

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГорова–ПЕТРОВСКОГО–ПИСКУНОВА

© 2024 г. С. И. Безродных^{1,**}, С. В. Пикулин^{1,*}

¹ 119333 Москва, ГСП–1, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: spikulin@gmail.com

**e-mail: sbezrodnikh@mail.ru

Поступила в редакцию 15.05.2024 г.

Переработанный вариант 13.06.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассматривается вопрос об эффективном решении основных начально-краевых задач для пространственно одномерных нелинейных уравнений параболического типа, описывающих реакционно-диффузионные процессы. К таким уравнениям относятся уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова и Бюргерса. Для этих задач в работе предложен численно-аналитический метод, основанный на неявной дискретизации дифференциального оператора в сочетании с явной экстраполяцией Адамса–Бэшфорта для нелинейного члена уравнения. При этом для решения последовательности возникающих линейных задач разработан новый эффективный алгоритм, опирающийся на аналитические представления с использованием явного вида фундаментальной системы решений. Эффективность разработанного метода и его преимущества по сравнению с некоторыми традиционными алгоритмами продемонстрирована для ряда сложных модельных примеров. Библ. 70. Фиг. 13.

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения типа реакция–диффузия–адвекция, уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова, уравнение Бюргерса, сингулярное возмущение, эффективные численно-аналитические методы.

DOI: 10.31857/S0044466924110027, EDN: KGZLTS

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе предложен численно-аналитический метод решения нелинейных параболических задач для уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (1.1)$$

позволяющий эффективно находить решения достаточно широкого класса задач для таких уравнений. Отметим, что к виду (1.1) относятся, в том числе, уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (см. [1]–[3])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u(x)) \quad (1.2)$$

и уравнение Бюргерса (см. [4], [5])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Вычислительные методы решения нелинейных уравнений, как правило, опираются на сведение к последовательности линейных задач (см., например, [6]–[8]). Поэтому разработка соответствующих численных процедур должна включать подходящий для рассматриваемой задачи алгоритм аппроксимации нелинейного дифференциального оператора, а также, что весьма важно, эффективный метод решения получаемых линейных задач.

В настоящей работе применяется сочетание явной схемы для аппроксимации нелинейного члена $F(x, u, \partial_x u)$ уравнения (1.1) и неявной схемы приближения производных; здесь $\partial_x u$ и $\partial_{xx}^2 u$ означают частные

производные по координате x . Новизна предлагаемого численного алгоритма для уравнения (1.1) заключается в разработанном методе решения возникающих линейных задач. Такие задачи в настоящей работе решаются в два этапа. На первом из них строятся частные решения линейного уравнения отдельно на каждом из промежутков дискретизации по пространственной переменной. На втором этапе с их помощью строится решение неоднородной краевой задачи на всем отрезке интегрирования. Указанная процедура использует явный вид фундаментальной системы решений соответствующего линейного уравнения и имеет алгоритмическую сложность $O(N)$, где N — число отрезков пространственной дискретизации. Данный алгоритм описан в разд. 2. Аналогичный вычислительный алгоритм был предложен авторами ранее (см. [9]) для решения периодической начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса (1.3). Отметим также, что близкий подход использовался в работе [10] при решении сингулярно возмущенной краевой задачи, возникающей в теории полупроводниковых приборов (см. [11]).

Предложенный метод для уравнения (1.1) протестирован на задачах для уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (1.2), точнее, для его частного случая при

$$F(u) = u(1 - u^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad (1.4)$$

который называют обобщенным уравнением Фишера (см., например, [12, 13]), а также для уравнения Бюргерса (1.3), см. разд. 3. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали ряд преимуществ предложенного метода по сравнению с распространенными разностными методами. Подчеркнем, что применение разработанного в разд. 2 алгоритма решения линейных задач не ограничивается только рассмотренными конкретными примерами модельных задач для уравнений (1.2), (1.3). Можно ожидать, что алгоритм будет демонстрировать эффективность для линейных задач, возникающих при итерационном решении широкого круга нелинейных уравнений.

Уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (1.2) и Бюргерса (1.3) выбраны в качестве примеров в связи с их прикладной значимостью, а также с тем, что они весьма популярны при тестировании различных вычислительных алгоритмов (см. далее разд. 1.1).

Предложенный метод для уравнения (1.1) сохраняет эффективность и в тех случаях, когда соответствующая начально-краевая задача является сингулярно возмущенной. Отметим, что разработке численных методов для решения сингулярно возмущенных задач посвящены работы многих известных специалистов (см. [14]–[17]), и это направление по-прежнему сохраняет актуальность (см. [10], [18], [19]).

1.1. Уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова и Бюргерса

Уравнение (1.2) было введено в работе [1] в связи с задачей о динамике распространения доминантного гена в пространственно распределенной популяции. Естественным предположением при этом является то, что искомая функция $u(x, t)$ принимает значения между нулем и единицей, а нелинейная функция $F(u)$ в правой части уравнения (1.2) удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(u) > 0, \quad u \in (0, 1), \quad f_0 := F'_u(0) > 0. \quad (1.5)$$

При $F(u) = u(1 - u)$ уравнение (1.2) было рассмотрено и в работе [2] в связи с той же проблематикой, что и в [1]. Отметим, что в этом случае правая часть рассматриваемого уравнения имеет вид (1.4) при $\alpha = 1$.

Если выполнены условия (1.5), то, как известно, см. [1], уравнение (1.2) обладает семейством автомодельных решений типа бегущей волны

$$u(x, t) = \zeta(\eta(x, t)), \quad \eta(x, t) := x - \omega t, \quad \omega = \text{const} \geq \omega_0 := 2\sqrt{\lambda f_0}, \quad (1.6)$$

где параметр ω задает скорость ее распространения, а функция $\zeta(\eta)$ автомодельной переменной $\eta \in \mathbb{R}$ определяет форму профиля. Отметим, что семейство (1.6) содержит единственное устойчивое к возмущениям начальных данных решение, отвечающее минимальному значению параметра скорости $\omega = \omega_0$.

Уравнения и системы уравнений типа (1.2) нашли применение при изучении широкого класса автоволновых процессов в активных средах, в том числе, в моделях теории горения и взрыва (см. [3], [20], [21]), теории атомных реакторов (см. [22]), математической биологии (см. [23]–[25]), нейрофизиологии (см. [26]–[29]), кардиологии (см. [30]–[33]), химической кинетики (см. [34, 35]), теории тепломассопереноса (см. [36, 37]), материаловедения (см. [38]). Исследованию начально-краевых задач для уравнений типа (1.2) и разработке методов их решения, в том числе, построению автомодельных решений, посвящены многочисленные работы (см., например, монографии [3, 21, 35, 39] и статьи [13], [40]–[57]).

