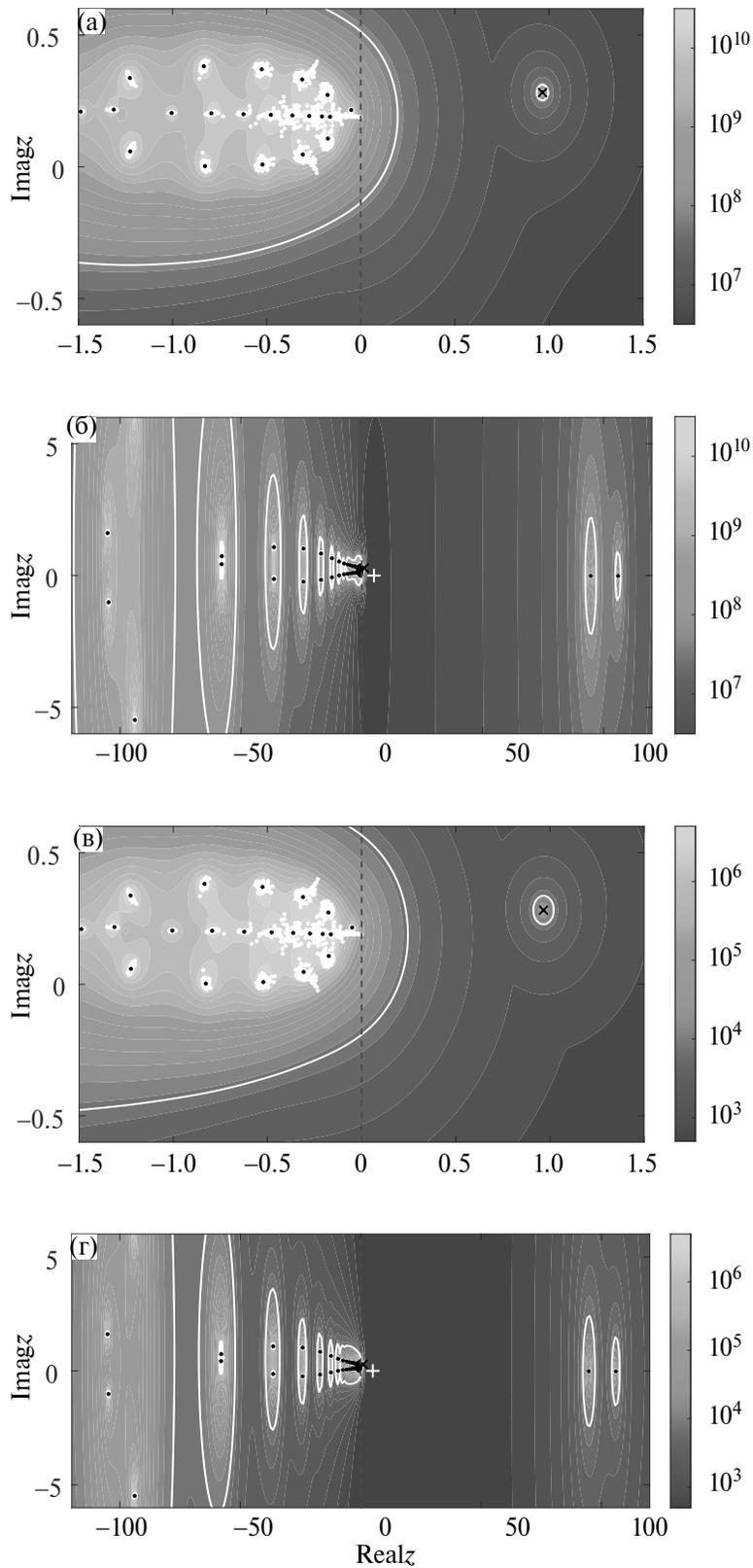
$$f(z) = \|H\|_2 \| (zI - A)^{-1} \|_2$$

