

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ¹⁾

© 2024 г. А. П. Солдатов^{1,2,*}¹ 119333 Москва, Вавилова, 44, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия² 360002 Нальчик, Долинск, ул. Балкарова, 2, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Россия

*e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 24.04.2024 г.

Переработанный вариант 24.04.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Описаны классы C^1 — гладких областей, граничный контур которых является ляпуновским вне любой окрестности некоторой его точки, таких, что производная конформного отображения на единичный круг непрерывна в этой точке. Описание дано в терминах некоторых пространств для единичного касательного вектора на граничном контуре. Как следствие получены соответствующие результаты для кусочно-гладких областей. Библ. 6.

Ключевые слова: конформное отображение, гладкий контур, граничные свойства, обобщенные гильбертовы пространства.

DOI: 10.31857/S0044466924090073, EDN: WKJHUX

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть односвязная область D ограничена гладким контуром Γ , и ω — конформное отображение этой области на единичный круг $\mathbb{D}$. Обозначим через $e_\Gamma(t)$, $t \in \Gamma$, единичный касательный вектор в точке t , ориентированный в положительном направлении (оставляющем область слева). Этот вектор рассматриваем как непрерывную комплекснозначную функцию на Γ . По определению контур Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, если функция $e_\Gamma \in C^\mu(\Gamma)$. Если точное значение μ несущественно, этот контур называют ляпуновским.

Классическая теорема Келлога (см. [1]) утверждает, что если $\Gamma \in C^{1,\mu}$, то функция $\ln \omega'(z) \in C^\mu(\overline{D})$. В случае просто C^1 -гладкого контура функция $\ln \omega'(z)$ не является, вообще говоря, непрерывной вплоть до границы и может при приближении к границе обращаться в бесконечность. Тем не менее, по известной теореме Линделёфа (см. [1]) мнимая часть $v(z) = \arg \omega'(z)$ этой функции непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и на границе удовлетворяет соотношению

$$\arg \omega'(t) = \arg e_\Gamma[\omega(t)] - \arg e_\Gamma(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1.1)$$

Аналогичным свойством обладает и обратное отображение $\chi = \omega^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow D$.

Поведение самой функции $\ln \chi'$ на границе единичного круга можно уточнить. По теореме Смирнова (см. [1]) она принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{D})$. В действительности

$$u + iv = \ln \chi' \in \cap_{p>1} H^p(\mathbb{D}). \quad (1.2)$$

В самом деле, функция $v \in C(\overline{\mathbb{D}})$, и, следовательно, по теореме Рисса для любых $p > 1$ и $0 < r < 1$ имеет место оценка

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \leq C \int_0^{2\pi} |v(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

равномерная по r , что и доказывает (1.2).

Известно из [2] (см. гл. 3, с. 36), что функции $\phi \in H^p(\mathbb{D})$ допускают оценку

$$|\phi(\zeta)| \leq C |\phi|_{H^p} (1 - |\zeta|)^{-1/p}$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и поддержана грантом АР 19678182 Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан.

с положительной постоянной C , зависящей только от p . Применительно к $\phi = \ln \chi'$ отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$|\ln \chi'(\zeta)| \leq C_\varepsilon (1 - |\zeta|)^{-\varepsilon}.$$

Другими словами, при $|\zeta| \rightarrow 1$ функция $\ln \chi'(\zeta)$ может обращаться в бесконечность логарифмического типа. Равенство

$$\ln \omega' \circ \chi = -\ln \chi' \quad (1.3)$$

показывает, что в некотором смысле подобным поведением обладает и функция $\ln \omega'(z)$ при приближении точки z к граничному контуру Γ .

Рассмотрим случай, когда контур Γ ляпуновский вне любой окрестности некоторой его фиксированной точки τ . Именно, пусть гладкий контур принадлежит классу $C_{\text{loc}}^{1,\mu}$ по отношению к этой точке в том смысле, что любая дуга $G \subseteq \Gamma$, не содержащая τ , принадлежит классу $C^{1,\mu}$. Этот факт указываем также записью $(\Gamma, \tau) \in C_{\text{loc}}^{1,\mu}$. Точно также под $C_{\text{loc}}^{\mu}(\Gamma, \tau)$ понимается класс функций, которые принадлежат $C^{\mu}(\Gamma)$ на любой дуге $G \subseteq \Gamma$, не содержащей τ . Аналогичный смысл имеет и класс $C_{\text{loc}}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$ функций, принадлежащий $C^{\mu}(\overline{G})$ в любой подобласти $G \subseteq D$, граница которой не содержит τ . В этих обозначениях имеет место следующий локальный вариант теоремы Келлога.

Теорема 1.1. Если гладкий контур принадлежит классу $C_{\text{loc}}^{1,\mu}$ по отношению к некоторой своей точке τ , то $\ln \omega' \in C_{\text{loc}}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$.

Доказательство в основном осуществляется по той же схеме, что и теорема Келлога в [1]. Заметим прежде всего, что условие $(\Gamma, \tau) \in C_{\text{loc}}^{1,\mu}$ в терминах единичного касательного вектора можем выразить в форме $e \in C_{\text{loc}}^{\mu}(\Gamma, \tau)$. Утверждается, что

$$\arg \omega' \in C_{\text{loc}}^{\mu}(\Gamma, \tau). \quad (1.4)$$

В самом деле, согласно теореме Келлога в соотношении (1.1) теоремы Линделефа в качестве $\mathbb{D}$ можно брать любую область с границей класса $C^{1,\mu}$. Пусть дуга $G \subseteq \Gamma$ не содержит τ , и область $\mathbb{D}$ этого типа выбрана так, что образ $\omega(G)$ является прямолинейным отрезком. Тогда соотношение (1.1) показывает, что $\arg \omega' \in C^{\mu}(G_0)$ на строго внутренней дуге $G_0 \subseteq G$. Тем самым соотношение (1.3) установлено.

Утверждение теоремы достаточно доказать для функции $\ln \chi'$, считая опять область $\mathbb{D}$ единичным кругом. В силу (1.2) на границе единичного круга угловые предельные значения функции χ' принадлежат L^p с любым $p > 1$. Поэтому в силу неравенства Гёльдера на дуге $G \subseteq \mathbb{T}$ с концами t_1, t_2 можем записать

$$|\chi(t_1) - \chi(t_2)| = \left| \int_G \chi'(t) d_1 t \right| \leq C |t_1 - t_2|^{1/p'},$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги и $1/p' = 1 - 1/p$. Следовательно, функция $\chi \in C^{\nu}(\mathbb{T})$ для любого $0 < \nu < 1$. На основании (3), (4) отсюда следует, что граничное значение v^+ гармонической функции $v = \arg \chi'$ принадлежит классу $C^{\mu\nu}[\mathbb{T}, \omega(\tau)]$. Сама функция v восстанавливается интегралом Пуассона

$$v(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} v^+(t) d_1 t.$$

Равенство

$$\frac{1 - |\zeta|^2 + 2i\text{Im}(\zeta\bar{t})}{|t - \zeta|^2} = \frac{t + \zeta}{t - \zeta} = \frac{1}{t - \zeta} - \frac{1}{2t}$$

показывает, что

$$v(z) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{v^+(t) dt}{t - \zeta} \right].$$