Уравнение Бюргерса (1.3) в гидродинамике служит модельным уравнением при изучении турбулентности и ударных волн (см. [7], [58], [59]), а также является основой для моделирования нелинейных акустических волн

(см. [60], [61]) и радиоволн (см. [62]). Замечательным свойством уравнения (1.3) служит то, что при помощи так называемой подстановки Коула–Хопфа (см. [5], [58], [63]) оно приводится к линейному уравнению теплопроводности, что, в том числе, позволяет получить большой запас решений в явном аналитическом виде для тестирования различных численных методов. В частности, в работе [9] построено периодическое по пространственной переменной явное решение уравнения (1.3), которое используется в разд. 3.2 настоящей статьи для иллюстрации разработанного численно-аналитического метода.

1.2. Постановка задачи

Будем рассматривать начально-краевые задачи в прямоугольнике $[0, L] \times [0, T]$ для квазилинейного параболического уравнения, заданного нелинейным оператором $\Xi[u](x, t)$, следующего вида:

$$\begin{aligned} \Xi[u](x, t) &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, & \lambda > 0, & \quad \sigma \in \mathbb{R}, \\ x &\in [0, L], & t &\in [0, T], & L, T > 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $F(x, u, w)$ — некоторая заданная непрерывная функция. Для искомой функции $u(x, t)$ предполагается выполнение начального условия

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.8)$$

и одного из следующих трех граничных условий:

(i) условия Дирихле

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \varphi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.9)$$

(ii) смешанные краевые условия

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \psi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.10)$$

(iii) условия периодичности

$$u(0, t) = u(L, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t), \quad t \in (0, T). \quad (1.11)$$

В дальнейшем, рассматривая начально-краевые задачи (1.7)–(1.11), будем считать, что при заданной функции $F(x, u, w)$, начальном условии (1.8) и одном из условий (1.9)–(1.11) решение этой задачи существует и единственно.

1.3. Общая схема вычислительного алгоритма

Численное решение нелинейной эволюционной задачи (1.7), (1.8) с краевыми условиями одного из типов (1.9)–(1.11) проведем на основе известной [42] трехслойной схемы приближения оператора Ξ , стоящего в левой части уравнения (1.7). Данная схема относится к классу явно- неявных схем аппроксимации (см. [42], [43], [64]), т.е. часть членов уравнения приближаются по явной схеме, а другая часть — по неявной. Рассмотрим эту схему подробнее.

Зададим равномерную дискретизацию временного отрезка $[0, T]$ с шагом $\tau = T/K$, $K \in \mathbb{N}$ и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\approx u(t_n, x), & x &\in [0, L], & t_n &= n\tau, & n &= 0, \dots, K, \\ F_n(x) &:= F\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $u_n(x)$ — искомое приближенное решение задачи (1.7)–(1.11) в момент времени $t = t_n$, причем функция $u_0(x)$ задана начальным условием (1.8). Будем вычислять приближения $u_n(x)$ последовательно при $n = 1, \dots, K$. Для получения функции $u_1(x)$ из $u_0(x)$ можно воспользоваться любой двухслойной вычислительной схемой, например, явно-неявной схемой на основе приближения Кранка–Николсон (см. [6], [7], [65]). В настоящей работе при сопоставлении численных результатов с явным решением в разд. 3 функция $u_1(x)$ и ее производные по x задаются в качестве известных величин наряду с начальными данными (1.8).

Предполагая, что приближенные значения $u(x, t)$ известны на первых n слоях, т. е. заданы функции

$$u_0(x), \quad u_1(x), \quad \dots, \quad u_n(x),$$

найдем приближение $u_{n+1}(x)$ на $(n+1)$ -м слое. Для этого будем использовать следующую аппроксимацию нелинейного дифференциального оператора $\Xi[u]$ уравнения (1.7), центрированную в точке $t = (t_n + \tau/2)$:

$$\begin{aligned} \Xi[u] &= \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \\ &\approx \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} + \frac{9}{16} \left(\sigma \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\sigma \frac{\partial u_n}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{16} \left(\sigma \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} \right) - \frac{3}{2} F_n(x) + \frac{1}{2} F_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Применяя к приближенному равенству (1.13) обозначение

$$\Omega[u](x, t) := \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.14)$$

и приравнявая правую часть (1.13) к нулю, получаем следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $u_{n+1}(x)$:

$$\frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} + \frac{9}{16} \Omega[u_{n+1}](x) + \frac{3}{8} \Omega[u_n](x) + \frac{1}{16} \Omega[u_{n-1}](x) - \frac{3}{2} F_n(x) + \frac{1}{2} F_{n-1}(x) = 0. \quad (1.15)$$

Аппроксимация (1.13) получается следующим образом. Приближим частную производную по t в левой части уравнения (1.7) соответствующей разностной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau}. \quad (1.16)$$

Следуя работе [42], аппроксимируем линейные слагаемые в левой части уравнения (1.7), содержащие производные по пространственной переменной, по неявной модифицированной схеме Кранка–Николсон (см. [65], [66], [42]):

$$\Omega[u](x, t) \approx \frac{9}{16} \Omega[u_{n+1}](x) + \frac{3}{8} \Omega[u_n](x) + \frac{1}{16} \Omega[u_{n-1}](x), \quad (1.17)$$

а для нелинейного члена применим явную экстраполяцию Адамса–Бэшфорта (см. [7], [8], [67], [68]):

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \frac{3}{2} F\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} F\left(x, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right) \equiv \frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x). \quad (1.18)$$

Подставляя приближения (1.16)–(1.18) в определение (1.7) оператора $\Xi[u]$, с учетом введенных обозначений (1.12), (1.14) получаем аппроксимацию (1.13) и уравнение (1.15).

