

Посвящается профессору Евгению Михайловичу Шахову в связи с его 90-летием

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЫСТРЫХ ГРУПП ЧАСТИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

© 2024 г. В.В. Аристов^{1,*}, И.В. Воронич^{1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: aristovvl@yandex.ru

**e-mail: i.voronich@frcsc.ru

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.

Переработанный вариант 10.04.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Приводится краткий обзор постановок задач, связанных с высокоскоростными пучками, с акцентом на использование аналитических решений, а также описаны результаты численного решения некоторых задач данного класса. В рамках кинетической теории на основе аналитического метода рассмотрены процессы взаимодействия групп частиц (молекул) в предположении высокой коррелированности скоростей частиц (дельта-функция в качестве плотности распределения). Задачи о взаимодействии пучков с выбыванием и без выбывания частиц изучаются численно с помощью метода прямого статистического моделирования. Для задачи с выбыванием частиц (пересечение и взаимодействие тонких пучков) получено хорошее согласие с аналитическим решением. Для задачи без выбывания частиц (соударение потоков) получено численное решение типа бегущей ударной волны предельного сжатия, формирующейся при соударении потока со стенкой. Показана роль ударных трансформант на начальной стадии процесса. Рассмотрена задача о проникновении пучка в покоящийся газ вплоть до стадии формирования факела, отмечено сходство ее начальной стадии с задачей о тонких пучках. Подчеркивается плодотворность использования аналитических методов на этапе первичного анализа проблемы и при верификации численных решений. Библ. 27. Фиг. 8.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, разреженный газ, высокоскоростные течения, столкновение пучков частиц, аналитические решения, статистическое моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466924090102, EDN: WJRVWI

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди задач кинетической теории и динамики разреженных газов важное место всегда занимали проблемы изучения высокоскоростных течений. В 1970-е годы Е.М. Шахов предложил некоторые эффективные подходы к моделированию высокоскоростных течений разреженного газа на основе процедуры дискретных скоростей. Первый подход заключается в построении адаптивной сетки в пространстве скоростей с целью учета локальной температуры — для точек в физическом пространстве с большей температурой размер скоростной области и шаг по скорости увеличиваются. В определенном смысле это использование аналогии с методами частиц в статистическом моделировании — чем выше температура, тем большую область в пространстве скоростей занимает ансамбль частиц в ячейке и тем больше разница между скоростями частиц. Данный подход применялся, в частности, к задаче о структуре ударной волны с очень большой интенсивностью, характеризуемой числом Маха $M = 100$ [1] (полезно заметить, что эта работа была выполнена под непосредственным руководством Е.М. Шахова). В рамках принятой идеализации не рассматривались процессы, связанные с возбуждением внутренних степеней свободы, диссоциацией и ионизацией молекул. Развитый численный метод позволил существенно сократить время расчетов. В дальнейшем схемы с адаптивными сетками в пространстве скоростей развивались [2–4], в работе [2] делается ссылка на [1] как на первый пример такой схемы. Другой подход основан на допущении, что внутренняя энергия быстрых групп частиц (молекул газа), например, в пучках, пренебрежимо мала по сравнению с их кинетической энергией. Решение такого класса задач потребовало применения иных математических методов, основанных на особенностях в пространстве скоростей в виде дельта-функции Дирака, отвечающей нулевой температуре. Были построены асимптотические приближения и развит новый численный

метод, основанный на использовании обобщенных функций и их аппроксимаций. С помощью этого подхода была решена задача, которая вначале была названа задачей о сильном взрыве в разреженном газе [5], но при уточнении получила более точное определение как задача о выбросе (инжекции) высокоскоростных частиц [6]. К данной тематике можно отнести и задачи о рассеянии импульсных пучков в газе [7, 8]. Некоторые приложения этих задач были описаны в работах [5–8]: рассеяние быстрых частиц на неподвижных молекулах фона, исследование верхних слоев атмосферы с помощью инъекции пучков бария, столкновение групп частиц при очень больших скоростях и т. д.

В дальнейшем оказалось, что такие методы и результаты могут найти применение в некоторых областях, не относящихся к динамике разреженного газа, но допускающих аналогичные математические модели. В кратком обзоре можно отметить постановки задач, выходящие за рамки описанных физических явлений. В последние десятилетия получили развитие математические подходы для описания биологических, экономических, исторических и других явлений [9, 10]. Среди них используются методы статистической физики и кинетической теории [11, 12]. Модели описания распространения эпидемий и других аналогичных процессов традиционно опираются на уравнения параболического типа. В этих моделях, начиная с работ А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова и Р. Фишера [13, 14], рассматриваются решения типа бегущей волны. Подобные явления в литературе на русском языке называются автоволновыми процессами [15, 16]. Описанный кинетический подход был применен в [17] для формулировки обобщенного уравнения, которое переходит в решение [7, 8] в частном случае постоянных плотностей фона и пучка. Данная модель была применена в работе [17] для описания процессов быстрого вторжения (блицкрига), результаты которой были отмечены в [18]. Сходная, но более простая линейная модель была применена для изучения распространения пандемии COVID-19. При изучении данной проблематики часто используются диффузионные модели распространения [19], но более адекватной видится кинетическая модель [20, 21].

