

МЕТОД СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ГАЗА И ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2024 г. И. С. Меньшов^{1,*}

¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: menshov@kiam.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

Переработанный вариант 02.04.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

В настоящей работе предлагается новый подход к численному моделированию течения газа около стационарных и движущихся твердых тел, который позволяет использовать эйлеровы сетки, не связанные с геометрией тела. Тела предполагаются абсолютно жесткими и недеформируемыми, их упругие свойства не учитываются. Газ является невязким и нетеплопроводным и описывается в рамках уравнений сжимаемой жидкости. Предлагаемый подход основывается на осреднении уравнений исходной модели по малому пространственному фильтру. В результате получается система осредненных уравнений, включающих дополнительную величину — параметр объемной доли твердого тела, пространственное распределение которого дает цифровое представление геометрии тела (аналог функции порядка). Эта система уравнений действует во всем пространстве. При таком подходе стандартная краевая задача в части пространства (занятого газом) сводится фактически к задаче Коши во всем пространстве. Для одномерной модели рассматривается численное решение осредненных уравнений методом Годунова. При этом в пересекаемых ячейках вводится разрывное восполнение решения, что приводит к рассмотрению составной задачи Римана, описывающей распад начального разрыва при наличии ограничивающей стенки. Доказывается, что аппроксимация численного потока на решении составной задачи Римана обеспечивает перенос функции порядка без численной диссипации. Библ. 25. Фиг. 6.

Ключевые слова: газовая динамика около движущейся поверхности твердого тела, осредненные уравнения Эйлера, составная задача Римана, численный метод Годунова.

DOI: 10.31857/S0044466924080171, EDN: XZTYNI

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование взаимодействия течения сжимаемой жидкости со стационарными или движущимися твердыми телами является важной задачей, имеющей большое прикладное значение и в то же время остающейся весьма актуальной в научном плане. Стандартным классическим подходом к решению этой задачи является применение лагранжево-эйлеровых методов, когда геометрия поверхности тела отслеживается явным образом движущимися вместе с телом узлами сетки. Граничные условия при этом естественным образом выставляются на поверхности тела [1]. Применительно к сложной меняющейся во времени геометрии подходы, основанные на согласованных с геометрией сетках, становятся неэффективными, поскольку требуют многократной генерации или перестройки сетки. Последнее является затратной вычислительной процедурой, что в ряде случаев может приводить к практически невыполнимым задачам.

Альтернативой лагранжево-эйлеровых подходов могут служить развиваемые в последнее время чисто эйлеровы методы, когда геометрия тела рассматривается как свободная, не связанная с пространственной дискретизацией расчетной области. Сетка при таких подходах никак не связана с телом и, как правило, не меняется в процессе счета. Можно выделить две группы эйлеровых методов. К первой относятся методы, которые основаны на явной реконструкции геометрии тела на заданной несогласованной сетке. При этом используется цифровое представление геометрии посредством параметра доли объема сеточного элемента, занимаемого газом, т.н. VOF (volume of fluid)-методы [2,3], или функции расстояния от узла сетки до поверхности тела, LS (level-set)-методы [4,5]. Для выполнения граничных условий на реконструированной поверхности обычно применяется метод окаймляющих границу тела фиктивных ячеек (ghost cells), в которых параметры течения доопределяются надлежащим образом [6,7].

Вторую группу представляют методы диффузной границы. Эти методы изначально строились для численного моделирования многофазных сред, состоящих из различных материалов, разделенных межфазными границами [8]. Пространственное распределение каждого материала (фазы) здесь задается характеристической

функцией — функцией Хевисайда соответствующей области, которая является решением уравнения переноса в поле скорости среды. Таким образом, в отличие от методов первой группы, в методе диффузной границы реконструкция геометрии в процессе расчета не производится. Вся информация о положении границы содержится в распределении функции порядка. При численном интегрировании в силу численной диссипации характеристическая функция теряет разрывный тип и размывается по пространству так, что граница представляется узкой переходной областью, где значения характеристической функции плавно меняются от 0 до 1. Недостатком такого подхода является переходная (смесевая) область, которая требует специального моделирования.

В работах [9–11] метод диффузной границы применяется для численного моделирования взаимодействия течения газа с упругопластической средой при больших деформациях. В этих работах рассматривается специальная модель переходной зоны вблизи границы, включающей как газовую, так и твердую компоненту. Вывод этой модели проводится на основе вариационного принципа и принципа термодинамической согласованности.

В [12] модель диффузной границы используется для численного моделирования невязких сжимаемых течений около твердых тел произвольной формы на простых равномерных декартовых сетках. Геометрия тела представляется в этой работе скалярным полем, которое задает распределение объемной доли газа в ячейках сетки. Уравнение переноса на объемную долю численно решается вместе с модифицированной системой уравнений газовой динамики, учитывающей присутствие твердой компоненты. Модифицированная система представляет собой фактически редуцированную модель Байера–Нунциато [8]. Система определяющих уравнений решается сквозным образом во всей области, включая твердое тело. Несмотря на высокоточные пространственные и временные расчетные схемы — DG и ADER, граница тела, тем не менее, обязательно размывается в пределах нескольких ячеек из-за численной вязкости. Важные для практических приложений данные, такие как, например, распределения параметров течения по поверхности тела, при этом теряются. Это является одним из недостатков метода. Другой состоит в том, что система определяющих уравнений, хотя и гиперболическая, становится неконсервативной из-за членов с градиентом объемной доли. Ее решение, вообще говоря, не единственно и определяется конкретным видом соотношений на сильном разрыве, которые зависят от выбора пути в фазовом пространстве [13].

В вычислительной аэродинамике следует отметить также семейство эйлеровых методов, которые также не требуют сеточной привязки к расчетной области, но используют явным образом ее геометрическое представление для постановки граничных условий. В литературе они называются методами погруженных границ (Immersed Boundary Method) [6, 14]. Граничные условия либо рассчитываются непосредственно путем рассмотрения усеченных ячеек сетки (cut-cell method), либо моделируются посредством добавления в правую часть определяющих уравнений специальных источников членов. К ним относятся метод штрафных функций [15, 16], метод компенсационных потоков [17, 18] и ряд других.

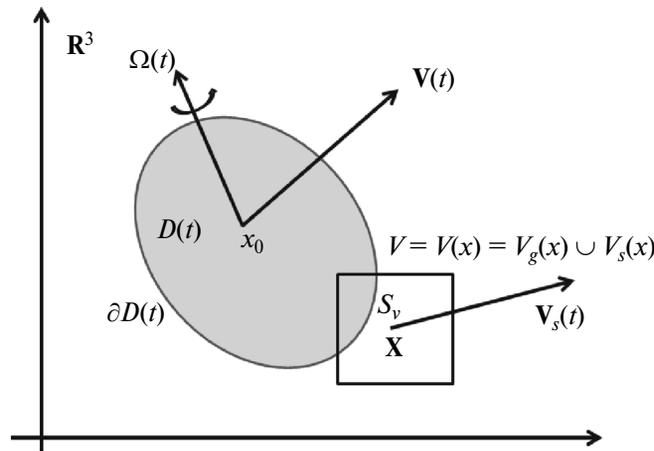
В настоящей работе предлагается эйлерова методика для задач взаимодействия течения газа с поверхностью твердого тела, которая объединяет методы диффузной границы и VOF. Математическая модель строится по аналогии с моделями многофазных сред. Система газ–твердое тело рассматривается как двухфазная среда. Определяющая система уравнений выводится путем осреднения исходных газодинамических уравнений по малому пространственному фильтру. Для численного интегрирования получающейся в результате системы мы используем метод Годунова [19]. Чтобы исключить численную диффузию границы тела, аппроксимация численного потока для пересекаемых ячеек выполняется на решении составной задачи Римана [20]. В этой задаче распад произвольного разрыва развивается в ограниченном границей тела полупространстве. С этой целью на каждом временном шаге мы переходим в пересекаемых ячейках от диффузного к геометрическому представлению границы. Численная реализация предложенной методики демонстрируется в настоящей работе пока только на одномерной модели. Показывается, что в этом случае получается бездиссипативный перенос геометрии по эйлеровой сетке. Обобщение на многомерный случай будет предметом последующих публикаций.

