

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ И ТРУБАХ С ПОМОЩЬЮ НОВОЙ ЛОКАЛЬНО НЕЯВНОЙ СХЕМЫ ГОДУНОВСКОГО ТИПА

© 2024 г. Н. А. Зайцев^{1,*}, Ю. Г. Рыков^{1,**}

¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В.Келдыша, ИПМ РАН, Россия

*e-mail: nikolai_zaitsev@mail.ru

**e-mail: yu-rykov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.

Переработанный вариант 15.03.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

Представлена численная схема нового класса для расчета нестационарных закрученных течений в соплах и трубах на основе уравнений сжимаемого невязкого газа. Основным достоинством таких схем является способность эффективно проводить расчеты нестационарных задач, содержащих различные масштабы. Конструкция схем такого типа основана на хорошо известном подходе Годунова, заключающемся в расчете потоков на гранях расчетных ячеек (объемов) из решения вспомогательных одномерных задач в окрестности каждой грани и аппроксимации законов сохранения. На основе анализа текущего решения в окрестности грани происходит переключение с явной схемы для расчета потока на неявную. Схема абсолютно устойчива и не порождает паразитных осцилляций. Работоспособность данной схемы продемонстрирована на задаче расчета нестационарных закрученных течений в соплах и трубах. Исследованы особенности постановки задач указанного типа, предложены варианты корректной постановки задач. Исследованы свойства решений задачи о течении закрученных потоков при наличии центрального тела, покрывающего не всю ось симметрии в расчетной области. Библ. 7. Фиг. 11.

Ключевые слова: консервативная локально неявная схема с пересчетом, схема годуновского типа, течение закрученного газа в сопле, сверхзвуковое течение, ударные волны, разномасштабные задачи.

DOI: 10.31857/S0044466924080164, EDN: XZUOOM

ВВЕДЕНИЕ

При создании новых численных методов для решения системы уравнений Эйлера большие усилия тратятся на преодоление двух основных трудностей: расчету разрывных решений и минимизацией вычислительной работы. Среди огромного количества численных методов расчета разрывных решений особое место принадлежит методу Годунова [1, 2]. Центральным пунктом годуновских схем является алгоритм вычисления потоков консервативных переменных через границы разностной сетки. В оригинальном варианте метода эти потоки вычислялись из точного решения задачи о распаде разрыва между состояниями в двух соседних ячейках. Однако решение задачи о распаде произвольного разрыва требует организации итерационного процесса и больших затрат вычислительных мощностей. По этой причине рядом авторов были предложены методы приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва (см., например, [3], [4]). Строгая консервативность схем обеспечивается дивергентным замыканием — явной аппроксимацией интегральных законов сохранения для каждой расчетной ячейки (объема).

Вторая трудность, с которой приходится бороться, это минимизация вычислительной работы. Прежде всего за счет увеличения шага по времени. Если этот шаг диктуется не сложностью решения, а условиями устойчивости схемы, то совершается лишняя вычислительная работа. Эта проблема решается отчасти переходом к неявным схемам, но решить систему разностных уравнений для многомерной неявной схемы, это задача того же порядка сложности. Этим недостатком не обладают неявные схемы, которые вычисляют потоки на гранях расчетной ячейки на основе решения одномерных задач, которые эффективно решаются методом прогонки. К этому направлению принадлежат схемы независимых потоков [5, 6]. Но неявные схемы больше размазывают имеющиеся в решении разрывы, хуже отслеживают скорость и направление распространения информации и зачастую обладают более плохими осцилляционными свойствами, чем явные схемы. Поэтому качество

численного решения будет лучше, если использовать неявную схему только там, где это диктуется условием устойчивости и использовать явную схему везде, где это возможно.

В данной работе представлена консервативная локально-неявная схема годовновского типа, предназначенная для быстрого расчета нестационарных краевых разномасштабных газодинамических задач с особенностями в решении, такими как газодинамические разрывы, большие градиенты, области с низким давлением и т. п. Эта схема является развитием идеи локально неявной консервативной схемы независимых потоков с пересчетом, разработанной Ю. Б. Радвогиным в [6] для линейных гиперболических систем уравнений. В настоящей работе мы обобщили схему Радвогина для нелинейной начально-краевой задачи о закрученном потоке невязкого сжимаемого газа в канале с центральным телом, описываемом системой уравнений Эйлера.

Мы называем эту схему локально неявной консервативной с пересчетом. Основная особенность этого метода — способность эффективно решать задачи разного масштаба. А именно, хотя в некоторых областях (или по некоторым направлениям и т. д.) течение достаточно регулярное, можно использовать большой шаг по пространству и использовать явную схему (что предпочтительнее из-за более высокого разрешения, лучших свойств устойчивости и т. д.), в других областях течение может проявлять нерегулярное поведение со сложной тонкой структурой и требует мелкого шага по пространству. Использование явной схемы в таких случаях обременительно из-за жесткого ограничения на шаг по времени. В этом случае в нашей схеме используется неявный вариант схемы и сохраняется достаточно большой шаг по времени. Такая методология позволяет эффективно рассчитывать задачи разного масштаба в целом.

Предлагаемая нами схема для уравнений Эйлера, вслед за схемами а [6] построена на следующих принципах:

- Схема является схемой годовновского типа, т.е. решение на следующем временном слое вычисляется на основе дивергентного замыкания, аппроксимирующего систему законов сохранения. Все разнообразие схем такого типа определяется различными способами расчета потоков на гранях расчетных ячеек (объемов).
- Потоки на гранях расчетных ячеек рассчитываются независимо для каждого направления на основе вспомогательных одномерных задач.
- Везде, где это возможно используется локально явная схема.
- Если число Куранта для данного направления данной характеристики в данной точке превышает единицу, то используется локально неявная схема.
- Переключение между различными типами локальной схемы должно быть непрерывным.
- Используется принцип разностей против потока, т.е. используются характеристические свойства уравнений.

Ниже подробно описана реализация предложенной методики расчета нестационарных процессов в закрученных потоках в соплах нетривиальной геометрии. В качестве базовой модели мы используем уравнения Эйлера в цилиндрических координатах. Закрутка в сочетании с эффектами продольного течения и геометрии порождает сложные нестационарные режимы с почти периодическим поведением, возможными бифуркациями и перестройкой течения. Кроме того, такая задача, очевидно, имеет как минимум два масштаба, унаследованных от геометрии: продольное направление и радиальное направление. В радиальном направлении нам нужна гораздо более мелкая сетка, чтобы уловить особенности потока. Таким образом, задача о закрученном потоке в трубках/соплах подходит для проверки локально неявной методики.

Наш опыт показывает, что дозвуковой режим для закрученных потоков, вообще говоря, проще сверхзвукового. Поэтому мы будем проводить демонстрационные расчеты для случаев, когда по продольной координате возникает локально сверхзвуковое течение. Расчеты выявили колеблющуюся ударную волну и развивающиеся вихри в диффузоре. Эти вихри могут расти, толкать ударную волну и разрушать ее. Затем ударная волна снова возникает возле горловины сопла, приближается к диффузору и процесс повторяется.

Наша работа организована следующим образом. В разд. 1 мы строго формулируем задачу, а в разд. 2 описываем основные принципы численной схемы. Разд. 3 посвящен численному методу для уравнений Эйлера с учетом граничных условий, а в разд. 4 мы сосредоточимся на модификации метода для случая осесимметричных течений с закруткой в канале с центральным телом. Наконец, в разд. 5 мы представляем результаты расчетов и соответствующее обсуждение, включая возможность расчета уравнений Навье—Стокса с помощью этого метода.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нестационарное осесимметричное течение закрученного невязкого газа в сопле с закручивающим устройством, см. фиг. 1.

Соответствующую систему дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах (с учетом того, что производные по углу обращаются в нуль) можно представить в следующих двух основных формах.

1. Дивергентная форма:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial r} = \hat{Q}, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}; \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ Hu \end{pmatrix}; \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ P + \rho v^2 \\ \rho vw \\ Hv \end{pmatrix}; \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} -\rho v/r \\ -\rho uv/r \\ \rho(w^2 - v^2)/r \\ -2\rho vw/r \\ -Hv/r \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ обозначает плотность; P — давление; u, v и w — аксиальная, радиальная и тангенциальная компоненты скорости соответственно; c — скорость звука; $e = E + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, $H = W + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$; E и $W = E + P$ — внутренняя энергия и энтальпия единицы объема.