2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Ряд рассмотренных в литературе постановок задач связан с описанием движения групп частиц, тепловой энергией (температурой) которых можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией. В таких задачах взаимодействие движущихся частиц происходит с частицами покоящегося фонового газа, для которого также принимается допущение нулевой температуры [6, 7]. Рассматривались одномерная, плоская и сферически-симметричная конфигурации. Первоначально постановка задач прямо соотносилась с вариантами известной задачи газовой динамики о сильном взрыве [22], которые допускают при некоторых упрощениях автомодельные решения, но изучались и численно в более общих постановках [23–25]. Достаточно быстро выяснилось, что изучаемые течения в разреженном газе имеют свою специфику, связанную с характером динамики разреженного газа на временах, сопоставимых со средним временем межмолекулярного столкновения. Поскольку рассматривается движение частиц, имеющих одинаковые по модулю скорости, температура невозмущенного пучка нулевая. В дальнейшем такого рода задачи получили название задач о сильном выбросе (инжекции) частиц газа. Важно, что на начальной стадии развития процесса можно построить асимптотическое решение для функции распределения в виде аналитического выражения, включающего ударную трансформанту [26]. По прошествии нескольких времен столкновения появляется тепловой разброс скоростей частиц и постепенно решение выходит на сплошносредние асимптотики, соответствующие задачам о газодинамическом сильном взрыве.

Приведем кратко постановку такого рода задач и изложим наиболее интересные и значимые результаты. В качестве основы описания принято уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial f(t, x, \xi)}{\partial t} + \xi \frac{\partial f(t, x, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{\text{Kn}} I(f, f). \quad (1)$$

Здесь $f(t, x, \xi)$ – функция распределения, $x = (x, y, z)$ – вектор координат, $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ – вектор молекулярной скорости, $I(f, f)$ – интеграл столкновений, Kn – число Кнудсена. Уравнение (1) записано в безразмерном виде, как и все последующие выражения. Для получения безразмерных переменных используются подходящие масштабы длины, числовой плотности, температуры и скорости $L, n_{\text{ref}}, T_{\text{ref}}, u_{\text{ref}} = \sqrt{RT_{\text{ref}}}$, R – газовая постоянная. Масштаб времени является производным от масштабов длины и скорости: $\tau = L/u_{\text{ref}}$. Для описания столкновений принята модель твердых сфер. Число Кнудсена $\text{Kn} = \lambda/L$, где $\lambda = 1/(\sqrt{2}\sigma n_{\text{ref}})$ – длина свободного пробега (σ – полное сечение столкновения), L – масштаб течения.

Для дальнейшего анализа представим функцию распределения в виде суперпозиции членов в виде дельта-функций для пучка, фонового газа и добавки. В случае сферически-симметричной постановки решение ищется в виде [6]:

$$f(t, r, \xi) = \frac{N(t)}{4\pi r^2} \delta(\xi - \mathbf{U}) \delta(r - Ut) + n(t, r) \delta(\xi) + F(t, r, \xi), \quad (2)$$

где первое слагаемое соответствует $N(t)$ частицам пучка (их число убывает по мере столкновений с частицами фона), которые разлетаются от центра с радиальной скоростью $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$, r – радиальная координата, $\delta(r)$, $\delta(\xi)$ – дельта-функции Дирака, второе слагаемое соответствует частицам фонового газа с числовой плотностью $n(t, r)$, третье слагаемое F соответствует частицам, выбывшим из первых двух групп за счет столкновений. Такое представление функции распределения наиболее наглядно представляет ситуацию, когда нет столкновений частиц третьей группы с частицами первых двух групп (приближение первых столкновений).

После подстановки в уравнение Больцмана функции распределения, преобразованной к сферическим координатам в пространстве скоростей, уравнение (1) распадается на систему из трех уравнений, которая приведена в [6]. Динамика фракции частиц, образовавшихся в результате столкновений частиц пучка и фона, в [6] описывается с использованием S -модели для интеграла столкновений. Часть интеграла обратных столкновений, отвечающая взаимодействию частиц фронта $r = Ut$ и фона, выписывается точно с использованием ударной трансформанты [26], такого типа решение будет рассмотрено ниже.

Можно переформулировать эту задачу на общий случай столкновения пучков (допуская в качестве одного из них фоновый газ):

$$f(t, x, \xi) = n_1(t, x) \delta(\xi - \mathbf{U}_1) + n_2(t, x) \delta(\xi - \mathbf{U}_2) + F(t, x, \xi), \quad (3)$$

где n_1 и n_2 – числовые плотности сталкивающихся групп молекул со скоростями \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 .

