

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А.С. Антипин^{1,*}, Е.В. Хорошилова^{2,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: asantip@yandex.ru

**e-mail: khorelena@gmail.com

Поступила в редакцию 19.02.2024 г.

Переработанный вариант 19.02.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

В гильбертовом пространстве рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления с закрепленным левым концом и подвижным правым концом, на фиксированном отрезке времени. Целевой функционал представляет собой сумму интегральной и терминальной компонент квадратичного вида. Каждая из компонент ищет свой минимум на своем допустимом множестве независимо друг от друга. На правом конце отрезка времени мы имеем задачу линейного программирования. Решение этой задачи неявно определяет терминальное условие для управляемой динамики. Предлагается седловой подход для решения задачи, который сводится к вычислению седловой точки функции Лагранжа. В основе подхода лежат седловые неравенства по обеим группам переменных: прямых и двойственных. Эти неравенства представляют собой достаточные условия оптимальности. Формулируется метод вычисления седловой точки функции Лагранжа. Доказывается сходимости по прямым и двойственным переменным, а именно: слабая сходимости по управлениям, сильная сходимости по фазовым и сопряженным траекториям, а также по терминальным переменным краевой задачи. На базе седлового подхода строится синтез управления, т. е. обратная связь при наличии ограничений на управления в форме выпуклого замкнутого множества. Это новый результат, поскольку в классическом случае в теории линейного регулятора аналогичное утверждение доказывается при отсутствии ограничений на управления, что дает возможность использовать матричное уравнение Риккати. При наличии ограничений на управление эти рассуждения уже не проходят. Поэтому в основе полученного результата лежит понятие опорной плоскости ко множеству управлений. Библ. 20.

Ключевые слова: терминальное управление, краевая задача, функция Лагранжа, седловые методы, синтез управления, сходимости.

DOI: 10.31857/S0044466924090049, EDN: WKZSWO

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что принцип максимума относится к числу наиболее мощных и сильных инструментов решения задач оптимального управления. Однако принцип максимума, с точки зрения разработки теории методов решения задач оптимального управления, представляет собой всего лишь необходимое условие оптимальности. Последнее означает, что решение, найденное с помощью принципа максимума, может как быть решением исходной задачи, но, в равной степени, может им и не быть. В этом случае вычислительный метод не может быть признан обоснованным с точки зрения доказательных вычислений. На практике для обоснования полученного решения часто опираются на опыт и интуицию экспертов. Однако такого рода экспертиза носит субъективный характер и не является доказательной.

Достаточные условия оптимальности представляются естественным выходом из положения. Основные идеи этого подхода обсуждались в [1], но там они не получили четкого обоснования, лишь предполагалось, что на базе седлового метода можно синтезировать линейный регулятор (обратную связь). В настоящей статье доказывается, что механизм обратной связи целиком «зашит» в вычислительную технологию седлового градиентного метода [2–12]. Фактически между этими процессами существует внутренняя связь.

Обоснованность подхода базируется на доказанных теоремах, в основе которых лежит теория двойственности. Все теоремы работают на классах методов и для классов задач. Сходимость вычислительных процессов гарантируется по всем компонентам решения, а именно: по управлениям (слабая), по фазовым и сопряженным траекториям (сильная), по терминальным переменным сходимости также сильная.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается задача терминального управления с линейной динамикой на конечном отрезке времени

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

где $D(t), B(t)$ суть $n \times n, n \times r$ -функциональные матрицы. Левый конец $x(t_0)$ фазовой переменной закреплён и равен x_0 , правый конец $x(t_1)$ подвижен в пределах выпуклого многогранника $M = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : G_1 x_1 \leq g_1\}$, G_1 — заданная матрица размерности $m \times n, m < n$, вектор g_1 — фиксирован. Управление $u(t) \in U \subset \mathbb{L}_2^n$, U — выпуклое замкнутое ограниченное множество. Для любых управлений из U и заданного $x(t_0)$ система дифференциальных уравнений (1) порождает траектории $x(t)$, правые концы которых описывают множество достижимости $X_1 = X(t_1) \subset \mathbb{R}^n$. Задача рассматривается в гильбертовом пространстве.

Под решением дифференциальной системы (1) будем понимать любую пару $(x(t), u(t))$, удовлетворяющую тождественно условию

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

В [13, Кн. 1, с. 443] показано, что любому управлению $u(t) \in U$ в линейной дифференциальной системе отвечает единственная траектория $x(t)$, удовлетворяющая этому тождеству. Траектория $x(t)$ в условиях тождества является абсолютно непрерывной функцией. Класс абсолютно непрерывных функций представляет собой линейное многообразие, всюду плотное в $\mathbb{L}_2^n[t_0, t_1]$. Этот класс будем обозначать через $\mathbb{AC}^n[t_0, t_1]$. Для любой пары функций $(x(t), u(t)) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$ выполняется формула Ньютона—Лейбница и формула интегрирования по частям. Скалярные произведения и нормы определяются, соответственно, как

$$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), y(t) \rangle dt, \quad \|x(\cdot)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt,$$

где

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i(t)y_i(t), \quad |x(t)|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Будем понимать обозначение $x(\cdot)$ как элемент гильбертова пространства (если это надо подчеркнуть), а $x(t)$ как значение конечномерного вектора в точке t . Далее там, где не будет разночтений, наряду с обозначениями $x(\cdot), y(\cdot)$ будем также использовать $x(t), y(t)$.

Минимизируемый функционал представлен суммой интегральной и терминальной компонент:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x(t), x(t) \rangle + \langle Q_2(t)u(t), u(t) \rangle) dt + \langle Sx_1, x_1 \rangle,$$

где S — фиксированная положительно-полуопределённая симметричная $n \times n$ матрица; $Q_1(t), Q_2(t)$ — непрерывные положительно-полуопределённые симметричные матрицы размерностей $n \times n, n \times r$ соответственно.

С учетом сказанного, сформулируем задачу терминального управления в виде

$$\begin{aligned} (x^*(t), u^*(t), x_1^*) \in \operatorname{Argmin} \Big\{ & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x(t), x(t) \rangle + \langle Q_2(t)u(t), u(t) \rangle) dt + \\ & + \langle Sx_1, x_1 \rangle \Big| G_1 x_1 \leq g_1, \quad x_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^n, \quad x(t) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1], \quad u(t) \in U \Big\}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1^*.$$

В теории оптимального управления существуют несколько видов достаточных условий. Наиболее известные из них — это достаточные условия по В.Ф. Кротову, основанные на неравенствах Гамильтона—Якоби [14], по В.В. Величенко, опирающиеся на теорию поля экстремалей [15]. В нашем случае мы используем достаточные условия седлового типа, которые следуют из теории двойственности и были получены нами в случае линеаризации выпуклых и гладких задач терминального управления. Они были названы седловыми, так как порождаются седловыми неравенствами относительно прямых и двойственных переменных функции Лагранжа в задачах линейного и выпуклого программирования.