Следовательно, с точностью до аддитивной мнимой постоянной функция $-i \ln \chi' = v - iu$ представляется интегралом типа Коши с плотностью $v^+ \in C(\mathbb{T}) \cap C_{\text{loc}}^{\mu\nu}[\mathbb{T}, \omega(\tau)]$. На основании классических граничных свойств интеграла типа Коши отсюда $\ln \chi' \in C_{\text{loc}}^{\mu\nu}[\overline{\mathbb{D}}, \omega(\tau)]$. В частности, на каждой дуге $G \subseteq \mathbb{T}$, не содержащей точки $\omega(\tau)$, функция χ удовлетворяет двустороннему условию Липшица

$$C^{-1} |t_1 - t_2| \leq |\chi(t_1) - \chi(t_2)| \leq C |t_1 - t_2|.$$

Поэтому в действительности из (1.4) следует, что $v^+ \in C_{\text{loc}}^{\mu}[\mathbb{T}, \omega(\tau)]$ и, значит, $v \in C_{\text{loc}}^{\mu}[\overline{\mathbb{D}}, \omega(\tau)]$, что завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 1.1 с учетом предыдущих рассмотрений следует, что для гладкого контура $(\Gamma, \tau) \in C_{\text{loc}}^{1,\mu}$ функция $\ln \omega'$ допускает в точке τ особенность логарифмического характера. Возникает вопрос, при каких условиях эта

функция будет непрерывной в точке τ ? Конечно, если дополнительно $\Gamma \in C^{1,\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$, то на основании теорем 1.1 и Келлога функция $\ln \omega'$ также принадлежит классу $C^\varepsilon(\overline{D}) \cap C_{\text{loc}}^\mu(\mathbb{D}, \tau)$. Исследованию этого вопроса для контуров, не являющихся ляпуновскими, и посвящена настоящая статья.

Напомним, что $C^\mu(G)$, $0 < \mu < 1$, и $C^{0,1}(G)$ означают банаховы пространства функций, удовлетворяющие соответственно условиям Гёльдера с показателем μ и Липшица, которые банаховы относительно соответствующей нормы. В основе дальнейших построений лежит пространство $C_0^\mu(G, \tau)$ всех ограниченных непрерывных функций $\varphi(z)$, $z \in G$, $z \neq \tau$, которые после умножения на весовую функцию $|z - \tau|^\mu$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем μ . Относительно соответствующей нормы это пространство банахово. Нетрудно убедиться, что оно является банаховой алгеброй по умножению. Аналогичный смысл имеет и банахова алгебра $C_0^{0,1}(G, \tau)$. С возрастанием μ эти пространства монотонно убывают по вложению:

$$C_0^{0,1} \subseteq C_0^\nu \subseteq C_0^\mu, \quad \mu < \nu < 1. \quad (1.5)$$

Основные свойства пространства C_0^μ подробно описаны в [3]. В частности, отметим следующую лемму, представляющую практический пример элементов пространства C_0^μ .

Лемма 1.1. Пусть функция φ ограничена и непрерывно дифференцируема на дуге G с концом τ (вне этого конца), причем функция $|t - \tau|\varphi'(t)$ также ограничена. Тогда $\varphi \in C_0^{0,1}(G, \tau)$.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае $G = \overline{D}$, где область D односвязна и ограничена кусочно-гладким контуром, содержащим точку τ , а под производной φ' функции φ понимается пара ее частных производных.

Эта лемма показывает, что если G допускает вне точки τ непрерывную ветвь аргумента $\arg(z - \tau)$, то эта ветвь принадлежит $C_0^\mu(G, \tau)$. В частности, в определении пространства C_0^μ можно вместо $|z - \tau|^\mu$ брать весовую функцию $(z - \tau)^\mu$, умножение на которую не выводит из класса аналитических функций. Из леммы 1.1 следует, что при приближении к точке τ функции $\varphi \in C_0^\mu(G, \tau)$ могут осциллировать, оставаясь ограниченными. Например, на отрезке $[0, 1]$ действительной оси функция $\varphi(t) = \sin(\ln t)$, $t > 0$, принадлежит классу $C_0^\mu([0, 1], 0)$.

В этой связи обозначим через $C_{(0)}^\mu(G, \tau)$ замкнутое подпространство функций $\varphi \in C_0^\mu$, непрерывных в точке τ . Введем в $C_{(0)}^\mu(G, \tau)$ подпространство $C_{(\lambda)}^\mu(G, \tau)$, $0 < \lambda < 1$, всех функций φ , для которых

$$\varphi_0(t) = [\varphi(t) - \varphi(\tau)]|t - \tau|^{-\lambda} \in C_0^\mu(G, \tau). \quad (1.6)$$

Относительно соответствующей нормы $|\varphi| = |\varphi(\tau)| + |\varphi_0|_{C_0^\mu}$ это пространство банахово. Заметим, что по определению пространства C_0^μ имеем вложение

$$C_{(\lambda)}^\mu(G, \tau) \subseteq C^\varepsilon(G), \quad \varepsilon = \min(\lambda, \mu), \quad (1.7)$$

которое при $\lambda = \mu$ переходит в равенство.

Введем далее в $C_{(0)}^\mu$ подпространство $C_{[\delta]}^\mu(G, \tau)$, $\delta > 1$, с помощью аналогичного (1.6) условия

$$\varphi_0(t) = [\varphi(t) - \varphi(\tau)](1 + |\ln |t - \tau||)^\delta \in C_0^\mu(G, \tau), \quad (1.8)$$

которое банахово относительно соответствующей нормы.

С помощью леммы 1.1 легко убедиться, что с возрастанием λ и δ введенные пространства монотонно убывают, причем имеют место вложения $C_{(\lambda)}^\mu \subseteq C_{[\delta]}^\mu$ для любых $\lambda < 1 < \delta$. В частности, можно ввести классы

$$C_{(+0)}^\mu = \bigcup_\lambda C_{(\lambda)}^\mu, \quad C_{[\infty]}^\mu = \bigcap_\delta C_{[\delta]}^\mu.$$

Отметим, что первый из этих классов был введен в [4], где он обозначался символом $C_{(0)}^\mu$, который здесь используется для других целей. Из определений следует, что

$$C_{(+0)}^\mu \subseteq C_{[\infty]}^\mu \subseteq C_{(0)}^\mu. \quad (1.9)$$

Согласно (1.7) гладкий контур Γ с касательным вектором $e \in C_{(+0)}^\mu(\Gamma, \tau)$ является ляпуновским. Ясно также, что функции $\varphi \in C_{[\infty]}^\mu(\Gamma, \tau)$ на гладком контуре удовлетворяют условию

$$\int_G \frac{|\varphi(t) - \varphi(\tau)|}{|t - \tau|} d_1 t < \infty, \quad (1.10)$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги. В точке τ эти функции “почти” удовлетворяют условию Гёльдера, т.е. $\varphi(t) - \varphi(\tau) = O(1)(\ln |t - \tau|)^{-n}$ для любого натурального n . В этом смысле контур Γ с касательным вектором $e \in C_{[\infty]}^\mu(\Gamma, \tau)$ является ляпуновским.

Основная цель настоящей статьи — установить следующий результат.

Теорема 1.2. Пусть односвязная область D ограничена гладким контуром Γ с касательным вектором $e \in C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, \tau)$ и ω осуществляет конформное отображение D на единичный круг $\mathbb{D}$.

Тогда функции $\ln \omega'(z)$ и $a(z) = [\omega(z) - \omega(\tau)]/(z - \tau)$ принадлежат классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$. Аналогичные утверждения справедливы и для обратного отображения $\chi = \omega^{-1}$.

Для ляпуновского контура Γ с касательным вектором $e \in C_{(+0)}^{\mu}(\Gamma, \tau)$ аналогичный результат по отношению к классу $C_{(+0)}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$ был установлен в [4]. Доказательство сформулированной теоремы требует привлечения значительно более тонких средств и будет изложено в отдельном разделе в конце статьи. Это доказательство в равной степени будет проходить и для отмеченного выше случая $e \in C_{(+0)}^{\mu}(\Gamma, \tau)$.