Для дальнейшего представляет интерес асимптотическое решение при $t \rightarrow 0$, поскольку количество рассеянных частиц F на начальном этапе достаточно мало, так как при $t = 0$ имеем $F = 0$. Полагая $F = 0$ в правых частях исходной системы [6–8], получим упрощенную систему, пригодную для описания начального этапа. Рассмотрим такую асимптотическую систему для случая столкновения тонкого плоского пучка полуширины y_0 с покоящимся газом ($U_1 = U, U_2 = 0$):

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + U \frac{\partial n_1}{\partial x} = -\sigma n_1 n_2; \quad (4a)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\sigma n_1 n_2; \quad (4б)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial F}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial y} = \Phi. \quad (4в)$$

Здесь интеграл столкновений Φ , соответствующий взаимодействию частиц пучка и фона, выписывается с использованием ударного трансформанта [26]:

$$\Phi = 2\sigma U n_1 n_2 T(\xi, 0, U) H(y_0 - y), \quad (5)$$

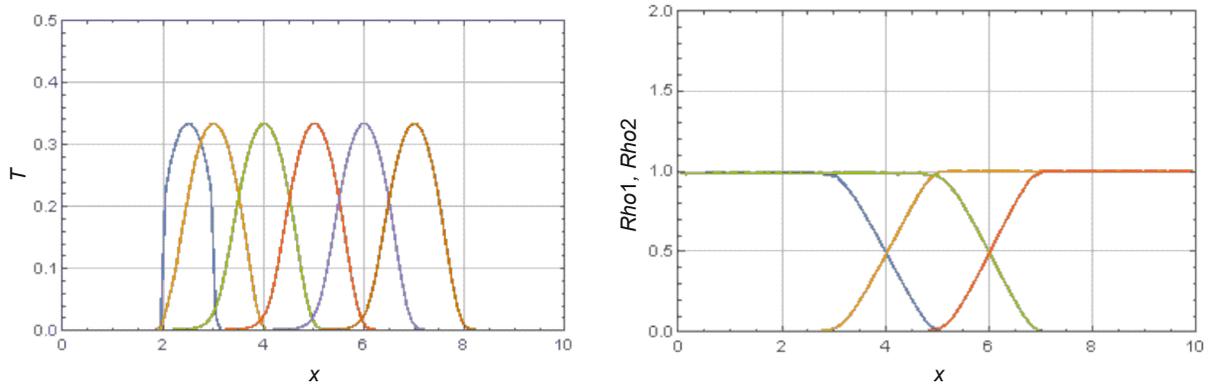
где

$$T(\xi, 0, U) = \frac{1}{(\pi U^2)} \delta \left(\left(\left(\xi_x - \frac{U}{2} \right)^2 + (\xi_y)^2 + (\xi_z)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{U}{2} \right).$$

Можно видеть, что в таком приближении уравнения (4а, б) не зависят от (4в). По истечении достаточного времени ($\sigma U t \gg 1$) решение задачи (4а), (4б) как нелинейной гиперболической системы с характеристиками $x - Ut = \text{const}$ и $x = \text{const}$ устанавливается таким образом, что профили n_1 и n_2 описываются решением вида связанных волн, бегущих со скоростью $D = U n_{10} / (n_{10} + n_{20})$, где n_{10} и n_{20} – невозмущенные плотности пучка и фона. Отсюда становится очевидным, что фронт пучка движется в фоновом газе с меньшей скоростью. При равенстве плотностей пучка и фона n_{10} и n_{20} получаем $D = U/2$. Поскольку толщина тонкого пучка много меньше длины свободного пробега в нем, на начальном этапе не происходит вторичных столкновений рассеянных частиц F с частицами фона и пучка. Точное решение данной задачи [8] позволяет верифицировать более сложные модели взаимодействия пучка с фоновым газом, которые интересны для перспективных приложений. Решение данной задачи используется в качестве тестового для более общей задачи о столкновении пучка и фона.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ О РАССЕЯНИИ ТОНКОГО ПУЧКА

Для получения численных решений применялся вариант численного метода прямого статистического моделирования DSMC2D [27]. В методе используется схема мажорантной частоты с дополнительными ограничениями на выбор пар сталкивающихся частиц аналогично методу молекулярной динамики. Принята модель



Фиг. 1. Профили температуры и плотностей пучка и фона.

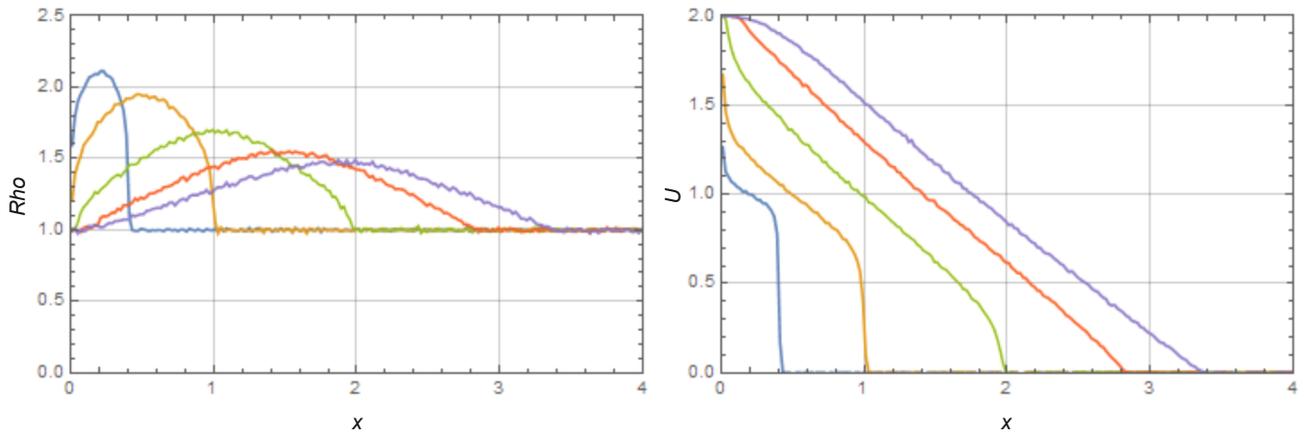
газа из частиц-твердых шаров. Для понимания специфики решений рассматриваемых задач важно, что в модели газа из твердых шаров средняя длина пробега не зависит от средней относительной скорости и тем самым от температуры.