2. МОДЕЛЬ ОСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается течение газа около замкнутой области $D(t)$, занятой твердым телом. Движение тела характеризуется в общем случае вектором поступательной скорости $\mathbf{V}_0(t)$ и вектором мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Поле скорости, индуцированное движением тела, определяется во всем пространстве как $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_0(t) + [\boldsymbol{\Omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]$, где \mathbf{x} — радиус-вектор, \mathbf{x}_0 — радиус-вектор центра масс тела (см. фиг. 1). Заметим, что это поле скорости бездивергентно, $(\nabla, \mathbf{V}_s) = 0$. Для дальнейшего поле скорости считается известным.

Введем характеристическую функцию геометрии тела:

$$\chi = \chi(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{x} \in D(t), \\ 1, & \text{если } \mathbf{x} \notin D(t). \end{cases} \quad (1)$$



Фиг. 1. Поле скорости движения твердого тела и пространственный фильтр для вывода осредненных уравнений.

Эта функция будет удовлетворять уравнению переноса

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{V}_s \nabla \chi = 0, \quad (2)$$

которое может также быть записано в дивергентной форме,

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}_s \chi) = 0. \quad (3)$$

Будем предполагать, что течение газа описывается системой уравнений Эйлера (невязкий и нетеплопроводный газ), которая записывается в векторной консервативной форме как

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_m} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{q} = [\rho, \rho u_k, \rho E]^T$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{f}_m = [\rho u_m, \rho u_m u_k + p \delta_{mk}, \rho u_m H]^T$ — потоковый вектор, $k = 1, 2, 3$. Решение этой системы ищется в области $x \in R^3 \setminus D(t)$ с граничными условиями непротекания на границе тела, $u_m n_m = V_{sm} n_m$ для $x \in \partial D(t)$. Здесь $E = \frac{1}{2} u_m u_m + \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ — удельная полная энергия, $H = E + \frac{p}{\rho}$ — удельная полная энтальпия, $\mathbf{n} = [n_k]$ — вектор единичной внешней к $D(t)$ нормали (т.е., направленной в сторону газа), остальные обозначения являются общепринятыми.

Для выведения модели диффузной границы для рассматриваемого течения газа введем фильтр — малый элемент пространства $V(\mathbf{x})$ с опорной точкой \mathbf{x} . В общем случае он состоит из подобласти, занимаемой газом, и подобласти, занимаемой телом, $V(\mathbf{x}) = V_g(\mathbf{x}) + V_s(\mathbf{x})$ (фиг. 1). Определим средние для выбранного фильтра:

$$\begin{aligned} V_g &= \int_V \chi dV, \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{V_g} \int_V \chi \varphi dV, \\ \alpha &= \frac{V_g}{V} = \frac{1}{V} \int_V \chi dV, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ — некоторый параметр течения. Очевидно, V_g имеет смысл объема подобласти $V_g(\mathbf{x})$, занимаемого газом, а α — объемной доли газа. Здесь мы используем одно обозначение V для области $V(\mathbf{x})$ и ее объема. Предполагается, что эта область геометрически фиксирована, так что объем V есть константа, не зависящая от \mathbf{x} . При этом объемы V_g и $V_s = V - V_g$ переменные и зависят от опорной точки \mathbf{x} . Отметим, что введенные в (5) средние значения определены только в точках, для которых $\alpha > 0$, т.е., когда фильтр целиком находится в газовой подобласти или пересекается границей тела.

Для дальнейшего рассмотрения нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. Для произвольной пробной функции $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_V \varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} dV &= - \int_{S_V} \varphi (\mathbf{V}_s, \mathbf{n}) dS, \\ \int_V \varphi \nabla \chi dV &= \int_{S_V} \varphi \mathbf{n} dS, \end{aligned} \tag{6}$$

где $S_V = V \cap \partial D(t)$ — часть поверхности твердого тела $\partial D(t)$ внутри фильтра V , \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к S_V , направленная в сторону газа.

Доказательство. Пусть граница тела $\partial D(t)$ определяется уравнением $\Phi(t, \mathbf{x}) = 0$. Путем надлежащей нормировки функцию Φ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия $\Phi(t, \mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \in D(t)$, $\Phi(t, \mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \notin D(t)$, $|\nabla \Phi(t, \mathbf{x})| = 1$. Тогда характеристическая функция $\chi(t, \mathbf{x}) = H[\Phi(t, \mathbf{x})]$, где $H(\cdot)$ — функция Хевисайда, а соответствующие производные вычисляются через δ -функцию Дирака:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \delta[\Phi(t, \mathbf{x})] \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \nabla \chi = \delta[\Phi(t, \mathbf{x})] \nabla \Phi = \delta[\Phi(t, \mathbf{x})] \mathbf{n}. \tag{7}$$

Учитывая, что производные $\Phi(t, \mathbf{x})$ связаны со скоростью \mathbf{V}_s уравнением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{V}_s, \nabla \Phi) = 0, \tag{8}$$

приходим к искомым соотношениям (6).

Лемма 2. Для произвольной пробной функции $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varphi dV &= \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV, \\ \nabla \int_V \varphi dV &= \int_V \nabla \varphi dV. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Первое соотношение очевидно в силу того, что фильтр $V = V(\mathbf{x}) = \text{const}$. Второе справедливо, так как

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_V \varphi dV = \int_{\partial V} \varphi n_k dS$$

по определению производной, и

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dV = \int_{\partial V} \varphi n_k dS$$

в соответствии с теоремой Остроградского—Гаусса. Здесь n_k обозначают компоненты единичной внешней нормали на границе фильтра.

Поделим уравнение (2) на V и проинтегрируем по фильтру $V(\mathbf{x})$. Тогда с учетом леммы 1 и 2 получим

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{S_V} (\mathbf{V}_s, \mathbf{n}) ds = 0. \tag{10}$$

Аналогичным образом можно получить осредненные уравнения Эйлера, умножая (4) на характеристическую функцию χ и интегрируя по объему $V(\mathbf{x})$. Результатом будет следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \alpha \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \bar{\mathbf{f}}_m}{\partial x_m} - \frac{1}{V} \int_{S_V} [n_k \mathbf{f}_k - \mathbf{q}(\mathbf{V}_s, \mathbf{n})] ds = 0, \tag{11}$$

которая с учетом граничных условий на поверхности тела, запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \bar{\mathbf{f}}_m}{\partial x_m} - \frac{1}{V} \int_{S_V} \mathbf{G} ds &= 0, \\ \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} 0 \\ pn_k \\ p\mathbf{V}_s, \mathbf{n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Вектор \mathbf{G} фактически является компенсационным потоком, который вводится в методе внутренней границы, описанном в работе [17, 18]. Заметим, что давление в векторе \mathbf{G} соответствует давлению на поверхности тела; оно не совпадает со средним давлением в векторах $\bar{\mathbf{q}}$ и $\bar{\mathbf{f}}_m$ и служит для обеспечения граничного условия на теле.