и

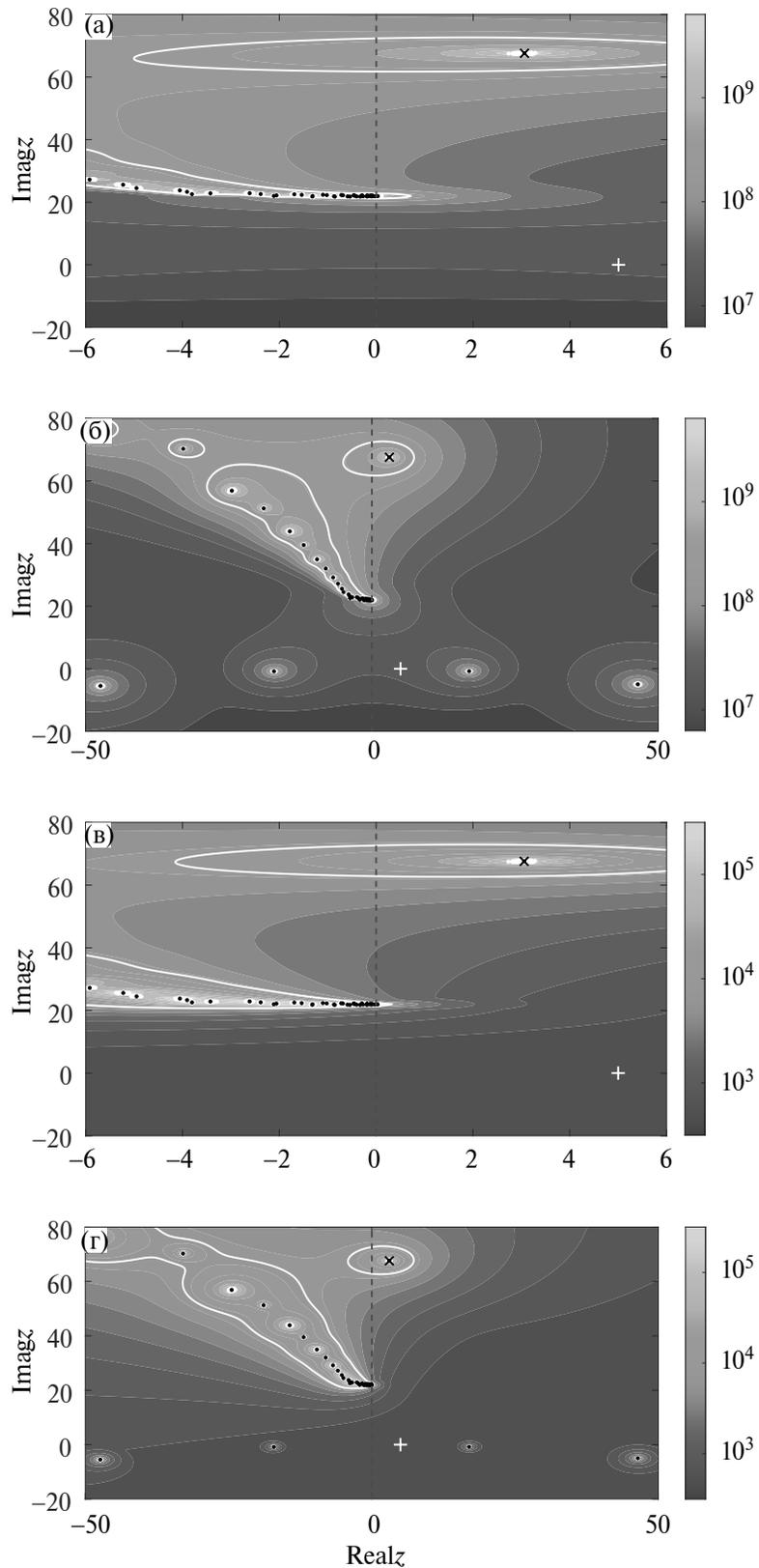
$$\tilde{f}(z) = \|\tilde{H}\|_2 \|C(zI - A)^{-1} B\|_2$$

соответственно. Если для некоторого δ справедливо неравенство $1/f(z) > \delta$, либо $1/\tilde{f}(z) > \delta$, то точка z заведомо не является собственным значением возмущенной матрицы при этом значении δ . На каждый спектральный портрет мы будем наносить (белым) линию уровня, отвечающую некоторому значению нормы резольвенты. При δ , меньших обратной величине значения на этой линии, возмущения основного течения не оказывают существенного влияния на ведущую моду и не приводят к перемешиванию физически значимых и незначимых собственных значений, то есть не нарушают работу алгоритмов, обычно используемых для исследования гидродинамической устойчивости.