Следуя методологии теории двойственности, линеаризуем линейно-квадратичную задачу (2) в точке $(x_1^*, x^*(t), u^*(t))$, т. е. в решении задачи, тогда получим

$$\begin{aligned} (x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \operatorname{Argmin} \Big\{ & \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x(t) - x^*(t) \rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u(t) - u^*(t) \rangle) dt + \\ & + \langle Sx_1^*, x_1 - x_1^* \rangle \Big| G_1x_1 \leq g_1, x_1 \in X_1, x(t) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1], u(t) \in U \Big\}; \\ & \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1^*. \end{aligned}$$

Исключив константы в целевом функционале, приходим к более простой, но эквивалентной задаче:

$$\begin{aligned} (x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \operatorname{Argmin} \Big\{ & \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x(t) \rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u(t) \rangle) dt + \\ & + \langle Sx_1^*, x_1 \rangle \Big| G_1x_1 \leq g_1, x_1 \in X_1, x(t) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1], u(t) \in U \Big\}; \\ & \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1^*. \end{aligned} \quad (3)$$

В этой задаче требуется найти управление $u^*(t) \in U$ такое, что отвечающая ему траектория $x^*(t)$ соединяет начальную точку x_0 с терминальной точкой $x^*(t_1) = x_1^* \in X_1$, при этом целевой функционал принимает минимальное значение. В [13, Кн.2, с. 653] доказано, что решение $(x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$ данной задачи существует.

2. ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ФОРМЫ ЛАГРАНЖИАНА

Задача (3), аналог задачи линейного программирования, сформулирована в гильбертовом пространстве. Проводя аналогии между постановками задач оптимизации в конечномерных и функциональных пространствах, введем для (3) функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p_1, \psi(t); x_1, x(t), u(t)) = & \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x(t) \rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u(t) \rangle) dt + \\ & + \langle Sx_1^*, x_1 \rangle + \langle p_1, G_1x_1 - g_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (4)$$

при всех $(p_1, \psi(t)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$. Здесь $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ — линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из сопряженного пространства. Отметим, что вектор $(x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ играет двойную роль: как точка линеаризации и как решение задачи.

По теореме Куна–Таккера, седловая точка $(p_1^*, \psi^*(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ функции Лагранжа образована прямыми $(x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ и двойственными $(p_1^*, \psi^*(t))$ переменными. (Недавно в [16] было предложено новое доказательство теоремы Куна–Таккера).

По определению, седловая точка удовлетворяет системе неравенств

$$\mathcal{L}(p_1, \psi(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \leq \mathcal{L}(p_1^*, \psi^*(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \leq \mathcal{L}(p_1^*, \psi^*(t); x_1, x(t), u(t)),$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x^*(t) \rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u^*(t) \rangle) dt + \langle Sx_1^*, x_1^* \rangle + \langle p_1, G_1x_1^* - g_1 \rangle + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \rangle dt \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x^*(t) \rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u^*(t) \rangle) dt + \langle Sx_1^*, x_1^* \rangle + \langle p_1^*, G_1x_1^* - g_1 \rangle + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \rangle dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq & \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x(t) \rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u(t) \rangle) dt + \langle Sx_1^*, x_1 \rangle + \langle p_1^*, G_1x_1 - g_1 \rangle + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \Psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $(p_1, \Psi(t)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$. Несложными преобразованиями из системы (5) всегда можно вернуться к задаче (3), т. е. система (5) порождает исходную задачу относительно прямых переменных.

Введем понятие двойственного лагранжиана и покажем, что он порождает двойственную задачу. Переходя к сопряженным линейным операторам

$$\langle \Psi, Dx \rangle = \langle D^T \Psi, x \rangle, \quad \langle \Psi, Bu \rangle = \langle B^T \Psi, u \rangle$$

и используя формулу интегрирования по частям на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\langle \Psi(t_1), x(t_1) \rangle - \langle \Psi(t_0), x(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \frac{d}{dt} \Psi(t), x(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \Psi(t), \frac{d}{dt} x(t) \rangle dt,$$

выпишем сопряженную (двойственную) по отношению к (4) функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^T(p_1, \Psi_1, \Psi(t); x_1, x(t), u(t)) = & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\Psi(t) + \frac{d}{dt}\Psi(t), x(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\Psi(t), u(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1 - \Psi_1, x_1 \rangle + \langle p_1, -g_1 \rangle + \langle \Psi_0, x_0 \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

для всех $(p_1, \Psi_1, \Psi(t)) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$, где $\Psi_0 = \Psi(t_0)$, $\Psi_1 = \Psi(t_1)$. Оба лагранжиана (4) и (6) имеют одно и то же множество седловых точек $(p_1^*, \Psi_1^*, \Psi^*(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t))$. Седловая система (5) в сопряженном варианте имеет вид (чтобы убедиться в этом, достаточно в (5) перейти к сопряженным операторам):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\Psi(t) + \frac{d}{dt}\Psi(t), x^*(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\Psi(t), u^*(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1 - \Psi_1, x_1^* \rangle + \langle p_1, -g_1 \rangle + \langle \Psi_0, x_0 \rangle \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\Psi^*(t) + \frac{d}{dt}\Psi^*(t), x^*(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\Psi^*(t), u^*(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \Psi_1^*, x_1^* \rangle + \langle p_1^*, -g_1 \rangle + \langle \Psi_0, x_0 \rangle \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\Psi^*(t) + \frac{d}{dt}\Psi^*(t), x(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\Psi^*(t), u(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \Psi_1^*, x_1 \rangle + \langle p_1^*, -g_1 \rangle + \langle \Psi_0, x_0 \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

для всех $(p_1, \Psi_1, \Psi(t)) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$.

Из правого неравенства системы (7) с учетом того, что члены $\langle \Psi_0, x_0 \rangle$ взаимно уничтожаются, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\Psi^*(t) + \frac{d}{dt}\Psi^*(t), x^*(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\Psi^*(t), u^*(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \Psi_1^*, x_1^* \rangle \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\Psi^*(t) + \frac{d}{dt}\Psi^*(t), x(t) \rangle dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1 \rangle$$

при всех $(x_1, x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}^n[t_0, t_1] \times U$. В силу независимого изменения переменных x_1 , $x(t)$ и $u(t)$ в пределах своих допустимых подпространств (множеств), можно положить в последнем неравенстве, например, $x(t) = x^*(t)$, $u(t) = u^*(t)$ и получить $\langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1^* \rangle \leq \langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1 \rangle$. Таким образом, неравенство распадается на три независимых вариационных неравенства:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t) - x(t) \rangle dt \leq 0, \quad x(t) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1], \quad (8)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \leq 0, \quad u(t) \in U, \quad (9)$$

$$\langle Sx_1^* + G_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1^* - x_1 \rangle \leq 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

В (10) линейная функция достигает конечного экстремума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, что возможно лишь в случае, когда ее градиент обращается в нуль:

$$\psi_1^* = Sx_1^* + G_1^T p_1^* \quad (11)$$

(условие трансверсальности). Аналогично, в неравенстве (8) дифференцируемый функционал достигает конечного минимума при $x(t) = x^*(t)$ на всем линейном многообразии $\mathbb{AC}^n[t_0, t_1]$, что возможно лишь в случае, когда его градиент в этой точке также равен нулю:

$$Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0 \quad (12)$$

(система дифференциальных уравнений для сопряженной траектории в двойственной задаче). Неравенство (9) остается без изменений.

