ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 8, с. 1486–1499

УДК 517.929

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КЛАССА НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ[1)]

И. И. Матвеева[1,*]

[1]630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия
*e-mail: i.matveeva@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.
Переработанный вариант 02.04.2024 г.
Принята к публикации 02.05.2024 г.

Рассмотрен класс систем неавтономных дифференциальных уравнений нейтрального типа с сосредоточенным и распределенным запаздываниями. Используя функционал Ляпунова–Красовского, установлены оценки, которые позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае экспоненциальной устойчивости указаны оценки на скорость стабилизации решений на бесконечности. Библ. 31.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, переменные коэффициенты, оценки решений, устойчивость, функционал Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0044466924080139, **EDN**: YAEUDG

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds,$$

$$+F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t,s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами; т.е.

$$a_{ij}(t),\ b_{ij}(t),\ c_{ij}(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad d_{ij}(t,s) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\tau]), \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

$\tau > 0$ — параметр запаздывания, $F(t,u_1,u_2,u_3)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Мы предполагаем, что $F(t,u_1,u_2,u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \leqslant q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\|, \qquad t \geqslant 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad q_j \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Наша цель — получить оценки для решений системы (1.1) на всей полуоси $\{t \geqslant 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений и указать скорость стабилизации.

Существует большое количество работ, посвященных изучению устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, см. [1]–[12] и библиографию в них). Исследователи часто используют функционалы Ляпунова–Красовского для получения условий устойчивости. Однако не каждый функционал Ляпунова–Красовского позволяет получить оценки, характеризующие скорость убывания на бесконечности. В последние годы исследования в этом направлении активно развиваются. Много работ посвящено дифференциальным уравнениям с запаздыванием и постоянными коэффициентами. В неавтономном случае количество соответствующих статей значительно меньше.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 24-21-00367), https://rscf.ru/project/24-21-00367/.

Эта статья продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, см. [13]–[19]). Мы исследовали системы с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Были установлены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности с использованием подходящих функционалов Ляпунова–Красовского. В [20] были изучены некоторые нелинейные системы с переменными коэффициентами и переменным сосредоточенным запаздыванием. В случае $C(t) \equiv 0$ системы вида (1.1) с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями исследованы в [21].

В этой статье мы рассмотрим неавтономные системы вида (1.1) с сосредоточенным и распределенным запаздываниями в случае $C(t) \not\equiv 0$; иными словами, мы имеем дело с системами нейтрального типа. Мы устанавливаем оценки для решений, которые позволят нам сделать вывод о том, являются ли решения устойчивыми. В случае экспоненциальной устойчивости мы указываем оценки на скорость стабилизации решений на бесконечности. Во втором параграфе мы устанавливаем оценки для решений систем в линейном случае ($F(t,u_1,u_2,u_3) \equiv 0$), в третьем параграфе — для решений нелинейных систем вида (1.1). Некоторые примеры даны в четвертом параграфе.

2. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе мы рассмотрим линейные системы вида (1.1) ($F(t,u_1,u_2,u_3) \equiv 0$). Вначале введем некоторые обозначения. Определим $(2n \times 2n)$-матрицу

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}$$

такую, что

$$\mathcal{H}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+), \qquad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle \geqslant h(t)\|u_1 - G(t)u_2\|^2, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где $h(t) \in C([0,\infty))$, $h(t) \geqslant h_0 > 0$, $G(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывными элементами. Определим матрицу $K(t,s)$ размера $(n \times n)$ такую, что

$$K(t,s) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\tau]), \quad K(t,s) = K^*(t,s), \quad K(t,s) > 0, \quad t \geqslant 0,\ s \in [0,\tau]. \tag{2.3}$$

Здесь и далее матричное неравенство $S > 0$ (или $S < 0$) означает, что S — положительно (отрицательно) определенная эрмитова матрица. Для матриц мы используем спектральную норму.