На фиг. 1 для конфигурации G неструктурированный спектральный портрет матрицы A (подрисунки (а) и (б)) сравнивается со структурированным (подрисунки (в), (г)). Кроме того, собственные значения матрицы A сравниваются с собственными значениями возмущенных матриц $A + \Delta$ при ста различных возмущениях основного течения. При этом подрисунки (а) и (в) демонстрируют спектральные портреты вблизи физический значимого ведущего собственного значения, а подрисунки (б) и (г) — в более широкой области комплексной плоскости, где видны два собственных значения с действительной частью, примерно равной 100, которые хорошо отделены от остальной части спектра и отвечают физически незначимым модам. Белая линия для неструктурированного спектрального портрета отвечает значению $f(z) = 10^8$, а для структурированного — $\tilde{f}(z) = 10^4$, что есть $\delta = 10^{-8}$ и $\delta = 10^{-4}$ соответственно. При этом эти линии геометрически близки. Следовательно, учет специфики возмущений основного течения в рамках структурированного псевдоспектра позволил получить значительно (на четыре порядка) более точную оценку чувствительности спектра к возмущениям основного



Фиг. 1. Неструктурированные (а), (б) и структурированные (в), (г) спектральные портреты для конфигурации G. Черная пунктирная линия — мнимая ось, черные точки — спектр матрицы A, черный косой крест — ее ведущее собственное значение, отвечающее вихрю Герглера, белые точки — спектры ста возмущенных матриц при $\delta = 10^{-3}$, белый прямой крест — точка z_0 , используемая при оптимизации (3.6), белая линия на (а) и (б) — линия уровня $f(z) = 10^8$, на (в) и (г) — линия уровня $\tilde{f}(z) = 10^4$.



Фиг. 2. Неструктурированные (а), (б) и структурированные (в), (г) спектральные портреты для конфигурации TS. Черная пунктирная линия — мнимая ось, черные точки — спектр матрицы A , черный косой крест — ее ведущее собственное значение, отвечающее волне Толлмина–Шлихтинга, белые точки — спектры ста возмущенных матриц при $\delta = 10^{-3}$, белый прямой крест — точка z_0 , используемая при оптимизации (3.6), белая линия на (а) и (б) — линия уровня $f(z) = 10^{8.5}$, на (в) и (г) — линия уровня $\tilde{f}(z) = 10^4$.

течения. Вместе с тем, собственные значения ста возмущенных матриц, не достигают белой линии, нанесенной на структурированный псевдоспектр, несмотря на то, что они вычислены при $\delta = 10^{-3}$, то есть для возмущений на порядок больших. Это позволяет предполагать, что оценка на основе структурированного псевдоспектра все еще остается завышенной и может быть улучшена.

На фиг. 2 с использованием тех же обозначений, что и для фиг. 1, представлены результаты расчетов для конфигурации TS. В данном случае белая линия на неструктурированном спектральном портрете отвечает значению $f(z) = 10^{8.5}$, а на структурированном — $\tilde{f}(z) = 10^4$. То есть и для этой конфигурации структурированный псевдоспектр дает значительно (более, чем на четыре порядка) более точную оценку чувствительности спектра возмущенной матрицы, чем обычный псевдоспектр. Следует отметить, что в отличие от конфигурации G, для конфигурации TS и неструктурированный, и структурированный псевдоспектры допускают смещение ведущего физически значимого собственного значения в левую полуплоскость. Кроме того, ведущие физически значимые собственные значения ста возмущенных матриц заметно сильнее отличаются от ведущего физически значимого собственного значения исходной матрицы. Тем не менее, эти собственные значения возмущенных матриц лежат в правой полуплоскости, имея достаточно большие положительные действительные части. Это также позволяет предполагать, что оценка на основе структурированного псевдоспектра все еще завышена и для конфигурации TS.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена оценке чувствительности собственных значений к внутренним возмущениям поля основного течения в задачах гидродинамической устойчивости. Предложено использовать структурированные псевдоспектры вместо широко используемых обычных псевдоспектров. На примере течения вязкой несжимаемой жидкости над вогнутой поверхностью малой кривизны при параметрах течения благоприятных для развития вихрей Гертлера и волн Толлмина—Шлихтинга, было показано, что структурирование можно выбрать так, что оценки на основе структурированного псевдоспектра будут значительно более точными, чем оценки, полученные на основе неструктурированного псевдоспектра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory (9th ed.). Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2016.
2. *Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of Transitional Shear Flows: instability and laminar-turbulent transition in incompressible near-wall shear layers. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 272 p.
3. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and Transition in Shear Flows. New York: Springer New York, 2000. 558 p.
4. *Bauer F.L., Fike C.T.* Norms and exclusion theorems // Numer. Math. 1960. V. 2. N. 3. P. 137–141.
5. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
6. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
7. *Годунов С.К., Кирилук О.П., Костин В.И.* Спектральные портреты матриц // Препринт № 3, Институт Математики СО АН СССР, 1990.
8. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная Книга, 1997. 390 с.
9. *Trefethen L.N.* Pseudospectra of matrices // Numerical Analysis (ed. by D.F. Griffiths and G.A. Watson), 1991. P. 234–266.
10. *Trefethen L.N., Embree M.* Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Non-normal Matrices and Operators. Princeton: Princeton Univer. Press, 2005. 606 p.
11. *Годунов С.К.* Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27. № 5. С. 24–37.
12. *Булгаков А.Я., Годунов С.К.* Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 5. С. 59–70.
13. *Godunov S.K., Sadkane M.* Computation of pseudospectra via spectral projectors // Lin. Alg. Appl., 1998. V. 279. P. 163–175.
14. *Нечепуренко Ю.М.* Интегральные критерии качества дихотомии замкнутым контуром // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 5. С. 718–726.