Левое неравенство системы (7) с учетом (11), (12) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi(t), u^*(t) \rangle dt + \langle Sx_1^* + G_1^T p_1 - \psi_1, x_1^* \rangle + \langle p_1, -g_1 \rangle \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) \rangle dt + \langle p_1^*, -g_1 \rangle. \end{aligned}$$

Рассматривая это неравенство при скалярных ограничениях

$$\langle Sx_1^* + G_1^T p_1 - \psi_1, x_1^* \rangle = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t)x^*(t) + D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t) \rangle dt = 0, \quad (13)$$

получим задачу максимизации

$$\langle p_1 - p_1^*, -g_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi(t) - \psi^*(t)), u^*(t) \rangle dt \leq 0$$

для всех $(p_1, \psi(t)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Но из (11), (12) следует, что решение $(p_1^*, \psi^*(t))$ одновременно принадлежит более узкому множеству, чем (13). Поэтому указанная точка остается минимумом и на подмножестве решений системы (13).

Объединяя последнее неравенство с условиями (9), (13), получаем систему:

$$\begin{aligned} & (p_1^*, \psi_1^*, \psi^*(t)) \in \operatorname{Argmax} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), B(t)u^*(t) \rangle dt + \langle p_1, -g_1 \rangle \mid \right. \\ & \quad \left. \frac{d}{dt}\psi(t) + D^T(t)\psi(t) = -Q_1(t)x^*(t), \quad \psi_1 = Sx_1^* + G_1^T p_1, \right. \\ & \quad \left. p_1 \in \mathbb{R}_+^m, \quad \psi(t) \in \Psi_2^n[t_0, t_1] \right\}, \\ & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \leq 0, \quad u(t) \in U. \end{aligned} \quad (14)$$

Эта задача двойственная по отношению к задаче (3). Она включает в себя задачу оптимизации относительно двойственных переменных и вариационное неравенство относительно управления. Исследование прямых и двойственных задач в совокупности порождает новые (седловые) подходы к их решению [5].

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ СЕДЛОВОГО ТИПА И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривая вместе левое неравенство седловой системы (5) и правое неравенство сопряженной седловой системы (7), мы приходим к следующей задаче:

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0, \quad (15)$$

$$\langle p_1 - p_1^*, G_1 x_1^* - g_1 \rangle \leq 0, \quad p_1 \in \mathbb{R}_+^m, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) = -Q_1(t)x^*(t), \quad \psi_1^* = Sx_1^* + G_1^T p_1^*, \quad (17)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \leq 0, \quad u(t) \in U. \quad (18)$$

Эта дифференциальная система представляет собой седловое достаточное условие оптимальности. Сопоставляя систему (15)–(18) с принципом максимума, можно видеть, что основное и единственное различие заключается в неравенстве (18). В нашем выпуклом случае (18) представляет собой вариационное неравенство относительно множества U в гильбертовом пространстве. В гладком случае принципа максимума мы будем иметь параметрическое семейство конечномерных вариационных неравенств, зависящих от параметра времени $t \in [t_0, t_1]$.

Отметим, что вариационные неравенства (16), (18) можно записать в эквивалентной форме уравнений с оператором проектирования на соответствующие выпуклые замкнутые множества:

$$p_1^* = \pi_+(p_1^* + \alpha(G_1 x_1^* - g_1)), \quad (19)$$

$$u^*(t) = \pi_U(u^*(t) - \alpha(Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t))), \quad (20)$$

где $\pi_+(\cdot)$, $\pi_U(\cdot)$ — операторы проектирования текущего вектора на положительный ортант пространства $\mathbb{R}_+^m$ и на множество управлений U , $\alpha > 0$.

Используя (19), (20), выпишем для решения системы (15)–(18) метод простой итерации:

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x^k(t_0) = x_0, \quad (21)$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 x_1^k - g_1)), \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^T(t)\psi^k(t) = -Q_1(t)x^k(t), \quad \psi_1^k = Sx_1^k + G_1^T p_1^k, \quad (23)$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha(Q_2(t)u^k(t) + B^T(t)\psi^k(t))), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

В таком виде метод простой итерации не предназначен для вычисления седловых точек. Однако на его основе можно построить управляемый метод простой итерации, уже обладающий сходимостью к седловым точкам. В предлагаемом методе каждая итерация распадается на два полушага, за счет чего реализуется принцип обратной связи и обеспечивается сходимость. Общая концепция подхода изложена в [6]. Другие подходы градиентного типа рассматривались многими авторами, в основном, применительно к методам решения вариационных неравенств, в частности, отметим [17, 18].

Формулы управляемого итеративного экстраградиентного метода имеют следующий вид:

1) прогнозный полушаг

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \quad \bar{x}^k(t_0) = x_0, \quad (25)$$

$$\bar{p}_1^k = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 \bar{x}_1^k - g_1)), \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^k(t) + D^T(t)\bar{\psi}^k(t) = -Q_1(t)\bar{x}^k(t), \quad \bar{\psi}_1^k = S\bar{x}_1^k + G_1^T \bar{p}_1^k, \quad (27)$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha(Q_2(t)u^k(t) + B^T(t)\bar{\psi}^k(t))); \quad (28)$$

2) основной полушаг

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \quad \bar{x}^k(t_0) = x_0, \quad (29)$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 \bar{x}_1^k - g_1)), \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^k(t) + D^T(t)\bar{\psi}^k(t) = -Q_1(t)\bar{x}^k(t), \quad \bar{\psi}_1^k = S\bar{x}_1^k + G_1^T\bar{p}_1^k, \quad (31)$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha(Q_2(t)\bar{u}^k(t) + B^T(t)\bar{\psi}^k(t))), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

Из формул этого процесса видно, что дифференциальные уравнения (25), (29) и (27), (31) используются только для вычисления функций $x^k(t)$ и $\bar{x}^k(t)$, $\psi^k(t)$ и $\bar{\psi}^k(t)$, поэтому процесс можно записать в более компактном виде

$$\bar{p}_1^k = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1x_1^k - g_1)), \quad (33)$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1\bar{x}_1^k - g_1)), \quad (34)$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha(Q_2(t)u^k(t) + B^T(t)\psi^k(t))); \quad (35)$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha(Q_2(t)\bar{u}^k(t) + B^T(t)\bar{\psi}^k(t))), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (36)$$

где $x^k(t)$, $\bar{x}^k(t)$, $\psi^k(t)$ и $\bar{\psi}^k(t)$ вычисляются в (25), (29), (27), (31).