Лемма 3. *Справедливо следующее соотношение между объемной долей и внешней нормалью границы тела:*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} = \frac{1}{V} \int_{S_V} n_k ds. \quad (13)$$

Доказательство. По определению и леммам 1 и 2 имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{V} \int_V \chi dV \right) = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \chi}{\partial x_k} dV = \frac{1}{V} \int_{S_V} n_k dS. \quad (14)$$

В силу этой леммы мы будем рассматривать вместо уравнения (10) для объемной доли его дифференциальный аналог —

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_s, \nabla \alpha = 0.$$

Это уравнение удобнее рассматривать в консервативном виде, так как поле \mathbf{V}_s бездивергентное:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla(\alpha \mathbf{V}_s) = 0.$$

Система уравнений (10), (11) справедлива, в принципе, для любого фильтра. Уменьшая фильтр и стягивая его фактически к точке, можно получить предельное выражение для интеграла по поверхности тела:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{S_V} \varphi \mathbf{n} dS = \varphi \nabla \alpha. \quad (15)$$

Тогда система (10)–(12) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_s, \nabla \alpha &= 0, \\ \frac{\partial \alpha \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \mathbf{f}_m}{\partial x_m} - \hat{\mathbf{G}} &= 0, \\ \hat{\mathbf{G}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \\ p \mathbf{V}_s, \nabla \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь мы опускаем черту над вектором консервативных переменных и вектором потоков и предполагаем, что компоненты этих векторов и уравнение состояния такие же, как в исходной задаче (4).

Система уравнений (16) является эквивалентной постановкой задачи об обтекании твердого тела газовой сжимаемой средой. Она совпадает с системой уравнений, которая рассматривалась в работе [12] для описания альтернативной модели течения сжимаемого газа около движущегося твердого тела. В этой работе авторы берут в качестве основы своих рассуждений неравновесную модель Байера–Нунзиато для двухфазного сжимаемого течения и затем переходят к предельному случаю, когда одна из фаз становится твердым телом.

В области, где $\alpha = 1$ система уравнений (16) переходит в классическую систему уравнений Эйлера. В области твердого тела $\alpha = 0$ она вырождается. Вектор $\hat{\mathbf{G}}$, включающий неконсервативные члены, играет роль штрафной функции в методе погруженной границы [15, 16]. Фактически он представляет собой компенсационный поток в методе свободной границы [17, 18], который определяет взаимодействие газа с твердой поверхностью обтекаемого тела и обеспечивает выполнение граничных условий на поверхности тела. Ниже мы будем придерживаться этой терминологии и называть неконсервативные члены компенсационными потоками. Отметим, что в [12] доказывалось, что для решений (16) нормальные скорости тела и газа совпадают, $u_k n_k = \mathbf{V}_s, \mathbf{n}$, в точках, где α скачком изменяется от 1 до 0.

Модель диффузной границы не связана с реальной областью течения газа и может рассматриваться во всем пространстве, т.е. не требует постановки граничных условий. Это позволяет свести краевую задачу в ограниченной области к начальной задаче Коши во всем пространстве. Движение тела при таком подходе полностью определяется пространственным распределением одного скалярного параметра α .

При численном решении это распределение задается дискретным образом на достаточно простой декартовой сетке. Для более точного представления может быть применена технология AMR локальной сеточной адаптации. При таком подходе можно полностью исключить задачу генерации сетки в области течения, которая в стандартных сеточных численных методах является достаточно затратной для задач со сложной пространственной и меняющейся во времени геометрией. Вся информация о геометрии тела полностью содержится в скалярной функции α , которая определяется решением уравнения переноса (16). Решение искомой задачи обтекания сводится к решению системы уравнений (16) во всем пространстве. Для исключения вырождения системы уравнений предполагается, что в твердом теле объемная доля газа не обращается точно в ноль, а имеет малое ненулевое значение $\alpha \approx 10^{-2} - 10^{-3}$ (см. [12]).

При численном решении (16) разрывное распределение объемной доли α становится сглаженным из-за численной вязкости, и граница представляется узкой переходной зоной. Точные данные о геометрии поверхности тела теряются. Это является основным недостатком подхода, так как в приложениях требуются не только интегральные данные аэродинамических характеристик, но и локальные, представляющие распределение газодинамических параметров по поверхности исследуемого объекта. Тем не менее, метод диффузной границы показывает хорошую точность описания внешнего течения. В частности, он успешно применяется для решения FSI задач (сопряженные задачи газовой динамики и динамики деформируемого твердого тела) [9–11].

В отличие от упомянутых выше работ построение численного метода проводится в настоящей работе на основе осредненных уравнений (10) и (12). Мы применяем метод конечного объема для дискретизации этих уравнений, что позволяет на подсеточном уровне учесть компенсационные потоки на поверхности твердого тела S_V в пересекаемых ячейках. Для этого на каждом временном шаге делается подсеточная реконструкция геометрии интерфейса (поверхности тела) на основе дискретного распределения объемной доли. Тогда при вычислении потоков через грани ячейки можно явно учесть эффект твердой стенки вблизи грани, а также должным образом аппроксимировать компенсационные потоки. Для этого используется метод Годунова [19] и решение составной задачи Римана, решение которой описывает распад произвольного разрыва в газе при наличии дополнительного контактного разрыва [20–22]. Это позволяет фактически убрать численную диссипацию при численном интегрировании уравнения для объемной доли. Ниже рассмотрим предлагаемую методику на примере одномерных уравнений.

3. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ

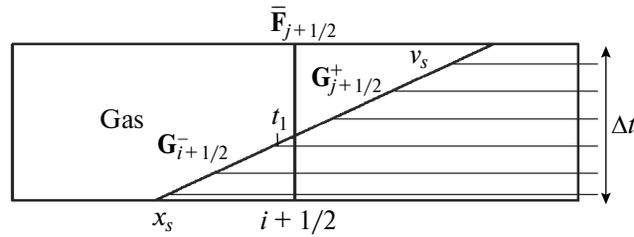
Основные элементы дискретной модели и численного метода рассмотрим на простой одномерной модели. Обобщение на пространственный случай будет предметом последующих публикаций. В одномерной модели граница тела представляется точкой x_s , расчетная область — интервалом, на котором введена сетка. Будем предполагать ее равномерной с шагом h .

Одномерный аналог системы уравнений (11) получается, если считать все параметры зависящими только от времени и одной пространственной координаты $x = x_1$, компоненты скорости тела $\mathbf{V}_s = (v_s, 0, 0)$, скорость газа $\mathbf{U} = (u, 0, 0)$, $V = h$, $S_v = x_s$. Интегрируя при этих предположениях (11) по времени на интервале $[t_n, t_{n+1}]$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, и по ячейке сетки $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + h$ получаем дискретные уравнения следующего вида:

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{h} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{i+1/2}(t) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{i-1/2}(t) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{G}(x_s(t)) dt \right], \quad (17)$$

где $\mathbf{Q} = (\alpha, \alpha \mathbf{q})^T$ — расширенный вектор состояния, $\mathbf{F} = (\alpha v_s, \alpha \mathbf{f})^T$ — расширенный вектор потока, $\mathbf{G} = (0, \mathbf{f} - v_s \mathbf{q})^T$ — компенсационный поток на границе. Здесь \mathbf{q} и \mathbf{f} — стандартные векторы консервативных переменных и потока одномерной газодинамики. Вектор $\mathbf{Q} = 0$ и соответствующий вектор потока $\mathbf{F} = 0$ отвечают телу ($\alpha = 0$).