2. ПРОСТРАНСТВА $C_{(0)}^{\mu}$, $C_{(\lambda)}^{\mu}$ И $C_{[\delta]}^{\mu}$

Пусть для простоты $\tau = 0$. Как показано в [3], банахово пространство $C_0^{\mu}(G, 0)$ можно определить эквивалентной нормой

$$|\varphi| = \sup_{t \neq 0} |\varphi(t)| + \sup_{1/2 \leq |t_1|/|t_2| \leq 2} |t_1|^{\mu} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\mu}}. \quad (2.1)$$

В частности, C^{μ} -норма

$$\alpha(r) = |\varphi|_{C^{\mu}(G \cap \{|t-\tau| \geq r\})}$$

ведет себя как $O(r^{-\mu})$ при $r \rightarrow 0$.

Выражение под знаком $\sup$ во втором слагаемом (2.1) однородно относительно растяжения $t \rightarrow qt$ с $q > 0$, поэтому эта норма также эквивалентна норме

$$|\varphi| = \sup_{k=0, \pm 1, \dots} |\varphi_k|_{C^{\mu}(G_k)}, \quad (2.2)$$

где положено $\varphi_k(t) = \varphi(2^{-k}t)$, $t \in G_k$, $G_k = \{t, 2^{-k}t \in G\}$.

С помощью нормы (2.1) легко убедиться, что класс C_0^{μ} инвариантен относительно соответствующих операций суперпозиции.

Лемма 2.1. Пусть $\varphi \in C_0^{\mu}(G, \tau)$, функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве $\varphi(G)$ и отображение α , осуществляющее гомеоморфизм множества G_1 на G , удовлетворяет двустороннему условию Липшица

$$C^{-1}|t_1 - t_2| \leq |\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|.$$

Тогда $f \circ \varphi \in C_0^{\mu}(G, \tau)$ и $\varphi \circ \alpha \in C_0^{\mu}(G_1, \tau_1)$, где $\alpha(\tau_1) = \tau$.

Конечно, эта лемма сохраняет свою силу и по отношению к замкнутому подпространству $C_0^{\mu}(G, \tau) \subseteq C_0^{\mu}(G, \tau)$, элементы которого непрерывны в точке τ .

Нетрудно показать, что гладкая дуга G с концом τ в окрестности этой точки является радиальной, т.е. любая окружность с центром в τ пересекает ее ровно в одной точке (и при том некасательно). Эквивалентное определение — дуга радиальна по отношению к своему концу τ , если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(s) = \tau + se^{i\theta(s)}, \quad 0 < s \leq \varrho, \quad (2.3)$$

где вещественная функция $\theta \in C[0, \varrho]$ непрерывно дифференцируема на $(0, \varrho]$ и $s\theta'(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

С помощью леммы 2.1 гладкие дуги с касательным вектором $e \in C_{(0)}^{\mu}$ легко описать с помощью параметризаций.

Лемма 2.2. Касательный вектор гладкой дуги G с концом τ принадлежит классу $C_{(0)}^{\mu}(G, \tau)$ тогда и только тогда, когда она допускает гладкую параметризацию $\gamma: [0, \varrho] \rightarrow G$, $\gamma(0) = \tau$, с производной $\gamma' \in C_{(0)}^{\mu}([0, \varrho]; 0)$.

В случае радиальной дуги применительно к радиальной параметризации (2.3) это условие равносильно тому, что функции

$$\theta(s), \quad s\theta'(s) \in C_{(0)}^{\mu}([0, \varrho]; 0). \quad (2.4)$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать $\tau = 0$. Пусть $e \in C_{(0)}^{\mu}(G, 0)$, и γ_0 есть естественная параметризация дуги G , т.е. $|\gamma_0'(s)| \equiv 1$ и $\gamma_0(0) = 0$. Тогда $e[\gamma_0(s)] = \gamma_0'(s)$, и на основании леммы 2.1 производная $\gamma_0' \in C_{(0)}^{\mu}([0, \varrho]; 0)$.

Обратно, пусть аналогичное условие выполнено для некоторой параметризации γ . Рассмотрим функцию $\beta(t)$, обратную к монотонно возрастающей функции

$$\alpha(t) = \int_0^t |\gamma'(s)| ds.$$

Очевидно, $\gamma_0 = \gamma \circ \beta$ является естественной параметризацией дуги G . На основании леммы 2.1 функции $|\gamma'|$, $1/|\gamma'|$ принадлежат классу $C_{(0)}^\mu$, а вместе с ними этому классу принадлежат также производная функции β и γ_0 . Но тогда в силу леммы 2.1 из равенства $e \circ \gamma_0 = \gamma'_0$ следует, что и $e \in C_{(0)}^\mu(G, 0)$.

Пусть далее дуга G радиальна и для ее радиальной параметризации (2.3) условие (2.4) выполнено. Тогда в силу леммы 2.1 функция $e^{i\theta(s)}$, а вместе с ней и производная

$$\gamma'(s) = e^{i\theta(s)}[1 + is\theta'(s)]$$

принадлежат $C_{(0)}^\mu([0, \varrho], 0)$.

Обратно, пусть дуга допускает параметризацию γ_1 с производной $\gamma'_1(t) \in C_{(0)}^\mu$. Утверждается, что производная функции $\alpha(t) = |\gamma_1(t)|$ также принадлежит классу $C_{(0)}^\mu$. В самом деле, в силу леммы 1.1 функции $f_1(t) = \gamma_1(t)/t$, а вместе с ней и функция

$$\frac{f_1(t)}{|f_1(t)|} = \frac{\gamma_1(t)}{|\gamma_1(t)|}$$

принадлежат $C_{(0)}^\mu$. Но тогда на основании леммы 2.1 и

$$\alpha'(t) = \operatorname{Re} \left[\gamma'_1(t) \frac{\gamma_1(t)}{|\gamma_1(t)|} \right] \in C_{(0)}^\mu.$$

Как и в случае первой части леммы, рассмотрим функцию $\beta(s)$, обратную к $\alpha(t)$, производная которой также принадлежит $C_{(0)}^\mu$. Тогда $\gamma = \gamma_1 \circ \beta$ совпадает с радиальной параметризацией (2.3), так что и ее производная $\gamma' \in C_{(0)}^\mu$. Как и выше, отсюда $f(t) = \gamma(s)/s \in C_{(0)}^\mu$ и на основании леммы 2.1 этим свойством обладает и функция $\theta(s) = \operatorname{Im} [\ln f(s)]$. Поскольку $sf'(s) = \gamma'(s) - f(s)$, условие (2.4) для γ выполнено, что завершает доказательство леммы.

Для пространства $C_0^\mu(G, \tau)$ связность компакта G несущественна. Как показано в [4], в предположении связности пространство $C_{(\lambda)}^\mu(G, \tau)$ можно аналогично (2.1) охарактеризовать с помощью нормы

$$|\varphi| = \sup_{t \neq 0} |\varphi(t)| + \sup_{1/2 \leq |t_1|/|t_2| \leq 2} |t_1|^{\mu-\lambda} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}. \quad (2.5)$$

Заметим, что при $\lambda = \mu$ она эквивалентна C^μ -норме, что согласуется с (1.7). Следующая лемма показывает, что аналогичным свойством обладает и пространство $C_{[\delta]}^\mu$, $\delta > 1$.

Лемма 2.3. Пусть компакт G связан, и $\tau = 0 \in G$. Тогда равенство

$$|\varphi| = |\varphi(0)| + \sup_{1/2 \leq |t_1|/|t_2| \leq 2} |t_1|^\mu (1 + |\ln |t_1||)^\delta \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \quad (2.6)$$

определяет эквивалентную норму в $C_{[\delta]}^\mu$, $\delta > 1$.

Доказательство. Положим для краткости $\sigma(t) = (1 + |\ln |t||)^\delta$ и заметим, что

$$|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)| \leq C |\ln(|t_1|/|t_2|)|, \quad (2.7)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от G и δ .

