

# СПУТНИК НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ: О ЧИСЛЕННОМ ОБНАРУЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ И ИССЛЕДОВАНИИ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2024 г. А.А. Буров<sup>1,\*</sup>, В.И. Никонов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

\*e-mail: jtm@narod.ru

\*\*e-mail: nikon\_v@list.ru

Поступила в редакцию 09.10.2023 г.

Переработанный вариант 09.10.2023 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Рассматриваются уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите. Для численного обнаружения периодических решений применяется сочетание метода сечений Пуанкаре и предложенного ранее подхода, опирающийся на аналог принципа сжимающих отображений. Численно выявлен ряд классов периодических решений и исследованы необходимые условия их устойчивости. Этим движениям уделяется особое внимание, поскольку в общем случае они трудно поддаются аналитическому изучению. Библ. 47. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** плоские движения спутника на эллиптической орбите, отображение Пуанкаре, инвариантные торы, хаотическая динамика, уравнение Белецкого, периодические движения, необходимые условия устойчивости, теория Ляпунова–Флоке.

DOI: 10.31857/S0044466924090124, EDN: WJLDO

## ВВЕДЕНИЕ

Уравнение колебаний спутника на эллиптической орбите, известное в литературе как уравнение В. В. Белецкого (см. [1, 2]), можно отнести к уравнениям маятникового типа с периодическим возбуждением. В случаях когда орбита спутника отлична от круговой, уравнения движения оказываются неинтегрируемыми, и оказывается актуальной задача выявления устойчивых периодических решений, особенно для больших значений эксцентриситета. Как было подмечено (см. [3–5]), существенную роль при отыскании таких решений играет “стробоскопический метод”, по существу совпадающий с методом отображения Пуанкаре за период.

Сочетание этого метода с обсуждавшимся авторами ранее подходом, опирающимся на визуальное выявление областей, и дальнейшим итерационным численно-аналитическим, данный метод предоставляет определенные возможности для отыскания периодических решений. В настоящей работе этот подход применяется для выявления периодических движений спутника при значениях эксцентриситета, существенно отличных от нуля. Необходимые условия устойчивости выявленных движений проверяются с помощью теории Ляпунова–Флоке.

Работа посвящена 60-летию публикаций [3–5].

## 1. СИСТЕМЫ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Рассмотрим систему вида

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = f(v, q, t), \quad (1.1)$$

где  $f : S^1(q) \times R^1(v) \times R^1(t) \rightarrow R$  — функция, гладкая по  $q$  и  $v$ , периодическая по  $q$  и  $t$  с периодом  $2\pi$ . В общем случае функция  $f$  также зависит от параметров. Системы вида (1.1) называют системами маятникового типа.

Для таких уравнений, как правило численно, строится отображение Пуанкаре за период, т.е. отображения плоскости  $t = 0$  на себя за период  $T$  вдоль потока в расширенном фазовом пространстве  $(q, v, t)$ . Наблюдения за следами траекторий системы на этой плоскости для типичных систем вида (1.1), не близких к интегрируемым, в общем случае позволяет выявить области визуально “регулярного” поведения, окруженные областями “нерегулярного” поведения<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Речь идет об “островах” и целых “архипелагах” в “море хаоса” в терминологии, предложенной В.В. Белецким [9].

С точки зрения выявления устойчивых периодических движений перспективными выглядят области фазового пространства, близкие на сечениях Пуанкаре к “островам регулярности”, являющихся, вообще говоря, следами не до конца разрушенных или деформированных инвариантных торов. Для отыскания самих периодических решений предлагается воспользоваться подходом, предложенным авторами в [6]. Этот способ состоит в следующем. Прежде всего фиксируются параметры задачи. Потом численно строится отображение Пуанкаре за период и визуально (“эмпирически”) выделяется “кандидат” на звание “острова регулярности” или, иначе говоря, “следа разрушенного или деформированного тора”. Выбирается начальное значение, принадлежащее этому следу, по нему строится некоторая часть траектории, представленная в силу использования конечно-разностного численного моделирования массивом точек, принадлежащих плоскости  $(q, v)$ . Эти точки, расположенные вблизи “острова регулярности”, с помощью метода наименьших квадратов приближаются кривой второго порядка. Как правило, такая кривая оказывается эллипсом. Далее, аналитически вычисляется центр этой кривой, после чего итерация повторяется: в качестве приближенного решения на этом шаге итераций выбирается решение с начальными условиями, отвечающими центру кривой второго порядка, найденному на предыдущем шаге. Как показали рассмотренные ранее примеры [6, 7], такая сходимость оказывается достаточно быстрой, при том, что в рассмотренных примерах правые части уравнений вида (1.1) оказываются разрывными функциями времени и претерпевают разрывы первого рода.