Таким образом, изменение вектора решения определяется вектором потока через грань ячейки $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{i+1/2}(t) dt$ и вкладом компенсационных потоков. При этом надо иметь в виду, что на временном шаге граница тела может пересечь грань ячейки и переместиться в соседнюю ячейку (фиг. 2). Поэтому вклад компенсационного потока должен быть перераспределен между двумя соседними ячейками. Если t_1 — момент времени, когда граница тела пересекает грань ячейки, то часть потока, отвечающая интервалу $[0, t_1]$, представляет собой вклад в i -ю ячейку, а другая часть $([t_1, \Delta t])$ — вклад в $i + 1$.



Фиг. 2. Численный и компенсационный поток на грани ячейки: t_1 — момент времени, когда граница тела пересекает грань ячейки.

Чтобы учесть эффект компенсационного потока, введем на каждой грани два вектора —

$$\mathbf{G}_{i+1/2}^- = \int_0^{t_1} \mathbf{G}(x_s(t)) dt, \quad \mathbf{G}_{i+1/2}^+ = \int_{t_1}^{\Delta t} \mathbf{G}(x_s(t)) dt. \tag{18}$$

Тогда разностная схема может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{h} \left[(\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \mathbf{G}_{i+1/2}^-) - (\bar{\mathbf{F}}_{i-1/2} + \mathbf{G}_{i-1/2}^+) \right]. \tag{19}$$

Компенсационные потоки $\mathbf{G}_{i+1/2}^\pm$ возникают на гранях, разделяющих ячейки, одна из которых является пересекаемой. Они обеспечивают перенос массы, импульса и энергии при переходе границы тела через грань ячейки. В остальных случаях эти потоки равны нулю, и схема редуцируется в базовую газодинамическую схему. Необходимо также отметить, что компенсационные потоки должны учитывать направление нормали. Так, для случая на фиг. 2 потоки должны браться со знаком минус.

Аппроксимация численного потока $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}$ и компенсационных потоков $\mathbf{G}_{i+1/2}^\pm$ выполняется методом С.К. Годунова на основе решения возникающей на грани составной (пристеночной) задачи Римана (СЗР). Эта задача в общем случае описывает распад произвольного разрыва вблизи твердой стенки. Подробно ее постановка, решение и аппроксимация численного и компенсационного потоков рассматриваются в разд. 4.

Возможны 4 типа СЗР в зависимости от того, находится грань в газе или теле, а также от паттерна — взаимного расположения газа и тела. Будем называть *левосторонним паттерном* расположение, когда газ находится слева от тела, и *правосторонним*, когда справа. Введем следующие условные обозначения для типов СЗР: СЗР_g для задачи, когда грань в газе, СЗР_s, когда грань в теле.

Решение первой задачи зависит от паттерна (*), координаты границы твердого тела (x_s), ее скорости (v_s) и начальных параметров газа слева и справа от разрыва ($\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r$): СЗР_g = СЗР_g(*, $x_s, v_s, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r$), а решение второй — от паттерна, координаты границы, ее скорости и начальных параметров газа (\mathbf{Q}): СЗР_s = СЗР_s(*, x_s, v_s, \mathbf{Q}). Здесь \mathbf{Q} обозначает расширенный вектор решения, $\mathbf{Q} = (\alpha, \alpha\mathbf{q})$, *= l для левостороннего паттерна, *= r для правостороннего.

Численный поток на грани σ строится либо на решении СЗР, либо на решении стандартной ЗР:

$$\begin{aligned} \alpha_l = 0, 0 < \alpha_r \leq 1 & \quad - \quad \mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}[\text{СЗР}_s(r, x_s, v_s, \mathbf{Q}_r)], \\ \alpha_r = 0, 0 < \alpha_l \leq 1 & \quad - \quad \mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}[\text{СЗР}_s(l, x_s, v_s, \mathbf{Q}_l)], \\ \alpha_l = 1, 0 \leq \alpha_r < 1 & \quad - \quad \mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}[\text{СЗР}_g(l, x_s, v_s, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r)], \\ \alpha_r = 1, 0 \leq \alpha_l < 1 & \quad - \quad \mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}[\text{СЗР}_g(r, x_s, v_s, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r)], \\ \alpha_r = 1, \alpha_l = 1 & \quad - \quad \mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}[\text{ЗР}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r)], \\ \alpha_r = 0, \alpha_l = 0 & \quad - \quad \mathbf{F}_\sigma = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь через ЗР($\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$) обозначается стандартное решение задачи Римана в газе, $\mathbf{F}[\cdot]$ — численный поток на решении задачи Римана.

4. СОСТАВНАЯ (ПРИСТЕНОЧНАЯ) ЗАДАЧА РИМАНА

Аппроксимация численного потока строится методом С.К. Годунова на основе решения составной (пристеночной) задачи Римана. При этом, как было сказано выше, необходимо рассмотреть четыре типа задач —

СЗР_s(*l*), СЗР_s(*r*), СЗР_g(*l*) и СЗР_g(*r*), которые различаются взаимным расположением газа, твердого тела и точки начального разрыва ($x = 0$). Фактически, достаточно рассмотреть один тип паттерна, например, левосторонний. Решение для правостороннего паттерна тогда можно получить, сведя задачу к левостороннему заменой знака координаты и скорости на противоположный.

Математическая постановка СЗР_g($l, x_s, v_s, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r$) и СЗР_s($l, x_s, v_s, \mathbf{Q}_l$) сводится к решению задачи Коши для расширенной системы уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \tag{21}$$

где $\mathbf{Q} = [\alpha, \alpha p, \alpha \rho u, \alpha \rho E]^T$ и $\mathbf{F} = [\alpha v_s, \alpha \rho u, \alpha \rho u^2 + \alpha p, \alpha \rho H]^T$ с начальными данными при $t = 0$

$$\text{для СЗР}_g - \alpha = \begin{cases} 1, & x \leq x_s, \\ 0, & x > x_s, \end{cases} \quad \mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{Q}_l, & x \leq 0, \\ \mathbf{Q}_r, & 0 < x \leq x_s, \\ \mathbf{Q}_s, & x > x_s, \end{cases} \tag{22}$$

$$\text{для СЗР}_s - \alpha = \begin{cases} 1, & x \leq x_s, \\ 0, & x > x_s, \end{cases} \quad \mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{Q}_l, & x \leq x_s, \\ \mathbf{Q}_s, & x > x_s. \end{cases} \tag{23}$$

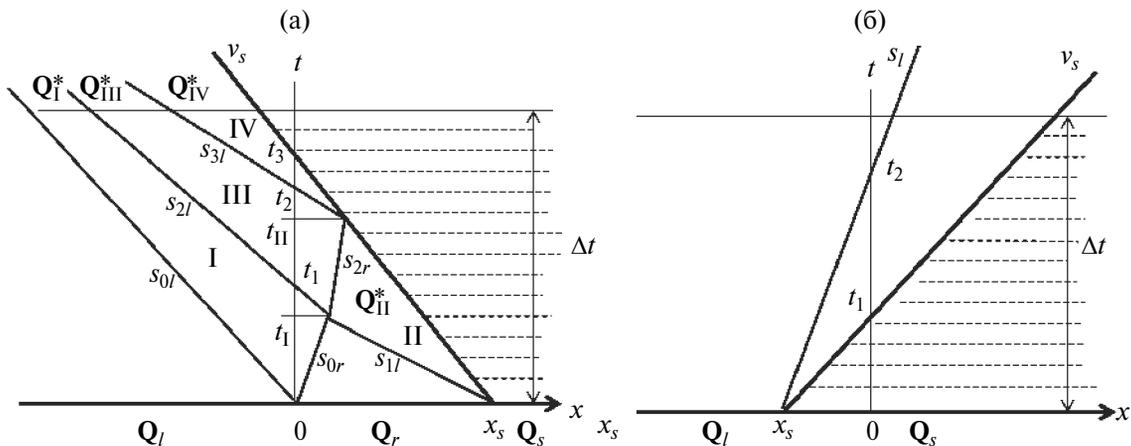
Здесь $\mathbf{Q}_s = 0$ — вектор решения в области тела. Граница твердого тела движется с постоянной скоростью v_s . Мы также полагаем, что $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_s) = 0$, и примитивный вектор для определенности принимает некоторые референсные значения, например, $\rho_s = 1, u_s = v_s, p_s = 1$, при $\alpha = 0$.