Обозначим через $|\varphi|_0$ и $\{\varphi\}_\mu$ соответствующие слагаемые нормы (2.1), а $[\varphi]_\mu$ отвечает второму слагаемому нормы (2.6). Пусть $\varphi \in C_{[\delta]}^\mu$, так что по определению $\varphi_0(t) = \sigma(t)[\varphi(t) - \varphi(0)] \in C_0^\mu$. Тогда в этих обозначениях

$$\sigma(t_1)|t_1|^\mu \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \leq \{\varphi_0\}_\mu + |\varphi_0|_0 |t_1|^\mu \frac{|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}.$$

С учетом (2.7) можем записать

$$|t_1|^\mu \frac{|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \leq C \frac{|\ln |u||}{|1 - u|^\mu}$$

для $u = t_2/t_1$, так что правая часть ограничена при $1/2 \leq |u| \leq 2$. Следовательно, полуорма $[\varphi]_\mu$ оценивается через норму пространства $C_{[\delta]}^\mu$.

Обратно, пусть эта полуорма конечна. Утверждается, что тогда функция φ имеет предел $\varphi(0)$ при $t \rightarrow 0$ и допускает оценку

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq C_0 \sigma^{-1}(t) [\varphi]_\mu, \quad (2.8)$$

где постоянная $C_0 > 0$ зависит только от G и δ .

В самом деле, пусть $G \subseteq \{|t| \leq \varrho\}$ и $G \cap \{|t| = \varrho\} \neq \emptyset$. В силу связности G можно выбрать последовательность точек $t_k \in G \cap \{|t| = 2^{-k}\varrho\}$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\sigma(t_k) |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq \langle \varphi \rangle_\mu |1 - u_k|^\mu,$$

где точка $u_k = t_{k+1}/t_k$ лежит на окружности $|u| = 1/2$. Поскольку последовательность $\sigma(t_k) = (1 + |-k \ln 2 + \ln \varrho|)^\delta$, $k \geq 1$, эквивалентна k^δ , на основании предыдущей оценки ряд $\sum |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)|$ сходится, и существует предел $c = \lim \varphi(t_k)$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, имеет место оценка

$$|\varphi(t_k) - c| \leq \sum_{s \geq k} |\varphi(t_{s+1}) - \varphi(t_s)| \leq C_1 \sigma^{-1}(t_k) [\varphi]_\mu.$$

Рассматривая точки t в слое $G \cap \{\varrho 2^{-k-1} \leq |t| \leq \varrho 2^{-k}\}$, в свою очередь, отсюда убеждаемся, что функция φ имеет предел $\varphi(0) = c$ при $t \rightarrow 0$ и допускает оценку (2.8).

Полагая $\varphi_0(t) = \sigma(t)[\varphi(t) - \varphi(0)]$, имеем

$$|t_1|^\mu \frac{|\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \leq \langle \varphi \rangle_\mu + |t_1|^\mu |\varphi_0(t_2) - \varphi_0(0)| \frac{|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}.$$

Как и выше с учетом (2.7), (2.8) отсюда убеждаемся, что норма пространства $C_{[\delta]}^\mu$ оценивается через норму (2.6).

С помощью норм (2.5) и (2.6) утверждения лемм 2.1 и 2.2 сохраняют свою силу (с теми же рассуждениями в доказательстве) на пространствах $C_{(\lambda)}^\mu$ и $C_{[\delta]}^\mu$.

Лемма 2.4. В утверждениях лемм 2.1 и 2.2 символ $C_{(0)}^\mu$ можно заменить на $C_{(\lambda)}^\mu$ и $C_{[\delta]}^\mu$.

Отметим еще следующее предложение.

Лемма 2.5. Пусть касательный вектор e дуги G с концом τ принадлежит $C_{[\infty]}^\mu(G, \tau)$.

Тогда, если функция φ дифференцируема на этой дуге и ее производная φ' принадлежит классу $C_{[\infty]}^\mu(G, \tau)$, то этому классу принадлежит и функция $a(t) = [\varphi(t) - \varphi(\tau)]/(t - \tau) \in C_{[\infty]}^\mu(G, \tau)$.

Доказательство. В силу леммы 2.4 утверждение достаточно установить для случая, когда $G = [0, 1]$ и $\tau = 0$. По условию

$$\varphi'(s) = \varphi'(0) + (1 - \ln s)^{-\delta} \varphi_0(s)$$

с некоторыми $\delta > 1$ и $\varphi_0 \in C_0^\mu([0, 1], 0)$. Запишем

$$a(s) = \varphi'(0) + \int_0^1 [1 - \ln(us)]^{-\delta} \varphi_0'(su) du = \varphi(0) + (1 - \ln s)^{-\delta} \psi_0(s),$$

где положено

$$\psi_0(s) = \int_0^1 f(s, u) \varphi_0(su) du, \quad f(s, u) = \left[\frac{1 - \ln(us)}{1 - \ln s} \right]^\delta.$$

На основании леммы 1.1 функция $f(s, u)$ по переменной s принадлежит $C_0^\mu([0, 1], 0)$ равномерно по u . С помощью нормы (2.1) легко убедиться, что аналогичным свойством обладает и $\varphi_0(su)$. Поэтому $\psi_0 \in C_0^\mu([0, 1], 0)$, что завершает доказательство.

3. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ В КЛАССЕ $C_{[\infty]}^\mu$

Пусть область D ограничена гладким контуром Γ , ориентированным положительно по отношению к D (т.е. по направлению, оставляющему область слева). Рассмотрим интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad z \in D, \quad (3.1)$$

и отвечающий ему сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma. \quad (3.2)$$

Известно (см. [5]), что оператор I ограничен $C^u(\Gamma) \rightarrow C^u(\overline{D})$, и для его граничных значений $(I\varphi)^+(t_0)$ справедлива формула Сохоцкого—Племеля

$$2(I\varphi)^+(t_0) = \varphi(t_0) + (S\varphi)(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \quad (3.3)$$

В частности, оператор S ограничен в пространстве $C^u(\Gamma)$.

Как было установлено в [3], [4], этот результат справедлив и по отношению к пространству $C_{(\lambda)}^u$. Покажем, что он допускает некоторый аналог для пространства $C_{[\delta]}^u$. Заметим, что в силу (1.10) для плотности φ из этого пространства с $\delta > 1$ сингулярный интеграл существует и в точке $t_0 = \tau$.

Теорема 3.1. Пусть область D ограничена кусочно-гладким контуром Γ с единственной угловой точкой $\tau \in \Gamma$, причем ее угол в этой точке положителен. Тогда при $\delta > 2$ оператор I ограничен, $C_{[\delta]}^u(\Gamma, \tau) \rightarrow C_{[\delta-1]}^u(\overline{D}, \tau)$, и для его граничных значений справедлива формула Сохоцкого—Племеля (2.9).

Доказательство. Пусть для простоты $\tau = 0$ и $\varphi = I\varphi$, $\varphi \in C_{[\delta]}^u(\Gamma, 0)$. В силу формулы Коши, не ограничивая общности, можно считать $\varphi(0) = 0$, так что, заменяя φ на $\varphi(z) - \varphi(0)$, от (3.1) можем перейти к интегралу

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z}{t} \frac{\varphi(t)dt}{t - z}, \quad z \in D.$$

Нужно доказать, что оператор, определяемый этим равенством, ограничен из пространства $\{\varphi \in C_{[\delta]}^u(\Gamma, \tau), \varphi(0) = 0\}$ в пространство $\{\varphi \in C_{[\delta-1]}^u(\overline{D}, \tau), \varphi(0) = 0\}$. В соответствии с определением этих пространств дело сводится к ограниченности оператора

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z(1 + |\ln|z||)^{\delta-1}}{t(1 + |\ln|t||)^{\delta}} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - z}, \quad z \in D, \quad (3.4)$$

из $C_0^u(\Gamma, 0)$ в $C_0^u(\overline{D}, 0)$.