Естественно ожидать, что найденное таким образом периодическое решение будет устойчиво, по крайней мере в первом приближении. Для проверки этого утверждения выполняется следующее. Найденное периодическое решение, представленное, вообще говоря, конечным набором точек, приближается тригонометрическим полиномом высокого порядка. Далее, осуществляется линеаризация уравнений движения в окрестности найденного решения. Затем численно определяется матрица монодромии. Наконец, на основе анализа ее следа с помощью теории Ляпунова–Флоке (см., например, [8]) делается вывод об устойчивости в первом приближении (или неустойчивости) изучаемого периодического решения.

## 2. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Применим описанный подход к задаче о плоских колебаниях спутника на эллиптической орбите. Как известно, в рамках такой постановки движения описываются уравнением Белецкого, представимом в виде [1] (см. также [2])

$$(1 + e \cos v) \ddot{\delta} + n^2 \sin \delta = 2e\dot{\delta} \sin v + 4e \sin v, \quad 0 \leq n^2 = 3 \frac{A - C}{B} \leq 3. \quad (2.1)$$

Здесь  $v$  — истинная аномалия центра масс спутника, используемая в качестве независимой переменной,  $\delta$  — угол, характеризующий поворот спутника относительно орбитальной системы отсчета,  $A$ ,  $B$  и  $C$  — главные центральные моменты инерции спутника, причем момент инерции  $B$  отвечает оси, перпендикулярной к плоскости орбиты,  $0 \leq e < 1$  — эксцентриситет орбиты центра масс.

То же уравнение в нормальной форме Коши имеет вид системы второго порядка

$$\dot{\delta} = v, \quad \dot{v} = \frac{1}{1 + e \cos v} (2ev \sin v - n^2 \sin \delta + 4e \sin v), \quad (2.2)$$

которое и составит предмет дальнейшего обсуждения<sup>2</sup>.

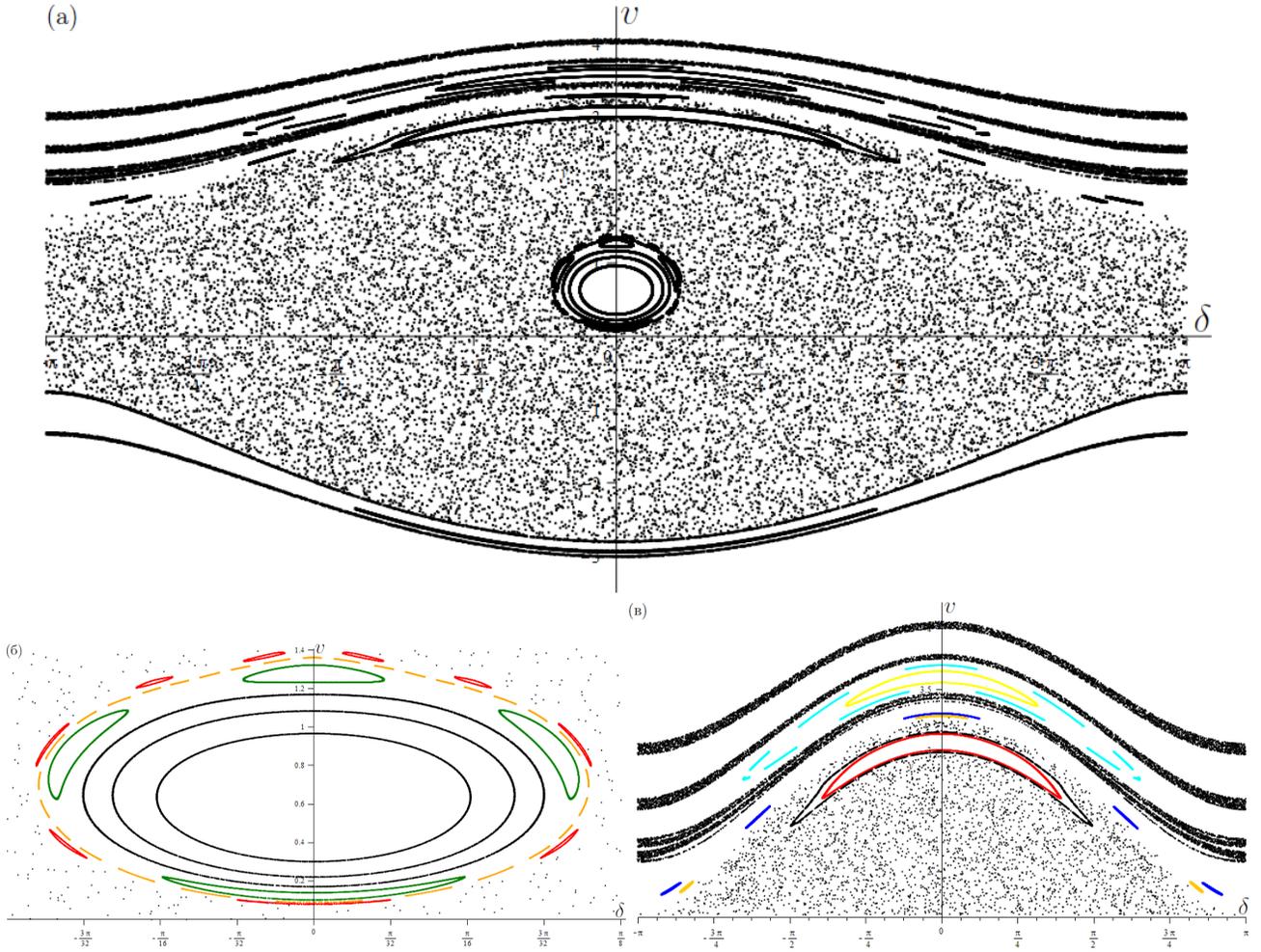
### 2.1. Периодические решения при существенно отличных от нуля значениях эксцентриситета