Первая задача, (21), (22), не является автомодельной. Ее решение описывает множественное взаимодействие разрывов, являющихся результатом распада начального разрыва ($x = 0$) и их последующих взаимодействий с поверхностью твердого тела. Характерная структура волн в этой задаче показана на фиг. 3а. Она определяется взаимодействием двух возмущенных зон, образующихся в результате распада начального разрыва ($x = 0$) с начальными параметрами $\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r$ и воздействия потока \mathbf{Q}_s на движущуюся со скоростью v_s поверхность тела.

Первая возмущенная зона (I) ограничена волнами s_{0l} и s_{0r} , вторая (II) — поверхностью тела v_s и волной s_{1l} . Взаимодействие первичных возмущенных зон начинается в момент времени t_I , когда пересекаются траектории волн s_{0r} и s_{1l} . Результатом является формирование вторичной возмущенной зоны (III), ограниченной волнами s_{2l} и s_{2r} . В момент времени t_{II} правосторонняя волна s_{2r} сталкивается с поверхностью тела, формируя третичную возмущенную зону (IV), ограниченную телом v_s и волной s_{3l} . Вектор состояния в возмущенных зонах обозначается верхним индексом * на фиг. 3.

В последующие моменты времени волны сталкиваются друг с другом и с телом, образуя новые волны и возмущенные зоны. Этот каскадный волновой процесс описать точно в общем случае не представляется возможным. Поэтому для аппроксимации численного потока мы воспользуемся приближенным решением, которое строится на основе методов HLL и HLLC [23]. Решение HLL используется для описания возмущенных областей I и III, HLLC — для пристеночных областей II и IV. Ниже кратко приведем эти решения для случая формирования возмущенной зоны I (HLL) и II (HLLC).

Начальными данными для HLL-приближения являются значения вектора состояния и вектора потока слева и справа от разрыва, $\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r$ и $\mathbf{F}_l, \mathbf{F}_r$. Заметим, что в общем случае необязательно, что $\mathbf{F}_l = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l)$ и $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_r)$.



Фиг. 3. Волновая конфигурация в составной (пристеночной) задаче Римана: а — для случая СЗР_g, б — для случая СЗР_s.

Решение HLL определяется скоростями левой и правой волны, s_l и s_r , которые ограничивают возмущенную область, вектором состояния \mathbf{Q}^* и вектором потока \mathbf{F}^* возмущенной зоны. Эти векторы, при условии, что скорости волн известны, определяются из соотношений Рэнкина–Гюгонио на разрывах s_l и s_r :

$$\mathbf{Q}^* = \frac{\mathbf{F}_l - \mathbf{F}_r + s_r \mathbf{Q}_r - s_l \mathbf{Q}_l}{s_r - s_l}, \quad \mathbf{F}^* = \frac{s_r \mathbf{F}_l - s_l \mathbf{F}_r + s_l s_r (\mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_l)}{s_r - s_l}. \quad (24)$$

Скорости волн аппроксимируются в соответствии с [24] следующим образом:

$$s_l = \min [0, \min(u_l - a_l, \bar{u} - \bar{a})], \quad s_r = \max [0, \max(u_r + a_r, \bar{u} + \bar{a})], \quad (25)$$

где u — скорость газа, a — скорость звука, верхняя черта — среднее арифметическое значений слева и справа от разрыва.

Начальными данными для HLLC-приближения, описывающего возмущенную зону при взаимодействии газового потока с поверхностью движущегося тела, являются скорость тела v_l , вектор состояния потока \mathbf{Q}_l и вектор потока \mathbf{F}_l . Опять же, вектор потока может быть в общем случае аппроксимацией и не совпадать с вектором потока $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_l)$.

HLLC-приближение дает значение консервативного вектора \mathbf{Q}^* и потокового вектора \mathbf{F}^* в возмущенной зоне, ограниченной поверхностью тела v_s и волной s_l . Скорость волны определяется так же, как в HLL-решении:

$$s_l = \min(u_l - a_l, v_s - a_l). \quad (26)$$

Имея скорость волны, разделяющей возмущенную и невозмущенную области, определяем сначала вектор \mathbf{Q}^* из законов сохранения массы, импульса и энергии —

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}^*, p^*) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l) = s_l(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_l) \quad (27)$$

и условия $u^* = v_s$:

$$\mathbf{Q}^* = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{u_l - s_l}{v_s - s_l} \left(\begin{array}{c} \rho_l \\ \rho_l v_s \\ \rho_l E_l + (u_l - v_s) \left(\frac{p_l}{u_l - s_l} - \rho_l v_s \right) \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (28)$$

$$p^* = p_l + \rho_l(u_l - s_l)(u_l - v_s).$$

Аппроксимация потока в возмущенной области \mathbf{F}^* определяется после этого из условия Рэнкина–Гюгонио:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_l + s_l(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_l). \quad (29)$$

На основе HLL- и HLLC-солверов решение СЗР_g может быть построено в возмущенной области следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{область } I : & \quad \text{HLL}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l), \mathbf{Q}_r, \mathbf{F}(\mathbf{Q}_r)) \Rightarrow (s_{0l}, s_{0r}, \mathbf{Q}_I^*, \mathbf{F}_I^*), \\ \text{область } II : & \quad \text{HLLC}(\mathbf{Q}_r, \mathbf{F}(\mathbf{Q}_r), v_s) \Rightarrow (s_{1l}, \mathbf{Q}_{II}^*, \mathbf{F}_{II}^*), \\ \text{область } III : & \quad \text{HLL}(\mathbf{Q}_I^*, \mathbf{F}_I^*, \mathbf{Q}_{II}^*, \mathbf{F}_{II}^*) \Rightarrow (s_{2l}, s_{2r}, \mathbf{Q}_{III}^*, \mathbf{F}_{III}^*), \\ \text{область } IV : & \quad \text{HLLC}(\mathbf{Q}_{III}^*, \mathbf{F}_{III}^*, v_s) \Rightarrow (s_{3l}, \mathbf{Q}_{IV}^*, \mathbf{F}_{IV}^*). \end{aligned} \quad (30)$$

Что касается СЗР_s, хотя она является автомодельной, и ее решение может быть построено точно, для нее также используется приближенный солвер: $\text{HLLC}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l), v_s) \Rightarrow (s_l, \mathbf{Q}^*, \mathbf{F}^*)$.

Рассмотренное выше приближенное решение СЗР_g справедливо, вообще говоря, при условии, что траектории левосторонних волн s_{0l}, s_{2l}, s_{3l} не пересекаются на временном шаге Δt . Если пересечение имеет место, то возникают дополнительные волны, которые меняют рассмотренное выше решение. Одним из решений этой проблемы может быть корректировка скоростей волн, например, так: $s_{0l}, s_{2l}, s_{3l} \leftarrow \min(s_{0l}, s_{2l}, s_{3l})$ [21]. Следует отметить, что ситуация с указанным выше пересечением, хотя теоретически и возможна, практически не возникает, как показывают многочисленные расчеты.