Будем считать, что газ совершенен, т.е. $E = \frac{1}{\gamma-1}P$, $c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$, $\gamma = \text{const.}$

2. Невыводящая форма:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial X}{\partial z} + \hat{B} \frac{\partial X}{\partial r} = \hat{D}, \quad (2)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ P \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \rho v/r \\ 0 \\ w^2/r \\ -vw/r \\ \rho c^2 v/r \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Геометрия задачи (см. фиг. 1) определяется следующими параметрами: $z = 0$ — входное сечение, $z = L$ — выходное сечение; $r = R_w(z)$ и $r = R_b(z)$ — зависимость радиуса стенки сопла и радиуса стенки центрального тела от z . Заметим, что центральное тело может простирается как вдоль всего сопла ($R_b(z) \neq 0$), так и только вдоль его передней части ($R_b(z) \equiv 0$ при $z > z^*$), а может отсутствовать ($R_b(z) \equiv 0$).

Для простоты постановки входных граничных условий полагаем, что в некоторой окрестности входного сечения обе границы представляют собой цилиндрические поверхности, т.е. $\frac{dR_w}{dz} = \frac{dR_b}{dz} \equiv 0$ на интервале $0 \leq z \leq z_1$.

На границах расчетной области задаются следующие граничные условия.

1. Во входном сечении:

$$v = 0, \quad w = k(r)u. \quad (3)$$

Первое условие обусловлено цилиндрической геометрией входной части сопла, а второе условие имитирует закрутку, создаваемую закручивающим устройством лопатного типа. А именно, полагаем, что поток после прохождения лопаток поворачивается на угол α_{in} : $\tan(\alpha_{in}) = k(r)$. Зависимость α_{in} от r моделирует крутку лопаток, т.е. зависимость угла поворота лопатки от r .



Фиг. 1. Общая схема расчетной области: 1 — входная область, 2 — форкамера, 3 — горловина, 4 — диффузор, 5 — рабочая камера, 6 — конфузор, 7 — выходная область, 8 — центральное тело.

Мы будем предполагать, что вход в сопло дозвуковой. В дозвуковом входном сечении необходимы четыре граничных условия. Таким образом, кроме двух кинематических условий (3) необходимо указать еще два условия. Такими условиями может быть, например, определение любой пары следующих функций: $P(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$, где T — температура. Однако зависимость этих функций от r неизвестна и предположение о их постоянстве относительно r вряд ли верно. Поэтому более естественным путем является задание состояния газа, покоящегося в газгольдере — резервуаре большого объема, из которого газ поступает к лопаткам закручивающего устройства. Такое состояние можно определить через два параметра покоя: либо (P_0, T_0) , либо (P_0, ρ_0) , либо (ρ_0, T_0) . Поскольку процесс истечения газа из газгольдера к лопаткам можно рассматривать как стационарный и адиабатический, будем считать, что на входе в сопло энтропия $S = P\rho^{-\gamma}$ и интеграл Бернулли $B = \frac{1}{\rho}H$ равны своим значениям в критической точке, т.е. равны известным значениям S_0 и B_0 . Следовательно, к двум линейным граничным условиям (3) необходимо добавить два нелинейных условия:

$$P\rho^{-\gamma} = S_0, \quad (4)$$

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2[1 + k^2(r)]}{2} = B_0 \quad (5)$$

где $S_0 = P_0\rho_0^{-\gamma}$, $B_0 = \frac{c_0^2}{\gamma - 1}$ (условие (3) учитывается в граничном условии (5)).

2. В выходном сечении возможны два случая. Первый случай — выходная секция сверхзвуковая. Тогда граница не требует никаких граничных условий. Второй случай — дозвуковое выходное сечение. Тогда для корректной постановки задачи необходимо наложить одно граничное условие (предполагается положительность u_{out}). Обычно в качестве такого граничного условия задается постоянное давление:

$$P = P_{\text{out}}. \quad (6)$$

3. На стенке сопла и на поверхности центрального тела ставятся условия непротекания:

$$\frac{v_w}{u_w} = R'_w(z), \quad \frac{v_b}{u_b} = R'_b(z). \quad (7)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по z .

Заметим, что на оси z (где нет центрального тела) никаких дополнительных граничных условий не требуется (точнее, требуется только ограниченность решения). Из-за осевой симметрии имеем для $r = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} = v = w = 0.$$

Эти соотношения можно использовать в численном алгоритме, чтобы избежать потери аппроксимации, связанной с особенностью координат.

Для проведения расчетов используется расчетная система координат. Геометрия задачи позволяет легко перейти к простой расчетной области, введением нормирующей координаты ξ :

$$r = \xi R_w(z) + (1 - \xi) R_b(z).$$

Теперь область расчета представляет собой прямоугольник $\Omega : \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq z \leq L\}$.

В координатах (z, ξ) система (1) принимает форму

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \xi} = Q, \quad (8)$$

где

$$F = \hat{F}, \quad G = c_B \hat{G} - c_A \hat{F}, \quad Q = \hat{Q} - \frac{\partial c_A}{\partial \xi} \hat{F},$$

$$c_B = 1/(R_w - R_b), \quad c_A = c_B [\xi R'_w + (1 - \xi) R'_b], \quad \frac{\partial c_A}{\partial \xi} = c_B [R'_w - R'_b].$$

Для недивергентной формы (2) имеем в новых координатах:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial z} + B \frac{\partial X}{\partial \xi} = D, \quad (9)$$

где

$$A = \hat{A}, \quad B = c_B \hat{B} - c_A \hat{A}, \quad D = \hat{D}. \quad (10)$$

Итак, мы рассматриваем решение начально-краевой задачи для системы (8) (или (9)) с граничными условиями (3)–(7).

2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Особенностью рассматриваемой задачи является вытянутая вдоль оси z геометрия сопла, что приводит к различию геометрических масштабов вдоль оси z и вдоль оси r , что в свою очередь приводит к необходимости использовать по радиусу более мелкую сетку. К тому же требованию приводит наличие закрутки потока газа: при приближении линий тока к оси z возникают большие градиенты в потоке из-за резкого роста тангенциальной скорости. Таким образом, естественно использовать для решения этой задачи неявную схему по r (по ξ) и явную по z . Последняя дешевле и лучше разрешает движущиеся ударные волны. Практика численных расчетов показывает, что неявные схемы имеют меньшую разрешающую способность, чем явные, и поэтому желательно минимизировать объем их использования.

Приемлемый компромисс может быть достигнут при использовании следующего принципа: использовать неявную схему в тех и только тех ситуациях, когда модуль соответствующего числа Куранта превышает единицу. Схемы, удовлетворяющие этому условию, можно назвать *локально-неявными*. Понятно, что такие схемы нелинейны и их структура зависит от локальных свойств решений. Что касается продольной координаты z , структура течения диктует выбор явной схемы.

Таким образом, эффективная для этой задачи схема должна обладать следующими свойствами:

- 1) явная по направлению координаты z ;
- 2) локально-неявная по направлению координаты ξ , т.е. в зависимости от значения числа Куранта становится либо явной, либо неявной;
- 3) переключение между явной и неявной схемами должно быть непрерывным.

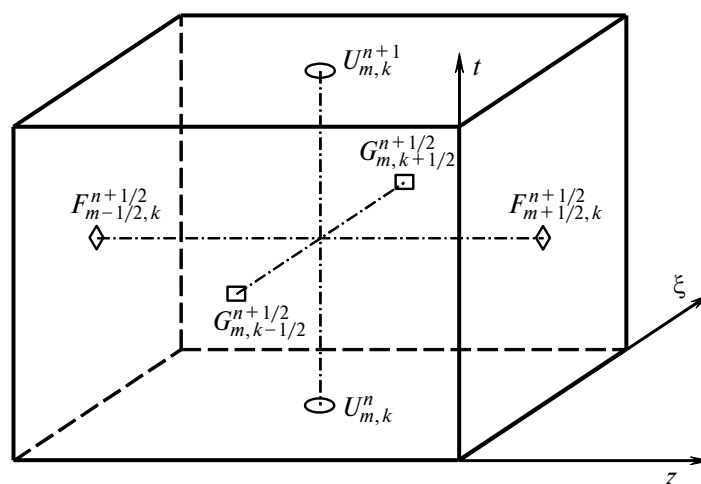
Опыт использования различных локально-неявных схем подтвердил их эффективность [7], [6].