Для сопоставления с аналитическим решением из [7, 8] изучается частный случай этой задачи. Рассматривается входящий слева ($x < 2, y \leq h$) пучок со скоростью $U = 2$, числовой плотностью $n_{10} = 1$ и температурой $T_{10} = 0.001$. Масштабом числовой плотности n_{ref} является значение в невозмущенном пучке, масштаб температуры $T_{\text{ref}} = 1$, масштаб длины $L = \lambda_{10}$, где λ_{10} – средняя длина свободного пробега частиц в пучке. Поперечный размер пучка ограничен возможностью разделения частиц на принадлежащие пучку и выбывшие из него в результате столкновений без учета их обратного влияния на пучок, поэтому ограничение на полуширину пучка $h \ll 1$. Физически это оправдано до тех пор, пока не образуется «атмосфера» из выбывших частиц и начнутся их столкновения между собой и с частицами пучка и фона. Справа ($x \geq 2, y \geq 0$) находится покоящийся газ с плотностью $n_{20} = 1$ и температурой $T_{20} = 0.001$. Несмотря на то, что температуры групп частиц по отдельности малы ($T_{10} \ll 1, T_{20} \ll 1$), температура в области их взаимодействия величина порядка единицы: $T_{\Sigma} = (1/3)(n_{10}(U - U^*)^2 + n_{20}(0 - U^*)^2)/(n_{10} + n_{20}) = 1/3$, где $U^* = (U + 0)/2 = U/2 = 1$. Алгоритм моделирования организован так, что частицы, испытавшие одно столкновение, выбывают из расчета и далее не учитываются. В качестве физической аналогии данного процесса можно привести аннигиляцию частиц и античастиц. Как и для теоретического решения, по прошествии нескольких характерных времен столкновений устанавливается режим бегущей волны.

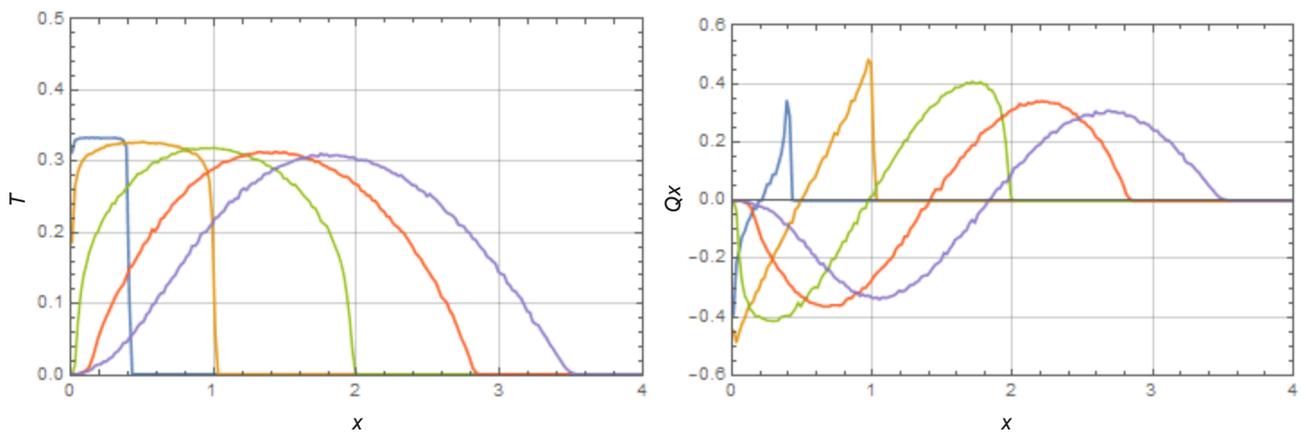
На фиг. 1а показаны распределения температуры в моменты времени $t = 0.5; 1; 2; 3; 4; 5$ (на графике слева направо). На фиг. 1б показаны распределения плотностей пучка (синяя и зеленая линии) и фона (оранжевая и красная линии) в моменты времени $t = 2$ и 4. Скорость движения фронта в расчете оказывается единичной: $D = 1$ (расстояние в 2 единицы длины фронт проходит за 2 единицы времени), что соответствует аналитическому решению. Из фиг. 1а следует, что этап формирования бегущей волны заканчивается к моменту $t \cong 2$. Полученное согласие расчетных и теоретических результатов позволяет верифицировать численный метод и алгоритм.