Численный поток, определяющий изменение консервативного вектора решения в счетной ячейке на шаге Δt , вычисляется на решении рассмотренной выше составной (пристеночной) задачи Римана. В случае СЗР_g с решением возмущенной зоны (30) поток аппроксимируется интегралом от потока \mathbf{F}^* по шагу Δt :

$$\mathbf{F}_\sigma = [\tau_1 \mathbf{F}_I^* + (\tau_2 - \tau_1) \mathbf{F}_{III}^* + (\tau_3 - \tau_2) \mathbf{F}_{IV}^*] \Delta t, \quad (31)$$

где $\tau_k = t_k/\Delta t$, $k = 1, 2, 3$, а t_k — моменты времени, в которые волны пересекают грань ячейки (прямую $x = 0$ на фиг. 3а).

Эти моменты времени определяются моментами времени t_I первичного взаимодействия возмущенных областей и времени t_{II} вторичного взаимодействия потока с поверхностью тела. Они вычисляются по координате x_s и скоростям соответствующих волн:

$$t_I = \frac{x_s}{s_{0r} - s_{1l}}, \quad t_{II} = \frac{x_s(s_{2r} - s_{1l})}{(s_{0r} - s_{1l})(s_{0r} - v_s)}, \quad (32)$$

а времена t_k в (31) —

$$t_1 = \frac{s_{2l} - s_{0r}}{s_{2l}} t_I, \quad t_2 = \frac{(s_{2r} - s_{0r})t_I + (s_{3l} - s_{2r})t_{II}}{s_{3l}}, \quad t_3 = \frac{(s_{2r} - s_{0r})t_I + (v_s - s_{2r})t_{II}}{v_s}. \quad (33)$$

Выражение для потока (31) верно для волновой конфигурации, изображенной на фиг. 3а, когда все интересные нас взаимодействия волн происходят на шаге Δt . Если это не так, и какие-то волновые взаимодействия выходят за пределы временного интервала $[0, \Delta t]$, формула (31) уже не работает. Чтобы сделать ее универсальной, справедливой для любых волновых конфигураций, можно скорректировать параметры τ_k следующим образом:

$$\tau_k \leftarrow \bar{\tau}_k = \begin{cases} \tau_k, & \text{если } 0 \leq \tau_k \leq 1, \\ 1, & \text{если иначе.} \end{cases} \quad (34)$$

Для СЗР_s (фиг. 3б) мы используем HLLC-решение для пристеночной возмущенной области (28), (29). Численный поток в этом случае выражается следующим образом:

$$\mathbf{F}_\sigma = [(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)\mathbf{F}^* + (1 - \bar{\tau}_2)\mathbf{F}_l] \Delta t, \quad (35)$$

где ($\bar{\tau}_k = \tau_k$, если $\tau_k \in [0, 1]$), и ($\bar{\tau}_k = 1$, в противном случае, $\tau_k = t_k/\Delta t$, $k = 1, 2$, а $t_1 = -x_s/v_s$, $t_2 = -x_s/s_l$ — моменты времени, в которые поверхность тела и волна пересекают грань ячейки (прямую $x = 0$ на фиг. 3б), соответственно).

Векторы \mathbf{G}_σ^\pm , определяющие вклад компенсационного потока на шаге Δt в ячейке слева (знак “-”) и справа (знак “+”) от грани в уравнении (19), вычисляются на соответствующей грани по решению СЗР_g:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\sigma^+ &= [(\mathbf{F}_{II}^* - v_s \mathbf{Q}_{II}^*)\bar{\tau}_{II} + (\mathbf{F}_{IV}^* - v_s \mathbf{Q}_{IV}^*)(\bar{\tau}_3 - \bar{\tau}_{II})] \Delta t, \\ \mathbf{G}_\sigma^- &= (\mathbf{F}_{IV}^* - v_s \mathbf{Q}_{IV}^*)(1 - \bar{\tau}_3)\Delta t. \end{aligned} \quad (36)$$

Если грань приходится на тело, то потоки определяются по решению СЗР_s:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\sigma^- &= (\mathbf{F}^* - v_s \mathbf{Q}^*)\bar{\tau}_1 \Delta t - \mathbf{G}_\sigma = -(\mathbf{F}^* - v_s \mathbf{Q}^*)(1 - \bar{\tau}_1)\Delta t, \\ \mathbf{G}_\sigma^+ &= (\mathbf{F}^* - v_s \mathbf{Q}^*)(1 - \bar{\tau}_1)\Delta t. \end{aligned} \quad (37)$$

Вычитание полного потока \mathbf{G}_σ из выражения для левостороннего потока \mathbf{G}_σ^- в (37) исключает двойной учет компенсационного потока, поскольку этот поток считается на обеих гранях пересекаемой ячейки.

Решение правосторонней задачи пристеночной задачи Римана (тело слева, газ справа) сводится к решению рассмотренной выше левосторонней задачи заменой знака у координаты и скорости на противоположный. Практически это сводится к следующему алгоритму.

Пусть надо определить потоки \mathbf{F}_σ и \mathbf{G}_σ^\pm для случая правостороннего паттерна, т.е., на решении СЗР_g($r, x_s, v_s, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r$). Для этого мы рассмотрим вспомогательную задачу СЗР_g($l, -x_s, -v_s, \bar{\mathbf{Q}}_l, \bar{\mathbf{Q}}_r$), где $\bar{\mathbf{Q}}_l = \mathbf{I}^* \mathbf{Q}_r$, $\bar{\mathbf{Q}}_r = \mathbf{I}^* \mathbf{Q}_l$, $\mathbf{I}^* = \text{diag}(1, 1, -1, 1)$ — диагональная матрица, и вычислим для нее соответствующие потоки $\bar{\mathbf{F}}_\sigma$ и $\bar{\mathbf{G}}_\sigma^\pm$. После этого искомые потоки находятся простым обратным преобразованием: $\mathbf{F}_\sigma = -\mathbf{I}^* \bar{\mathbf{F}}_\sigma$, $\mathbf{G}_\sigma^\pm = -\mathbf{I}^* \bar{\mathbf{G}}_\sigma^\pm$.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотренный в предыдущих разделах метод численного решения сопряженной задачи динамики газа и твердого тела на несогласованной сетке позволяет удерживать разрешение границы тела в одномерной модели с точностью до одной расчетной ячейки при надлежащем выборе временного шага. Последний определяется стандартным курантовским условием устойчивости. Этот шаг гарантирует также, что граница тела не проходит за шаг по времени расстояние более одной ячейки.

Все расчеты, представленные ниже, проводились на стационарной равномерной сетке сквозным образом по схеме (19). Геометрия тела задавалась начальным распределением объемной доли газа в ячейках сетки. Скорость тела являлась заданной величиной при форсированном движении. При свободном движении она определялась из решения уравнения движения тела под действием давления со стороны газа, которое определяется при вычислении компенсационных потоков. Число Куранта равнялось 0.9.

Тест 1. Постановка первой задачи аналогична задаче Сода [25] с той лишь разницей, что на месте разрыва мы ставим узкий поршень, который форсированно движется с постоянной заданной скоростью, равной скорости контактного разрыва в оригинальной постановке, $v_s = 0.92745$. Начальные значения приведены в табл. 1.