Как известно (см. [10]), при достаточно малых значениях эксцентриситета  $e \neq 0$  сепаратрисы расщепляются, и в их окрестности образуется тонкий хаотический слой. Также разрушаются резонансные торы и слегка деформируются нерезонансные торы, что обеспечивает, благодаря теореме Мозера о повороте кольца, существование большого числа периодических движений.

Применим предлагаемую технику к случаю, когда  $e = 0.16$ ,  $n^2 = 2$ . Общая картина представлена на фиг. 1а. Из нее с целью дальнейшего исследования на плоскости  $[\delta, v]$  были выделены области  $A$ :  $[-\pi/8, \pi/8] \times [0, 1.4]$  (фиг. 1б) и  $B$ :  $[-3\pi/4, 3\pi/4] \times [1.5, 4]$  (фиг. 1в).

**Область А.** Прежде всего обратим внимание на область  $A$ . Черному острову предположительно отвечает периодическое решение  $A_I$  — колебания периода  $2\pi$ . Применение к нему изложенного метода за 16 итераций позволяет с точностью  $10^{-11}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = 0.0000002735$ ,  $v(0) = 0.6094296495$ . Это движение изображено на фиг. 2. Вычисления для этого решения матрицы монодромии показывают, что на этом решение ее след составляет  $-0.787747701$ , и поэтому выполнены необходимые условия устойчивости.

<sup>2</sup>Предъявленное в [10] гамильтоново представление уравнений движения в работе не используется.