Определим матрицу

$$Q(t,s) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t,s) & Q_{12}(t,s) & Q_{13}(t,s) & Q_{14}(t,s) \\ Q_{12}^*(t,s) & Q_{22}(t,s) & Q_{23}(t,s) & Q_{24}(t,s) \\ Q_{13}^*(t,s) & Q_{23}^*(t,s) & Q_{33}(t,s) & Q_{34}(t,s) \\ Q_{14}^*(t,s) & Q_{24}^*(t,s) & Q_{34}^*(t,s) & Q_{44}(t,s) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

с элементами

$$\begin{aligned}
Q_{11}(t,s) &= -\frac{d}{dt}H_1(t) - H_1(t)A(t) - A^*(t)H_1(t) - K(t,0), \\
Q_{12}(t,s) &= -\frac{d}{dt}H_2(t) - A^*(t)H_2(t) - H_1(t)B(t), \\
Q_{13}(t,s) &= -H_1(t)C(t) - H_2(t), \\
Q_{14}(t,s) &= -\tau H_1(t)D(t,s), \\
Q_{22}(t,s) &= -\frac{d}{dt}H_3(t) - H_2^*(t)B(t) - B^*(t)H_2(t) + K(t,\tau), \\
Q_{23}(t,s) &= -H_2^*(t)C(t) - H_3(t), \\
Q_{24}(t,s) &= -\tau H_2^*(t)D(t,s), \\
Q_{33}(t,s) &= 0, \qquad Q_{34}(t,s) = 0, \\
Q_{44}(t,s) &= -\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}K(t,s)\right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds, \qquad t \geqslant 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений задачи (2.6).

Теорема 1. *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $K(t,s)$, удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.3) *и такие, что*

$$\left\langle Q(t,s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}\right\rangle \geqslant p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right\rangle + \tau k(t)\langle K(t,s)u_4, u_4\rangle, \tag{2.7}$$

$$u_j \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \quad s \in [0,\tau],$$

где $p(t)$, $k(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Тогда для решения $y(t)$ задачи (2.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t) - G(t)y(t-\tau)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{2.8}$$

где

$$V(0,\varphi) = \left\langle \mathcal{H}(0)\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle + \int\limits_{-\tau}^{0} \langle K(0,-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds, \tag{2.9}$$

$$\gamma(t) = \min\{p(t), k(t)\}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение задачи (2.6). В [18] был введен достаточно широкий класс функционалов Ляпунова–Красовского. Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $K(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, рассмотрим на $y(t)$ следующий функционал Ляпунова–Красовского из этого класса

$$V(t,y) = \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t,t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{2.11}$$

Дифференцируя этот функционал, имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle +$$

$$+\langle K(t,0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(t,\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t,t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Обозначим

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds.$$

Поскольку $y(t)$ удовлетворяет (2.6), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} z(t) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(t) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+\langle K(t,0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(t,\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t,t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Используя матрицу $Q(t,s)$, определенную в (2.4) и (2.5), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle Q(t,t-s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

В силу (2.7) мы приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leqslant -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle - k(t)\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t,t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Согласно определению функционала Ляпунова–Красовского (2.11), мы имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leqslant -\gamma(t)V(t,y),$$

где функция $\gamma(t)$ определена в (2.10). Это дифференциальное неравенство дает оценку

$$V(t,y) \leqslant V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.9). Используя (2.2), имеем

$$\|y(t) - G(t)y(t-\tau)\|^2 \leqslant \frac{1}{h(t)}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \frac{V(t,y)}{h(t)} \leqslant \frac{V(0,\varphi)}{h(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

откуда следует (2.8).

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть $G(t) \equiv 0$ и выполнены условия теоремы 1.

A. Если $\widetilde{\gamma}(t) = \int\limits_0^t \gamma(s)ds \geqslant 0$, тогда нулевое решение системы (1.1) устойчиво, при этом решение $y(t)$ задачи (2.6) удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}}, \qquad t > 0.$$

B. Если $\widetilde{\gamma}(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, тогда нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво, при этом скорость стабилизации определяется функцией

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

С. Если $\widetilde{\gamma}(t) \geqslant \gamma_1 t + \gamma_2$ с $\gamma_1 > 0$, тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво, при этом решение $y(t)$ задачи (2.6) удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right), \quad t > 0.$$