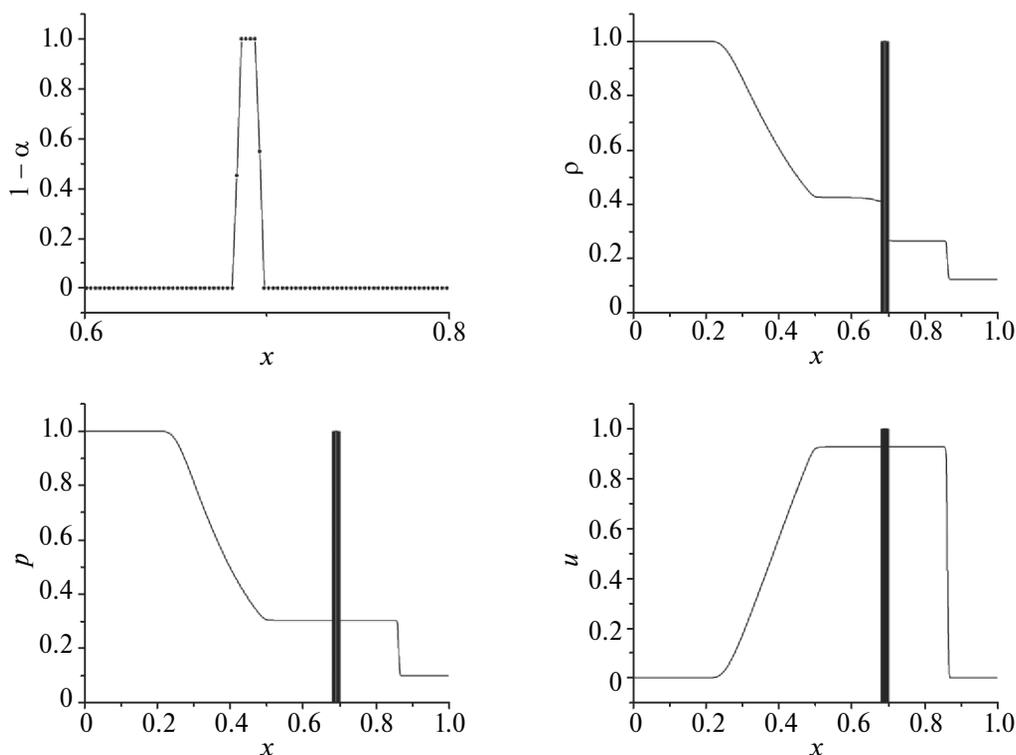
Таблица 1. Начальные значения для теста 1.

	$0 < x < 0.5$	$0.5 < x < 0.505$	$0.505 < x < 1$
α	1.0	0.0	1.0
ρ	1.0	0.0	0.125
u	0.0	0.0	0.0
p	1.0	0.0	0.1

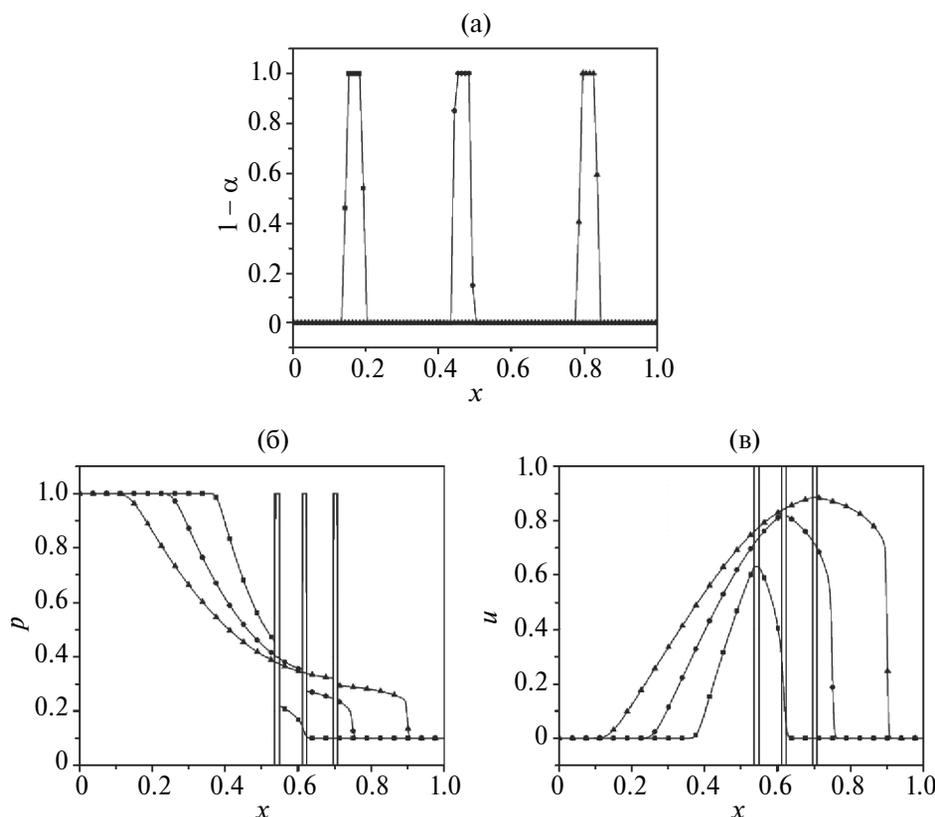
Численные решения приведены на графиках, изображенных на фиг. 4. Здесь тело представляет собой тонкий плоский поршень. Его положение показано на графиках двумя вертикальными линиями. Распределение объемной доли тела демонстрирует бездиссипативное разрешение границы; левая и правая границы поршня разрешаются с точностью до одной ячейки. При этом распределение газодинамических параметров, положение и амплитуды волны разрежения и ударной волны, возникающих при движении поршня, в точности совпадают с соответствующими решениями оригинальной задачи Сода.

Тест 2. В этом тесте рассматривается свободное движение тела под действием силы давления. Постановка задачи такая же, как в предыдущем тесте (Таблица 1). Масса поршня равна 1.5, его начальная скорость равна нулю.

Под действием перепада давления поршень начинает перемещаться справа налево. При этом в газе образуются нарастающие по времени волны сжатия и разрежения. Этот процесс показан на фиг. 5, где приведены



Фиг. 4. Численное решение для задачи Сода, форсированное движение: распределения объемной доли и плотности (верхний ряд), давления и скорости (нижний ряд).



Фиг. 5. Численное решение для задачи Сода, свободное движение: а — для распределения объемной доли и плотности, б, в — для давления и скорости на три последовательных момента времени.

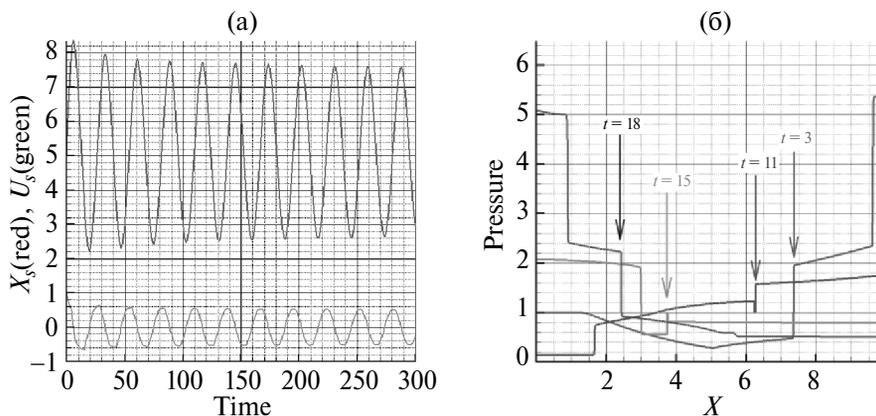
численные распределения объемной доли тела, давления и скорости на три последовательных момента времени. Граница поршня показана вертикальными линиями. Со временем волна сжатия опрокидывается, формируя фронт ударной волны. Скорость поршня увеличивается, амплитуда ударной волны растет, перепад давления на поршне уменьшается. Асимптотически этот процесс выходит на автомодельные распределения предыдущей задачи Сода. Здесь также отметим бездиссипативное разрешение границы тела (фиг. 5).