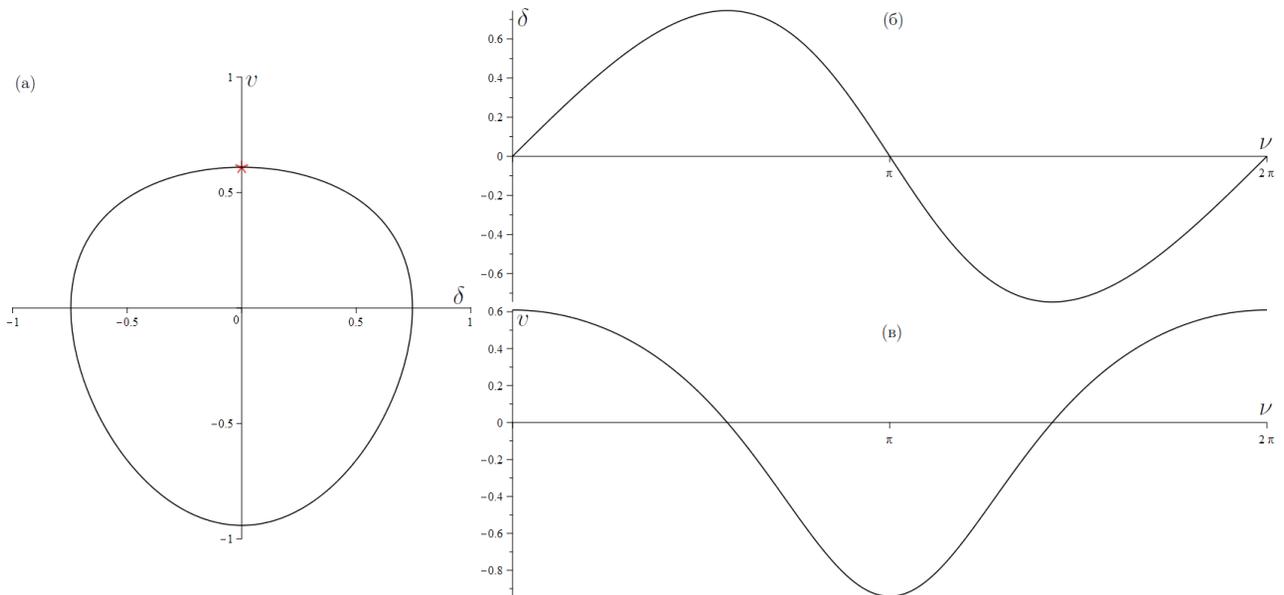
Фиг. 1. Сечение Пуанкаре при  $e = 0.16, n^2 = 2$ : (а) – общий вид, (б), (в) – выделенные области А и В.

Наблюдаемый архипелаг из четырех зеленых островов предположительно отвечает периодическому решению  $A_{II}$  — колебания периода  $8\pi$ . Применение к ним изложенного метода за 15 итераций позволяет с точностью  $10^{-9}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = -0.00001348, v(0) = 1.27508013$ . Это движение изображено на фиг. 3. Вычисления для этого решения матрицы монодромии показывают, что на этом решение ее след составляет 1.577671089, и поэтому выполнены необходимые условия устойчивости.

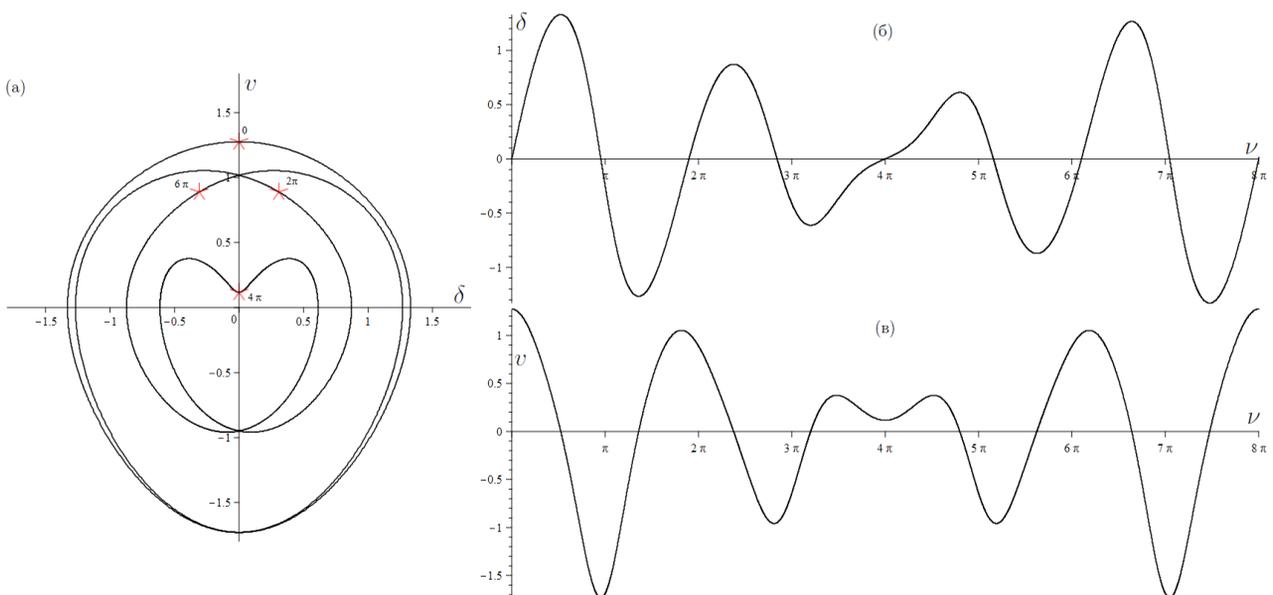
Острова, изображенные красным на фиг. 1б, отвечают периодическому решению  $A_{III}$  — колебания периода  $18\pi$ . Применение к ним изложенного метода за 14 итераций позволяет с точностью  $10^{-9}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = 0.00013070, v(0) = 0.07810302$ . Это движение изображено на фиг. 4. Вычисления для этого решения матрицы монодромии показывают, что на этом решение ее след составляет 0.03202327, и поэтому выполнены необходимые условия устойчивости.