Достаточно ограничиться случаем, когда Γ является радиальной дугой по отношению к своему концу $\tau = 0$, заданной параметризацией (2.3), а функция φ обращается в нуль в окрестности второго конца дуги Γ , отличного от $\tau = 0$. При этом роль D играет криволинейный сектор круга $|z| < \rho$ раствора меньше 2π , одной из боковых сторон которой служит Γ .

Для целого $k = 0, 1, \dots$ рассмотрим в области $D_k = (2^k D) \cap \{1/2 < |z| < 2\}$ функцию $\varphi_0(2^{-k}z)$, где здесь и ниже $2^k D = \{z, 2^{-k}z \in D\}$. Эту функцию можем представить в виде произведения двух сомножителей:

$$\tilde{\psi}_k(z) = z \left(\frac{1 + |\ln|2^{-k}z||}{1 + k} \right)^{\delta-1}, \quad z \in D_k,$$

и

$$\psi_k(z) = \frac{(1+k)^{\delta-1}}{2\pi i} \int_{2^k \Gamma} \frac{\varphi_0(2^{-k}t)dt}{t(1 + |\ln|2^{-k}t||)^{\delta}(t-z)}, \quad z \in D_k. \quad (3.5)$$

Очевидно, C^u -нормы первого сомножителя ограничены равномерно по k . Поэтому в соответствии с видом (2.2) нормы пространства C_0^u достаточно получить оценку

$$|\psi_k|_{C^u(\overline{D}_k)} \leq C|\varphi_0|_{C_0^u(\Gamma, 0)} \quad (3.6)$$

для второго множителя с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от k .

С этой целью функцию (3.5) представим в виде суммы $\psi_k^0 + \psi_k^1$, где первое слагаемое отвечает интегрированию по дуге $\Gamma_k^0 = (2^k \Gamma) \cap \{1/4 < |t| < 4\}$.

Очевидно, кривая $2^k \Gamma$ радиальна и аналогично (2.3) описывается параметризацией $\gamma_k(s) = se^{i\theta_k(s)}$, $0 \leq s \leq 2^k \varrho$, с функцией $\theta_k(s) = \theta(2^{-k}s)$. Вспомня, что $\theta \in C[0, \varrho] \cap C^1(0, \varrho]$ и $s\theta'(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, отсюда следует, что производная

$$|\gamma_k'| \leq \max_{0 \leq s \leq \varrho} |1 + s\theta'(s)|. \quad (3.7)$$

Из этих же соображений функция $\gamma_k(s)$, $1/4 \leq s \leq 4$, является параметризацией дуги Γ_k^0 и стремится к функции $se^{i\theta(0)}$ по норме пространства $C^1[1/4, 4]$. Поэтому аналогично теореме 3.10.1(a) из [3] устанавливается, что для функции ψ_k^0 справедлива оценка

$$|\psi_k^0|_{C^\mu(\overline{D}_k)} \leq C|\varphi_0|_{C^\mu(\Gamma_k^{(0)})},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от k . Поскольку верхняя грань норм в правой части этой оценки, аналогично (1.7), определяет эквивалентную норму пространства $C_0^\mu(\Gamma, 0)$, отсюда

$$|\Psi_k^0|_{C^\mu(\overline{D}_k)} \leq C|\varphi_0|_{C_0^\mu(\Gamma, 0)} \quad (3.8)$$

с некоторой новой постоянной, не зависящей от k .

Что касается функции ψ_k^1 , то она вместе со своей первой производной оценивается непосредственно. Пусть φ_0 означает $\sup$ -норму функции φ_0 , тогда с учетом (3.7) имеем оценки

$$|\psi_k^1(z)| + |(\psi_k^1)'(z)| \leq C|\varphi_0|_0(1+k)^{\delta-1}(I_k^0 + I_k^1), \quad (3.9)$$

где положено

$$I_k^0 = \int_0^{1/4} \frac{ds}{s[1 - \ln(2^{-k}s)]^\delta}, \quad I_k^1 = \int_4^{2^k \varrho} \frac{ds}{s^2[1 - \ln(2^{-k}s)]^\delta}.$$

Конечно, второй интеграл здесь рассматривается при $2^k \varrho \geq 4$, т.е. для достаточно больших k .

Очевидно, первый интеграл вычисляется явно:

$$(\delta - 1)I_k^0 = [1 - \ln(2^{-k-2})]^{1-\delta}. \quad (3.10^0)$$

Утверждается, что при условии $1 - \ln \varrho \geq 2\delta$ (которое всегда можно считать выполненным) второй интеграл допускает оценку

$$2I_k^1 \leq [1 - \ln(2^{-k+2})]^{-\delta}. \quad (3.10^1)$$

В самом деле, интегрирование по частям дает равенство

$$I_k^1 = - \left(\frac{1}{s[1 - \ln(2^{-k}s)]^\delta} \right) \Big|_4^{2^k \varrho} + \delta \int_4^{2^k \varrho} \frac{ds}{s^2[1 - \ln(2^{-k}s)]^{\delta+1}},$$

так что

$$\int_4^{2^k \varrho} \left(1 - \frac{\delta}{1 - \ln(2^{-k}s)} \right) \frac{ds}{s^2[1 - \ln(2^{-k}s)]^\delta} \leq \frac{1}{4[1 - \ln(2^{-k+2})]^\delta}.$$

Остается заметить, что выражение в больших круглых скобках не меньше $1/2$.

На основании (3.9), (3.10) заключаем теперь, что для функции ψ_k^1 справедлива аналогичная (2.13) оценка, что завершает доказательство (3.6). Следовательно, интеграл (3.4) определяет функцию $\phi_0 \in C_0^\mu(\overline{D}, 0)$ с соответствующей оценкой ее нормы, что завершает доказательство теоремы.

Формула Сохоцкого—Племеля (3.3) показывает, что вместе с I сингулярный интегральный оператор (3.2) ограничен: $C_{[\delta]}^\mu(\Gamma, \tau) \rightarrow C_{(0, \delta-1)}^\mu(\Gamma, \tau)$. Наряду с ним рассмотрим оператор $\overline{S}\varphi = (\overline{S\varphi})$, где черта справа означает комплексное сопряжение. Согласно (3.2) он действует по формуле

$$(\overline{S}\varphi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(t) \overline{dt}}{\overline{t} - \overline{t_0}}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Если контур гладкий и принадлежит классу $C^{1,\nu}$, то, как хорошо известно, оператор $S + \overline{S}$ компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ при $0 < \mu < \nu$.

Лемма 3.1. Пусть в условиях теоремы 3.1 пара $(\Gamma, \tau) \in C_{(1)}^{1,\nu}$, $\mu < \nu < 1$. Тогда оператор $2K = S + \overline{S}$ компактен, $C_{[\delta]}^\mu(\Gamma, \tau) \rightarrow C_{[\delta-1]}^\mu(\Gamma, \tau)$, $\delta > 2$.

Доказательство. В явном виде оператор K действует по формуле

$$2(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{dt}{t - t_0} - \frac{d\overline{t}}{\overline{t} - \overline{t_0}} \right] \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma.$$

Не ограничивая общности можно считать $\tau = 0$. Тогда как и при доказательстве теоремы 2.1 достаточно установить, что оператор

$$2(K_0\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{|t_0|}{|t|} \frac{(1 + |\ln |t_0||)^{\delta-1}}{(1 + |\ln |t||)^\delta} \left[\frac{dt}{t - t_0} - \frac{d\overline{t}}{\overline{t} - \overline{t_0}} \right] \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

компактен в пространстве $C_0^\mu(\Gamma, 0)$.