Преобразуем уравнение (1.15) так, чтобы выделить в нем искомую функцию $u_{n+1}(x)$. Умножая обе части уравнения (1.15) на τ , запишем его в виде

$$\frac{9}{16} \tau \Omega[u_{n+1}](x) + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad (1.19)$$

где

$$g_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{3}{8} \tau \Omega[u_n](x) - \frac{1}{16} \tau \Omega[u_{n-1}](x) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \quad (1.20)$$

Используя уравнения вида (1.19), отвечающие индексам n , $n-1$, перепишем выражение (1.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= u_n(x) + \frac{2}{3} (u_n(x) - g_n(x)) + \frac{1}{9} (u_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right) = \\ &= \frac{5}{3} u_n(x) + \frac{1}{9} u_{n-1}(x) - \frac{2}{3} g_n(x) - \frac{1}{9} g_{n-1}(x) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отметим, что правая часть (1.20) уравнения (1.19), зависит только от известных функций, уже вычисленных на предыдущих шагах алгоритма. Кроме того, форма (1.21) представления $g_{n+1}(x)$ исключает явную зависимость этой правой части от вторых производных функций $u_j(x)$, $j = 0, \dots, n - 1$, хотя их первые производные могут входить в выражения (1.12) для нелинейных членов $F_n(x)$, $F_{n-1}(x)$.

Уравнение (1.19), (1.21) дополняется краевыми условиями одного из типов

(i')

$$u_{n+1}(0) = \varphi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L) = \varphi_1(t_{n+1}), \quad (1.22)$$

(ii')

$$u_{n+1}(0) = \varphi_0(t_{n+1}), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(L) = \psi_1(t_{n+1}), \quad (1.23)$$

(iii')

$$u_{n+1}(0) = u_{n+1}(L), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(0) = \frac{du_{n+1}}{dx}(L) \quad (1.24)$$

в соответствии с условиями (1.9), (1.10) либо (1.11) исходной задачи.

Решая задачу (1.19), (1.21)–(1.24), получаем приближенное решение $u_{n+1}(x)$ на $(n + 1)$ -м слое по времени и завершаем этим очередную итерацию алгоритма. Разд. 2 настоящей работы посвящен описанию нового численно-аналитического метода, позволяющего с высокой эффективностью и точностью получить решение указанной задачи (1.19), (1.21)–(1.24).

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Основу построения решения исходной нелинейной начально-краевой задачи (1.7), (1.8) с краевым условием одного из типов (1.9)–(1.11) составляет алгоритм решения задачи для уравнения (1.19), (1.21) с соответствующим краевым условием (1.22)–(1.24). Для того чтобы изложить этот алгоритм, переформулируем уравнение (1.19) в следующем более общем виде:

$$\mathcal{L}[y](x) \equiv k_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + k_1 \frac{dy}{dx} + k_0 y(x) = g(x), \quad k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, L], \quad (2.1)$$

$$k_2 < 0 < k_0, \quad (2.2)$$

где $g(x)$ — кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке $[0, L]$ и имеющая на нем только разрывы первого рода. Также краевые условия (1.22)–(1.24) запишем соответственно в виде

$$y(0) = \Phi_0, \quad y(L) = \Phi_1, \quad (2.3)$$

$$y(0) = \Phi_0, \quad \frac{dy}{dx}(L) = \Psi_1, \quad (2.4)$$

$$y(0) = y(L), \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(L). \quad (2.5)$$

Решение $y(x)$ уравнения (2.1) с разрывной правой частью $g(x)$ ищется в классе $C^1[0, L]$ и понимается в смысле выполнения интегрального уравнения, эквивалентного (2.1) (см. [69]).

Условие (2.2) гарантирует, что корни характеристического уравнения $k_2 \varepsilon^2 + k_1 \varepsilon + k_0 = 0$, которые мы обозначим через μ и ρ , являются вещественными и имеют противоположные знаки:

$$\mu := \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_0k_2}}{2k_2} < 0 < \rho := \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_0k_2}}{-2k_2}, \quad (2.6)$$

фундаментальная система вещественнозначных решений уравнения (2.1) может быть выбрана в виде пары экспонент

$$y_1(x) = e^{\mu x}, \quad y_2(x) = e^{\rho x}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.1) с нулевой правой частью и однородными краевыми условиями любого из типов (2.3)–(2.5), т.е. при $g(x) \equiv 0$ и $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$ либо $\Phi_0 = \Psi_1 = 0$, имеет только тождественно нулевое решение, поскольку

нетривиальная линейная комбинация функций (2.7) не может удовлетворять однородным краевым условиям. Из этого следует, что соответствующая краевая задача общего вида для уравнения (2.1) имеет единственное решение на отрезке $[0, L]$ при любых значениях параметров $L, \Phi_0, \Phi_1, \Psi_1$.

В разд. 2.1, 2.2 мы подробно рассмотрим алгоритм решения первой краевой задачи (2.1), (2.3). Смешанная краевая задача (2.1), (2.4) и периодическая задача (2.1), (2.5) рассматриваются аналогичным образом. В разд. 2.3, 2.4 мы, опуская подробные выкладки, приведем формулы, необходимые для получения решений этих задач. В разд. 2.5 описан ключевой этап построения решения линейной задачи — получение частных решений на отрезках разбиения промежутка $[0, L]$.

2.1. Представление решения первой краевой задачи

Рассмотрим пространственную сетку на отрезке $[0, L]$, вообще говоря, неравномерную, с узлами

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = L, \quad (2.8)$$

предполагая, что правая часть $g(x)$ уравнения (2.1) непрерывна на каждом из интервалов (ξ_{k-1}, ξ_k) , $k = 1, \dots, N$, и, возможно, имеет разрывы первого рода в узлах ξ_k разбиения (2.8).

Предположим также, что на каждом из отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ найдено частное решение $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.1), т.е.

$$\mathcal{L}[\tilde{y}_k](x) = g(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \quad (2.9)$$

Для того, чтобы построить решение задачи (2.1), (2.3), необходимо устранить разрывы первого рода кусочно гладкой класса C^1 функции

$$\tilde{y}(x) := \tilde{y}_k(x), \quad x \in (\xi_{k-1}, \xi_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

возникающие в узлах разбиения (2.8) и выражаемые разностями односторонних пределов функций $\tilde{y}_k(x)$ и их производных, для которых мы введем следующие обозначения:

$$p_k^{(m)} := \lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^m \tilde{y}_{k+1}}{dx^m}(x) - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^m \tilde{y}_k}{dx^m}(x), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1. \quad (2.11)$$

Положим также по определению

$$p_0^{(0)} := \tilde{y}_1(0) - \Phi_0, \quad p_N^{(0)} := \Phi_1 - \tilde{y}_N(L), \quad p_0^{(1)} = p_N^{(1)} = 0. \quad (2.12)$$

Следующее утверждение дает представление для функции $y(x)$ на отрезке $[0, L]$.