Для более общей задачи о проникании тонкого пучка в покоящийся газ рассматривается входящий слева ($x < 0, y \leq h$) пучок со скоростью $U = 2$, плотностью $n_{10} = 1$ и температурой $T_{10} = 0.001$. Справа ($x \geq 0, y \geq 0$) находится покоящийся газ с плотностью $n_{20} = 1$ и температурой $T_{20} = 0.001$. Поперечный размер плоского пучка: $y \leq h = 1/10$. Выбор масштабов такой же, как принят ранее. Граница $x = 0$ при $y > h$ моделировалась зеркально отражающей стенкой (ситуация проникновения пучка в резервуар). В данной задаче частицы пучка и фона, испытавшие столкновения, не выбывают и участвуют в последующих столкновениях с формированием глобального течения, которое вовлекает все больше частиц. На фиг. 2 и 3 показаны распределения основных переменных (числовая плотность n на фиг. 2а, продольная скорость u на фиг. 2б, температура T на фиг. 3а, тепловой поток Q_x на фиг. 3б) на плоскости симметрии $y = 0$ в моменты времени $t = 0.2; 0.5; 1; 2$. На фиг. 4а, б показаны поля температуры T в моменты времени $t = 1$ и 2. На фиг. 5а, б показаны поля компонент теплового потока Q_x и Q_y в момент $t = 2$.

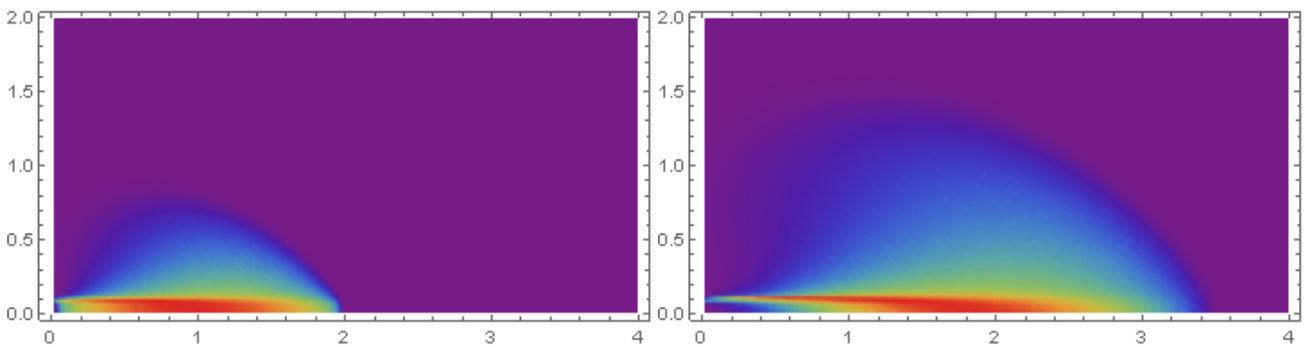
Из фиг. 2–5 видно, что первоначально происходит проникновение пучка в покоящийся газ (плотности частиц пучка и фона суммируются). Затем по мере продвижения пучка и столкновений происходит выбывание частиц из зоны взаимодействия, возмущение плотности в пучке снижается, снижается и скорость фронта пучка. После прохождения пучком дистанции $l \sim 3 \div 5$ длин пробега, образуется конфигурация факела, состоящая из зоны вдува, где уже нет частиц фонового газа, и зоны взаимодействия с поперечно расширяющимся фронтом.



Фиг. 2. Профили плотности ρ (а) и скорости U (б) на плоскости симметрии в моменты времени $t = 0.2, 0.5, 1, 2$.



Фиг. 3. Профили температуры T (а) и теплового потока Q_x (б) на плоскости симметрии в моменты времени $t = 0.2, 0.5, 1, 2$.

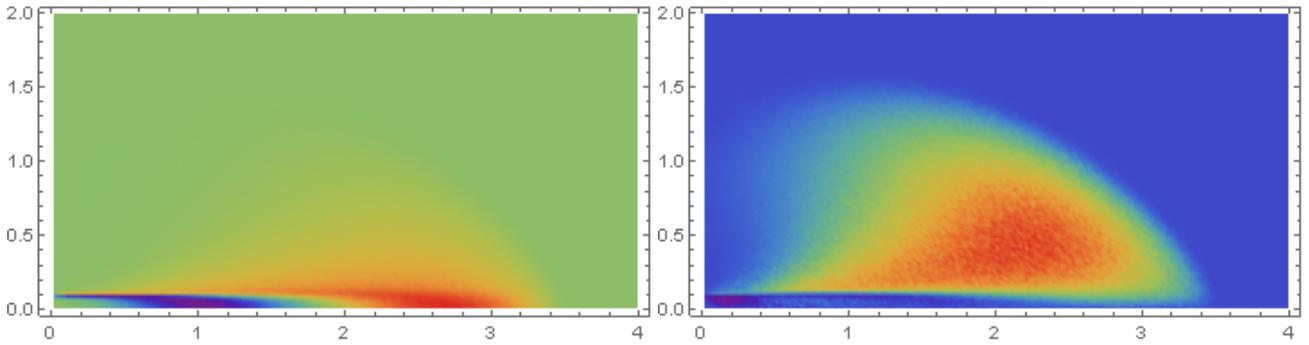


Фиг. 4. Поля температуры T в моменты $t = 1$ (а) и 2 (б).