Рассмотрим следующее функционально-разностное уравнение

$$x(t) = G(t)x(t-\tau), \qquad t \geqslant 0, \tag{2.12}$$

где $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $G(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывными элементами. Системы вида (2.12) в литературе часто называют непрерывными по времени разностными системами с запаздыванием (см., например, [22]–[24]). Предположим, что нулевое решение системы (2.12) экспоненциально устойчиво; т.е. справедлива следующая оценка

$$\|x(t)\| \leqslant a_1 e^{-a_2 t} \max_{s\in[-\tau,0]} \|x_0(s)\|, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.13}$$

где a_1, $a_2 > 0$, $x_0(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная начальная вектор-функция, причем $x(t) = x_0(t)$ при $t \in [-\tau, 0]$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $G(t) \not\equiv 0$*, выполнены условия теоремы* 1 *и нулевое решение системы* (2.12) *экспоненциально устойчиво. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \geqslant \gamma_1 t + \gamma_2, \qquad \gamma_1 > 0, \tag{2.14}$$

тогда нулевое решение системы (1.1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу (2.8) для решения $y(t)$ задачи (2.6) справедливо неравенство

$$\|y(t) - G(t)y(t-\tau)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right), \quad t > 0.$$

Согласно определению

$$\sqrt{V(0,\varphi)} \leqslant \sqrt{2\|\mathcal{H}(0)\| + \tau \max_{s\in[0,\tau]} \|K(0,s)\|} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|.$$

Следовательно, чтобы получить оценку для $\|y(t)\|$, достаточно получить соответствующую оценку для решения следующей начальной задачи

$$\begin{aligned} &y(t) - G(t)y(t-\tau) = F(t), \quad t \geqslant 0,\\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \tag{2.15}$$

где вектор-функция $F(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(t)\| \leqslant \frac{\sqrt{2\|\mathcal{H}(0)\| + \tau \max\limits_{s\in[0,\tau]} \|K(0,s)\|}}{\sqrt{h_0}} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right) \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|.$$

Рассмотрим начальную задачу для неоднородного функционально-разностного уравнения

$$\begin{aligned} &z(t) = G(t)z(t-\tau) + f(t), \quad t \geqslant 0,\\ &z(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\psi(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция, $f(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$ удовлетворяет оценке

$$\|f(t)\| \leqslant b_1 e^{-b_2 t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.17}$$

$b_1, b_2 > 0$. Пусть $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, решение задачи (2.16) имеет вид

$$z(t) = G(t) \cdots G(t-(k-1)\tau)\psi(t-k\tau) + \sum_{j=0}^{k-1} G(t) \cdots G(t-(j-1)\tau) f(t-j\tau). \tag{2.18}$$

Нетрудно получить следующую оценку:

$$\|G(t) \cdots G(t-(j-1)\tau)\| \leqslant a_1 e^{-a_2 \tau (j-1)}, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.19}$$

Действительно, решение уравнения (2.12) может быть записано в виде

$$x(t) = G(t) \cdots G(t-(j-1)\tau) x_0(t-j\tau)$$

при $t \in [(j-1)\tau, j\tau]$, $j = 1, 2, \ldots$. В силу (2.13) мы имеем неравенство

$$\|x(t)\| = \|G(t) \cdots G(t-(j-1)\tau) x_0(t-j\tau)\| \leqslant a_1 e^{-a_2 t} \max_{s \in [-\tau, 0]} \|x_0(s)\| \leqslant a_1 e^{-a_2 \tau (j-1)} \max_{s \in [-\tau, 0]} \|x_0(s)\|,$$

которое дает нам (2.19). Из (2.18) мы имеем

$$\|z(t)\| \leqslant \|G(t) \cdots G(t-(k-1)\tau)\psi(t-k\tau)\| + \sum_{j=0}^{k-1} \|G(t) \cdots G(t-(j-1)\tau) f(t-j\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant a_1 e^{-a_2 t} \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\psi(s)\| + a_1 \sum_{j=0}^{k-1} e^{-a_2 \tau (j-1)} \|f(t-j\tau)\|$$

при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$. Используя (2.17), получаем

$$\|z(t)\| \leqslant a_1 e^{-a_2 t} \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\psi(s)\| + a_1 b_1 e^{a_2 \tau} \sum_{j=0}^{k-1} e^{-a_2 \tau j} e^{-b_2 (t-j\tau)} \tag{2.20}$$