Для получения вспомогательных оценок, необходимых для доказательства теоремы о сходимости метода, представим операторные уравнения (26), (30), (28), (32) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k - \alpha(G_1x_1^k - g_1), p_1 - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0, \quad (37)$$

$$\langle p_1^{k+1} - p_1^k - \alpha(G_1\bar{x}_1^k - g_1), p_1 - p_1^{k+1} \rangle \geq 0, \quad (38)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t) + \alpha(Q_2(t)u^k(t) + B^T(t)\psi^k(t)), u(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0, \quad (39)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t) + \alpha(Q_2(t)\bar{u}^k(t) + B^T(t)\bar{\psi}^k(t)), u(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt \geq 0, \quad (40)$$

выполняемых при всех $p_1 \in \mathbb{R}_+^m$, $u(t) \in U$. Аналогично тому, как это делалось, например, в работах [3, 5], используя лемму Гронуолла [13], можно получить оценки:

$$|\bar{p}_1^k - p_1^{k+1}| \leq \alpha \|G_1\| |x_1^k - \bar{x}_1^k|, \quad (41)$$

$$\|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\| \leq \alpha Q_{2\max} \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| + \alpha B_{\max} \|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\|, \quad (42)$$

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)|^2 \leq e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1-t_0) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2, \quad (43)$$

$$|x_1^k - \bar{x}_1^k|^2 \leq e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1-t_0) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2, \quad (44)$$

$$|x^k(t) - x^*(t)|^2 \leq e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1-t_0) \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2, \quad (45)$$

где $Q_{2\max} = \max\|Q_2(t)\|$, $B_{\max} = \max\|B(t)\|$, $D_{\max} = \max\|D(t)\|$, $t \in [t_0, t_1]$. Последняя из оценок означает, что ограниченное множество управлений линейный оператор переводит в ограниченное множество траекторий.

Так же получаются оценки отклонений сопряженных траекторий:

$$|\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)|^2 \leq e^{2D_{\max}(t_1-t)} |\psi_1^k - \bar{\psi}_1^k|^2, \quad (46)$$

$$|\psi_0^k - \bar{\psi}_0^k|^2 \leq e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} |\psi_1^k - \bar{\psi}_1^k|^2, \quad (47)$$

$$|\psi_1^k - \bar{\psi}_1^k|^2 \leq (\|S\| |x_1^k - \bar{x}_1^k| + \|G_1^T\| |p_1^k - \bar{p}_1^k|)^2, \quad (48)$$

$$|\psi_0^k - \bar{\psi}_0^k|^2 \leq 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} (\|S\|^2 |x_1^k - \bar{x}_1^k|^2 + \|G_1^T\|^2 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\|^2 &\leq (e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / (2D_{\max}) (\|S\| |x_1^k - \bar{x}_1^k| + \|G_1^T\| |p_1^k - \bar{p}_1^k|)^2 \leq \\ &\leq (e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / D_{\max} (\|S\|^2 |x_1^k - \bar{x}_1^k|^2 + \|G_1^T\|^2 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\|\psi^k(\cdot) - \psi^*(\cdot)\|^2 \leq (e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / (2D_{\max}) (\|S\| |x_1^k - x_1^*| + \|G_1^T\| |p_1^k - p_1^*|)^2. \quad (51)$$

Перейдем к формулировке и доказательству теоремы сходимости метода.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ МЕТОДА

Покажем, что процесс (25)–(32) сходится к одному из решений исходной задачи.

Теорема 1. Если множество решений $(p_1^*, \psi_1^*, \Psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ задачи (15)–(18) не пусто и принадлежит пространству $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n \times \Psi_2^n[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{AC}_2^n[t_0, t_1] \times U$, то последовательность $\{(p_1^k, \psi_1^k, \Psi^k(t); x_1^k, x^k(t), u^k(t))\}$, порожденная методом (25)–(32) с длиной шага α , выбранной из условия $0 < \alpha < \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma_2 + \gamma_4}} \right\}$, где γ_i находятся в (64)–(68)¹, содержит подпоследовательность $\{(p_1^{k_i}, \psi_1^{k_i}, \Psi^{k_i}(t); x_1^{k_i}, x^{k_i}(t), u^{k_i}(t))\}$, которая сходится к решению задачи. При этом:

- 1) сходимость по управлениям – слабая, по фазовым и сопряженным траекториям, а также по переменным p_1 , ψ_1 – сильная;
- 2) последовательность $\left\{ |p_1^* - p_1^k|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L_2^r}^2 \right\}$ монотонно убывает на декартовом произведении $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{L}_2^n[t_0, t_1]$.

Доказательство. Основные усилия в теореме направлены на получение оценок $|u^k(t) - u^*(t)|^2$ и $|p_1^k - p_1^*|^2$.

1. Запишем оба уравнения (31) в виде вариационного неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t) \bar{x}^k(t) + D^T(t) \bar{\psi}^k(t) + \frac{d}{dt} \bar{\psi}^k(t), x^*(t) - \bar{x}^k(t) \rangle dt + \langle S \bar{x}_1^k + G_1^T \bar{p}_1^k - \bar{\psi}_1^k, x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle \geq 0.$$

Аналогично поступим с уравнением (17):

$$- \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t) x^*(t) + D^T(t) \psi^*(t) + \frac{d}{dt} \psi^*(t), x^*(t) - \bar{x}^k(t) \rangle dt - \langle S x_1^* + G_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t) (\bar{x}^k(t) - x^*(t)) + D^T(t) (\bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t)) + \frac{d}{dt} (\bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^k(t) \rangle dt + \\ & + \langle S (\bar{x}_1^k - x_1^*) + G_1^T (\bar{p}_1^k - p_1^*) - (\bar{\psi}_1^k - \psi_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Используя формулу интегрирования по частям и учитывая, что $x_0^* = \bar{x}_0^k = x_0$, преобразуем дифференциальный член левой части (52) (это преобразование означает переход к сопряженному дифференциальному оператору). Сокращая затем подобные члены, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t) (\bar{x}^k(t) - x^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^k(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t) (x^*(t) - \bar{x}^k(t)) - \frac{d}{dt} (x^*(t) - \bar{x}^k(t)) \rangle dt + \\ & + \langle S (\bar{x}_1^k - x_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle + \langle G_1^T (\bar{p}_1^k - p_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

В силу симметричности и положительной полуопределенности матриц S и $Q_1(t)$ имеем

$$\langle S (\bar{x}_1^k - x_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle \leq 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_1(t) (\bar{x}^k(t) - x^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^k(t) \rangle dt \leq 0,$$

поэтому, отбрасывая эти члены и усиливая оценку, находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t) (x^*(t) - \bar{x}^k(t)) - \frac{d}{dt} (x^*(t) - \bar{x}^k(t)) \rangle dt + \langle G_1^T (\bar{p}_1^k - p_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle \geq 0. \quad (53)$$

2. Получим неравенство относительно переменной p_1 . Для этого положим $p_1 = p_1^{k+1}$ в (37):

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k - \alpha (G_1 x_1^k - g_1), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0.$$

¹ См. доказательство теоремы далее.