Теорема 1. Рассмотрим задачу (2.1), (2.3) с условием на коэффициенты (2.2), где правая часть уравнения $g(x)$ является кусочно непрерывной функцией. Предположим, что заданы частные решения уравнения (2.1) на отрезках $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, N$, разбиения (2.8), в виде (2.10) как ограничения некоторой кусочно гладкой на отрезке $[0, L]$ функции $\tilde{y}(x)$, имеющей разрывы первого рода в узлах ξ_k , $k = 1, \dots, N-1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует функция—строка

$$\mathbf{g}(x, \xi) \equiv (G_0(x, \xi), G_1(x, \xi)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \in [0, L],$$

компоненты которой удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0-} G_m(x, \xi) = 0, \quad \xi \in [0, L], \quad m = 0, 1, \quad (2.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow L+} G_m(x, \xi) = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}[G_m](x, \xi) = 0, \quad x \in (-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty), \quad (2.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{d^l G_m}{dx^l}(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{d^l G_m}{dx^l}(x, \xi) = \begin{cases} -1, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases}, \quad m, l = 0, 1. \quad (2.16)$$

2. Решение $y(x)$ задачи (2.1), (2.3) допускает представление

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^1 p_j^{(m)} G_m(x, \xi_j) \equiv \tilde{y}(x) + \sum_{j=0}^N \mathbf{g}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad x \in [0, L], \quad (2.17)$$

где коэффициенты $p_j^{(m)}$, $j = 0, \dots, N$, $m = 0, 1$, заданы в виде (2.11), (2.12); знак $\times$ здесь и далее означает матричное умножение.

Доказательство. Построим функции $G_0(x, \xi)$, $G_1(x, \xi)$, удовлетворяющие условиям (2.15)–(2.16), следуя книге [70, гл. I, § 7]. Составим из функций фундаментальной системы решений (2.7) и их производных матрицу

$$\mathbf{D}(x) := \begin{pmatrix} e^{\mu x} & e^{\rho x} \\ \mu e^{\mu x} & \rho e^{\rho x} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \times \text{diag}(e^{\mu x}, e^{\rho x}), \quad \mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \rho \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где diag означает диагональную матрицу с указанными элементами на главной диагонали.

Пользуясь тем, что определитель Вронского $|\mathbf{D}(x)|$ отличен от нуля, обратим матрицу (2.18) и запишем результат, заменяя независимую переменную x на ξ :

$$\mathbf{D}^{-1}(\xi) = \text{diag}(e^{-\mu \xi}, e^{-\rho \xi}) \times \mathbf{U}^{-1},$$

где

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\rho - \mu} \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Тогда произведение

$$\mathbf{G}(x, \xi) := \mathbf{D}(x) \times \mathbf{D}^{-1}(\xi) = \mathbf{U} \times \text{diag}(e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{U}^{-1} \quad (2.20)$$

обращается в единичную матрицу $\mathbf{I}$ при $x = \xi$, т. е.

$$\mathbf{G}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = \mathbf{I}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Обозначим через $\mathbf{s}(x, \xi)$ верхнюю строку матрицы (2.20):

$$\mathbf{s}(x, \xi) \equiv (S_0(x, \xi), S_1(x, \xi)) = (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{U}^{-1}, \quad (2.22)$$

компоненты которой, т.е. функции

$$S_0(x, \xi) = \frac{\rho e^{\mu(x-\xi)} - \mu e^{\rho(x-\xi)}}{\rho - \mu}, \quad S_1(x, \xi) = \frac{e^{\rho(x-\xi)} - e^{\mu(x-\xi)}}{\rho - \mu}, \quad (2.23)$$

являются линейными комбинациями элементов системы (2.7) и, следовательно, решениями линейного уравнения, т. е.

$$\mathcal{L}[S_m](x, \xi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1. \quad (2.24)$$

Введем в рассмотрение функцию-строку

$$\widehat{\mathbf{s}}(x, \xi) \equiv (\widehat{S}_0(x, \xi), \widehat{S}_1(x, \xi)) := \theta(\xi - x) \mathbf{s}(x, \xi) = \begin{cases} \mathbf{s}(x, \xi), & x \leq \xi, \\ (0, 0), & x > \xi, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Из определения (2.25) вытекает, что функции $\widehat{S}_m(x, \xi)$, $m = 0, 1$, удовлетворяют однородному краевому условию

$$\widehat{S}_m(L, \xi) = 0, \quad \xi \in (0, L), \quad m = 0, 1, \quad (2.26)$$

а также, в силу (2.24), — линейному уравнению на каждом из промежутков, разделяемых точкой ξ :

$$\mathcal{L}[\widehat{S}_m](x, \xi) = 0, \quad x \in (-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty), \quad m = 0, 1. \quad (2.27)$$

По построению (2.18) матрицы $\mathbf{D}(x)$ и согласно определению (2.20) нижняя строка матрицы $\mathbf{G}(x, \xi)$ является производной по x ее верхней строки $\mathbf{s}(x, \xi)$. Из этого факта и из соотношения (2.21) следуют равенства

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{d^l \widehat{S}_m}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{d^l \widehat{S}_m}{dx^l} = \begin{cases} -1, & l = m, \\ 0, & l \neq m, \end{cases} \quad m, l = 0, 1. \quad (2.28)$$

Свойства (2.26)–(2.28) отвечают требованиям (2.14)–(2.16) для компонент $G_0(x, \xi)$, $G_1(x, \xi)$ искомой функции–строки $\mathbf{g}(x, \xi)$. Для того чтобы обеспечить также выполнение краевых условий (2.13) при $x = 0$ и завершить построение строки $\mathbf{g}(x, \xi)$, рассмотрим функцию

$$h(x) := S_1(x, L), \quad (2.29)$$

обладающую свойствами $\mathcal{L}[h](x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, в силу (2.24), $h(L) = 0$ в силу (2.21) и $h(0) \neq 0$. Введем в рассмотрение функции

$$\mathbf{v}(x, \xi) := -\frac{1}{h(0)} h(x) \mathbf{s}(0, \xi), \quad \xi \in [0, L], \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{w}(x, \xi) := \mathbf{s}(x, \xi) + \mathbf{v}(x, \xi), \quad (2.31)$$

и, с учетом определения (2.25), положим

$$\mathbf{g}(x, \xi) \equiv (G_0(x, \xi), G_1(x, \xi)) := \widehat{\mathbf{s}}(x, \xi) + \mathbf{v}(x, \xi) = \begin{cases} \mathbf{w}(x, \xi), & x \leq \xi, \\ \mathbf{v}(x, \xi), & x > \xi. \end{cases} \quad (2.32)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \mathbf{g}(x, \xi) = \mathbf{s}(0, \xi) - \frac{h(0)}{h(0)} \mathbf{s}(0, \xi) = (0, 0). \quad (2.33)$$

Из (2.33) и из (2.26)–(2.28) следует справедливость условий (2.13)–(2.16) для компонент $G_0(x, \xi)$, $G_1(x, \xi)$ функции–строки (2.32). Тем самым, искомая функция $\mathbf{g}(x, \xi)$ построена в виде (2.32), п. 1 теоремы 1 доказан.