Очевидно, если функции f_1, f_2 непрерывно дифференцируемы и обращаются в нуль в окрестности точки $\tau = 0$, то оператор $f_1 K f_1$ компактен в $C_{[\delta]}^\mu(\Gamma, \tau)$. При достаточно малом $\varrho > 0$ гладкая кривая $\Gamma \cap \{|t| \leq \varrho\}$ состоит из двух радиальных дуг Γ_1, Γ_2 с общим концом $\tau = 0$. Выберем вещественную непрерывно дифференцируемую функцию $\chi(t)$ на Γ , которая тождественно равна 1 в окрестности $\tau = 0$ и обращается в нуль вне $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда утверждение леммы достаточно установить для оператора $\chi K_0 \chi$.

В самом деле, пусть функция χ_0 определяется аналогично χ с той разницей, что $\chi_0 \chi = \chi_0$. Тогда интегральные операторы $(1 - \chi) K_0 \chi_0$ и $\chi_0 K_0 (1 - \chi)$ равны нулю, поскольку их ядра тождественно равны нулю. Но тогда в силу сказанного выше операторы $K_0 - \chi K_0 = (1 - \chi) K_0 (1 - \chi_0)$ и $K_0 - K_0 \chi = (1 - \chi_0) K_0 (1 - \chi)$, а вместе с ними и $\chi K_0 - \chi K_0 \chi = \chi (K_0 - K_0 \chi)$ компактны в пространстве $C_{[\delta]}^\mu(\Gamma, \tau)$.

Рассмотрим радиальную параметризацию $\gamma_j = s e^{\theta_j(s)}$, $0 \leq s \leq \varrho$, дуги Γ_j , $j = 1, 2$, в которой согласно лемме 1.3 функции θ_j удовлетворяют условию (1.8). Удобно от оператора $\chi K_0 \chi$ перейти к операторной (2×2) -матрице $K^0 = (K_{ij}^0)_1^2$ по правилу

$$2[(\chi K_0 \chi)\varphi] \circ \gamma_i = \sum_{j=1,2} K_{ij}^0(\varphi \circ \gamma_j), \quad i = 1, 2.$$

В явном виде

$$(K_{ij}^0 \psi)(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \frac{s_0 (1 + |\ln s_0|)^{\delta-1}}{s (1 + |\ln s|)^\delta} \chi_{ij}^0(s_0, s) \frac{a_{ij}(s_0, s)}{s \pm s_0} \psi(s) ds, \quad 0 < s_0 \leq \varrho, \quad (3.11)$$

где выбирается верхний (нижний) знак для $i \neq j$ ($i = j$), положено

$$\chi_{ij}^0(s_0, s) = \chi[\gamma_i(s_0)] \chi[\gamma_j(s)], \quad a_{jj}(s_0, s) = \operatorname{Im} \left[\frac{\gamma_j'(s)(s - s_0)}{\gamma_j(s) - \gamma_j(s_0)} \right],$$

$$a_{ij}(s_0, s) = \operatorname{Im} \left[\frac{\gamma_j'(s)(s + s_0)}{\gamma_j(s) - \gamma_i(s_0)} \right], \quad i \neq j,$$

и учтено, что $|\gamma_i(s)| = s$.

Необходимо доказать, что операторы K_{ij}^0 компактны в пространстве $C_0^\mu([0, \varrho], 0)$. Обозначим $C_{(0)}^\nu([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ банахово пространство непрерывных в квадрате $0 \leq s_0, s \leq \varrho$ функций, которые по одной переменной принадлежат $C_{(0)}^\nu([0, \varrho], 0)$ равномерно по другой переменной, снабженное соответствующей нормой. Аналогичный смысл имеет банахово пространство $C_0^\nu([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ функций, непрерывных и ограниченных в полуоткрытом квадрате $0 < s_0, s \leq \varrho$.

Предварительно установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2. В обозначениях (3.11) функции

$$a_{jj} \in C_{(0)}^\nu([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0), \quad a_{ij} \in C_0^\nu([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0), \quad i \neq j,$$

причем

$$a_{jj}(t, t) \equiv 0, \quad \lim_{t+t_0 \rightarrow 0} a_{ij}(t_0, t) = 0. \quad (3.12)$$

Доказательство. Запишем

$$q_j(s_0, s) = \frac{\gamma_j(s) - \gamma_j(s_0)}{s - s_0} = \int_0^1 \gamma_j'[su + s_0(1 - u)] du.$$

Из этого равенства с помощью нормы (2.1) легко видеть, что функция q_j принадлежит классу $C_{(0)}^\nu([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ и всюду отлична от нуля, так что и обратная функция $1/q_j$ обладает этим свойством. Поскольку $q_j(s, s) = \gamma_j'(s)$ и $a_{jj} = \operatorname{Im}(\gamma_j'/q_j)$, приходим к справедливости леммы для a_{jj} .

Рассмотрим далее функцию

$$p_j(s) = \gamma_j(s)/s \in C_{(0)}^\nu([0, \varrho], 0), \quad |p_j(0)| = 1. \quad (3.13)$$

Тогда

$$p_{ij}(s_0, s) = -p_i(s_0)/p_j(s) \in C_{(0)}^\nu([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0), \quad p_{ij}(0, 0) = 1.$$

Соответственно, функцию

$$q_{ij}(s_0, s) = \frac{\gamma_j(s) - \gamma_i(s_0)}{s + s_0} = p_j(s) \frac{s + p_{ij}(s_0, s)s_0}{s + s_0}$$

можно представить в виде

$$q_{ij}(s_0, s) = p_j(s) \left[1 + [p_{ij}(s_0, s) - 1] \frac{s_0}{s + s_0} \right] \in C_0^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0).$$

Следовательно, функция q_{ij} принадлежит $C_0^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ и стремится к 1 при $s_0 + s \rightarrow 0$. Кроме того, функция q_{ij} ограничена от нуля по модулю и $a_{ij} = \text{Im}(\gamma'_j/p_{ij})$, что завершает доказательство леммы.

Продолжение доказательства леммы 3.1. Рассмотрим банахово пространство $C_0^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ и его замкнутое подпространство $C_{(0)}^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$, которым согласно лемме 2.4 принадлежат функции a_{ij} . Как и в случае функций одной переменной, это пространство может быть определено с помощью эквивалентной нормы

$$|a| = \sup_{k,r=0,\pm 1,\dots} |a_{kr}|_{C^u(G_{kr})},$$

где положено

$$a_{kr}(s_0, s) = a(2^{-k}s_0, 2^{-r}s), \quad s_0, s \in G_{kr}, \quad G_{kr} = \{(s_0, s), 1/2 \leq 2^{-k}s_0, 2^{-r}s \leq 2\}.$$

С помощью данной нормы совершенно аналогично теореме 2.1 устанавливается, что операторы K_{ij}^0 , фигурирующие в (3.11), ограничены в пространстве $C_0^u([0, \varrho], 0)$, и их норма допускает оценку

$$|K_{ij}^0|_{\mathcal{L}(C_0^u)} \leq C|a_{ij}|_{C_0^v}. \quad (3.14)$$

Применим к пространству $C_0^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ теорему 2.7.2 из [3], согласно которой преобразование $a \rightarrow \tilde{a}$ по формуле $a(s_0, s) = \tilde{a}(-\ln s_0, -\ln s)$ осуществляет изоморфизм банахового пространства $C_0^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ на $C^v(J \times J)$, где $J = [-\ln \varrho, \infty)$. При этом преобразовании подпространство $C_{(0)}^v([0, \varrho] \otimes [0, \varrho], 0)$ переходит в подпространство C^v функций $\tilde{a}(t_0, t)$, допускающих пределы на бесконечности по каждой переменной t_0, t в отдельности. На основании теоремы 2.2.1 из [3], примененной к этим пространствам, для заданного $\mu < \nu_0 < \nu$ существуют такие последовательности функций

$$a_{ij,n} \in C^v([0, \varrho] \times [0, \varrho], \quad n = 1, 2,$$

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{ij,n} - a_{ij}|_{C^{\nu_0}} = 0, \quad (3.15)$$