Добавим и вычтем $\alpha \langle G_1 \bar{x}_1^k - g_1, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle$:

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle + \alpha \langle (G_1 \bar{x}_1^k - g_1) - (G_1 x_1^k - g_1), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle - \alpha \langle G_1 \bar{x}_1^k - g_1, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0.$$

Используя (41), оценим второе слагаемое

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle + \alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 - \alpha \langle G_1 \bar{x}_1^k - g_1, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0.$$

Положим $p_1 = p_1^*$ в (38):

$$\langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1} \rangle - \alpha \langle G_1 \bar{x}_1^k - g_1, p_1^* - p_1^{k+1} \rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle + \langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1} \rangle + \alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 - \alpha \langle G_1 \bar{x}_1^k - g_1, p_1^* - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0.$$

Полагая $p_1 = \bar{p}_1^k$ в неравенстве (16), имеем

$$\alpha \langle p_1^* - \bar{p}_1^k, G_1 x_1^* - g_1 \rangle \geq 0.$$

Суммируем два последних неравенства

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle + \langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1} \rangle + \alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 - \alpha \langle G_1 (\bar{x}_1^k - x_1^*), p_1^* - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0. \quad (54)$$

3. Продолжим получение оценок. Рассмотрим неравенства относительно управлений. Положим $u(t) = u^{k+1}(t)$ в (39)

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t) + \alpha(Q_2(t)u^k(t) + B^T(t)\psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0.$$

Разобьем левую часть на три отдельных слагаемых:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0, \end{aligned}$$

добавим и вычтем $\bar{u}^k(t)$ под знаком второго скалярного произведения, и аналогично добавим и вычтем $\bar{\psi}^k(t)$ под знаком третьего скалярного произведения:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)\bar{u}^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\bar{\psi}^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Положим $u = u^*(t)$ в (40)

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t) + \alpha(Q_2(t)\bar{u}^k(t) + B^T(t)\bar{\psi}^k(t)), u^*(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt \geq 0. \quad (56)$$

Сложим (55) и (56), тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)\bar{u}^k(t), u^*(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\bar{\psi}^k(t), u^*(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Подставляя $u(t) = \bar{u}^k(t)$ в вариационное неравенство (18), имеем

$$-\alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0. \quad (58)$$

Суммируем (57) и (58)

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(\bar{u}^k(t) - u^*(t)), u^*(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), B(t)(u^*(t) - \bar{u}^k(t)) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Умножим (53) на α и сложим с (59)

$$\begin{aligned} & \alpha \langle G_1^T(\bar{p}_1^k - p_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^*(t) - \bar{x}^k(t)) + B(t)(u^*(t) - \bar{u}^k(t)) - \frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^k(t)) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(\bar{u}^k(t) - u^*(t)), u^*(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (60)$$

В силу (15) и (29) первый из интегралов обнуляется и, отбрасывая отрицательный член $\alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(\bar{u}^k(t) - u^*(t)), u^*(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt$, имеем

$$\begin{aligned} & \alpha \langle G_1^T(\bar{p}_1^k - p_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Сложим (60) и (61)

$$\begin{aligned} & \langle \bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k \rangle + \langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1} \rangle + \alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt + \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (62)$$

4. Умножая неравенство (62) на два и используя тождество $2\langle y_1 - y_3, y_3 - y_2 \rangle = |y_1 - y_2|^2 - |y_1 - y_3|^2 - |y_3 - y_2|^2$, разложим первые четыре скалярных произведения в сумму квадратов. Сократив затем подобные члены и умножив на минус единицу, перепишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} & |p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k|^2 + |\bar{p}_1^k - p_1^k|^2 + |p_1^{k+1} - p_1^*|^2 - 2\alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 + \\ & + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 + \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \\ & + 2\alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)(\bar{u}^k(t) - u^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt + \end{aligned}$$

$$+2\alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \leq \\ \leq |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2.$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, оценим оставшиеся слагаемые в форме скалярных произведений:

$$|p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k|^2 + |\bar{p}_1^k - p_1^k|^2 + |p_1^{k+1} - p_1^*|^2 - 2\alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 + \\ + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 + \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 - \\ - 2\alpha Q_{2\max} \|\bar{u}^k(\cdot) - u^k(\cdot)\| \|u^{k+1}(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| - \\ - 2\alpha B_{\max} \|\bar{\psi}^k(\cdot) - \psi^k(\cdot)\| \|u^{k+1}(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| \leq |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2. \quad (63)$$

а) Используя (42) и неравенство $2ab \leq a^2 + b^2$, получим

$$2\alpha B_{\max} \|\bar{\psi}^k(\cdot) - \psi^k(\cdot)\| \|u^{k+1}(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| \leq \\ \leq \alpha^2 B_{\max} (Q_{2\max} + 2B_{\max}) \|\bar{\psi}^k(\cdot) - \psi^k(\cdot)\|^2 + \alpha^2 B_{\max} Q_{2\max} \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2.$$

В силу (43) и (50)

$$\|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\|^2 \leq \\ \leq \left((e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / D_{\max} \right) \|S\|^2 e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1 - t_0) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \\ + \left((e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / D_{\max} \right) \|G_1^T\|^2 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2 = \lambda_1 \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \lambda_2 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2,$$

где $\lambda_1 = ((e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / D_{\max}) \|S\|^2 e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1 - t_0)$,
 $\lambda_2 = ((e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1) / D_{\max}) \|G_1^T\|^2$, ПОЭТОМУ ИМЕЕМ

$$2\alpha B_{\max} \|\bar{\psi}^k(\cdot) - \psi^k(\cdot)\| \|u^{k+1}(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| \leq \\ \leq \alpha^2 B_{\max} ((Q_{2\max} + 2B_{\max}) \lambda_1 + Q_{2\max}) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \\ + \alpha^2 B_{\max} (Q_{2\max} + 2B_{\max}) \lambda_2 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2 = \alpha^2 \gamma_1 \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \alpha^2 \gamma_2 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2, \\ \text{где } \gamma_1 = B_{\max} ((Q_{2\max} + 2B_{\max}) \lambda_1 + Q_{2\max}), \gamma_2 = B_{\max} (Q_{2\max} + 2B_{\max}) \lambda_2. \quad (64)$$