Перейдем к обоснованию представления (2.17). Для этого обозначим через $Y(x)$ его правую часть, т.е.

$$Y(x) := \widetilde{y}(x) + \sum_{j=0}^N \mathbf{g}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad x \in [0, L], \quad (2.34)$$

и докажем, что (2.34) является решением задачи (2.1), (2.3).

Сначала покажем, что функция $Y(x)$ принадлежит классу $C^1[0, L]$. Достаточно проверить ее гладкость в узлах разбиения (2.8).

Для удобства изложения запишем свойство (2.16) в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi)}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi)}{dx^l} = -(\delta_0^l, \delta_1^l), \quad \xi \in [0, L], \quad l = 0, 1, \quad (2.35)$$

где δ_m^l — символ Кронекера.

Зафиксируем индекс $k \in \{1, \dots, N-1\}$, значение $l \in \{0, 1\}$ и вычислим разность односторонних пределов $Y(x)$ в точке ξ_k , пользуясь гладкостью функций $\mathbf{g}(x, \xi_j)$ при $x = \xi_k$, $j \neq k$, определением (2.11) и равенством (2.35) при $x = \xi_k$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l Y}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l Y}{dx^l} &= \lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l \widetilde{y}_{k+1}}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l \widetilde{y}_k}{dx^l} + \\ &+ \left[\lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi_k)}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi_k)}{dx^l} \right] \times \begin{pmatrix} p_k^{(0)} \\ p_k^{(1)} \end{pmatrix} = p_k^{(l)} - p_k^{(l)} = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, функция $Y(x)$ и ее производная имеют устранимые точки разрыва в узлах ξ_k разбиения (2.8), $k = 1, \dots, N-1$.

Во внутренних точках промежутков (ξ_{k-1}, ξ_k) , $k = 1, \dots, N$, функция (2.34) принадлежит классу C^2 и, более того, удовлетворяет уравнению (2.1), поэтому из равенства (2.36) следует, что $Y(x)$ является решением уравнения (2.1) на отрезке $[0, L]$ в классе $C^1[0, L]$.

Проверим, что функция (2.34) удовлетворяет краевым условиям (2.3). В силу свойств (2.13) и (2.16) при $l = 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \mathbf{g}(x, 0) = (0, 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \mathbf{g}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \mathbf{g}(x, 0) - \lim_{x \rightarrow 0-} \mathbf{g}(x, 0) = (-1, 0),$$

откуда по определению (2.34), пользуясь условием (2.13) и непрерывностью при $x = 0$ функций $g(x, \xi_k)$, $k = 1, \dots, N$, находим

$$\lim_{x \rightarrow 0+} Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \tilde{y}_1(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(x, \xi_0) \times \begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix} = \tilde{y}_1(0) - p_0^{(0)} = \tilde{y}_1(0) - (\tilde{y}_1(0) - \Phi_0) = \Phi_0,$$

таким образом, функция $Y(x)$ удовлетворяет первому из краевых условий (2.3), т. е. $Y(0) = \Phi_0$. Второе условие $Y(L) = \Phi_1$ проверяется аналогично. Следовательно, функция (2.34) является решением задачи (2.1), (2.3) и, в силу единственности такого решения, совпадает с $y(x)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Решение задачи (2.1), (2.3), удовлетворяющее однородным краевым условиям $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$, допускает следующее интегральное представление в виде свертки правой части $g(x)$ уравнения (2.1) и соответствующей функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$:

$$y(x) = \int_0^L \mathcal{G}(x, \xi) g(\xi) d\xi, \quad (2.37)$$

где $\mathcal{G}(x, \xi)$ отличается лишь умножением на числовую константу от функции $G_1(x, \xi)$ из теоремы 1, а именно,

$$\mathcal{G}(x, \xi) = -\frac{1}{k_2} G_1(x, \xi). \quad (2.38)$$

Замечание 2. Если правая часть $g(x)$ уравнения (2.1) является непрерывной функцией, то выражение в правой части формулы (2.17) принадлежит классу $C^2[0, L]$.

2.2. Коэффициенты представления для первой краевой задачи

Найдем в явном аналитическом виде разность $y(x) - \tilde{y}(x)$, представленную вторым слагаемым правой части представления (2.17). Для этого проведем вычисление функции—строки (2.32). Зафиксируем некоторое значение $\xi \in [0, L]$ и запишем функцию $h(x)$, определенную формулами (2.29) и (2.22), (2.19), следующим образом:

$$h(x) = \frac{1}{\rho - \mu} (e^{\mu(x-L)}, e^{\rho(x-L)}) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho - \mu} (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \begin{pmatrix} -e^{\mu(\xi-L)} \\ e^{\rho(\xi-L)} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Подставляя $h(x)$ в виде (2.39) и $s(0, \xi)$ в виде (2.22) при $x = 0$ в формулу (2.32), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, \xi) &= -\frac{1}{h(0)} h(x) \mathbf{s}(0, \xi) = \\ &= -\frac{1}{(\rho - \mu) h(0)} (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \begin{pmatrix} -e^{\mu(\xi-L)} \\ e^{\rho(\xi-L)} \end{pmatrix} \times (e^{-\mu\xi}, e^{-\rho\xi}) \times \mathbf{U}^{-1} = \\ &= (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{V}(\xi) \times \mathbf{U}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\xi) &:= -\frac{1}{(\rho - \mu) h(0)} \begin{pmatrix} -e^{\mu(\xi-L)} \\ e^{\rho(\xi-L)} \end{pmatrix} \times (e^{-\mu\xi}, e^{-\rho\xi}) = \\ &= \frac{1}{e^{-\mu L} - e^{-\rho L}} \begin{pmatrix} -e^{-\mu L} & -e^{\mu(\xi-L)-\rho\xi} \\ e^{\rho(\xi-L)-\mu\xi} & e^{-\rho L} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \begin{pmatrix} -1 & -e^{(\mu-\rho)\xi} \\ e^{(\mu-\rho)(L-\xi)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

имеет ранг 1, $\mathbf{U}^{-1}$ задано в виде (2.19).