при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма. *Пусть*

$$S = \sum_{j=0}^{k-1} \beta^j e^{-b(t-j\tau)}, \qquad 0 < \beta < 1, \quad b > 0.$$

Тогда при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$, *имеет место оценка*

$$S \leqslant \begin{cases} \left(1 - \beta e^{b\tau}\right)^{-1} e^{-bt} & \textit{при} \quad \beta e^{b\tau} < 1; \\ \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) e^{-bt} & \textit{при} \quad \beta e^{b\tau} = 1; \\ \left(\beta e^{b\tau} - 1\right)^{-1} e^{b(1-r)\tau} e^{-rbt} & \textit{при} \quad \beta e^{b\tau} > 1, \quad 0 < r < -\frac{1}{b\tau} \ln \beta < 1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай $\beta e^{b\tau} < 1$. Тогда

$$S = e^{-bt} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\beta e^{b\tau}\right)^j \leqslant e^{-bt} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\beta e^{b\tau}\right)^j = e^{-bt} \left(1 - \beta e^{b\tau}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим второй случай $\beta e^{b\tau} = 1$. Очевидно,

$$S = e^{-bt} \sum_{j=0}^{k-1} (1)^j = k e^{-bt} \leqslant \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) e^{-bt}.$$

Рассмотрим третий случай $\beta e^{b\tau} > 1$. Очевидно,

$$S = e^{-bt} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\beta e^{b\tau}\right)^j = \left(\beta e^{b\tau} - 1\right)^{-1} e^{-bt} \left(\beta^k e^{kb\tau} - 1\right) \leqslant \left(\beta e^{b\tau} - 1\right)^{-1} e^{-bt} \left(\beta e^{b\tau}\right)^k.$$

Поскольку $\beta < 1$, то существует $r > 0$ такое, что $\beta e^{rb\tau} < 1$. Следовательно,

$$S \leqslant \left(\beta e^{b\tau} - 1\right)^{-1} e^{-bt} e^{b(1-r)k\tau}.$$

Тогда при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$S \leqslant \left(\beta e^{b\tau} - 1\right)^{-1} e^{-bt} e^{b(1-r)(k-1)\tau} e^{b(1-r)\tau} \leqslant \left(\beta e^{b\tau} - 1\right)^{-1} e^{b(1-r)\tau} e^{-rbt}.$$

Отметим, что r может быть выбрано из неравенства

$$0 < r < -\frac{1}{b\tau} \ln \beta.$$

Лемма доказана.

Пусть $\beta = e^{-a_2\tau}$, $b = b_2$. Используя эту лемму, в силу (2.20) решение $z(t)$ задачи (2.16) экспоненциально стремится к нулю. Следовательно, решение $y(t)$ задачи (2.15) также экспоненциально стремится к нулю. Тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво, причем мы имеем оценки, характеризующие скорость убывания на бесконечности. Чтобы выписать эти оценки, достаточно воспользоваться неравенством (2.20) и леммой, доказанной выше, при

$$\beta = e^{-a_2\tau}, \quad b = b_2 = \frac{\gamma_1}{2}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{2\|\mathcal{H}(0)\| + \tau \max\limits_{s\in[0,\tau]} \|K(0,s)\|}}{\sqrt{h_0}} e^{-\gamma_2/2} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Если $\gamma_1 - 2a_2 < 0$, тогда для решения задачи (2.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leqslant \left(a_1 e^{-a_2 t} + d\left(1 - e^{(\gamma_1/2 - a_2)\tau}\right)^{-1} e^{-\gamma_1 t/2}\right) \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|,$$

где

$$d = a_1 e^{a_2\tau - \gamma_2/2} \frac{\sqrt{2\|\mathcal{H}(0)\| + \tau \max\limits_{s\in[0,\tau]} \|K(0,s)\|}}{\sqrt{h_0}}.$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Если $\gamma_1 - 2a_2 = 0$, тогда для решения задачи (2.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leqslant \left(a_1 e^{-a_2 t} + d\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) e^{-\gamma_1 t/2}\right) \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|.$$

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Если $\gamma_1 - 2a_2 > 0$, тогда для решения задачи (2.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leqslant \left(a_1 e^{-a_2 t} + d\left(e^{(\gamma_1/2 - a_2)\tau} - 1\right)^{-1} e^{\gamma_1(1-r)\tau/2} e^{-r\gamma_1 t/2}\right) \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|,$$

где $0 < r < \frac{2a_2}{\gamma_1}$.