б) Аналогично,

$$2\alpha Q_{2\max} \|\bar{u}^k(\cdot) - u^k(\cdot)\| \|u^{k+1}(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| \leq \alpha^2 \gamma_3 \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \alpha^2 \gamma_4 |p_1^k - \bar{p}_1^k|^2, \\ \text{где } \gamma_3 = Q_{2\max} (2Q_{2\max} + B_{\max} + B_{\max} \lambda_1), \gamma_4 = Q_{2\max} B_{\max} \lambda_2. \quad (65)$$

в) В силу (50)

$$2\alpha^2 \|G_1\|^2 |\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 \leq 2\alpha^2 \|G_1\|^2 e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1 - t_0) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 = \\ = \alpha^2 \gamma_5 \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2, \text{ где } \gamma_5 = 2\|G_1\|^2 e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} B_{\max}^2(t_1 - t_0). \quad (66)$$

С учетом полученных оценок неравенство (63) примет вид

$$|p_1^{k+1} - p_1^*|^2 + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + |p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k|^2 + (1 - \alpha^2(\gamma_2 + \gamma_4)) |\bar{p}_1^k - p_1^k|^2 + \\ + \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 + (1 - \alpha^2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5)) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \leq \\ \leq |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2. \quad (67)$$

Выбирая значение параметра α из условия

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma_2 + \gamma_4}} \right\}, \quad (68)$$

обеспечим положительность всех слагаемых в левой части (67). Отбрасывая в (67) часть положительных членов, получим

$$|p_1^{k+1} - p_1^*|^2 + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \leq |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2, \quad (69)$$

что означает монотонное убывание $\{|p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2\}$.

5. Просуммируем неравенство (67) от $k = 0$ до $k = N$:

$$|p_1^{N+1} - p_1^*|^2 + \|u^{N+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + \sum_{k=0}^N |p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k|^2 + (1 - \alpha^2(\gamma_2 + \gamma_4)) \sum_{k=0}^N |\bar{p}_1^k - p_1^k|^2 + \sum_{k=0}^N \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 + (1 - \alpha^2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5)) \sum_{k=0}^N \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \leq |p_1^0 - p_1^*|^2 + \|u^0(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2. \quad (70)$$

Из неравенства (70) следует ограниченность при любом N

$$|p_1^{N+1} - p_1^*|^2 + \|u^{N+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \leq |p_1^0 - p_1^*|^2 + \|u^0(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2, \quad (71)$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |\bar{p}_1^k - p_1^k|^2 < \infty, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 < \infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k| \rightarrow 0, \quad |\bar{p}_1^k - p_1^k| \rightarrow 0, \quad \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\| \rightarrow 0, \quad \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| \rightarrow 0, \quad (72)$$

откуда по неравенству треугольника получим

$$|p_1^{k+1} - p_1^k| \rightarrow 0, \quad \|u^{k+1}(\cdot) - u^k(\cdot)\| \rightarrow 0. \quad (73)$$

Из (47), (48), (56) тогда следует, что

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)| \rightarrow 0, \quad |x_1^k - \bar{x}_1^k| \rightarrow 0, \quad \|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\| \rightarrow 0. \quad (74)$$

Кроме того, из (73) следует ограниченность последовательностей

$$|p_1^k - p_1^*| \leq \text{const}, \quad \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\| \leq \text{const}, \quad (75)$$

а из (49) и (57) — ограниченность последовательностей

$$\|x^k(\cdot) - x^*(\cdot)\| \leq \text{const}, \quad |x_1^k - x_1^*| \leq \text{const}, \quad \|\psi^k(\cdot) - \psi^*(\cdot)\| \leq \text{const}. \quad (76)$$

6. Поскольку последовательность $\{(p_1^k, \psi_1^k, \psi^k(t); x_1^k, x^k(t), u^k(t))\}$ ограничена на декартовом произведении пространств $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n \times \Psi_2^n[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A}\mathbb{C}^n[t_0, t_1] \times \mathbb{U}$, то она слабо компактна. Это означает, что существует подпоследовательность $\{(p_1^{k_i}, \psi_1^{k_i}, \psi^{k_i}(t); x_1^{k_i}, x^{k_i}(t), u^{k_i}(t))\}$ и точка $(p_1', \psi_1', \psi'(t); x_1', x'(t), u'(t))$, которая является ее слабым пределом. Покажем, что слабый предел этой последовательности является решением задачи (15)–(18).

Заметим, что все линейные дифференциальные операторы системы (25)–(32) являются слабо непрерывными (за исключением уравнений (28), (32)) и поэтому допускают переход к слабому пределу. Перейдем, например, в основном полушаге (29)–(32) к слабому пределу при $k_i \rightarrow \infty$ с учетом (72)–(76) и $x_1 \in \mathbb{R}^n$, получим

$$\frac{d}{dt} x'(t) = D(t)x'(t) + B(t)u'(t), \quad x'(t_0) = x_0, \quad p_1' = \pi_+(p_1' + \alpha(G_1 x_1' - g_1)), \\ \frac{d}{dt} \psi'(t) + D^T(t)\psi'(t) = -Q_1(t)x'(t), \quad \psi_1' = Sx_1' + G_1^T p_1'. \quad (77)$$

Точка $(p_1', \psi_1', \psi'(t); x_1', x'(t), u'(t))$, являясь решением системы (77), одновременно является решением задачи (2). Задача (2), в свою очередь, порождает седловую функцию (4). Эта функция имеет седловую точку, удовлетворяющую системе (5). Компоненты $(x_1', x'(t), u'(t))$ седловой точки являются решением задачи (2). Компоненты $(p_1', \psi_1', \psi'(t))$ являются решением двойственной задачи. Эта задача порождается двойственной, или сопряженной, функцией Лагранжа. Чтобы получить двойственную функцию Лагранжа, достаточно в лагранжиане (4) перейти к сопряженным линейным операторам. Тогда получим сопряженную функцию Лагранжа (6), которая также имеет седловую точку. Эта седловая точка удовлетворяет сопряженной системе неравенств (7).