Далее, из (2.31), (2.40), (2.22) получаем

$$\mathbf{w}(x, \xi) = \mathbf{s}(x, \xi) + \mathbf{v}(x, \xi) = (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{W}(\xi) \times \mathbf{U}^{-1}, \quad (2.42)$$

где с учетом (2.41) имеем

$$\mathbf{W}(\xi) = \mathbf{I} + \mathbf{V}(\xi) = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \begin{pmatrix} -e^{(\mu-\rho)L} & -e^{(\mu-\rho)\xi} \\ e^{(\mu-\rho)(L-\xi)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} := \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N, \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} a_j \\ c_j \end{pmatrix} := \mathbf{V}(\xi_j) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{V}(\xi_j) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{pmatrix} b_j \\ d_j \end{pmatrix} := \mathbf{W}(\xi_j) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{W}(\xi_j) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

тогда представление (2.17), записанное в форме

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \sum_{j=0}^N \mathbf{g}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

принимает с учетом формулы (2.32) и равенств (2.40), (2.42) и (2.45), (2.46) следующий вид на k -м промежутке разбиения (2.8):

$$\begin{aligned} y(x) - \tilde{y}(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{v}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{j=k}^N \mathbf{w}(x, \xi_k) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (e^{\mu(x-\xi_j)}, e^{\rho(x-\xi_j)}) \times \begin{pmatrix} a_j \\ c_j \end{pmatrix} + \sum_{j=k}^N (e^{\mu(x-\xi_j)}, e^{\rho(x-\xi_j)}) \times \begin{pmatrix} b_j \\ d_j \end{pmatrix}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Вводя обозначения

$$M_k := \sum_{j=0}^{k-1} a_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N b_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)}, \quad (2.49)$$

$$R_k := \sum_{j=0}^{k-1} c_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N d_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.50)$$

перепишем (2.48) в виде

$$y(x) - \tilde{y}(x) = M_k e^{\mu(x-\xi_{k-1})} + R_k e^{\rho(x-\xi_k)}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.51)$$

где коэффициенты M_k , R_k не зависят от x .

Отметим, что выполнено следующее равенство, получаемое вычитанием (2.45) из (2.46) с учетом (2.43):

$$\begin{pmatrix} b_j - a_j \\ d_j - c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.52)$$

Проверим, что справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$M_{k+1} = M_k e^{\mu(\xi_k-\xi_{k-1})} - m_k, \quad (2.53)$$

$$R_k = R_{k+1} e^{-\rho(\xi_{k+1}-\xi_k)} + r_k. \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (2.54)$$

В самом деле, с учетом (2.52) имеем

$$M_k e^{\mu(\xi_k-\xi_{k-1})} - m_k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N b_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)} \right) e^{\mu(\xi_k-\xi_{k-1})} - b_k + a_k = \quad (2.55)$$

$$= \sum_{j=0}^k a_j e^{\mu(\xi_k-\xi_j)} + \sum_{j=k+1}^N b_j e^{\mu(\xi_k-\xi_j)} = M_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (2.56)$$

откуда следует (2.53). Аналогичным путем проверяем формулу (2.54):

$$\begin{aligned} R_{k+1} e^{-\rho(\xi_{k+1}-\xi_k)} + r_k &= \left(\sum_{j=0}^k c_j e^{\rho(\xi_{k+1}-\xi_j)} + \sum_{j=k+1}^N d_j e^{\rho(\xi_{k+1}-\xi_j)} \right) e^{-\rho(\xi_{k+1}-\xi_k)} - c_k + d_k = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N d_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)} = R_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Вычислим значение M_1 , необходимое в качестве базы для получения коэффициентов M_k по рекуррентной формуле (2.53). Подставляя в выражение (2.49) коэффициенты a_0 в виде (2.45), (2.41) при $j = 0$, $\xi = \xi_0 = 0$, а также b_j в виде (2.46), (2.43) при $\xi = \xi_j$, с учетом равенства $\xi_N = L$ находим

$$\begin{aligned} M_1 &= a_0 + \sum_{j=1}^{N-1} b_j e^{-\mu \xi_j} + b_N e^{-\mu \xi_N} = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[(-1, -e^{(\mu-\rho)\xi_0}) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{N-1} e^{-\mu \xi_j} (e^{(\mu-\rho)L}, e^{(\mu-\rho)\xi_j}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} - e^{-\mu \xi_N} (e^{(\mu-\rho)L}, e^{(\mu-\rho)\xi_N}) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_N^{(0)} \\ p_N^{(1)} \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

откуда с учетом вытекающего из определения (2.19) равенства

$$(1, 1) \times \mathbf{U}^{-1} = (1, 0) \quad (2.57)$$

получаем

$$M_1 = -\frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[p_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} (e^{\mu(L-\xi_j)-\rho L}, e^{-\rho \xi_j}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} + e^{-\rho L} p_N^{(0)} \right]. \quad (2.58)$$

Вводя обозначения

$$\mathcal{R} := p_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{-\rho \xi_j} r_j, \quad \mathcal{M} := p_N^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{\mu(L-\xi_j)} m_j, \quad (2.59)$$

находим из (2.58) коэффициент M_1 окончательно в виде

$$M_1 = -\frac{\mathcal{R} + e^{-\rho L} \mathcal{M}}{1 - e^{(\mu-\rho)L}}. \quad (2.60)$$