Пунктирная кривая, изображенная желтым, на первый взгляд представляет собой остатки “разрушенного тора”. Однако увеличение картины позволяет установить, что за каждым пунктирным штрихом стоит “остров регулярности”, продольные размеры которого существенно превосходят поперечные размеры. Применение к ним изложенного метода за 14 итераций позволяет с точностью  $10^{-9}$  выявить это  $60\pi$  периодическое решение  $A_{IV}$ : оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = -0.00074051, v(0) = 1.35920192$ . Это движение изображено на фиг. 5. Вычисления для этого решения матрицы монодромии показывают, что на этом решение ее след составляет  $-1.99980036$ , и поэтому выполнены необходимые условия устойчивости.

**Замечание 1.** Представляет интерес ответ на вопрос, принадлежит ли найденное решение хотя бы одному из классов периодических решений, найденных недавно в [11].



Фиг. 2. Колебание  $A_I$ . Период  $2\pi$ . Начальные условия:  $(\delta(0), v(0)) = (0.0000002735, 0.6094296495)$ .



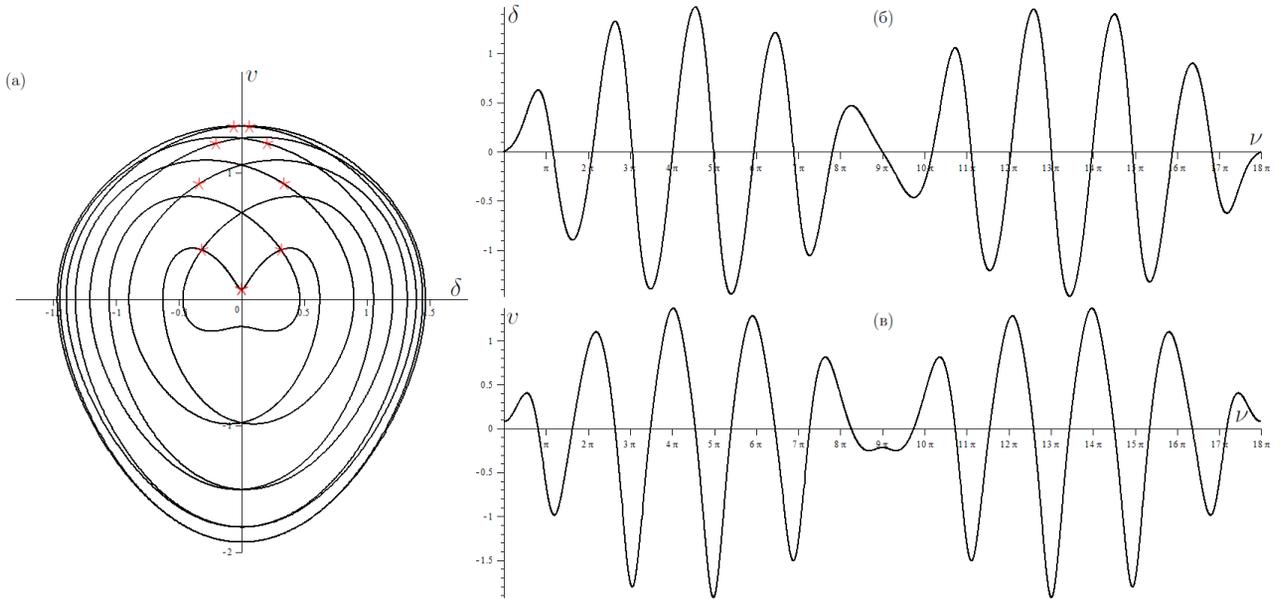
Фиг. 3. Колебание  $A_{II}$ . Период  $8\pi$ . Начальные условия:  $(\delta(0), v(0)) = (-0.00001348, 1.27508013)$ .