Понятно, что седловые точки обеих систем совпадают. Система (14) в явном виде представляет двойственную по отношению к (3) задачу. Поскольку решения обеих систем есть одно и то же множество, то выполняется равенство

$$u'(t) = \pi_U(u'(t) - \alpha(Q_2(t)u'(t) + B^T(t)\psi'(t))). \quad (78)$$

Теперь, если к системе (77) добавить уравнение (78) или его вариационный аналог из (18) и затем перейти к пределу при $k_i \rightarrow \infty$, то получим полную предельную систему, совпадающую с (15)–(18). Из последнего следует, что предельная система совпадает с (25)–(32) и поэтому можно считать, что

$$(p'_1, \psi'_1, \psi'(t); x'_1, x'(t), u'(t)) = (p_1^*, \psi_1^*, \psi^*(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t)),$$

т. е. любая предельная точка процесса (25)–(32) является решением задачи.

Теорема доказана.

5. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

Покажем, как на основе предложенной теории можно сконструировать (синтезировать) управление линейной системой (1) при наличии ограничений на управление. С этой целью выпишем систему (15)–(18):

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x^*(t_0) = x_0, \quad (79)$$

$$\langle p_1 - p_1^*, G_1 x_1^* - g_1 \rangle \leq 0, \quad p_1 \in \mathbb{R}_+^m, \quad (80)$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) = -Q_1(t)x^*(t), \quad \psi_1^* = Sx_1^* + G_1^T p_1^*, \quad (81)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \leq 0, \quad u(t) \in U. \quad (82)$$

Как уже отмечалось, решение этой системы представляет собой седловую точку. Это значит, что если известно x_0 и управление $u(t)$, то можно решить дифференциальное уравнение (79) и найти траекторию $x(t)$. Затем можно вычислить ее значение на правом конце $x_1 = x(t)|_{t=t_1}$ и найти p_1 из вариационного неравенства (80). Сформировав условие трансверсальности (второе конечномерное уравнение из (81)), мы можем решить сопряженную дифференциальную систему (первое дифференциальное уравнение из (81)) и найти сопряженную траекторию $\psi(t)$, с помощью которой можно сформировать нормаль опорной плоскости $\int_{t_0}^{t_1} \langle Q_2(t)u(t) + B^T(t)\psi(t), u(t) \rangle dt$ для функционального множества U . Далее остается только найти точку $u(t) \in U$, которая является опорной для нашего линейного функционала. Если начальные данные для уравнения (79) были оптимальными, то найденное управление совпадает с оптимальным $u^*(t)$. В этом случае решение системы (79)–(82) найдено.

Эта система имеет очень простую алгоритмическую структуру. Фактически из первого уравнения системы от двух переменных нужно выразить одну через другую. С помощью полученной переменной из условия трансверсальности определить терминальное значение для сопряженного дифференциального уравнения. Затем решить это уравнение. С помощью найденного решения формируем нормаль плоскости на выпуклом замкнутом множестве управлений U и находим опорную точку.

Эта содержательная схема носит алгоритмический характер, поэтому представим ее в виде некоторого алгоритма. С этой целью рассмотрим следующие отображения (операторы).

1. Введем оператор $K_1(u) = x(t_1; u(t))$, который каждому управлению $u(t) \in U$ из уравнения (79) ставит в соответствие правый конец $x_1 = x(t_1; u(t)) \in \mathbb{R}^n$ траектории $x(t; u(t))$. В [13] показано, что таким образом определенный оператор, действующий из гильбертова пространства в конечномерное, является однозначным, линейным и ограниченным (непрерывным).

2. Условие трансверсальности для каждого x_1 однозначно определяет терминальное условие $\psi_1 = Sx_1 + G_1^T p_1$ для сопряженного дифференциального уравнения (81). Это уравнение порождает сопряженную траекторию $\psi(t) = K_2(x) = \psi(x_1; t)$. Оба отображения зависят от параметров, которые согласовывают области определения операторов так, чтобы второй был определен на образе первого. В методе, который описан в этой работе, это делается автоматически. Поэтому представляется естественным рассмотреть суперпозицию операторов.

3. Теперь введем оператор $K_3(\psi) = VI(U, \psi)$, который каждому элементу ψ сопряженного пространства $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ ставит в соответствие решение вариационного неравенства (82). Вектор $\psi(t)$ порождает нормаль линейного функционала $Q_2(t)u^*(t) + B^T(t)\psi^*(t)$, определенного на множестве управлений U .

Все три отображения зависят от параметров, которые согласовываются с помощью терминальных условий таким образом, чтобы все отображения порождали суперпозицию. Эта суперпозиция есть отображение, которое преобразует множество U в себя, и его неподвижная точка является решением исходной задачи. Нетрудно видеть, что эту систему отображений можно преобразовать в управление по замкнутому контуру

$$u(t) = K(t_1)x(t),$$

где $u(t) = K(t_1)x(t) = K_3(K_2(K_1(u)))$. Тогда система (15)–(18) с управлением в виде обратной связи принимает вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) = K(t_1)x(t). \quad (83)$$

Соответственно, вычислительный процесс (25)–(32) может рассматриваться как итеративный процесс решения системы (83) с управлением в виде обратной связи. Обратную связь можно интерпретировать как градиентный спуск к седловой точке функции Лагранжа задачи терминального управления. Фактически синтез управления вложен в вычислительный процесс (25)–(32).

6. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ: КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Отметим один важный частный случай этой задачи, который известен как теория линейного регулятора [19, 20]. В этом случае ограничения на управления отсутствуют, т. е. $U \equiv \mathbb{L}_2^r[t_0, t_1]$. Тогда задача (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \\ (x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \operatorname{Argmin} \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x(t), x(t) \rangle + \langle Q_2(t)u(t), u(t) \rangle) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \langle Sx_1, x_1 \rangle \mid u(\cdot) \in \mathbb{L}_2^r[t_0, t_1] \right\}. \end{aligned} \quad (84)$$

Дифференциальная система (15)–(18) для этой задачи, которая фактически является необходимым и достаточным условием оптимальности, принимает форму системы дифференциальных и конечномерных уравнений. Преобразуем эту систему

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (85)$$

$$\frac{d}{dt}\psi(t) + D^T(t)\psi(t) = -Q_1(t)x(t), \quad \psi_1 = Sx_1^* + Q_2(t)u(t) + B^T(t)\psi(t) = 0, \quad (86)$$

$$u(t) = -Q_2^{-1}(t)B^T(t)\psi(t). \quad (87)$$

Прежде всего, из этой системы необходимо исключить фазовую переменную $\psi(t)$. С этой целью в [19] было сделано предположение, что должна существовать связь типа

$$\psi(t) = P(t)x(t), \quad (88)$$

где $P(t)$ – матричная непрерывно дифференцируемая функция соответствующей размерности. Поскольку в системе (85)–(87) имеется производная этой функции, которая нам понадобится в дальнейших рассуждениях, то продифференцируем (88):

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{dP(t)}{dt}x(t) + P(t)\frac{dx(t)}{dt}. \quad (89)$$