Мы будем пользоваться технологией конструирования локально-неявных консервативных схем с пересчетом, предложенной в [6] для системы линейных двумерных гиперболических уравнений. Там же доказана абсолютная устойчивость этой схемы. Если использование неявного варианта схем ограничить только одним направлением (в нашем случае поперек оси z , то схема будет устойчива при числе Куранта по явному направлению меньше 1. Поскольку устойчивость разностной схемы в признаке устойчивости Неймана (спектральный признак) применяется к линеаризованным уравнениям с замороженными коэффициентами, доказательство устойчивости приведенное в [6] применимо и к предлагаемой здесь схеме для уравнений Эйлера.

3. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Следуя методологии понятия конечных объемов, мы разбиваем расчетную область в пространстве (t, z, ξ) на объемы координатными поверхностями $t = t^n \equiv \tau n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $z = z_{m+1/2} \equiv h_z m$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $h_z = L/M$; $\xi = \xi_{k+1/2} \equiv h_\xi k$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, $h_\xi = 1/K$. Значения сеточных функций $U_{m,k}^n$ на верхнем и нижнем слоях по времени будем относить к центрам этих пространственных ячеек $z_m = h_z(m - 1/2)$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $\xi_k = h_\xi(k - 1/2)$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$ т.е. $U_{m,k}^n = U(t^n, z_m, \xi_k)$.

Предлагаемый алгоритм использует обе формы основной системы: недивергентную (9) и дивергентную (8). Основным элементом алгоритма является расчет потоков F и G на боковых сторонах расчетной ячейки, т.е. $F_{m+1/2,k}$, $G_{m,k+1/2}$ (см. фиг. 2).



Фиг. 2. Расчетная ячейка.

Начнем с z -направления, для которого потоки можно вычислить по явной схеме. При построении этой схемы используются левые собственные векторы ψ^A матрицы Якоби $\frac{\partial F}{\partial U}$ и ее собственные значения λ^A . Пусть φ^A — левый собственный вектор матрицы A : $\varphi^A A = \lambda^A \varphi^A$. Поскольку $\psi^A \frac{\partial F}{\partial U} = \lambda^A \psi^A$ и $\frac{\partial F}{\partial U} = \frac{\partial U}{\partial X} A \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^{-1}$, то $\psi^A = \varphi^A \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^{-1}$.

Матрица A имеет следующие собственные значения и векторы:

$$\lambda_1^A = \lambda_2^A = \lambda_3^A = u, \quad \lambda_4^A = u + c, \quad \lambda_5^A = u - c,$$

$$\phi_1^A = (c^2, 0, 0, 0, -1), \quad \phi_2^A = (0, 0, 1, 0, 0), \quad \phi_3^A = (0, 0, 0, 1, 0), \quad \phi_4^A = (0, \rho c, 0, 0, 1), \quad \phi_5^A = (0, \rho c, 0, 0, -1).$$

Матрица $\frac{\partial U}{\partial X}$ имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{V^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{1}{\gamma - 1} \end{pmatrix},$$

где $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Тогда в качестве ψ_i^A имеем следующие векторы:

$$\begin{aligned} \psi_1^A &= \left(\frac{c^2}{\gamma - 1} - \frac{V^2}{2}, u, v, w, -1 \right); \\ \psi_2^A &= (-v, 0, 1, 0, 0); \\ \psi_3^A &= (-w, 0, 0, 1, 0); \\ \psi_4^A &= \left(-\frac{uc}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2}, \frac{c}{\gamma - 1} - u, -v, -w, 1 \right); \\ \psi_5^A &= \left(-\frac{uc}{\gamma - 1} - \frac{V^2}{2}, \frac{c}{\gamma - 1} + u, v, w, -1 \right). \end{aligned}$$

Определим неизвестные потоки F из следующей одномерной системы:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Заморозим матричные коэффициенты и после преобразования (11) к диагональному виду получим для инвариантов $I_i^A = \psi_i^A F$ следующую систему:

$$\frac{\partial I_i^A}{\partial t} + \lambda_i^A \frac{\partial I_i^A}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Затем на основании вышеизложенного выводится алгоритм расчета $F_{m+1/2,k}$.

- 1) Расчет $X_{m+1/2,k}$ на боковой стороне с помощью простого усреднения по точкам (m, k) и $(m + 1, k)$.
- 2) Расчет $(\psi_i^A)_{m+1/2,k}$ и $(\lambda_i^A)_{m+1/2,k}$ по $X_{m+1/2,k}$ для всех $i = 1, \dots, 5$.
- 3) Определение $F_{m+1/2,k}$ из системы линейных уравнений, $i = 1, \dots, 5$:

$$(\psi_i^A)_{m+1/2,k} F_{m+1/2,k} = \begin{cases} (\psi_i^A F)_{m,k}, & (\lambda_i^A)_{m+1/2,k} > 0 \\ (\psi_i^A F)_{m+1,k}, & (\lambda_i^A)_{m+1/2,k} < 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Чтобы изменение знака λ_i^A не приводило к нефизическим решениям, в алгоритм включен анализ знаков λ_i^A в точках, соседних с данной гранью (по m). В случае $(\lambda_i^A)_{m,k} (\lambda_i^A)_{m+1,k} < 0$ соответствующее уравнение в системе (13) необходимо изменить следующим образом:

$$(\psi_i^A)_{m+1/2,k} F_{m+1/2,k} = (\psi_i^A)_{m+1/2,k} \frac{F_{m,k} + F_{m+1,k}}{2}.$$

Для входного сечения четыре уравнения системы (13), соответствующие положительным λ_i^A , заменяются граничными условиями. Для дозвукового выхода последнее уравнение из (13) заменяется граничным условием

$P = P_{\text{out}}$. В случае сверхзвукового выхода правая часть в (13) полностью определена (ввиду положительности всех λ_i^A на такой границе).

Собственные векторы ψ_i^A , необходимые для расчета граничных потоков, вычисляются не путем усреднения по соседним точкам (это невозможно), а путем простой экстраполяции или даже переноса значений ψ_i^A из соседней внутренней точки.

Теперь давайте обратимся к направлению ξ . Как и в случае направления z потоки G на гранях расчетной ячейки определим из одномерной системы. Но поскольку в рассматриваемой задаче поперечные этому направлению скачки отсутствуют, расчет соответствующих потоков G можно провести, используя одномерную часть недивергентной формы основной системы (9):

$$\frac{\partial X}{\partial t} + B \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0. \quad (14)$$

Это заметно сокращает время расчета, так как упрощает формулы. Согласно (10) матрица имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} c_B u - c_A v & -c_A \rho & c_B v & 0 & 0 \\ 0 & c_B u - c_A v & 0 & 0 & -\frac{c_A}{\rho} \\ 0 & 0 & c_B u - c_A v & 0 & \frac{c_B}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & c_B u - c_A v & 0 \\ 0 & -c_A \rho c^2 & c_B \rho c^2 & 0 & c_B u - c_A v \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B имеют вид:

$$\lambda_1^B = \lambda_2^B = \lambda_3^B = -c_A u + c_B v, \quad \lambda_4^B = \lambda_1^B + d, \quad \lambda_5^B = \lambda_1^B - d,$$

где $d = \sqrt{c_A^2 + c_B^2}$.

Им соответствуют следующие собственные векторы φ_i^B :

$$\begin{aligned} \varphi_1^B &= (c^2, 0, 0, 0, -1), \\ \varphi_2^B &= (0, c_B, -c_A, 0, 0), \\ \varphi_3^B &= (0, 0, 0, 1, 0), \\ \varphi_4^B &= (0, \alpha c, \beta c, 0, 1), \\ \varphi_5^B &= (0, \alpha c, \beta c, 0, -1), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\alpha = -c_A/d$, $\beta = c_B/d$.

Поскольку теперь искомым вектор не U , а X (см. (9)), аналогом (12) является

$$\frac{\partial I_i^B}{\partial t} + \lambda_i^B \frac{\partial I_i^B}{\partial \xi} = 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (16)$$

где $I_i^B = \phi_i^B X$, т. е. инварианты не уравнения для потоков (11), а уравнения для неконсервативных величин (14).