**Область В.** Обратим теперь внимание на область В. Островам из этой области отвечают вращения, на которых скорости являются положительными периодическими функциями.

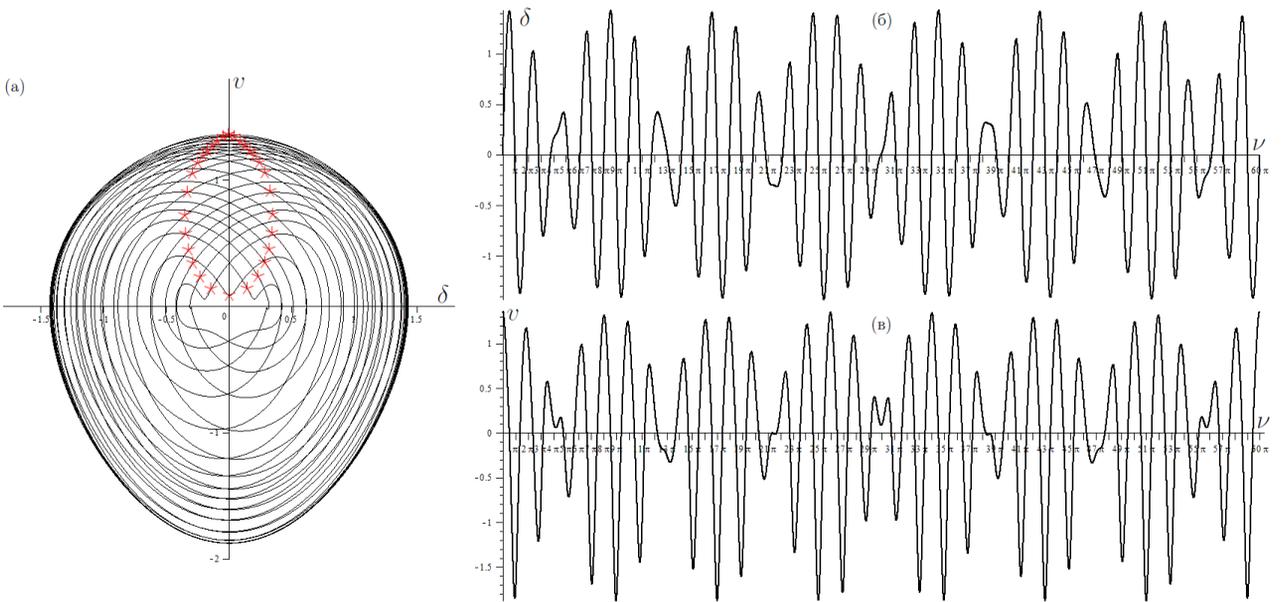
Так, острову, изображенному красным на фиг. 1в, отвечает вращение  $B_I$  с  $2\pi$  периодическим изменением скорости. Применяя изложенный выше метод, за 13 итераций удалось с точностью  $10^{-9}$  выявить это решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = 0.00007554$ ,  $v(0) = 3.06266105$ .

Рыжим островам (фиг. 1в) отвечает вращение  $B_{II}$  с  $6\pi$  периодическим изменением скорости. Применяя изложенный выше метод, за 16 итераций удалось с точностью  $10^{-9}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = 0.00130513$ ,  $v(0) = 3.28182441$ .

Островам, изображенным синим (фиг. 1в), отвечает вращение  $B_{III}$  с  $10\pi$  периодическим изменением скорости. Применяя изложенный выше метод, за 15 итераций удалось с точностью  $10^{-9}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = 0.00471541$ ,  $v(0) = 3.30139051$ .



Фиг. 4. Колебание  $A_{III}$ . Период  $18\pi$ . Начальные условия:  $(\delta(0), v(0)) = (-0.00074051, 1.35920192)$ .



Фиг. 5. Колебание  $A_{IV}$ . Период  $60\pi$ . Начальные условия:  $(\delta(0), v(0)) = (0.00013070, 0.07810302)$ .

Голубым островам (фиг. 1в) отвечает вращение  $B_{IV}$  с  $22\pi$  периодическим изменением скорости. Применяя изложенный выше метод, за 14 итераций удалось с точностью  $10^{-9}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = -0.00265124, v(0) = 3.69945572$ .