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этом разделе мы исследуем нелинейные системы вида (1.1) при условии, что вектор-функция $F(t,u_1,u_2,u_3)$, определяющая нелинейные слагаемые, удовлетворяет условию (1.2). Рассмотрим начальную задачу

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + \\
&\qquad + \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds + F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t \geqslant 0, \\
&y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений задачи (3.1).

Пусть $\alpha(t) > 0$ — произвольная непрерывная функция. Введем функции

$$
\alpha_1(t) = 2q_1\|H_1(t)\| + \frac{(q_1\|H_2(t)\| + q_2\|H_1(t)\|)^2}{\alpha(t)}, \quad \alpha_2(t) = \alpha(t) + 2q_2\|H_2(t)\| \tag{3.2}
$$

и матрицу

$$
Q_\alpha(t,s) = Q(t,s) - \begin{pmatrix} \alpha_1(t)I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t)I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}
$$

где матрица $Q(t,s)$ определена в (2.4) и (2.5), I — единичная матрица.

Теорема 3. *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $K(t,s)$, удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.3) *и такие, что*

$$
\left\langle Q_\alpha(t,s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \right\rangle \geqslant p_\alpha(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \tau k_\alpha(t)\langle K(t,s)u_4, u_4\rangle, \tag{3.4}
$$

$$
u_j \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \quad s \in [0,\tau],
$$

где $p_\alpha(t)$, $k_\alpha(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Тогда для решения $y(t)$ задачи (3.1) *имеет место оценка*

$$
\|y(t) - G(t)y(t-\tau)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_\alpha(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.5}
$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.9), $\gamma_\alpha(t) = \min\{p_\alpha(t), k_\alpha(t)\}$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение задачи (3.1). Рассмотрим на $y(t)$ функционал Ляпунова–Красовского (2.11). Дифференцируя этот функционал и повторяя рассуждения как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$
\frac{d}{dt}V(t,y) = -\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle Q(t,t-s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds + W(t), \tag{3.6}
$$

где матрица $Q(t,s)$ определена в (2.4) и (2.5),

$$
\begin{aligned}
W(t) = &\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} F\left(t, y(t), y(t-\tau), \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle + \\
&+ \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F\left(t, y(t), y(t-\tau), \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

В силу определения матрицы $\mathcal{H}(t)$ имеем

$$W(t) \leqslant 2(\|H_1(t)\| \, \|y(t)\| + \|H_2(t)\| \, \|y(t-\tau)\|) \left\| F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \right\|.$$

Учитывая условие (1.2) получаем

$$W(t) \leqslant \beta_1(t)\|y(t)\|^2 + \beta_2(t)\|y(t)\| \, \|y(t-\tau)\| + \beta_3(t)\|y(t-\tau)\|^2, \tag{3.7}$$

где

$$\beta_1(t) = 2q_1\|H_1(t)\|, \quad \beta_2(t) = 2(q_1\|H_2(t)\| + q_2\|H_1(t)\|), \quad \beta_3(t) = 2q_2\|H_2(t)\|.$$

Очевидно, что для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$b_1u_1^2 + b_2u_1u_2 \leqslant \left(b_1 + \frac{b_2^2}{4\alpha}\right)u_1^2 + \alpha u_2^2.$$

Тогда правую часть неравенства (3.7) можно оценить следующим образом:

$$W(t) \leqslant \alpha_1(t)\|y(t)\|^2 + \alpha_2(t)\|y(t-\tau)\|^2,$$

где функции $\alpha_j(t)$, $j = 1, 2$, определены в (3.2), при этом $\alpha(t) > 0$ — произвольная непрерывная функция, которой можно управлять. С учетом этой оценки из (3.6) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leqslant -\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle Q_\alpha(t, t-s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds,$$

где матрица $Q_\alpha(t,s)$ определена в (3.3). Тогда, используя условие (3.4) и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, мы получаем оценку (3.5).