Локально-неявная по ξ схема строится в виде разностной системы вида:

$$A_{k+1/2} I_{k-1/2}^B + B_{k+1/2} I_{k+1/2}^B + C_{k+1/2} I_{k+3/2}^B = D_{k+1/2}, \quad k = 0, \dots, K, \quad (17)$$

где I^B — вектор-столбец с компонентами I_i^B , A, B, C являются (5×5) матрицами.

Каждое уравнение (i -я строка) этой системы является разностной аппроксимацией соответствующего уравнения системы (16) (индекс m опущен для упрощения написания):

$$(a_i)_{k+1/2} (I_i^B)_{k-1/2} + (b_i)_{k+1/2} (I_i^B)_{k+1/2} + (c_i)_{k+1/2} (I_i^B)_{k+3/2} = (d_i)_{k+1/2}, \quad k = 0, \dots, K,$$

То есть аппроксимация уравнения (14) приводит к диагональным матричным коэффициентам A, B, C . Коэффициенты a_i, b_i, c_i стоят на диагонали в i -й строке матриц A, B, C , а коэффициент d_i стоит в i -й строке вектора правых частей D . Эти коэффициенты вычисляются по следующему правилу в соответствии с направлением

распространения (знаком собственного числа) соответствующего инварианта и величиной соответствующего числа Куранта:

$$\begin{aligned} (q_i^B)_{k+1/2} \geq 1 : \quad & a_i = 1 - (q_i^B)_k, \quad b_i = (q_i^B)_k, \quad c_i = 0, \quad d_i = (I_i^B)_k; \\ 0 < (q_i^B)_{k+1/2} \leq 1 : \quad & a_i = 0, \quad b_i = 1, \quad c_i = 0, \quad d_i = (I_i^B)_k; \\ -1 \leq (q_i^B)_{k+1/2} < 0 : \quad & a_i = 0, \quad b_i = 1, \quad c_i = 0, \quad d_i = (I_i^B)_{k+1}; \\ (q_i^B)_{k+1/2} \leq -1 : \quad & a_i = 0, \quad b_i = -(q_i^B)_{k+1}, \quad c_i = 1 + (q_i^B)_{k+1}, \quad d_i = (I_i^B)_{k+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Числа Куранта $q_i^B = \lambda_i^B \kappa_\xi$ и инварианты I_i^B вычисляются на нижнем слое $t = t^n$. Все значения газодинамических величин, относимые к боковым сторонам расчетной ячейки, т.е. имеющие дробный индекс по отношению к k , рассчитываются по усредненным значениям базовых величин $X_{k+1/2}^n = \frac{1}{2}(X_k^n + X_{k+1}^n)$.

Система (17) замыкается граничными условиями непротекания при $\xi = 0$ и $\xi = 1$:

$$-c_A u + c_B v = 0,$$

которое можно выразить через инварианты I_4^B и I_5^B как

$$I_4^B + I_5^B = 0. \quad (19)$$

Напомним, что $I_{4,5}^B = (-c_A u + c_B v) \rho c / d \pm P$. Следовательно, на обеих этих границах $\lambda_{1,2,3}^B = q_{1,2,3}^B = 0$, $I_4^B = P$, $I_5^B = -P$, и

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_A P \\ c_B P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что для вычисления G на границе необходимо иметь ровно одно скалярное условие. На границе $\xi = 0$ этим условием является значение приходящего из расчетной области инварианта с I_5^B , на границе $\xi = 1$ — инварианта с I_4^B . Поэтому

$$G|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_A I_5^B \\ -c_B I_5^B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G|_{\xi=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_A I_4^B \\ c_B I_4^B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для вычисления G на границе нет необходимости вычислять там же инварианты I_1^B, I_2^B, I_3^B , и можно назначить им любые значения, например, 0. А для того, чтобы эти величины не возникали в разностных уравнениях на соседних с границей гранях мы наложим ограничения на шаг по времени τ :

$$|q_{1+1/2}^1| \leq 1, \quad |q_{K-1/2}^1| \leq 1.$$

Это условие не является стеснительным, поскольку на соседних гранях (на границах области) $|q_{1-1/2}^1| = 0$, $|q_{K+1/2}^1| = 0$ и является естественным, так как сигнализирует о недостаточном количестве точек. Кроме того, мы потребуем, чтобы на противоположных гранях одной ячейки числа q^k с одинаковыми номерами инвариантов k не лежали по разные стороны от отрезка $[-1, 1]$, что также сигнализирует о недостаточном количестве точек.

В результате уравнения для первых трех инвариантов отщепляются от общей системы уравнений (17) в виде трех скалярных трехдиагональных разностных уравнений, решение которых можно найти с помощью экономичного метода скалярной прогонки.

Что касается оставшихся инвариантов I_4^B, I_5^B , то эти инварианты можно найти из соответствующей подсистемы (17) для 2-векторов $I^{(2)} = (I_4^B, I_5^B)$. В этой подсистеме на каждой границе разностное уравнение, соответствующее входящей в расчетную область характеристике (т.е. для $\xi = 0$ — четвертое уравнение, а для $\xi = 1$ — пятое уравнение), должно быть заменено граничным условием (13). В результате на нижней границе матричный коэффициент A подсистемы для 2-вектора $I^{(2)}$ гарантированно обращается в нуль, а на верхней границе то же происходит с матричным коэффициентом C . Таким образом, полученная подсистема для I_4^B и I_5^B имеет стандартную трехдиагональную структуру и для ее решения можно использовать метод векторной прогонки для

двумерных векторов, которая гораздо эффективнее, чем прогонка для пятимерных векторов. Дополнительное ускорение расчета можно получить, если учесть, что на всех гранях расчетных ячеек, кроме крайних, матрицы A, B, C являются диагональными.

Решение обеих подсистем дает на всех гранях полный набор инвариантов $I_1^B, \dots, I_5^B$. После этого компоненты вектора X на тех же гранях находятся по формулам (см. (15) и (16)):

$$\begin{aligned} P &= (I_4^B - I_5^B)/2, \\ \rho &= (I_1^B + P)/(c^2)_f, \\ u &= \frac{(\beta \rho c)_f I_2^B - (c_A)_f (I_4^B + I_5^B)/2}{(\beta \rho c)_f (c_B)_f - (\alpha \rho c)_f (c_A)_f}, \\ v &= \frac{(\alpha \rho c)_f I_2^B - (c_B)_f (I_4^B + I_5^B)/2}{(\alpha \rho c)_f (c_A)_f - (\beta \rho c)_f (c_B)_f}, \\ w &= I_3^B, \end{aligned}$$

где индекс f означает, что это величины, вычисленные на соответствующей грани путем усреднения по значениям в соседних целочисленных точках нижнего слоя (аналогично расчету $(q_i^B)_{k+1/2}$ в (18)).

Далее по X вычисляется U , а по нему G . На этом процедура расчета потоков закончена.

Описанный выше метод расчета потоков F (по явной схеме) и G (по локально неявной схеме) составляет основу алгоритма перехода на следующий слой. Как и в скалярном случае (см. разд. 2), эта процедура выполняется в два этапа, которые можно назвать предиктором и корректором.

На этапе предиктора вычисляются потоки $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ по описанному выше алгоритму и значениям консервативных величин на нижнем временном слое:

$$\tilde{F} = F(U^n), \quad \tilde{G} = G(U^n),$$

и с помощью дивергентного замыкания вычисляются предварительные значения консервативных величин на верхнем слое:

$$\tilde{U}_{m,k}^{n+1} = U_{m,k}^n - \kappa_z (\tilde{F}_{m+1/2,k} - \tilde{F}_{m-1/2,k}) - \kappa_\xi (\tilde{G}_{m,k+1/2} - \tilde{G}_{m,k-1/2}) + \tau Q_{m,k}^n, \quad m = 1, \dots, M; \quad k = 1, \dots, K;$$

и, в свою очередь, $\tilde{X}_{m,k}$:

$$\rho = U_1, \quad u = U_2/U_1, \quad v = U_3/U_1, \quad w = U_4/U_1, \quad P = (\gamma - 1) \left[U_5 - \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2 \right].$$

Этап корректора отличается от первого только заменой вектора U^n , участвующего в вычислении F и G , на взвешенное значение

$$U^v = \nu \tilde{U} + (1 - \nu) U^n.$$

По этим значениям вычисляются уточненные значения потоков

$$F = F(U^v), \quad G = G(U^v),$$

и уточненные значения консервативных величин на верхнем слое:

$$U_{m,k}^{n+1} = U_{m,k}^n - \kappa_z (F_{m+1/2,k} - F_{m-1/2,k}) - \kappa_\xi (G_{m,k+1/2} - G_{m,k-1/2}) + \tau Q_{m,k}^n, \quad m = 1, \dots, M; \quad k = 1, \dots, K;$$

Нужно брать величину $\nu = 0.25$, так как только это значение обеспечивает устойчивость при любых числах Куранта q_i^B .