Наконец, желтому острову (фиг. 1в) отвечает вращение  $B_V$  с  $2\pi$  периодическим изменением скорости. Применяя изложенный выше метод, за 16 итераций удалось с точностью  $10^{-9}$  выявить это периодическое решение: оно отвечает начальным условиям  $\delta(0) = 0.00024514, v(0) = 3.60198732$ .



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В.* О либрации спутника // Сборник "Искусственные спутники Земли". 1959. № 3. М.: АН СССР. С. 13–31.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. *Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжеский А. П.* Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // Космические исследования. 1964. Т. 2. № 5. С. 657–666.
4. *Торжеский А. П.* Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1964. Т. 2. № 5. С. 667–678.
5. *Zlatoustov V. A., Okhotsimsky D. E., Sarychev V. A., Torzhesky A. P.* Investigation of a Satellite Oscillations in the Plane of an Elliptic Orbit // The Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich, Germany. 1964. P. 436–439.
6. *Burov A. A., Nikonov V. I.* On the nonlinear Meissner equation // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2019. V. 110. P. 26–32.
7. *Burov A. A., Nikonov V. I.* On the motion of the pendulum in an alternating, sawtooth force field // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2020. V. 30. Art No. 2050135.
8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974.
9. *Beletsky V. V.* Regulare und Chaotische Bewegung Starrer Korper, Teubner Studienbucher Mechanik, B. G. Teubner, Stuttgart. 1995.
10. *Буров А. А.* Неинтегрируемость уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1984. № 1. С. 71–73.
11. *Koh D., Flashner H.* Global Analysis of Gravity Gradient Satellite's Pitch Motion in an Elliptic Orbit // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2015. V. 10. № 6. Art No. 061020.
12. *Baker R. M. L.* Librations on a Slightly Eccentric Orbit // ARS Journal. 1960. V. 30. № 1. P. 124–126.
13. *Schechter H. B.* Dumbbell Librations in Elliptic Orbits // AIAA Journal. 1964. V. 2. № 6. P. 1000–1003.
14. *Vinh, Nguyen X.* Sur les Solutions Periodiques du Mouvement Plan de Libration des Satellites et des Planetes // Celestial Mechanics. 1973. V. 8. № 3. P. 371–403.
15. *Mawhin J.* On a differential equation for the periodic motions of a satellite around its center of mass // Асимптотические методы в задачах математической физики. Киев: Издательство Института математики. 1988. С. 150–157.
16. *Bruno A. D., Varin V. P.* The Limit Problems for the Equation of Oscillations of a Satellite // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1997. V. 67. № 1. P. 1–40.
17. *Bruno A. D., Varin V. P.* Singularities of Oscillations of a Satellite on Highly Eccentric Elliptic Orbits // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1997. V. 30. № 4. P. 2541–2546.
18. *Брюно А. Д., Петрович В. Ю.* Вычисление периодических колебаний спутника // Математическое моделирование. 1997. Т. 9. № 6. С. 82–94.
19. *Bruno A. D., Varin V. P.* Generalized Periodic Solutions to the Equation of Oscillations of a Satellite // ZAMM. 1999. V. 79. № Suppl. 2. P. 283–284.
20. *Varin V. P.* Degeneracies of Periodic Solutions to the Beletsky Equation // Regular and Chaotic Dynamics. 2000. V. 5. № 3. P. 313–328.
21. *Bruno A. D., Varin V. P.* Classes of families of generalized periodic solutions to the Beletsky equation // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2004. V. 88. P. 325–341.
22. *Nuñez D., Torres P. J.* Stable odd solutions of some periodic equations modeling satellite motion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 279. Issue 2. P. 700–709.