Аналогичным образом найдем значение R_N , необходимое в качестве начального для вычисления коэффициентов R_k по формуле (2.54). Подставляя $k = N$ в формулу (2.50) вместе с коэффициентами d_N в виде (2.46), (2.41) при $j = N$, $\xi = \xi_N = L$ и c_j в виде (2.45), (2.43) при $\xi = \xi_j$, с учетом равенств (2.57) и $\xi_0 = 0$ вычисляем R_N :

$$\begin{aligned} R_N &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{\rho(L-\xi_j)} + d_N = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[e^{\rho(L-\xi_0)} (e^{(\mu-\rho)(L-\xi_0)}, e^{(\mu-\rho)L}) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N-1} e^{\rho(L-\xi_j)} (e^{(\mu-\rho)(L-\xi_j)}, e^{(\mu-\rho)L}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} + (e^{(\mu-\rho)(L-\xi_N)}, 1) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_N^{(0)} \\ p_N^{(1)} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[e^{\mu L} p_0^{(0)} + \sum_{j=0}^{N-1} (e^{\mu(L-\xi_j)}, e^{-\rho \xi_j + \mu L}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} + p_N^{(0)} \right], \end{aligned}$$

что с использованием обозначений (2.59) дает

$$R_N = \frac{e^{\mu L} \mathcal{R} + \mathcal{M}}{1 - e^{(\mu-\rho)L}}. \quad (2.61)$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 решение $y(x)$ задачи (2.1), (2.3) допускает следующее представление на k -м отрезке разбиения (2.8):

$$y(x) = \tilde{y}(x) + M_k e^{\mu(x-\xi_{k-1})} + R_k e^{\rho(x-\xi_k)}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.62)$$

где коэффициенты M_k, R_k находятся по рекуррентным формулам (2.53), (2.54), входящие в них числа m_k, r_k имеют вид (2.44), (2.19), начальные значения M_1, R_N , заданы в виде (2.60), (2.59) и (2.61), (2.59) соответственно.

Замечание 3. Дифференцируя представление (2.62) по x , получаем следующую формулу для производной решения задачи (2.1), (2.3) на k -м отрезке разбиения (2.8):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dx} + \mu M_k e^{\mu(x-\xi_{k-1})} + \rho R_k e^{\rho(x-\xi_k)}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.63)$$

Замечание 4. Коэффициенты M_k, R_k могут быть также найдены как решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых путем приравнивания левых и правых пределов искомого решения и его производной в узлах ξ_k , вычисленных на основе представлений (2.51), (2.63) с учетом краевых условий (2.3).

2.3. Представление решения смешанной краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (2.1) с краевыми условиями смешанного типа (2.4). Предположим, что на отрезках разбиения (2.8) заданы частные решения уравнения (2.1) в виде (2.10). Тогда с некоторыми модификациями остаются справедливыми утверждения теорем 1 и 2.

А именно, сохраняя обозначения (2.11), вместо (2.12) следует положить

$$p_0^{(0)} := \tilde{y}_1(0) - \Phi_0, \quad p_N^{(1)} = \Psi_1 - \frac{d\tilde{y}_N}{dx}(L), \quad p_0^{(1)} = p_N^{(0)} = 0,$$

в формулировке теоремы 1 — вместо условия (2.14) потребовать от функций $G_m(x, \xi)$

$$\lim_{x \rightarrow L+} \frac{dG_m}{dx}(x, \xi) = 0,$$

а при построении $G_m(x, \xi)$ — вместо (2.29) использовать в качестве $h(x)$ функцию

$$h^{\text{mix}}(x) := S_0(x, L).$$

Тогда представления (2.62) и (2.63), а также формулы (2.53), (2.54) вычисления их коэффициентов сохраняют силу, меняются лишь начальные значения (2.60) и (2.61) на следующие:

$$M_1 = M_1^{\text{mix}} \equiv -\frac{\rho \mathcal{R} + e^{-\rho L} \mathcal{M}^{\text{mix}}}{\rho - \mu e^{(\mu-\rho)L}}, \quad R_N = R_N^{\text{mix}} \equiv \frac{\mu e^{\mu L} \mathcal{R} + \mathcal{M}^{\text{mix}}}{\rho - \mu e^{(\mu-\rho)L}}. \quad (2.64)$$

где

$$\mathcal{R} := p_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{-\rho \xi_j} r_j, \quad \mathcal{M}^{\text{mix}} := p_N^{(1)} + \mu \sum_{j=1}^{N-1} e^{\mu(L-\xi_j)} m_j. \quad (2.65)$$

Аналогичным образом рассматриваются и другие типы смешанных краевых условий.

2.4. Представление решения периодической краевой задачи

В случае периодической краевой задачи для уравнения (2.1) с краевыми условиями (2.5) остаются справедливыми представления решения (2.62) и его производной (2.63), а также рекуррентные формулы (2.53), (2.54) для коэффициентов M_k, R_k . В этом случае в дополнение к формулам (2.11) вместо (2.12), (2.60), (2.61) следует положить

$$p_0^{(0)} = p_N^{(0)} = \tilde{y}_1(0) - \tilde{y}_N(L), \quad p_0^{(1)} = p_N^{(1)} = \frac{d\tilde{y}_1}{dx}(0) - \frac{d\tilde{y}_N}{dx}(L), \quad (2.66)$$

$$M_1 = M_1^{\text{per}} \equiv -\frac{1}{1 - e^{\mu L}} \sum_{j=1}^N e^{\mu(L-\xi_j)} m_j, \quad R_N = R_N^{\text{per}} \equiv \frac{1}{1 - e^{-\rho L}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\rho \xi_j} r_j, \quad (2.67)$$

где величины $m_j, r_j, j = 0, \dots, N$, заданы равенствами (2.44), (2.19), причем $m_0 = m_N, r_0 = r_N$ согласно определению (2.66) и условию периодичности (2.5).

2.5. Получение частных решений на отрезках разбиения

Рассмотрим вопрос о том, как получить частные решения $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.9) на отрезках разбиения (2.8), $k = 1, \dots, N$. Ответ не является однозначным, поскольку краевые условия на концах отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ не заданы, и решение определено лишь с точностью до прибавления произвольного решения соответствующего однородного уравнения.

В зависимости от того, в каком виде представлена правая часть уравнения (2.9), могут оказаться удобными различные способы построения $\tilde{y}_k(x)$. Рассмотрим два таких способа.

2.5.1. Вычисление частных решений в кусочно полиномиальном случае. Если правая часть $g(x)$ уравнения (2.9) имеет кусочно полиномиальный вид, т.е. при заданном $k \in \{1, \dots, N\}$ ограничение $g(x)$ на отрезок $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ является полиномом степени $n \geq 0$, то частное решение $\tilde{y}_k(x)$ может быть также выбрано в виде многочлена и найдено в явном виде, например, по формуле

$$\tilde{y}_k(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x) + \dots + P_0(x), \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad (2.68)$$

где

$$P_n(x) = \frac{g(x)}{k_0}, \quad P_j(x) := -\frac{1}{k_0} \left(k_2 \frac{d^2 P_{j+1}}{dx^2} + k_1 \frac{d P_{j+1}}{dx} \right), \quad j = n-1, \dots, 0,$$

и $P_j(x)$ является многочленом степени не выше j . Справедливость формулы (2.68) устанавливается непосредственно путем подстановки в уравнение (2.9).