15. *Нечепуренко Ю.М.* Оценка нормы матрицы Грина через интегральный критерий качества дихотомии и границы хаусдорфова множества // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С.232–238.
16. *Нечепуренко Ю.М.* Оценка нормы матричной экспоненты через норму решения уравнения Ляпунова и границы хаусдорфова множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 2, С. 131–141.
17. *Nechepurenko Yu.M., Zasko G.V.* Constant upper bounds on the matrix exponential norm. // Russ. J. Num. Anal. Math. Model. 2022. V. 37. № 1. P. 15–23.
18. *Trefethen L.N., Trefethen A.E., Reddy S.C., Driscoll T.A.* Hydrodynamic stability without eigenvalues // Science. 1993. V. 261. P. 578–584.
19. *Foster R.C.* Structure and energetics of optimal Ekman layer perturbations // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 97–123.
20. *Hinrichsen D., Kelb B.* Spectral value sets: a graphical tool for robustness analysis // Systems Control Lett. 1993. V. 21. P. 127–136.
21. *Gallestay E., Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Spectral value sets of closed linear operators // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 2000. V. 456. P. 1397–1418.
22. *Nechepurenko Yu.M.* The regularly structured pseudospectrum // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2004. V. 19. № 3. P. 265–288.
23. *Бойко А.В., Демьянко К.В., Засько Г.В., Нечепуренко Ю.М.* О параболизации уравнений распространения малых возмущений в двумерных пограничных слоях // Теплофизика и Аэромеханика. 2024. Т. 31. № 3. С. 423–440. sibran.ru/journals/issue.php?ID=189093&ARTICLE_ID=189094
24. *Zasko G.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M.* Simulating the propagation of boundary-layer disturbances by solving boundary-value and initial-value problems // Russ. J. Num. Anal. Math. Model. 2024. V. 39. № 1. P. 47–59.
25. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral Methods: Fundamentals in Single Domain. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. 2006. 563 p.
26. *Shen J.* Stable and efficient spectral methods in unbounded domains using Laguerre functions // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 28. P. 1113–1133.
27. *Shen J., Wang L.-L.* Some recent advances on spectral methods for unbounded domains // Comm. Comp. Phys. 2009. V. 5. P. 195–241.
28. *Tumin A., Reshotko E.* Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers // Phys. Fluids, 2001. V. 13. № 7. P. 2097–2104.

STRUCTURED PSEUDOSPECTRA IN PROBLEMS OF SPATIAL STABILITY OF BOUNDARY LAYERS

K. V. Demyanko^{a,b}, Yu. M. Nechepurenko^{a,b}, G. V. Zasko^{a,b,*}

^aMarchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Gubkina St., 8, Moscow, 119333 Russia

^bKeldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047 Russia

*e-mail: yumnech@yandex.ru

Received 23 February, 2024

Revised 23 February, 2024

Accepted 02 May, 2024

Abstract. The paper is devoted to the numerical analysis of the sensitivity of the characteristics of spatial stability of boundary layers to the errors with which the main flow is specified. It is proposed to use structured pseudospectra for this purpose. It is shown that the obtained estimates are significantly more accurate than the estimates based on the unstructured pseudospectrum. The presentation is carried out using the example of a viscous incompressible fluid flow over a concave surface of small curvature with flow parameters favorable for the development of Goertler vortices and Tollmien–Schlichting waves.

Keywords: structured pseudospectra, resolvent, spatial stability, boundary layer, Goertler vortices, Tollmien–Schlichting waves.