и при каждом n выполнены условия

$$a_{ij,n}(s_0, s) \equiv 0 \quad \text{в окрестности точки } (0, 0),$$

$$a_{jj,n}(s_0, s) \equiv 0 \quad \text{в окрестности диагонали } s_0 = s.$$

Очевидно, операторы $K_{ij,n}^0$, определяемые по $a_{ij,n}$ аналогично (3.11), компактны в пространстве $C_0^u([0, \varrho], 0)$. С другой стороны, на основании (3.15) и оценки (3.14), где a_{ij} надо заменить на $a_{ij,n} - a_{ij}$ и ν на ν_0 , операторы $K_{ij,n}^0$ сходятся к K_{ij}^0 при $n \rightarrow \infty$ по операторной норме. Поэтому операторы $K_{ij,n}^0$ также компактны в пространстве $C_0^u([0, \varrho], 0)$, что завершает доказательство леммы 3.2.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Доказательство теоремы 1.2 тесно связано с задачей Шварца, которая заключается в отыскании в области D аналитической функции ϕ по заданной вещественной части ее граничного значения:

$$\text{Re } \phi^+ = f. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть область D ограничена простым гладким контуром Γ с касательным вектором $\in C_{(1)}^{1,\nu}(\Gamma, \tau)$.

Тогда задача (4.1) с точностью до мнимой постоянной однозначно разрешима в классе $C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$, $0 < \mu < \nu$.

Доказательство. Решение задачи ищем в виде интеграла типа Коши $I\phi$ с вещественной плотностью $\phi \in C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, \tau)$. Тогда по формуле Сохоцкого–Племеля $2(\phi^+ + \overline{\phi^+}) = 2\phi + S\phi + \overline{S\phi}$, так что для ϕ приходим к уравнению $\phi + K\phi = 2f$, которое равносильно задаче (4.1). Пространство $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, \tau)$ можно рассматривать как счетно нормированное пространство. С топологической точки зрения оно представляет собой отделимое полное локально выпуклое пространство. В силу леммы 2.3 оператор K компактен в этом пространстве, так что к нему можно применить теорему Рисса из [6]. Поэтому достаточно убедиться, что однородное уравнение

$\varphi + K\varphi = 0$ имеет только нулевое решение. Но в этом случае $\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0$, и, значит, $(I\varphi)(z) = i\xi$, $z \in D$, с некоторой вещественной постоянной ξ . Рассмотрим функцию $\phi_1 = I\varphi$ в бесконечной области $D_1 = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, исчезающую на бесконечности. По формуле Сохоцкого–Племеля $i\xi - \phi_1^- = \varphi$, так что

$$\operatorname{Im}\phi_1^- = \xi. \quad (4.2)$$

Поскольку $\phi_1(\infty) = 0$, равенство (4.2) возможно только в случае, когда $\xi = 0$ и $\varphi = 0$. Таким образом, оператор $1 + K$ обратим в пространстве $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, \tau)$, что завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрение проведем сначала для конформного $\omega_1 : D \rightarrow D_1$, где область D_1 ограничена контуром $\Gamma_1 \in C^{1,\mu}$, который содержит точку τ и прямолинеен в окрестности этой точки. По теореме Линделефа гармоническая в D функция $\arg \omega_1 \in C(\overline{D})$ и удовлетворяет аналогичному (1.1) соотношению. По условию единичный касательный вектор e принадлежит классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, \tau)$, так что с учетом теоремы 1.1 этому классу принадлежит и граничное значение $f = (\arg \omega_1')^+$. По теореме 3.1, где роль μ и ν играют соответственно $\mu/2$ и μ , существует аналитическая в D функция $\phi \in C_{[\infty]}^{\mu/2}(\overline{D}, \tau)$, для которой $\operatorname{Im} \phi^+ = f$. Поэтому непрерывная в $\overline{D}$ гармоническая функция $\operatorname{Im}(\ln \omega_1' - \phi)$ на границе области обращается в нуль, так что она равна нулю всюду в этой области. Следовательно, $\ln \omega_1' - \phi$ совпадает с мнимой постоянной, и, значит, $\ln \omega_1' \in C_{[\infty]}^{\mu/2}(\overline{D}, \tau)$.

Но тогда функция ω_1 и обратное отображение $\chi_1 = \omega_1^{-1}$ удовлетворяют условию Липшица. Лемма 2.1 справедлива и по отношению к пространству $C_{[\delta]}^{\mu}$. Нужно только принять во внимание, что $\alpha(t) - \alpha(\tau) \in C^{0,1}(G, \tau)$, и, значит, функция $a(t) = |\alpha(t) - \alpha(\tau)|/|t - \tau|$, а вместе с ней и $|\ln a(t)|^{\delta}$ принадлежат $C_0^0(G, \tau)$. Таким образом, функция $\arg \chi_1' = -\arg \omega_1' \circ \chi_1$ на границе области D_1 принадлежит классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma_1, \tau)$, так что на основании теоремы 3.1 $\ln \chi_1' \in C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}_1, \tau)$, и, значит, из тех же соображений $\ln \omega_1' \in C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$.

Покажем, что тогда $\ln \omega' \in C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$ и в общем случае. С этой целью рассмотрим конформное отображение α области D на D_1 , оставляющее неподвижной точку τ . Тогда $\omega = \omega_1 \circ \alpha$ и $\ln \omega' = \ln \omega_1' \circ \alpha + \ln \alpha'$. С учетом теоремы Келлога, примененной к α , и леммы 2.3 функция $\ln \omega' \in C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$.

Что касается утверждения теоремы относительно функции a , то заметим, что в силу леммы 2.5 эта функция принадлежит классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, \tau)$ на границе области. Но тогда на основании теоремы 4.1 функция $a \in C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, \tau)$.

Обратимся к последнему утверждению теоремы относительно χ . В силу уже доказанного функция ω удовлетворяет двустороннему условию Липшица. Поэтому утверждение для $\ln \chi'$ вытекает из очевидного соотношения $\ln \chi' \circ \omega = -\ln \omega'$ и леммы 2.4. Аналогично устанавливается, что и функция $[\chi(\xi) - \chi(\tau')]/(\xi - \tau')$, где $\tau' = \omega(\tau)$, принадлежит классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\mathbb{D}, \tau')$.

Исходя из теоремы 1.2, можно получить соответствующий результат для конформных отображений кусочно-гладких областей. Пусть область D ограничена кусочно-гладким контуром Γ , и конечное множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все угловые точки контура. Ясно, что понимать под записью $(\Gamma, F) \in C_{(+0)}^{1,\mu}$ и $(\Gamma, F) \in C_{[\infty]}^{1,\mu}$. Выберем число $\varrho > 0$ столь малым, что для каждой точки $\tau \in F$ пересечение D с кругом $|z - \tau| < \varrho$ представляет собой криволинейный сектор S_{τ} с боковыми сторонами $\Gamma_{\tau}^{\pm}$ с общим концом в вершине τ , раствор этого сектора обозначим через θ_{τ} . В дальнейшем предполагается, что все эти растворы положительны, так что $0 < \theta_{\tau} \leq 2\pi$, $\delta_{\tau} = \pi/\theta_{\tau}$.

Аналог теоремы 1.1 справедлив и для кусочно-гладких областей.

Теорема 4.2. Пусть кусочно-гладкий контур Γ принадлежит классу $C_{\text{loc}}^{1,\mu}$ по отношению к множеству F .