Теорема доказана.

Справедлив аналог теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть $G(t) \not\equiv 0$, выполнены условия теоремы 3 и нулевое решение системы* (2.12) *экспоненциально устойчиво. Если выполнено условие* (2.14), *тогда нулевое решение нелинейной системы* (1.1) *экспоненциально устойчиво.*

По аналогии с предыдущим параграфом можно сформулировать следствия и указать оценки экспоненциального убывания решений нелинейной системы (1.1).

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим несколько примеров систем с запаздыванием вида (1.1).

Пример 1. Пусть $C(t) \equiv 0$. Если $A(t)$, $B(t)$ есть T-периодические матрицы, $D(t,s) \equiv 0$, линейные и нелинейные системы с запаздыванием и периодическими линейными членами исследовались в [13]. Мы использовали функционал Ляпунова–Красовского вида (2.11), где

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K(t,s) = K(s),$$

причем $H(t) = H^*(t) > 0$ есть T-периодическая матрица, $K(s) = K^*(s) > 0$, $s \in [0, \tau]$. Оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности и оценки для областей притяжения были получены в явном виде.

Системы вида (1.1) с переменными коэффициентами и двумя видами запаздываний (сосредоточенное и распределенное) при $C(t) \equiv 0$ изучались в [21]. В этом случае достаточно взять

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Очевидно, неравенство (2.2) выполнено при $G(t) \equiv 0$, где $h(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Следовательно, используя теорему 1 (или теорему 3) и следствие 1, мы имеем оценки для решений задачи (2.6) (или задачи (3.1)) на всей полуоси $\{t \geqslant 0\}$, на основании которых можно сделать выводы об устойчивости решений (в частности, экспоненциальной или асимптотической устойчивости) и указать оценки на скорость стабилизации. Следует отметить, что в [21] мы также исследовали нелинейные системы вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds + F\left(t, y(t), y(t-\tau), \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds\right), \qquad t \geqslant 0,$$

где $F(t,u_1,u_2,u_3)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u_1, u_3 и неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \leqslant q\|u_1\|^{1+\omega}, \qquad t \geqslant 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad q,\ \omega \geqslant 0.$$

Отметим, что функционалы вида (2.11) могут быть использованы для исследования моделей, описываемых системами дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, [25], [26]).

Пример 2. Пусть $C(t)$ — ненулевая постоянная матрица; т. е. $C(t) \equiv C$. Если $A(t)$, $B(t)$ суть T-периодические матрицы, $D(t,s) \equiv 0$, то линейные и нелинейные системы нейтрального типа с периодическими линейными членами были изучены в [14, 17]. Мы использовали функционал Ляпунова – Красовского вида (2.11) с

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & -H(t)C \\ -C^*H(t) & C^*H(t)C \end{pmatrix}, \qquad K(t,s) = K(s),$$

где $H(t) = H^*(t) > 0$ есть T-периодическая матрица, $K(s) = K^*(s) > 0$, $s \in [0,\tau]$. Оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности и оценки для областей притяжения были получены в явном виде. Очевидно,

$$\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle H(t)(u_1 - Cu_2), (u_1 - Cu_2)\rangle$$

и (2.2) выполнено при $G(t) \equiv C$, где $h(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Чтобы использовать теоремы 2, 4 и соответствующие следствия, нам нужно определить a_1, a_2 в (2.13). Из результатов в [27], [28] вытекают следующие теоремы.

Теорема 5. *Нулевое решение системы* (2.12) *при* $G(t) \equiv C$ *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово решение* $L > 0$ *дискретного уравнения Ляпунова*

$$L - C^*LC = I. \tag{4.1}$$

Теорема 6. *Пусть* $L = L^* > 0$ — *решение уравнения* (4.1). *Для решений системы* (2.12) *при* $G(t) \equiv C$ *имеет место следующая оценка:*

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\mu(L)}\exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\|L\|}\right)}{2\tau}t\right)\max_{s\in[-\tau,0]}\|x_0(s)\|,$$

где $\mu(L) = l_{\min}^{-1}\|L\|$, $l_{\min} \geqslant 1$ — *минимальное собственное число матрицы* L.