Сопоставляя уравнения (89) и (86), получаем

$$\frac{dP(t)}{dt}x(t) + P(t)\frac{dx(t)}{dt} = -Q_1(t)x(t) - D^T(t)P(t)x(t). \quad (90)$$

Итак, мы проследили воздействие (88) на (86). Теперь посмотрим на результат взаимодействия (88) с (85). Для этого подставим $\psi(t)$ из (88) в (87), а затем найденное $u(t)$ подставим в (85), тогда получим

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) - B(t)Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (91)$$

Исключая производную $\frac{d}{dt}x(t)$ из (90) и (91), находим

$$\frac{dP(t)}{dt}x(t) + P(t)(D(t)x(t) - B(t)Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)) = -Q_1(t)x(t) - D^T(t)P(t)x(t).$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{dP(t)}{dt} + P(t)D(t) + D^T(t)P(t) - P(t)B(t)Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q_1(t)\right)x(t) = 0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольных $x(t)$, следовательно, множитель, стоящий в больших круглых скобках, должен быть равен нулю. Отсюда получаем матричное уравнение Риккати с граничным условием (86)

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)D(t) - D^T(t)P(t) + P(t)B(t)Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q_1(t) = 0, \quad P(t_1) = S.$$

Из уравнения видно, что матрица $P(t)$ размерности $n \times n$ должна быть симметрической и положительно-определенной. Из (87) и (88) имеем

$$u(t) = -Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t),$$

т. е. матрица $K(T)$ из (83) имеет структуру $K(T) = -Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается задача терминального управления с конечномерной краевой задачей на правом конце временного интервала. Задача имеет выпуклую структуру, что позволяет в рамках теории двойственности разработать теорию седловых методов для решения терминальных проблем управления.

Доказывается монотонная сходимостъ вычислительного процесса на декартовом произведении прямых и двойственных переменных, при этом доказывается слабая сходимостъ по управлениям, сильная сходимостъ по фазовым и сопряженным траекториям, а также по терминальным переменным краевой задачи. На базе седлового подхода строится синтез управления, т. е. обратная связь при наличии ограничений на управления в форме выпуклого замкнутого множества. Это новый результат, поскольку в классическом случае в теории линейного регулятора аналогичное утверждение доказывается лишь при отсутствии ограничений на управления. В основе теории линейного регулятора лежат матричные уравнения Риккати, в то время как в основе полученного результата лежит понятие опорной функции (отображения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипин А.С., Хорошилова Е.В. О синтезе обратной связи для задачи терминального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 1973–1991.
2. Антипин А.С. Терминальное управление краевыми моделями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 2. С. 257–285.
3. Antipin Anatoly S, Khoroshilova Elena V. Linear Programming and Dynamics // Ural Mathematical Journal. 2015. V. 1. № 1. P. 3–18.
4. Antipin Anatoly, Khoroshilova Elena. Saddle point approach to solving problem of optimal control with fixed ends // J. of Global Optimization. 2016. P. 3–17.
5. Antipin Anatoly, Khoroshilova Elena. On methods of terminal control with boundary-value problems: Lagrange approach. In book "Optimization and Application in Control and Data Science". Series Title: Springer Optimization and Its Applications. 2016. P. 17–49.
6. Antipin A. Sufficient condition and evidence-based solution // The Proc. of the conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017. P. 1–3.
7. Antipin A.S, Khoroshilova E.V. Lagrangian as a tool for solving linear optimal control problems with state constraints // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. 2018. С. 23–26.

8. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optim. Lett. 2019. V. 13. № 3. P. 451–473.
9. Антипин А.С., Хорошилова Е.В. Динамика, фазовые ограничения и линейное программирование // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 2. С. 177–196.
10. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Optimal Control of Two Linear Programming Problems // XII International Conference Optimization and Applications (XII OPTIMA–2021). In: Olenov N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V. (eds) *Optimization and Applications*. LNCS, 2021. Springer, V. 1378. P. 151–164.
11. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. A proven method for optimal control problems with linear dynamics and phase constraints // In: Dynamical systems: stability, control, optimization: Proc. of the International scientific conference in memory of Professor R.F. Gabasov, Minsk, October 5–10. 2021. P. 56–58.
12. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Terminal Control of Multi-Agent System // Lecture Notes in Computer Science, 2022. V. 1378. P. 5–16.
13. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011.
14. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1973.
15. Ащепков Л.Т., Величенко В.В. Оптимальное управление. Курс лекций. Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета, 1989.
16. Евтушенко Ю.Г., Третьяков А.А. Новое доказательство теорем Куна–Таккера и Фаркаша // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 58. № 7 (2018). С. 1084–1088.
17. Antipin A.S., Jacimovic M. and Mijajlovic N. Extragradient method for solving quasivariational inequalities // Optimization. 2017.
18. Антипин А.С., Ячимович В., Ячимович М. Динамика и вариационные неравенства // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 5. С. 783–800.
19. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. Пер. с англ. М: Радио и связь, 1982. 392 с.
20. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: URSS, 2004.

SYNTHESIS OF A REGULATOR FOR A LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A. S. Antipin^{a,*}, E. V. Khoroshilova^{b,**}

^a 119333 Moscow, Vavilova str, 44, Dorodnitsyn Computing Center, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

^b 119991 Moscow, Leninskie Gory, Lomonosov Moscow State University,

*e-mail: asantip@yandex.ru

**e-mail: khorelena@gmail.com

Received: 19.02.2024

Revised: 19.02.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. In Hilbert space, we consider a linear-quadratic optimal control problem with a fixed left end and a movable right end, for a fixed period of time. The target functional is the sum of the integral and terminal components of the quadratic form. Each of the components searches for its minimum on its permissible set independently of each other. At the right end of the time interval, we have a linear programming problem. The solution to this problem implicitly defines a terminal condition for controlled dynamics. A saddle approach is proposed to solve the problem, which boils down to calculating the saddle point of the Lagrange function. The approach is based on saddle inequalities in both groups of variables: direct and dual. These inequalities represent sufficient conditions for optimality. A method for calculating the saddle point of the Lagrange function is formulated. Convergence in direct and dual variables is proved, namely: weak convergence in controls, strong convergence in phase and conjugate trajectories, as well as in terminal variables of the boundary value problem. On the basis of the saddle approach, control synthesis is built, i.e. feedback in the presence of control constraints in the form of a convex closed set. This is a new result, since in the classical case, in the theory of a linear regulator, a similar statement is proved in the absence of control constraints, which makes it possible to use the Riccati matrix equation. If there are restrictions on management, these arguments no longer pass. Therefore, the basis of the obtained result is the concept of a reference plane to a set of controls.

Keywords: terminal control, boundary value problem, Lagrange function, saddle methods, control synthesis, convergence.