Тогда $\ln \omega' \in C_{\text{loc}}^{\mu}(\overline{D}, F)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $\tau \in F$ и рассмотрим область $\tilde{D}_1$, которая содержит D и ограничена контуром $\tilde{\Gamma}_1$ класса $C^{1,\mu}$ по отношению к τ , причем раствор $\tilde{\theta}$ соответствующего сектора $\tilde{D} \cap \{|z - \tau| < \tilde{\varrho}\}$ был заключен между θ_{τ} и π , а боковые стороны этого сектора были прямолинейны. Пусть произвольная область $\tilde{D}_2$ ограничена контуром $\tilde{\Gamma}_2$ класса $C^{1,\mu}$ по отношению к τ , причем раствор соответствующего сектора $\tilde{D}_2 \cap \{|z - \tau| < \tilde{\varrho}\}$ был равен $\tilde{\theta}$, а боковые стороны этого сектора были прямолинейны. Требуется, кроме того, чтобы степенная функция $\alpha(z) = \tau + (z - \tau)^{\delta_{\tau}}$ была однолистной в области $\tilde{D}_2$. Рассмотрим конформное отображение $\tilde{\omega} : \tilde{D}_1 \rightarrow \tilde{D}_2$, которое принадлежит классу $C^{1,\mu}$ в замыкании области $\tilde{D}_1$ и переводит D на некоторую область $\tilde{D}$. Эта область ограничена кусочно-гладким контуром класса $C^{1,\mu}$ по отношению к множеству $\tilde{F} = \tilde{\omega}(F)$, и в которой функция α однолистка. Очевидно, функция α_{τ} выпрямляет границу области $\tilde{D}$ в окрестности τ и также однолистка в этой области. Таким образом, дело сводится к доказательству теоремы для области $\alpha(\tilde{D})$, граница которой принадлежит классу $C^{1,\mu}$ по отношению к множеству $\alpha(\tilde{F} \setminus \{\tau\})$. Повторяя эту процедуру, после конечного числа шагов приходим к области, к которой остается применить теорему 1.1.

Для кусочно-гладкого контура Γ единичный касательный вектор e кусочно-непрерывен с возможными разрывами в точках $\tau \in F$. По определению $e \in C_{(+0)}^{\mu}(\Gamma, F)$, если для любой дуги $G \subseteq \Gamma$, пересекающейся с F по одному из своих концов τ , функция $e \in C_{(+0)}^{\mu}(G, \tau)$. Аналогичный смысл имеет запись $e \in C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, F)$.

Если $e \in C_{(+0)}^{\mu}(\Gamma, F)$, то как установлено в [4], конформное отображение ω области D на единичный круг в каждом криволинейном секторе S_{τ} представимо в виде

$$\omega(z) - \omega(\tau) = a_{\tau}(z)(z - \tau)^{\delta_{\tau}}, \quad \omega'(z) = b_{\tau}(z)(z - \tau)^{\delta_{\tau}-1}, \quad (4.3)$$

где функции a_{τ}, b_{τ} принадлежат $C_{(+0)}^{\mu}(\overline{S}_{\tau}, \tau)$ и всюду отличны от нуля.

Следующая теорема распространяет этот факт и на класс $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, F)$.

Теорема 4.3. Пусть единичный касательный вектор e кусочно-гладкого контура Γ принадлежит классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\Gamma, F)$.

Тогда (4.3) принадлежат $C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{S}_{\tau}, \tau)$ и всюду отличны от нуля. Аналогичное утверждение справедливо и для обратного отображения $\chi = \omega^{-1}$ с заменой δ_{τ} на $1/\delta_{\tau}$.

Доказательство. Очевидно, утверждения теоремы достаточно установить для случая, когда роль единичного круга играет произвольная область D_1 с границей класса $C^{1,\mu}$. Выберем в D подобласть D_0 , которая по отношению к фиксированной точке $\tau \in F$ содержит сектор S_{τ} и принадлежит классу $C_{[1]}^{1,\mu}$. Тогда на основании теоремы 1.1 образ $D_1 = \omega(D_0)$ является областью с границей класса $C^{1,\mu}$. Не ограничивая общности можно считать, что $\tau = 0$ и степенная функция $\alpha(z) = z^{\delta}$ с $\delta = \delta_0$ однолистка в области D_0 . Тогда образ $D_2 = \alpha(D_0)$ является областью с гладкой границей, которая в силу приведенной ниже леммы 4.1 принадлежит классу $C_{[\infty]}^{1,\mu}$ (по отношению к точке $\tau = 0$). Запишем конформное отображение в виде $\omega(z) = \omega_2(z^{\delta})$ с соответствующим конформным отображением $\omega_2 : D_2 \rightarrow D_1$. На основании теоремы 1.2 функции $\omega_2'(z)$ и $a_2(z) = [\omega_2(z) - \omega_2(0)]/z$ принадлежат $C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}_2, 0)$. При этом

$$\omega(z) - \omega(0) = \omega_2(z^{\delta}) - \omega_2(0), \quad \omega''(z) = \delta \omega_2'(z^{\delta}) z^{\delta-1}.$$

Следовательно, для коэффициентов (4.3) имеем выражения

$$a = a_2 \circ \alpha, \quad b = \delta \omega_2' \circ \alpha,$$

где $a_2(z) = [\omega_2(z) - \omega_2(0)]/z$. На основании теоремы 1.2 функции a_2 и ω_2' принадлежат классу $C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}_2, 0)$. Поэтому остается заметить, что отображение $\varphi \rightarrow \varphi \circ \alpha$ ограничено $C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}_2, 0) \rightarrow C_{[\infty]}^{\mu}(\overline{D}, 0)$. В самом деле, оно сводится к аналогичному утверждению применительно к пространству, которое станет очевидным, если воспользоваться эквивалентной нормой (2.2) этого пространства.

Лемма 4.1. Отображение $\alpha(z) = z^{\delta}$, переводящее радиальную дугу с концом $\tau = 0$ в дугу того же типа, инвариантно в классе $C_{[\infty]}^{\mu}$ их единичных касательных векторов.

Доказательство. Рассмотрим радиальную дугу G с параметризацией (2.3), где $\tau = 0$. На основании леммы 2.4 функции

$$\theta(s), \quad s\theta'(s) \in C_{[\infty]}^{\mu}([0, q]; 0). \quad (4.4)$$

Очевидно, дуга $\tilde{G} = \alpha(G)$ также радиальна и описывается аналогично (2.3) с помощью функции $\tilde{\theta}(s) = \delta\theta(s^{1/\delta})$, $0 \leq s \leq q^{\delta}$. Поэтому с учетом (4.4) эта функция также принадлежит классу $\tilde{\theta} \in C_{[\infty]}^{\mu}([0, q^{\delta}], 0)$. Поскольку $s\tilde{\theta}'(s) = s^{1/\delta}\theta'(s^{1/\delta})$, из тех же соображений этому классу принадлежит и функция $s\tilde{\theta}'(s)$, так что остается опять воспользоваться леммой 2.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
2. Duren P.L. Theory of H^p -spaces. New York-London: Acad. Press, 1970.
3. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современ. матем. Фундамент. направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.
4. Солдатов А.П. Аналог теоремы Келлога для кусочно-ляпуновских областей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 102–111.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

ON THE BOUNDARY PROPERTIES OF CONFORMAL MAPS

A. P. Soldatov^{a,b,*}^a 119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia^b 360002 Nalchik, Dolinsk, Balkarova str., 2, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Russia

*e-mail: soldatov48@gmail.com

Received: 24.04.2024

Revised: 24.04.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. Classes of C^1 -smooth regions are described, the boundary contour of which is Lyapunovian outside any neighborhood of a certain point, such that the derivative of the conformal map on the unit circle is continuous at this point. The description is given in terms of some spaces for a unit tangent vector on a boundary contour. As a consequence, the corresponding results are obtained for piecewise smooth regions.

Keywords: conformal mapping, smooth contour, boundary properties, generalized Helder spaces.