Следовательно, мы можем взять $a_1 = \sqrt{\mu(L)}$, $a_2 = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\|L\|}\right)}{2\tau}$. В [14, 17] мы использовали значения, зависящие от $\|C^m\|$, где $m > 0$ — минимальное целое число, при котором $\|C^m\| < 1$. Теорема 5 гарантирует, что спектр матрицы C принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| < 1\}$. Поэтому такое m существует. Отметим, что (2.14) выполнено, если $\gamma_1 = \int\limits_0^T \gamma(s)ds > 0$. Действительно, в этом случае

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \geqslant \gamma_1 t + (\min_{s\in[0,T]}\gamma(s) - \gamma_1)T.$$

Поэтому мы можем взять $\gamma_2 = (\min\limits_{s\in[0,T]}\gamma(s) - \gamma_1)T$.

Пример 3. Пусть $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ суть T-периодические матрицы и $D(t,s)$ есть T-периодическая матрица по t. Рассмотрим функционал Ляпунова–Красовского вида (2.11) с

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & -H(t)C(t) \\ -C^*(t)H(t) & C^*(t)H(t)C(t) \end{pmatrix},$$

где $H(t) = H^*(t) > 0$. Очевидно,

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle H(t)(u_1 - C(t)u_2), (u_1 - C(t)u_2) \rangle$$

и (2.2) выполнено при $G(t) = C(t)$, где $h(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Чтобы использовать теоремы 2, 4 и соответствующие следствия, нужно определить a_1, a_2 в (2.13). Из результатов в [29]–[31] вытекают следующие теоремы.

Теорема 7. *Нулевое решение системы* (2.12) *при* $G(t) \equiv C(t)$ *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово* T*-периодическое непрерывное решение* $L(t) > 0$ *функционально-разностного уравнения Ляпунова*

$$L(t-\tau) - C^*(t)L(t)C(t) = I, \qquad t \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Теорема 8. *Пусть* $L(t) = L^*(t) > 0$ *есть* T*-периодическое непрерывное решение уравнения* (4.2). *Для решений системы* (2.12) *с* $G(t) \equiv C(t)$ *справедлива следующая оценка:*

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\mu(L)} \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{L_{\max}}\right)}{2\tau} t \right) \max_{s\in[-\tau,0]} \|x_0(s)\|,$$

где $\mu(L) = l_{\min} L_{\max}$, $l_{\min} = \left(\min\limits_{s\in[0,T]} l_{\min}(s)\right)^{-1}$, $L_{\max} = \max\limits_{s\in[0,T]} \|L(s)\|$, $l_{\min}(t) \geqslant 1$ *— минимальное собственное значение матрицы* $L(t)$.

Следовательно, мы можем взять $a_1 = \sqrt{\mu(L)}$, $a_2 = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{L_{\max}}\right)}{2\tau}$.

Замечание 1. Если $A(t)$, $C(t)$ суть T-периодические матрицы, $B(t) = \frac{d}{dt}C(t)$, и $D(t,s)$ есть T-периодическая матрица по t, то системы вида (1.1) изучались в [31], при этом использовался функционал Ляпунова–Красовского вида (2.11) при

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & -H(t)C(t) \\ -C^*(t)H(t) & C^*(t)H(t)C(t) \end{pmatrix}, \qquad K(t,s) = (\tau - s)P(s) + M(s, t-s).$$

Замечание 2. Если $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ суть T-периодические матрицы и $D(t,s) \equiv 0$, то линейные и нелинейные системы нейтрального типа с периодическими линейными членами изучались в [15, 16, 18, 19]. Используя специальные функционалы Ляпунова–Красовского, в явном виде были получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности и оценки для областей притяжения.

Пример 4. Рассмотрим системы вида (1.1), где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t,s)$ — матрицы с непрерывными вещественнозначными элементами. Пусть выполнены условия теоремы 1 (или теоремы 3). Чтобы использовать теорему 2 (или теорему 4) и соответствующие следствия, нужно определить a_1, a_2 в (2.13). Имеют место следующие утверждения, доказательство которых проводится по классической схеме.