Подчеркнем, что в этом методе этап коррекции делается не для повышения точности схемы, а для повышения области ее устойчивости: в результате этапа корректора схема становится устойчивой при всех числах Куранта по оси z , не превосходящих по модулю 1, и при всех числах Куранта по оси ξ , т. е. поперек канала.

4. ОСОБЕННОСТИ В ЗАКРУЧЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОТОКАХ

Поскольку рассматриваемое течение не зависит от угловой координаты, четвертое уравнение системы (1) дает

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial r}, \quad (20)$$

где $\Omega = wr$. Это уравнение выражает сохранение циркуляции вдоль траектории жидкой частицы потока. Под траекторией мы понимаем ее след на плоскости (z, r) . (Настоящая траектория — спиральная.)

Рассмотрим некоторые следствия закона сохранения циркуляции и начнем со стационарного течения в сопле с центральным телом, см. фиг. 1. Предположим, что $w \neq 0$ во входном сечении в точке C , расположенной на поверхности (образующей) центрального тела. При движении вперед вдоль поверхности тела частица опускается к оси z , т.е. ее r -координата уменьшается. Но $\Omega = \text{const}$ вдоль линии тока. Поэтому w вдоль этой линии увеличивается. Таким образом, эта линия тока не может достичь оси z , так как при $r \rightarrow 0$ $w \rightarrow \infty$, и должна существовать точка, в которой линия тока отрывается от тела и идет вниз по каналу, оставаясь на конечном расстоянии от оси симметрии. В этом случае под такой линией должна возникнуть зона застоя.

В нестационарном течении ситуация та же, поскольку при приближении жидкой частицы к оси $r = 0$ азимутальная скорость будет неограниченно расти, что противоречит ограниченности скорости потока. Вообще, закон сохранения циркуляции запрещает любые линии тока с $\Omega \neq 0$, простирающиеся до оси z . Этот факт фактически делает некорректной задачу о невязком течении закрученного газа в сопле с центральным телом конечной длины. Местоположение точки отрыва и структура течения, строго говоря, существенно зависят от исходных данных.

Эту трудность можно преодолеть двумя способами. Во-первых, можно задать такие условия на входе, чтобы закрутка на центральном теле равнялась нулю. На практике такое требование может быть выполнено путем изменения угла поворота закручивающих лопаток по радиусу так, чтобы на центральном теле закрутка не возникала. Во-вторых, можно ввести тонкую трубку, например цилиндрическую, радиусом ε , не позволяющую линиям тока доходить до оси $r = 0$. Разумеется, толщина этой трубки должна быть достаточно малой, чтобы не оказывать существенного влияния на основную часть потока.

Для оценки толщины области отрыва в окрестности оси симметрии или, что практически то же самое, радиус искусственной трубки, продлевающей центральное тело на весь диапазон изменения z , рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что течение изоэнтропическое, изоэнергетическое, стационарное и не зависит от продольной координаты z . Тогда $v = 0$ и все остальные функции, зависящие только от r , удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$P = S_0 \rho^\gamma, \quad (21)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{u^2 + w^2}{2} = H_0, \quad (22)$$

$$r \frac{dP}{dr} = \rho w^2, \quad (23)$$

где $S_0 = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}$, $H_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0}$.

Вводя скорость звука $c^2 = \gamma P / \rho$, перепишем (22) в следующей форме:

$$c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2) = (\gamma - 1) H_0. \quad (24)$$

Из (21) и (23) следует, что

$$r \frac{dc^2}{dr} = (\gamma - 1) w^2. \quad (25)$$

Исключение w^2 из (24) и (25) дает

$$\frac{r}{2} \frac{dc^2}{dr} + c^2 = f(r), \quad (26)$$

где

$$f(r) = (\gamma - 1) \left[H_0 - \frac{u^2(r)}{2} \right],$$

решением (26) является

$$c^2(r) = \frac{2}{r^2} \int_{\varepsilon}^r s f(s) ds,$$

где ε — произвольная постоянная.

Предположим, что $u(r) = \text{const} = u_0$. Обозначая через $f_0 > 0$ соответствующее значение f , получим

$$c^2(r) = f_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} w(r) &= \sqrt{\frac{2f_0}{\gamma-1}} \frac{\varepsilon}{r}, \\ \rho(r) &= \left[\frac{f_0}{\gamma S_0} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ P(r) &= S_0 \left[\frac{f_0}{\gamma S_0} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Для продольного числа Маха M_z получим

$$M_z = u_0 \left[f_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

И окончательно

$$\Omega = wr = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} f_0 = \text{const.} \quad (27)$$

Следовательно, рассматриваемое течение существует только за пределами ε -окрестности оси z , т.е. только для $r > \varepsilon$. При $r \rightarrow \varepsilon + 0$, значения P и ρ стремятся к нулю, а значения w и M_z — к бесконечности.

Из (27) следует, что

$$\varepsilon = \Omega(2H_0 - u_0^2)^{-1/2}, \quad (28)$$

что и является искомой оценкой ε . Переменность $u(r)$ не приводит к принципиальному изменению картины течения, а лишь усложняет формулы.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Расчеты проводились для различных форм канала и различных параметров потока, но сценарий расчета для всех случаев был общим: вначале рассчитывалось стационарное течение без закрутки ($k(r) = 0$ в формуле (3)), а затем мгновенно или за короткий промежуток времени закручивающие лопасти поворачивались на заданный угол. При этом геометрия канала и параметры потока были таковы, что в минимальном сечении в стационарном течении достигалась звуковая скорость потока и ниже его течение было сверхзвуковым (по крайней мере на некотором участке). Это позволяет разделить до некоторой степени исследование течения в форкамере (область от конца центрального тела до критического сечения, или горловины) и в области диффузора (расширение канала за горловиной).

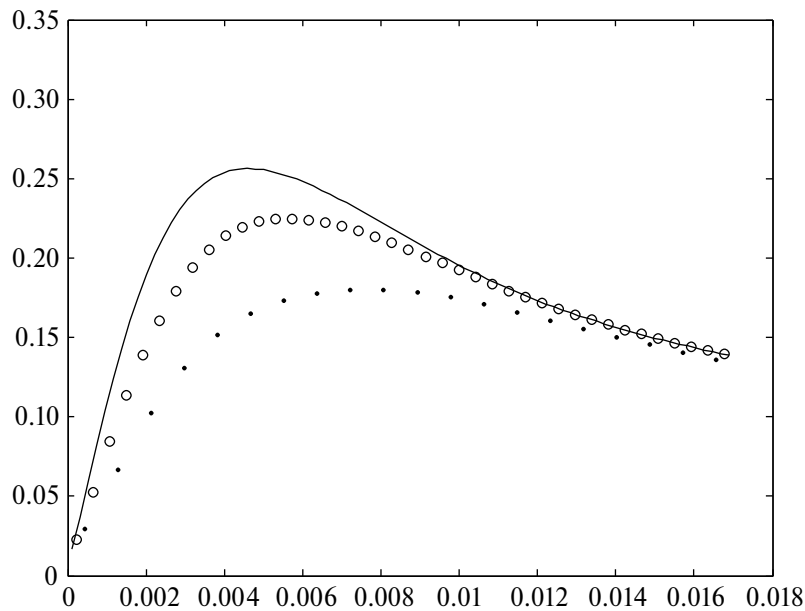
Коснемся еще раз вопроса о роли центрального тела. Ряд численных экспериментов, выполненных с помощью представленного алгоритма, позволяет утверждать, что стационарное течение в соплах без центрального тела даже при наличии закрутки существует и без специальных ухищрений может быть получено установлением по времени. Требуемое время установления соответствует примерно 3–5-кратному прохождению возмущения через форкамеру вниз и вверх по потоку. То же самое справедливо и для незакрученных течений в соплах с центральным телом.