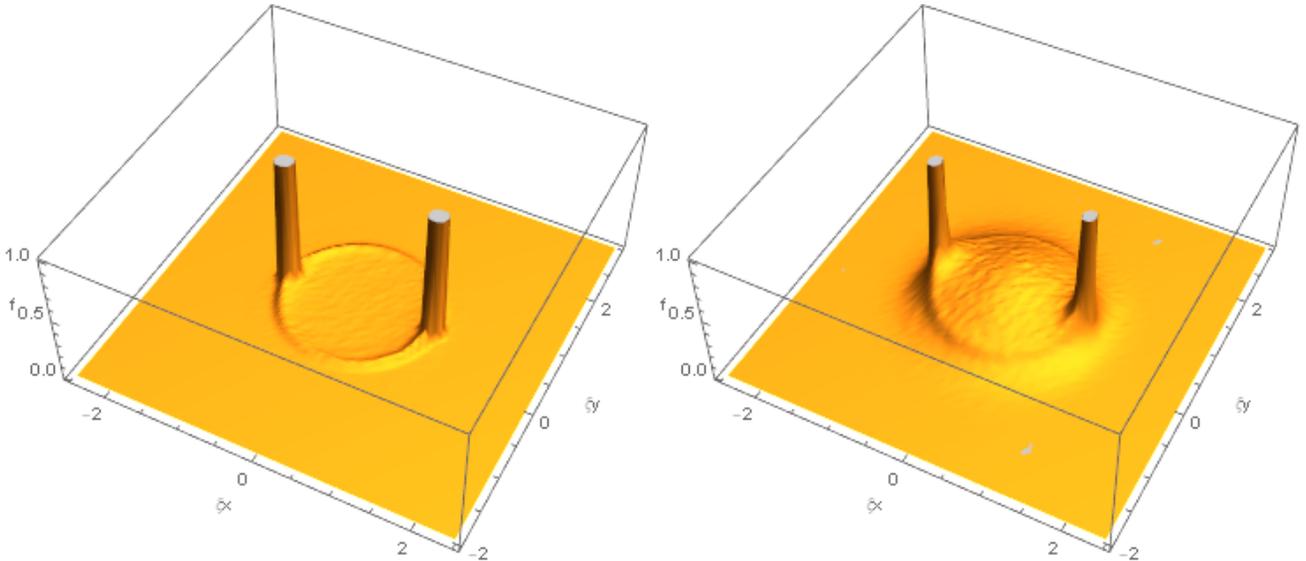
4. ЗАДАЧА О СТОЛКНОВЕНИИ ПОТОКОВ

Рассмотрим задачу, логически дополняющую предыдущую. Пусть два разреженных потока (пучка большой ширины) приведены в начальный момент в соприкосновение. В рамках использования известных асимптотических решений рассмотрим лобовое столкновение потоков, такая задача является пространственно одномерной.

Входящий слева ($x < 0$) поток имеет скорость $U_{10} = 1$, плотность $n_{10} = 1$ и температуру $T_{10} = 0.001$, входящий справа ($x > 0$) поток имеет скорость $U_{20} = -1$, плотность $n_{20} = 1$ и температуру $T_{20} = 0.001$. Температура системы $T_{\Sigma} = 1/3$. Выбор масштабов аналогичен предыдущему разделу.



Фиг. 5. Поля компонент теплового потока Q_x (а) и Q_y (б) в момент $t = 2$.



Фиг. 6. Функция распределения в окрестности точки $x = 0$ при $t = 0.2, 2$.

Для сопоставления аналитического и численного решений на начальном этапе процесса удобно рассмотреть эволюцию функции распределения частиц в окрестности точки столкновения потоков $x = 0$. Хотя рассматриваемая задача представляет пространственно-неоднородное решение, процессы в зоне столкновения потоков могут быть описаны на начальном этапе с помощью модели однородной релаксации. Для этого можно использовать простое асимптотическое при $t \rightarrow 0$ решение уравнения (4в), которое в пространственно-однородном случае примет вид

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \Phi_\infty.$$

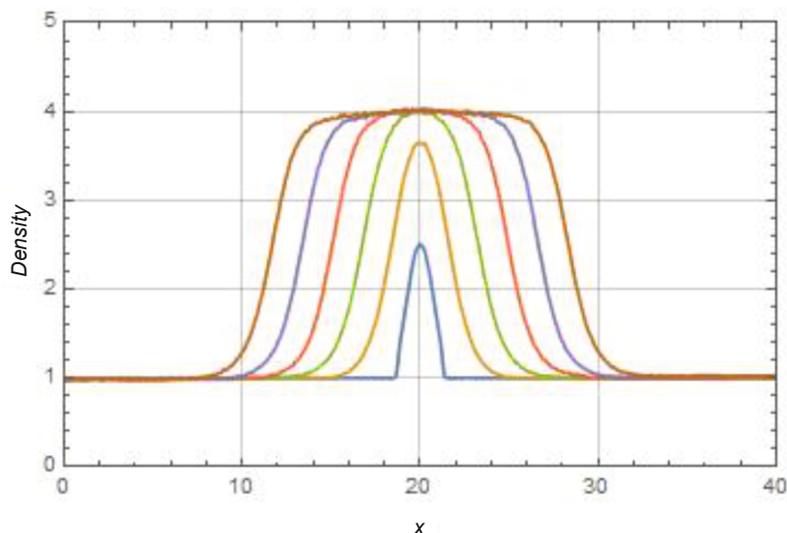
Для малых времен $t \rightarrow 0$ получаем решение [6]:

$$F(t) = 3n^2 \frac{\sigma}{(2\pi)} \delta(\xi - U/2) t.$$

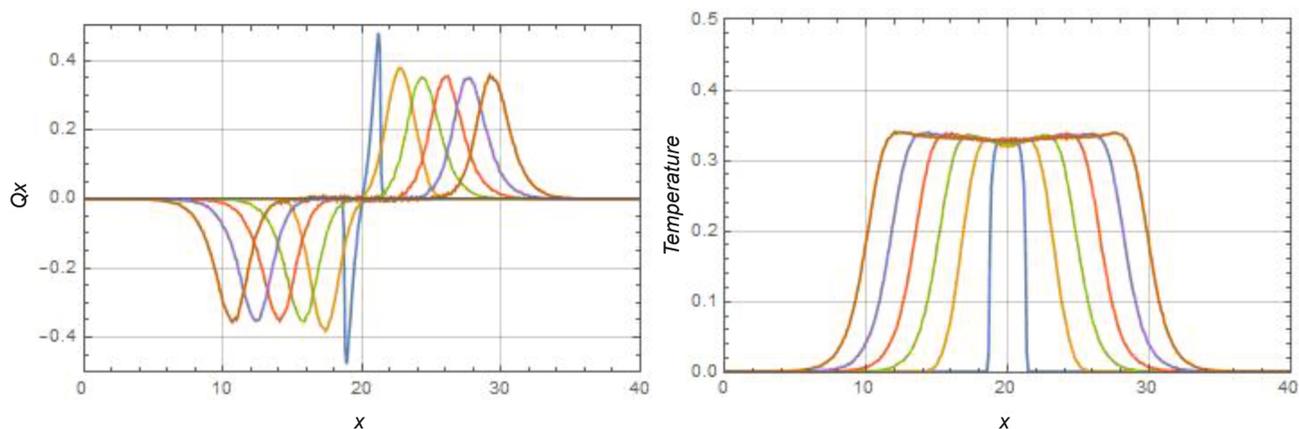
Данное выражение показывает, как выглядит функция распределения в результате первых столкновений частиц потоков — скорости рассеянных частиц находятся на сфере (окружности) с радиусом, следующим из ударной трансформанты. По мере релаксации выбывшие из пучков частицы за несколько столкновений приобретают скорости, близкие к равновесным. Процесс формирования равновесной плотности распределения идет до момента $t \sim 10$, когда достигается предельное сжатие газа в зоне столкновения потоков и формируются бегущие влево и вправо ударные волны.

На фиг. 6 представлен вид функции распределения (для удобства анализа здесь проведено суммирование по компоненте молекулярной скорости ξ_z) в окрестности точки $x = 0$ в моменты времени $t = 0.2$ и 2 .

Происходящие при формировании бегущих ударных волн процессы могут быть хорошо проиллюстрированы распределениями плотности, температуры и теплового потока в различные моменты времени, фиг. 7 и 8а, б.



Фиг. 7. Профили плотности n в моменты времени $t = 1.25; 5; 10; 15; 20; 25$.



Фиг. 8. Профили теплового потока Q_x (а) и температуры T (б) в моменты времени $t = 1.25; 5; 10; 15; 20; 25$.

Как можно видеть, в рассматриваемой задаче формируются ударные волны предельной интенсивности (предельного сжатия), так как из-за малой температуры пучков число Маха велико. Как известно, для одноатомного газа предел повышения плотности при ударном сжатии равен 4, что можно увидеть на фиг. 7. Образовавшиеся ударные волны бегут влево и вправо по газу с малой температурой, фиг. 8б. После формирования бегущих ударных волн скорость их движения выходит на теоретическую величину, которую можно вычислить из закона сохранения массы [22].

Из профилей теплового потока и температуры на фиг. 8а, б видно, что после формирования сильных ударных волн имеется зона небольшого локального минимума температуры за счет поступательной неравновесности, в этой зоне знаки градиента температуры и теплового потока совпадают. В дальнейшем это явление сохраняется, с поправкой на то, что возмущение теплового потока передвигается вместе с ударной волной. Это свидетельствует о существовании зоны неклассического переноса на расстоянии $l \sim 5 \div 10$ длин пробега за бегущей ударной волной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модели и методы динамики разреженного газа для задач описания высокоскоростных течений позволяют исследовать практически значимые неравновесные явления — столкновение пучков с учетом и без учета выбывания частиц. Для задачи с безвозвратным выбыванием частиц (тонкие пучки) получено хорошее согласие с аналитическим решением. Для задачи без выбывания частиц (соударение потоков) получено численное решение типа бегущей ударной волны предельного сжатия, формирующейся, например, при соударении вы-