23. *Cabada A., Cid J. A.* On a class of singular Sturm–Liouville periodic boundary value problems // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2011. Vol. 12. Issue 4. P. 2378–2384.
24. *Брюно А. Д.* Семейства периодических решений уравнения Белецкого // *Космические исследования*. 2002. Т. 40. № 3. С. 295–316.
25. *Косенко И. И.* Регуляризация предельной задачи о колебаниях спутника на кеплеровой орбите с учетом сил светового давления // *Космические исследования*. 2002. Т. 40. № 6. С. 626–632.
26. *Косенко И. И.* Применение теории степени Лере–Шаудера для аппроксимации колебаний спутника на эллиптической орбите // *Докл. АН*. 2005. Т. 404. № 5. С. 625–627.
27. *Косенко И. И.* Топологическая степень и аппроксимация решений нерегулярных задач механики. Колебания спутника на эллиптической орбите // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2006. Т. 16. С. 68–95.
28. *Черноусько Ф. Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1963. Т. 3. Вып. 3. С. 528–538.
29. *Zlatoustov V. A., Markeev A. P.* Stability of Planar Oscillations of a Satellite in an Elliptic Orbit // *Celestial Mechanics*. 1973. V. 7. № 1. P. 31–45.
30. *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А.* Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космические исследования*. 1977. Т. 15. № 6. С. 809–834.
31. *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А.* Периодические вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космические исследования*. 1979. Т. 17. № 2. С. 190–207.
32. *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А.* Несимметричные периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космические исследования*. 1980. Т. 18. № 1. С. 3–10.
33. *Садов С. Ю.* Нормальная форма уравнения колебаний спутника в сингулярном случае // *Матем. заметки*. 1995. Т. 58. Вып. 5. С. 785–789.
34. *Sadov S.* Lissajous Solutions of the Satellite Oscillation Equation: Stability and Bifurcations via Higher Order Averaging // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 1999. V. 2. P. 96–101.
35. *Садов С. Ю.* Об устойчивости резонансного вращения спутника относительно центра масс в плоскости орбиты // *Космические исследования*. 2006. Т. 44. № 2. С. 170–181.
36. *Садов С. Ю.* Усреднение уравнения движения спутника относительно центра масс в вырожденных случаях. I. Колебания в абсолютной системе координат // *Космические исследования*. 2008. Т. 46. 2. С. 174–182.
37. *Маркеев А. П.* Об устойчивости колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Доклады академии наук*. 2007. Т. 413. № 3. С. 340–344.
38. *Маркеев А. П.* К задаче о плоских периодических вращениях спутника на эллиптической орбите // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2008. № 3. С. 102–115.
39. *Koch B.-P., Bruhn B.* Chaotic and Periodic Motions of Satellites in Elliptic Orbits // *Zeitschrift fur Naturforschung A*. 1989. V. 44. P. 1155–1162.
40. *Maciejewski A. J.* Non-Integrability of the Planar Oscillations of a Satellite // *Acta Astronomica*. 1995. V. 45. P. 327–344.
41. *Teofilatto P., Graziani F.* On Librational Motion of Spacecraft // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1996. V. 7. P. 1721–1744.
42. *Kirchgraber U., Manz U., Stoffer D.* Rigorous Proof of Chaotic Behaviour in a Dumbbell Satellite Model // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. 2000. V. 251. № 2. P. 897–911.
43. *Tong X., Rimrott F.* Numerical Studies on Chaotic Planar Motion of Satellite in an Elliptic Orbit // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1991. V. 1. № 2. P. 179–186.
44. *Gkolias I., Celletti A., Efthymiopoulos Ch., Pucacco G.* The theory of secondary resonances in the spin–orbit problem // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. V. 459. P. 1327–1339.

45. Мельников А. В. Ориентация фигур малых спутников планет при хаотическом вращении // *Астрономический вестник*. 2020. Т. 54. № 5. С. 458–467.
46. Eapen R. T., Majji M., Alfriend K. T. Attitude dynamics of a rigid body in Keplerian motion // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2021. V. 133. Art No. 2.

## A SATELLITE IN AN ELLIPTICAL ORBIT: ON THE NUMERICAL DETECTION OF PERIODIC MOTIONS AND THE STUDY OF THEIR STABILITY

A. A. Burov\*, V. I. Nikonov\*\*

*119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control RAS, Russia*

*\*e-mail: jtm@narod.ru,*

*\*\*e-mail: nikon\_v@list.ru*

Received: 09.10.2023

Revised: 09.10.2023

Accepted: 31.05.2024

**Abstract.** The equations of plane oscillations of a satellite in an elliptical orbit are considered. For the numerical detection of periodic solutions, a combination of the Poincaré cross-section method and the previously proposed approach based on an analogue of the principle of contracting maps is used. A number of classes of periodic solutions have been numerically identified and the necessary conditions for their stability have been investigated. Special attention is paid to these movements, since in general they are difficult to study analytically.

**Keywords:** flat motions of a satellite in an elliptical orbit, Poincaré mapping, invariant tori, chaotic dynamics, Beletsky equation, periodic motions, necessary stability conditions, Lyapunov—Floquet theory.