Однако любая закрученность течения на входе в сопло на поверхности центрального тела принципиально меняет картину течения. В частности, например, стационарное течение становится невозможным. Действительно, величина $\Omega = rw$ переносится вдоль линии тока (см. уравнение (20)). Таким образом, из ограниченности скорости следует, что линия тока при движении вниз по течению обязана соскочить с центрального тела. Более того, по той же причине эта линия раздела не может подойти к оси z .

Если предположить, что вблизи оси z образуется застойная зона со скоростью близкой нулю и с постоянным давлением, то это противоречит структуре течения в окрестности критического сечения.

Из сказанного следует, что через определенное время после включения закрутки на входе в сопло должен образоваться отрыв в некоторой точке центрального тела и зона слабого возвратного течения. Дальнейшая эволюция течения в окрестности оси симметрии полностью определяется свойствами численной схемы и, в частности, схемной вязкостью.

Уже первые расчеты течения в форкамере подтвердили теоретические выводы о том, что структура потока существенно зависит от характера закрутки. В случае задания входной закрученности в (3) в виде $k(r) = k_w(r - R_b)/(R_w - R_b)$, т.е. линейно меняющейся от нуля на центральном теле до максимального значения на стенке канала), особая точка на поверхности центрального тела не возникает, и течение быстро стабилизируется.



Фиг. 3. Сравнение профиля $w(r)$ в сечении $z = 140$ мм для трех расчетов: 175×20 (пунктирная линия), 350×40 (кружки) и 350×80 (сплошная линия).

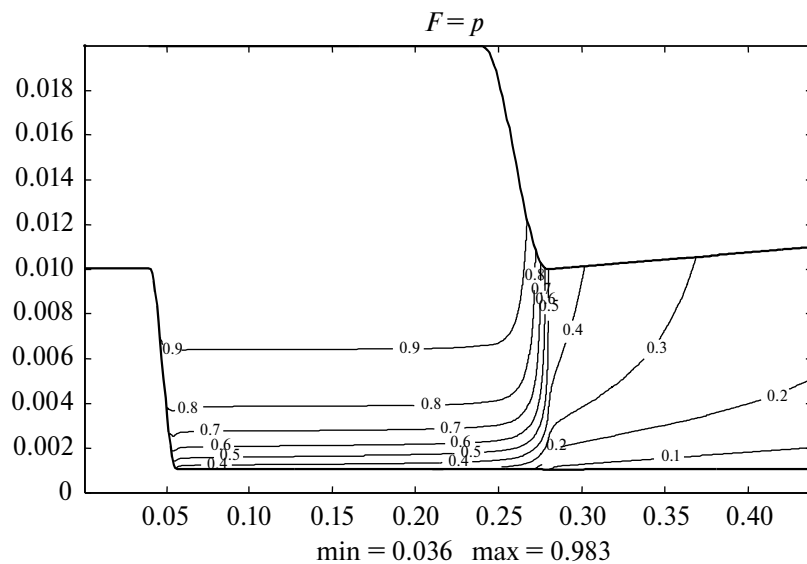
Принципиально другая ситуация возникает, если на входе $k(r) = k_w$, т. е. угол поворота закручивающих лопаток постоянен по радиусу. При таком способе задания закрученности течение визуально довольно быстро стабилизируется, после чего начинается медленный квазистационарный процесс, в котором чрезвычайно медленно вымывается тонкая осевая струя незакрученного течения.

В форкамере азимутальная скорость непрерывно растет с увеличением r от нуля на оси симметрии до своего максимума в некоторой точке r_* , а потом убывает.

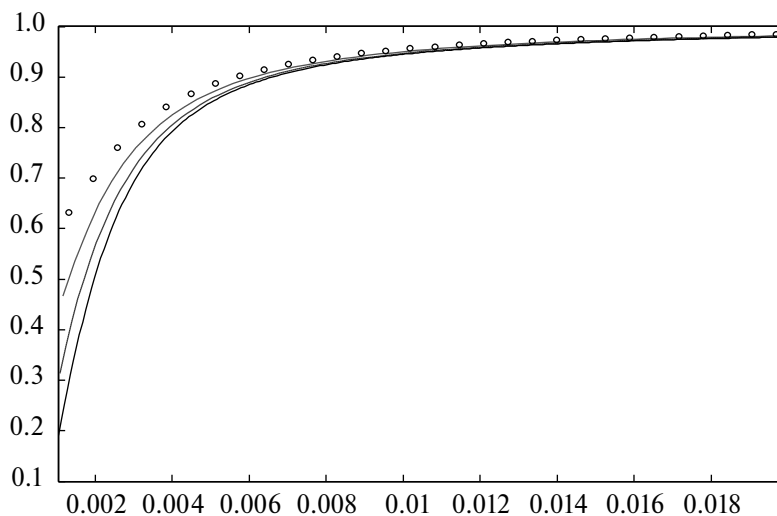
На нисходящей поверхности центрального тела возникает особая точка, разбивающая течение в форкамере на внешнюю и внутреннюю области, отличающиеся распределением скорости w по радиусу. Во внутренней области азимутальная скорость растет от нуля на оси симметрии до своего максимума на границе областей, а во внешней области убывает (см. фиг. 3). Из этого следует, что, схемная вязкость позволяет проникать закрутке в область под контактной поверхностью, разделяющей эти области. Увеличение числа расчетных точек приводит к уменьшению схемной вязкости, уменьшению толщины внутренней области и к увеличению максимальной величины скорости w . В дальнейшем при достаточной подробности сетки эта конфигурация разваливается: либо давление становится отрицательным, либо развиваются осцилляции, которые в конце концов тоже приводят к отрицательному давлению и/или плотности.

Поэтому все остальные расчеты проводились в модифицированной области, как предлагалось в предыдущем разделе: в область течения помещалась тоненькая трубочка (иголка), которая отделяла область течения от оси $r = 0$. Радиус иголки подбирался двумя способами. Либо проводился предварительный расчет без иголки, определялась точка отрыва линии тока на поверхности центрального тела и затем делался основной расчет с трубочкой, содержащей эту точку отрыва. Либо радиус оценивался по формуле (28). Оба способа дают близкие результаты. Величина вносимого иглой возмущения зависит от параметров задачи — чем интенсивнее закрутка, тем толще должна быть игла. Если величина возмущения оказывается неприемлемой, то, очевидно, нужно менять постановку задачи (учитывать вязкость, допускать обратное течение на выходной границе и т.д.). В наших расчетах площадь иголки составляла около 1% от площади минимального (критического) сечения.

Для оценки точности метода была проведена серия расчетов для канала с центральным телом, геометрия которого показана на фиг. 4, с углом поворота закручивающих лопаток 45° и толщиной иглы 0.001 (радиус критического сечения равен 0.01). На этом же рисунке приведены изолинии давления установившегося течения, отнесенного к давлению торможения p_0 . Видно резкое падение давления к оси сопла. На фиг. 5, 6 и 7 приведены профиль $P(r)/P_0$, и профили $u(r)$ и $w(r)$, отнесенные к местной скорости звука, (числа Маха) в сечении $z = 0.180$, полученные в расчетах этой конфигурации на четырех сетках: 55×30 , 110×60 , 220×120 и 440×240 точек. Видна неравномерная сходимость решения по числу точек: решение практически не меняется около наружной стенки сопла и достаточно медленно сходится около оси. Этот факт объясняется, по-видимому, резким изменением величин в окрестности оси (иголки).



Фиг. 4. Изолинии давления при угле поворота лопаток 45° (толщина иглы 0.001).

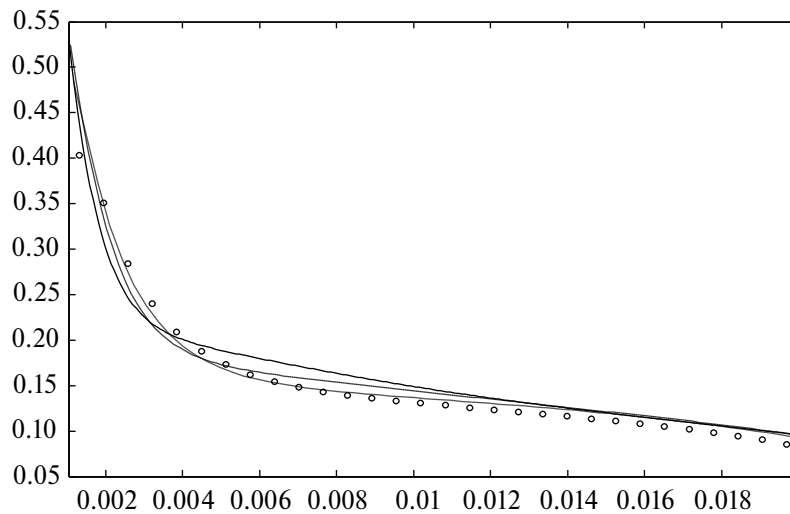


Фиг. 5. Профили $P(r)$ при $z = 180$: на четырех сетках: кружки — 55×30 точек, штрих-пунктир — 110×60 , штриховая линия — 220×120 , сплошная линия — 440×240 .