сокоскоростного потока со стенкой. Для этого случая показана роль ударных трансформант на начальной стадии процесса. Рассмотрена задача о проникновении пучка в покоящийся газ вплоть до формирования факела, отмечено сходство ее начальной стадии с первой задачей. Отметим, что развитие созданной Е.М. Шаховым методологии дает возможность проводить моделирование различных явлений в областях, не относящихся прямо к кинетической теории, что говорит об определенной общности рассматриваемых моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристов В.В.* Метод переменных сеток в скоростном пространстве в задаче о сильной ударной волне // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 4. С. 261–267.
2. *Brull S., Mieussens L.* Local discrete velocity grids for deterministic rarefied flow simulations // J. of Comput. Phys. 2014. V. 266. P. 22–46.
3. *Arslanbekov R.R., Kolobov V.I., Frolova A.A.* Kinetic Solvers with Adaptive Mesh in Phase Space // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. 063301.
4. *Xiao T., Liu C., Xu K., Cai Q.* A velocity-space adaptive unified gas kinetic scheme for continuum and rarefied flows // J. of Comput. Phys. 2020. V. 415. 109535.
5. *Аристов В.В., Шахов Е.М.* Задача о сильном взрыве в разреженном газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 5. С. 1276–1287.
6. *Аристов В.В., Шахов Е.М.* Течение разреженного газа, вызванное сильным точечным выбросом конечной массы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 7. С. 1066–1077.
7. *Aristov V.V., Shakhov E.M.* Scattering of impulsive molecular beam in a rarefied gas // Proc. of 15th Int. Symp. on Rarefied Gas Dyn. Ed. B.G. Teubner. 1986. V. 1. P. 266–275.
8. *Аристов В.В., Шахов Е.М.* Нелинейное рассеяние импульсного молекулярного пучка в разреженном газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 2. С. 159–164.
9. *Мюррей Д.* Математическая биология. Т. II / Ред. Г.Ю. Ризниченко. М.: – Ижевск, 2011.
10. История и Математика: Проблемы периодизации исторических макропроцессов. М.: КомКнига, 2006.
11. Special Issue: Statistical Mechanics and Social Sciences I // J. Stat. Phys. 2013. V. 151. N 1–2. Special Issue: Statistical Mechanics and Social Sciences II // J. Stat. Phys. 2013. V. 151. N 3–4.
12. Prigogine I., Herman R. Kinetic Theory of Vehicular Traffic. New York: American Elsevier, 1971.
13. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Матем. и механ. 1937. Т. 1. С. 1–25.
14. *Fischer R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 355–369.
15. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
16. *Елькин Ю.Е.* Автоволновые процессы // Матем. биология и биоинформатика. 2006. Т. 1. № 1. С. 27–40.
17. *Aristov V.V., Ilyin O.V.* Kinetic Models for Historical Processes of Fast Invasion and Aggression // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. 04286.
18. Blitzkrieg basics // Scientific American. 2015. N 6. P. 22.
19. *Acioli P.H.* Diffusion as a first model of spread of viral infection // Am. J. Phys. 2020. V. 88(8). P. 600–604.
20. *Aristov V.V., Stroganov A.V., Yastrebov A.D.* Simulation of Spatial Spread of the COVID-19 Pandemic on the Basis of the Kinetic-Advection Model // Physics. 2021. V. 3. P. 85–102.
21. *Аристов В.В., Строганов А.В., Ястребов А.Д.* Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID21 // Докл. АН. Физика. Техн. науки. 2021. Т. 498. С. 27–32.

22. *Седов Л.И.* Распространение сильных взрывных волн // Прикл. матем.и механ. 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 241–250.
23. *Taylor G.* The formation of blast wave by a very intense explosion // Rept RC–210, 27 June 1941. Civil Defence Research Committee, 1941.
24. *von Neumann J.* The point source solution // Bethe H.A., Fuchs K., Hirschfelder J.O. et al. Blast wave. Los-Alamos Scientific Laboratory Rept LA-2000. 1958. P. 27–55.
25. *Коробейников В.П.* Задачи точечного взрыва. М.: Наука, 1988.
26. *Баранцев Р.Г.* Об ударных трансформантах кинетического уравнения аэродинамики разреженных газов // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ., 1963. Вып. 1. С. 80–91.
27. *Аристов В.В., Воронич И.В., Забелок С.А.* Исследование неклассического переноса с применением численных методов решения уравнения Больцмана // Ж.вычисл.матем. и матем. физ. 2023. №12. С. 2025–2034.

SOLVING PROBLEMS OF KINETIC INTERACTION OF FAST GROUPS OF PARTICLES USING ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS

V. V. Aristov*, I. V. Voronich**

119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

* e-mail: aristovvl@yandex.ru

**e-mail: i.voronich@frcsc.ru

Received: 15.07.2023

Revised: 10.04.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. A brief overview of the problem statements related to high-speed beams is given, with an emphasis on the use of analytical solutions, and the results of numerical solution of some problems of this class are described. Within the framework of kinetic theory, the processes of interaction of groups of particles (molecules) are considered on the basis of the analytical method, assuming a high correlation of particle velocities (delta function as the distribution density). The problems of the interaction of beams with and without the elimination of particles are studied numerically using the method of direct statistical modeling. For the problem with the elimination of particles (intersection and interaction of thin beams), a good agreement with the analytical solution was obtained. For the problem without the elimination of particles (collision of flows), a numerical solution of the type of traveling shock wave of extreme compression formed when the flow collides with the wall is obtained. The role of shock transformants at the initial stage of the process is shown. The problem of beam penetration into a stationary gas up to the stage of plume formation is considered, and the similarity of its initial stage with the problem of thin beams is noted. The fruitfulness of using analytical methods at the stage of primary analysis of the problem and verification of numerical solutions is emphasized.

Keywords: kinetic equation, rarefied gas, high-speed flows, collision of particle beams, analytical solutions, statistical modeling.