Тест 3. Этот тест представляет собой газодинамический осциллятор. В нем массивный поршень совершает свободное колебательное движение за счет меняющегося со временем перепада давления на его границах. Начальное распределение параметров в газе постоянное: $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 1$. Газ занимает область $0 \leq x \leq 10$, начальное положение поршня — $5 \leq x \leq 5.1$. Масса поршня равна 1.5, начальная скорость $v_s = 1$. Левая и правая границы области ($x = 0$ и $x = 1$) соответствуют жестким стенкам с граничным условием $u = 0$.

В этом тесте при движении поршня также происходит формирование волн сжатия и разрежения, которые теперь при достижении границ области отражаются от стенок и повторно взаимодействуют с поршнем, замедляя его скорость до нуля и разворачивая направление движения на противоположное. Этот процесс иллюстрируется на фиг. 6б, где показаны распределения давления на 4 последовательных момента времени. В результате со временем возникает колебательное движение поршня с амплитудой примерно 2.5. Этот процесс показан на фиг. 6а графиками центра поршня (красный) и скорости (зеленый) в зависимости от времени. Отметим, что рассматриваемый процесс становится строго периодическим и не должен затухать со временем, так как какие-либо диссипативные процессы в рассматриваемой модели отсутствуют. Этот факт хорошо подтверждается приведенными численными результатами, благодаря бездиссипативному разрешению границ тела.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к решению задач течения сжимаемой жидкости около стационарных и движущихся тел на основе цифрового представления геометрии и осредненных уравнений газовой динамики, действующих во всем пространстве, включая область тела. Методика использует математические модели многофазных сред, где распределение фаз задается функцией Хевисайда, а межфазный интерфейс моделируется в рамках метода диффузной границы. Это позволило продолжить область решения на все пространство и фактически



Фиг. 6. Газодинамический осциллятор: а — для координаты центра поршня (красный) и скорости (зеленый) в зависимости от времени, б — для распределения давления в газе на четыре последовательных момента времени.

свести краевую задачу в ограниченной области к начальной задаче Коши во всем пространстве. Движение тела при этом полностью определяется решением уравнения переноса для скалярного поля функции порядка. Вычислительная модель строится на простейших декартовых сетках. Для решения осредненных уравнений в рамках одномерной модели рассмотрен численный метод Годунова. При этом в пересекаемых ячейках вводится разрывное восполнение решения, что приводит к рассмотрению составной задачи Римана, описывающей распад начального разрыва при наличии ограничивающей стенки. Построено приближенное решение составной задачи Римана на основе гибридного HLL-HLLC-метода. Показано, что аппроксимация численного потока на решении составной задачи Римана обеспечивает, во-первых, перенос функции порядка без численной диссипации, а во-вторых, устойчивость разностной схемы при стандартном курантовском ограничении на шаг по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Издательство «Наука», 1976. 400 с.
2. Rider W. J., Kothor D. B. Reconstructing volume tracking // J. Comput. Phys. 1998. V. 141. P. 112–152.
3. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. V. 39. P. 201–225.
4. Osher S., Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations // J. Comput. Phys. 1988. V. 79. P. 12–49.
5. Mulder W., Osher S., Sethian J. Computing interface motion in compressible gas dynamics // J. Comput. Phys. 1992. V. 100. P. 209–228.
6. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // Annual Review of Fluid Mechanics. 2005. V. 37. P. 239–261.
7. Sambasivan S. K., Udaykumar H. S. Ghost fluid method for strong shock interactions. Part 2: Immersed solid boundaries // AIAA J. 2009. V. 47. P. 2923–2937.
8. Baer M., Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // J. Multiph Flow. 1986. V. 12. P. 861–89.
9. Favrie N., Gavriluk S., Saurel R. Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 6037–6077.
10. Ndanou S., Favrie N., Gavriluk S. Multi-solid and multi-fluid diffuse interface model: applications to dynamic fracture and fragmentation // J. Comput. Phys. 2015. V. 295. P. 523–555.
11. Favrie N., Gavriluk S. Diffuse interface model for compressible fluid–compressible elastic-plastic solid interaction // J. Comput. Phys. 2012. V. 231. P. 2695–2723.

12. *Kemm F., Gaburro E., Thein F., Dumbser M.* A simple diffuse interface approach for compressible flows around moving solids of arbitrary shape based on a reduced Baer–Nunziato model. *Computers and Fluids*. 2020. V. 204. P. 104–536
13. *Dal Maso G., LeFloch P., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // *J. Math. Pures Appl.* 1995. V. 74. P. 483–548.
14. *Peskin C.* Flow patterns around heart valves: a numerical method // *J. Comput. Phys.* 1972. V. 10. P. 252–271.
15. *Angot P., Bruneau C. H., Fabrie P.* A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows // *Numer. Math.* 1999. V. 81. P. 497–520.
16. *Абалакин И. В., Васильев О. В., Жданова Н. С., Козубская Т. К.* Метод характеристических штрафных функций для численного моделирования сжимаемых течений на неструктурированных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 8. С. 1336–1352.
17. *Меньшов И. С., Корнев М. А.* Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // *Матем. моделирование*. 2014. Т. 26. № 5. С. 99–112.
18. *Меньшов И. С., Павлухин П. В.* Эффективный параллельный метод сквозного счета задач аэродинамики на несвязных декартовых сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 9. С. 1677–1691.
19. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. сборник*. 1957. 47:3. С. 271–306.
20. *Igor Menshov, Pavel Zakharov.* On the composite Riemann problem for multi-material fluid flows // *Internat. Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2014. V. 76(2). P. 109–127.
21. *Menshov I. S., Serezhkin I. S.* Numerical Model of Multiphase Flows Based on Sub-Cell Resolution of Fluid Interfaces // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2022. V. 62. No. 10. P. 1723–1742.
22. *Chao Zhang, Igor Menshov.* Using the composite Riemann problem solution for capturing interfaces in compressible two-phase flows // *Appl. Math. and Comput.* 2019. V. 363 .
23. Toro E. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer. 2009. P. 719.
24. *Batten P., Clarke N., Lambert C., Causon D. M.* On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver. 1997. V. 18. No 6. P. 1553–1570.
25. *Sod G. A.* A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comput. Phys.* 1978 V. 27 (1): P. 1–31.

FREE BOUNDARY METHOD FOR COUPLED PROBLEMS OF GAS AND SOLID DYNAMICS

I.S. Menshov*

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047 Russia

**e-mail: menshov@kiam.ru*

Received 02 April, 2024

Revised 02 April, 2024

Accepted 05 May, 2024

Abstract. This paper presents a new approach to numerical modeling of gas flow around stationary and moving rigid bodies, allowing for the use of Eulerian grids that are not tied to the geometry of the body. The bodies are assumed to be absolutely rigid and undeformable, with their elastic properties disregarded. The gas is inviscid and non-heat-conducting, described by compressible fluid equations. The proposed approach is based on averaging the equations of the original model over a small spatial filter. This results in a system of averaged equations that includes an additional quantity — the solid volume fraction parameter — whose spatial distribution digitally represents the geometry of the body (analogous to an order function). This system of equations operates across the entire space. Under this approach, the standard boundary-value problem within the gas region is effectively reduced to a Cauchy problem over the entire space. For a one-dimensional model, the numerical solution of the averaged equations is considered using Godunov's method. In intersected cells, a discontinuous solution is introduced, leading to a compound Riemann problem that describes the decay of the initial discontinuity in the presence of a confining wall. It is shown that the approximation of the numerical flux for the compound Riemann problem solution ensures transport of the order function without numerical dissipation.

Keywords: gas dynamics near a moving solid surface, averaged Euler equations, compound Riemann problem, Godunov's numerical method.