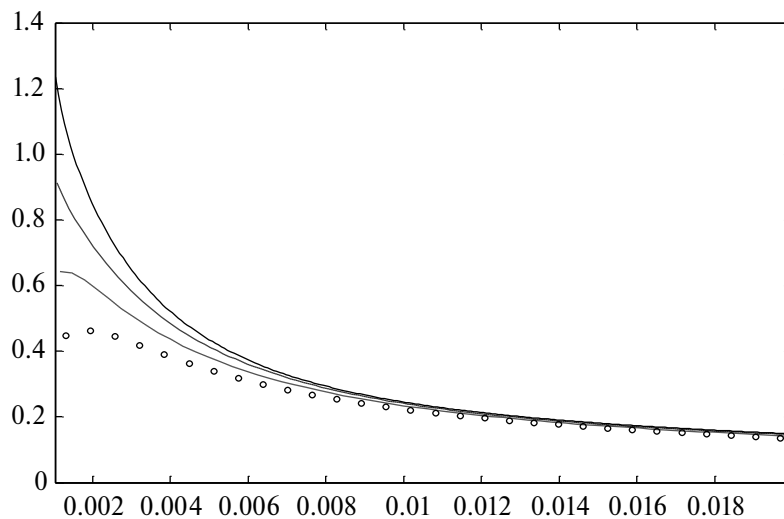
Обращают на себя внимание еще два факта. Во-первых, около оси сопла заметно наличие достаточно мощной скоростной струи, в которой скорость более чем в 2 раза превосходит скорость в основном потоке. Это объясняется, по-видимому, тем, что около оси давление существенно ниже, чем в основном потоке, и перепад давления по отношению к давлению на входе около оси больше. И, во-вторых, любопытно, что азимутальная скорость становится сверхзвуковой в некоторой окрестности оси еще до прохождения потоком критического сечения. В диффузоре (канал после горловины) отмеченные особенности также имеют место.

Цель следующего численного эксперимента состояла в оценке возможностей алгоритма при расчете течения с внутренними, в том числе висячими ударными волнами. В качестве исследуемого течения был выбран сверхзвуковой поток в трубе переменного сечения. Геометрия трубы представлена на фиг. 8. (Масштаб искажен: реальные поперечные размеры следует уменьшить в 20 раз.) На входе в трубу слева сверхзвуковое течение с $M = 1.1$. Горизонтальные и наклонные стенки сопряжены гладким образом. Центральное тело в расчетной области отсутствует (поэтому отсутствует и искусственная игла).

Расчеты проводились на последовательности разностных сеток; представленные расчеты получены для сетки 960×640 . Такая подробная сетка потребовалась, чтобы получить известный теоретический результат для осесимметричных (незакрученных) потоков, что регулярное Маховское отражение ударных волн от оси невозможно, обязательно образуется лямбда-скачок (ударная волна подходит к оси по нормали). На этом же рисунке



Фиг. 6. Профили $u(r)$, отнесенные к местной скорости звука, при $z = 180$: на четырех сетках: кружки — 55×30 точек, штрихпунктир — 110×60 , штриховая линия — 220×120 , сплошная линия — 440×240 .

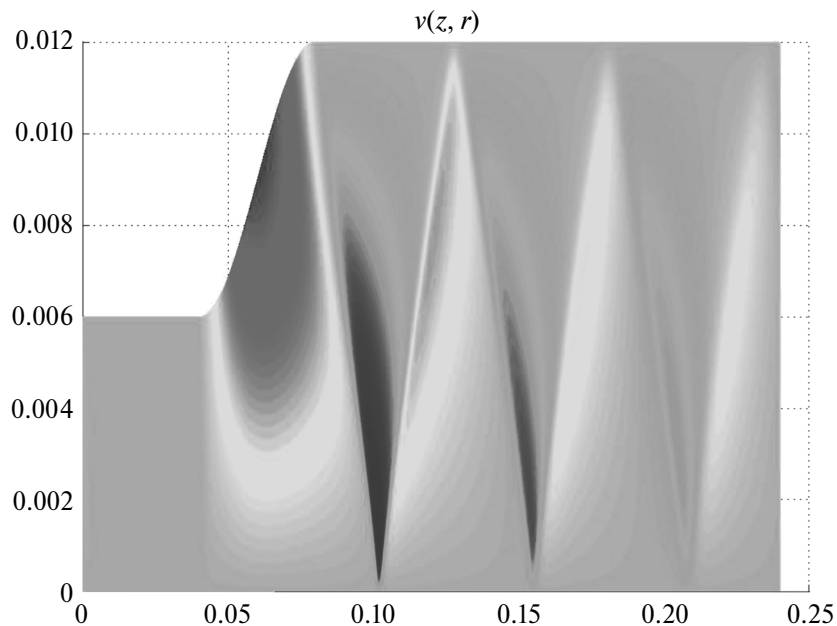


Фиг. 7. Профили $w(r)$, отнесенные к местной скорости звука, при $z = 180$: на четырех сетках: кружки — 55×30 точек, штрихпунктир — 110×60 , штриховая линия — 220×120 , сплошная линия — 440×240 .

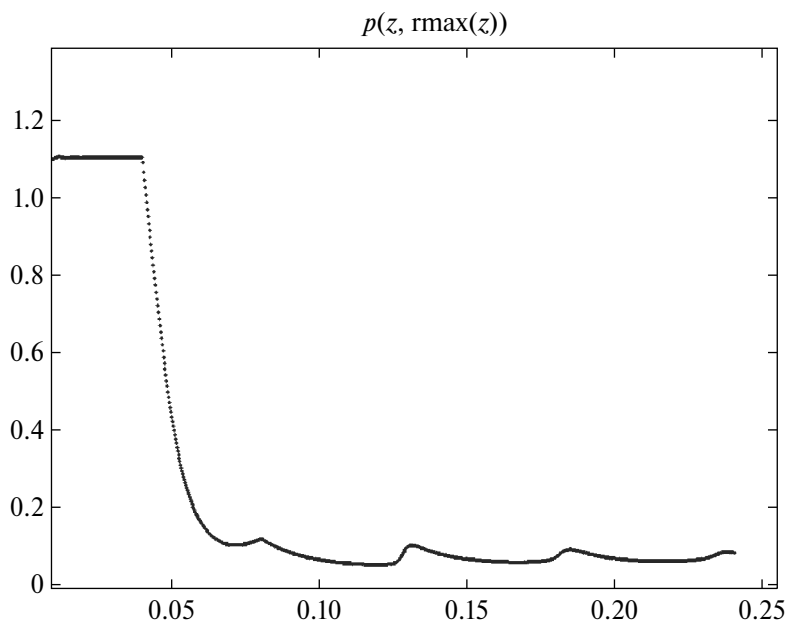
приведено распределение радиальной скорости v , на котором хорошо видна структура скачков. Отчетливо видна система косых ударных волн, причем первая волна — висячая. Хорошо видно, что при прохождении через очередную ударную волну v меняет знак, и что в решении отсутствуют паразитные осцилляции.

На фиг. 9 представлено распределения давления P на стенке трубы. Отчетливо видно, что первая ударная волна висячая. Причем точка формального зарождения скачка располагается довольно близко к стенке, что порождает на поверхности трубы излом производной по z (не скачок). Но уже вторичная волна, пришедшая на стенку в точке $z \approx 0.127$ на фиг. 9 отчетливо видна как скачок, размытый в силу разностных эффектов. Следующий скачок на стенке также хорошо виден, хотя его размытие больше.