Теорема 9. *Нулевое решение системы* (2.12) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово непрерывное ограниченное решение* $L(t) > 0$ *функционально-разностного уравнения Ляпунова*

$$L(t-\tau) - G^*(t)L(t)G(t) = I, \qquad t \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Теорема 10. *Пусть* $L(t) = L^*(t) > 0$ *— непрерывное решение уравнения* (4.3), *причем* $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|L(t)\| < \infty$. *Для решений системы* (2.12) *справедлива следующая оценка:*

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\mu(L)} \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{L_{\sup}}\right)}{2\tau} t\right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|x_0(s)\|,$$

где $\mu(L) = l_{\min} L_{\sup}$, $l_{\min} = \left(\min\limits_{s \geqslant 0} l_{\min}(s)\right)^{-1}$, $L_{\sup} = \sup\limits_{s \geqslant 0} \|L(s)\|$, $l_{\min}(t) \geqslant 1$ *— минимальное собственное значение матрицы* $L(t)$.

Следовательно, мы можем взять $a_1 = \sqrt{\mu(L)}$, $a_2 = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{L_{\sup}}\right)}{2\tau}$.

Автор выражает благодарность Г.В. Демиденко за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.
4. Избранные труды Н.В. Азбелева. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
5. *Долгий Ю.Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.
6. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.
7. *Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations // Math. Appl. V. 463. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
8. *Michiels W., Niculescu S.I.* Stability, control, and computation for time-delay systems. An eigenvalue-based approach, Advances in Design and Control, vol. 27. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
9. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.
10. *Kharitonov V.L.* Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices, Control Engineering. New York: Birkhauser, Springer, 2013.
11. *Gil' M.I.* Stability of neutral functional differential equations, Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 3. Paris: Atlantis Press, 2014.
12. *Park J.H., Lee T.H., Liu Y., Chen J.* Dynamic systems with time delays: stability and control, Springer, Singapore, 2019.
13. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. матем. ж. 2007. Т. 48. № 5. С. 1025–1040.
14. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. ж. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.
15. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. матем. ж. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352.

16. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 6. С. 730–740.

17. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. матем. ж. 2019. Т. 60. № 5. С. 1063–1079.

18. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22. № 3. С. 96–103.

19. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 4. С. 612–620.

20. *Матвеева И.И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 3. С. 579–594.

21. *Matveeva I.I.* Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Сиб. электрон. матем. изв. 2021. Т. 18. № 2. С. 1689–1697.

22. *Gu K.* Stability problem of systems with multiple delay channels // Automatica. 2010. V. 46. P. 743–751.

23. *Damak S., Di Loreto M., Mondie S., Brun X.* Exponential stability with decay rate estimation for linear difference equations // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. V. 61. № 1. P. 252–257.

24. *Melchor-Aguilar D.* On Lyapunov functionals for linear functional difference equations // Systems & Control Letters. 2019. V. 127. P. 1–5.

25. *Скворцова М.А., Ыскак Т.* Асимптотическое поведение решений в одной модели “хищник-жертва” с запаздыванием // Сиб. матем. ж. 2021. Т. 62. № 2. С. 402–416.

26. *Скворцова М.А., Ыскак Т.* Оценки решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25. № 4. С. 193–205.

27. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

28. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

29. *Demidenko G.V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comput. Math. Optim. 2010. V. 6. № 1. P. 1–12.

30. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* On estimates of solutions to one class of functional difference equations with periodic coefficients // In: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov’s Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov (Editors: Demidenko G.V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.). Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 101–109.

31. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

ESTIMATES OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONAUTONOMOUS SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE WITH CONCENTRATED AND DISTRIBUTED DELAYS

I. I. Matveeva*

Novosibirsk State University, Pirogov St., 1, Novosibirsk, 630090 Russia
*e-mail: i.matveeva@g.nsu.ru
Received: 02 April, 2024
Revised: 02 April, 2024
Accepted: 02 May, 2024

Abstract. A class of systems of nonautonomous differential equations of neutral type with concentrated and distributed delays is considered. By using a Lyapunov—Krasovskii functional, estimates are established imply whether the solutions are stable. In the case of exponential stability, estimates for the stabilization rate of the solutions at infinity are given.

Keywords: systems of neutral type, variable coefficients, estimates of solutions, stability, Lyapunov—Krasovskii functional.