Следующий расчет посвящен расчету закрученного течения в канале с дозвуковым выходом. Геометрия сопла показана на фиг. 10 и 11. Трудность постановки задачи при дозвуковом выходе заключается в том, что в закрученных потоках давление сильно меняется поперек канала, поэтому задавать на выходе из канала постоянное давление, как это обычно делается, неестественно и приводит к неудовлетворительным последствиям: в лучшем случае течение в окрестности выхода очень сильно искажается, и это искажение возмущает всю область течения. Но, как правило, этим дело не ограничивается: на выходе в приосевой области возникает втекание, что требует других граничных условий и другой постановки задачи. Чтобы избежать этих трудностей мы поместили выход из расчетной области достаточно далеко от оси. Так, чтобы закрутка уже была незначительной, и

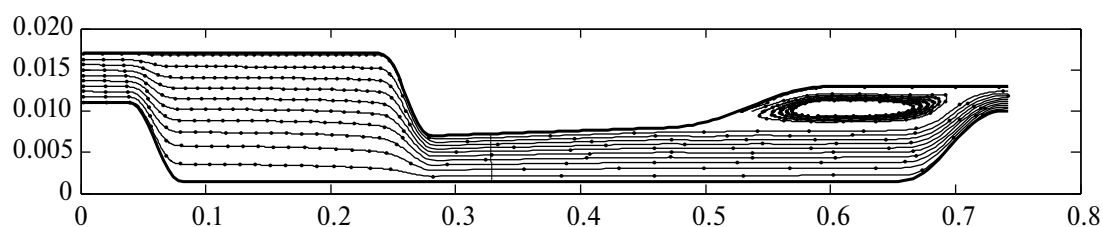


Фиг. 8. Распределение компоненты скорости v .

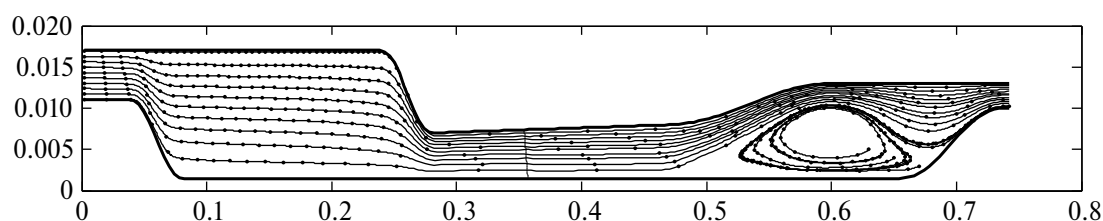


Фиг. 9. Профиль давления вдоль стенки трубы.

чтобы можно было задавать граничное условие в виде $P = \text{const}$. Но и в этом случае получить стационарное течение достаточно сложно. В большинстве случаев течение выходит на квазипериодический режим с большой амплитудой перемещения ударной волны вдоль канала. При этом в области диффузора (расширение канала после горловины) возникает крупномасштабный, бурно эволюционирующий, вихрь. Он возникает либо в верхней части сопла, либо в нижней, но в некоторых расчетах время от времени происходит перескакивание вихря снизу на верх и наоборот. Найти какую-нибудь закономерность в этом процессе не удалось. На фиг. 10 и 11 изображены линии тока для двух моментов времени одного из расчетов — векторные линии поля (u, v) , полученные интегрированием по времени системы уравнений $\{dz/dt = u, dr/dt = v\}$ с фиктивным временем t при разных начальных данных $(z(0), r(0))$. На полученных линиях тока через равные промежутки фиктивного времени t нанесены точки, что позволяет видеть скорость жидкости вдоль линии тока (по длине отрезка между точками). На тех же рисунках штриховой линией нанесено положение ударной волны (точнее, линия



Фиг. 10. Линии тока и ударная волна при верхнем расположении вихря.



Фиг. 11. Линии тока и ударная волна при нижнем расположении вихря.

$M = 1$). Видно заметное перемещение ударной волны. В других расчетах оно может быть еще больше (вплоть до разрушения ударной волны и временный переход на чисто дозвуковое течение). Эволюция ударной волны не связана непосредственно с размером и положением вихря — течение носит существенно нестационарный характер (это видно также из незамкнутости линий тока).

ВЫВОДЫ

В целом, представленный численный метод позволяет эффективно проводить расчеты как стационарных, так и нестационарных закрученных потоков в канале с центральным телом (и без него). Такие течения могут иметь достаточно сложную структуру: приосевая струя, резкие перепады давления, сверхзвуковая закрутка уже в камере предварительного смешения, система скачков в диффузоре, нетривиальная и неоднородная эволюция положения ударной волны в центральной части канала. и т. д. На типичной сетке отношение шагов по радиусу и вдоль оси канала достигало $1/25$ и не было ограничительным для алгоритма. В результате проведенных численных расчетов продемонстрирована специфика постановки задач для закрученных потоков в каналах сложной геометрии: закрутка на входе определяется моделированием угла лопаток; запуск сопла осуществляется постепенно; центральное тело, если оно есть, не должно заканчиваться, если около него есть закрутка, оно должно быть продолжено вспомогательной трубкой подходящего радиуса; если выход дозвуковой, то он должен находиться достаточно далеко от оси и т. д. Также можно отметить особенности закрученных потоков в каналах с центральным телом: стационарное решение, если оно есть, как правило, не является притягивающим; в течении возникают крупномасштабные движущиеся вихри; ударная волна может распространяться на большие расстояния, если для этого достаточно места и т. д.

Таким образом, предложенная методология расчета достаточно хорошо работает для показанного сложного многомасштабного потока. Примененный здесь метод независимых потоков, рассчитываемых на основе локально неявных схем с пересчетом, позволяет конструировать алгоритмы второго порядка точности при сохранении абсолютной устойчивости алгоритма. Эта же техника позволяет строить абсолютно устойчивые схемы и для параболических уравнений и систем (см. [5]). На основании этого можно предположить, что аналогичный подход окажется эффективным и для задач, связанных с уравнениями Навье—Стокса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. 1959. №3. С. 271—306.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1975. 400 с.
3. Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Comp. Phys. 1981. V. 43. P. 357—372.

4. *Osher S., Solomon F.* Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws // *Math. Comput.* 1982. V. 38. P. 339–348.
5. *Гейн С. В., Зайцев Н. А., Посвянский В. С., Радвогин Ю. Б.* Метод независимых потоков для численного решения многомерного уравнения теплопроводности : Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 53. 23 с.
6. *Радвогин Ю. Б.* Экономичные безусловно устойчивые локально-неявные разностные схемы решения двумерных гиперболических систем : Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003. № 35. 32 с.
7. *Radvogin Yu. B., Zaitsev N. A.* A locally implicit second order accurate difference schemes for solving 2D time-dependent hyperbolic systems and Euler equations // *Proc. of Intern. Conf. on Spectral and High order Methods. Herzliya.* 1998. in *Appl. Num. Math.* M. 2000. V. 33. P. 525–532.

COMPUTATION OF UNSTEADY SWIRLING FLOWS IN NOZZLES AND PIPES BY APPLYING A NEW LOCALLY IMPLICIT GODUNOV-TYPE SCHEME

N. A. Zaitsev*, Yu. G. Rykov**

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047 Russia

*e-mail: nikolai_zaitsev@mail.ru

**e-mail: yu-rykov@yandex.ru

Received 15 March, 2024

Revised 15 March, 2024

Accepted 05 May, 2024

Abstract. A new class of numerical schemes for calculating unsteady swirling flows in nozzles and pipes based on compressible inviscid gas equations is presented. The main advantage of these schemes is their ability to efficiently handle unsteady problems with multiple scales. The construction of such schemes is based on the well-known Godunov approach, which involves calculating fluxes at the faces of computational cells (volumes) by solving auxiliary one-dimensional problems in the vicinity of each face and approximating conservation laws. The scheme switches from an explicit method to an implicit one for flux calculation based on an analysis of the current solution near the cell face. The scheme is absolutely stable and does not generate spurious oscillations. Its effectiveness is demonstrated in the calculation of unsteady swirling flows in nozzles and pipes. Specifics of setting up problems of this type are investigated, and options for proper problem formulation are proposed. Properties of the solution for swirling flows with a central body covering only part of the symmetry axis in the computational domain are also studied.

Keywords: conservative locally implicit scheme with recalculation, Godunov-type scheme, swirling gas flow in a nozzle, supersonic flow, shock waves, multi-scale problems.