Особенно простой вид формула (2.68) принимает при $n = 1$, т.е. в случае кусочно-линейной функции $g(x)$. Такой способ аппроксимации правой части и построения частного решения применялся в работе [9] при численно-аналитическом решении периодической задачи для уравнения Бюргерса.

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$, стоящий в левой части уравнения (2.9), определяет невырожденное линейное преобразование $(n+1)$ -мерного векторного пространства $\mathcal{P}_n$ полиномов степени не выше n , заданных на отрезке $x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Решение этого уравнения в пространстве $\mathcal{P}_n$ заключается в том, чтобы применить к правой части $g(x) \in \mathcal{P}_n$ обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$, действие которого дается формулой (2.68). При численном решении уравнения (2.9) удобно представить операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ в матричном виде в некотором базисе пространства $\mathcal{P}_n$. В настоящей работе в качестве такого базиса применяется система полиномов Чебышёва первого рода, промасштабированных на отрезок $[\xi_{k-1}, \xi_k]$.

Отметим, что если правая часть $g(x)$ является не кусочно полиномиальной, но гладкой или кусочно гладкой функцией, то, тем не менее, ее можно приблизить кусочно полиномиальной функцией, построив интерполяционные многочлены на каждом из отрезков разбиения (2.8), например, по значениям функции $g(x)$ в узлах Чебышёва соответствующего отрезка.

2.5.2. Вычисление частных решений с помощью квадратур. Построим частное решение уравнения (2.9) на k -м отрезке разбиения (2.8) при помощи интегрального представления

$$\tilde{y}_k(x) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} g(\xi) \mathcal{E}(x, \xi) d\xi, \quad (2.69)$$

аналогичного представлению (2.37), где фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, \xi)$ имеет вид

$$\mathcal{E}(x, \xi) = \begin{cases} (k_2(\rho - \mu))^{-1} e^{\mu(x-\xi)}, & \xi \leq x, \\ (k_2(\rho - \mu))^{-1} e^{\rho(x-\xi)}, & \xi > x. \end{cases} \quad (2.70)$$

Найдем, чему равно решение $\tilde{y}_k(x)$ в концах рассматриваемого отрезка. Подставляя выражение (2.70) при $x = \xi_{k-1}$, $x = \xi_k$ в представление (2.69), находим

$$\tilde{y}_k(\xi_{k-1}) = -\frac{1}{k_2(\rho - \mu)} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} g(\xi) e^{\rho(\xi_{k-1}-\xi)} d\xi =: r_k, \quad (2.71)$$

$$\tilde{y}_k(\xi_k) = -\frac{1}{k_2(\rho - \mu)} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} g(\xi) e^{\mu(\xi_k-\xi)} d\xi =: m_k, \quad (2.72)$$

Дифференцируя по x равенство (2.69), получим также значения производных:

$$\frac{d\tilde{y}_k}{dx}(\xi_{k-1}) = \rho r_k, \quad \frac{d\tilde{y}_k}{dx}(\xi_k) = \mu m_k. \quad (2.73)$$

Подставляя найденные значения (2.71)–(2.73) в формулы (2.11), (2.44), находим

$$\begin{aligned} p_k^{(0)} &:= r_{k+1} - m_k, & p_k^{(1)} &:= \rho r_{k+1} - \mu m_k, & k &= 1, \dots, N-1, \\ \begin{pmatrix} m_k \\ r_k \end{pmatrix} &:= \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_k^{(0)} \\ p_k^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \times \mathbf{U} \times \begin{pmatrix} -m_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где матрица $\mathbf{U}$ задана формулой (2.18). Из (2.74) получаем значения m_k, r_k в виде

$$m_k = -m_k, \quad r_k = r_{k+1},$$

а затем, согласно теореме 2, вычисляем коэффициенты M_k, R_k представления (2.62) решения исходной задачи (2.1), (2.3).

При реализации численного алгоритма величины (2.71), (2.72) находятся приближенно при помощи квадратурных формул, например, формул Гаусса. Значения частного решения $\tilde{y}_k(x)$ во внутренних точках промежутка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ можно аппроксимировать кубическим полиномом, имеющим заданные значения (2.71), (2.72) и производные (2.73) на концах данного отрезка.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Решение первой краевой задачи для линейного уравнения

Для того, чтобы проиллюстрировать работу численно-аналитического метода решения двухточечных краевых задач для уравнения (2.1), предложенного в разд. 2, рассмотрим несколько примеров. В этих примерах некоторая функция $y^{\text{ex}}(x)$, заданная в явном аналитическом виде на отрезке $[0, 1]$, подставляется в тестовое уравнение вида (2.1), находится правая часть

$$g(x) = k_2 \frac{d^2 y^{\text{ex}}}{dx^2} + k_1 \frac{dy^{\text{ex}}}{dx} + k_0 y^{\text{ex}}(x)$$

и значения

$$\Phi_0 = y^{\text{ex}}(0), \quad \Phi_1 = y^{\text{ex}}(1),$$

определяющие краевые условия (2.3) при $L = 1$. Затем на основе полученных таким образом данных $g(x), \Phi_0, \Phi_1$ находится численное решение $y(x)$ на единичном отрезке вместе с производной $y'(x)$ независимо несколькими из нижеперечисленных алгоритмов.

Алгоритм 3.1.1 (обозначение: $D(1)$). *разностный метод на основе прогонки с использованием центральной разностной производной искомого решения и аппроксимацией его второй производной по трем точкам.*

Алгоритм 3.1.2 (обозначение: $PT(m)$). *численно-аналитический метод, основанный на представлениях (2.62), (2.63) и использующий чебышёвские приближения (см. п. 2.5.1). В этом методе для правой части $g(x)$ уравнения (2.1) принимается кусочно полиномиальное приближение интерполяционными многочленами, построенными на каждом из отрезков разбиения (2.8) по m точкам — узлам Чебышёва в виде линейной комбинации полиномов Чебышёва степени не выше $m - 1$.*

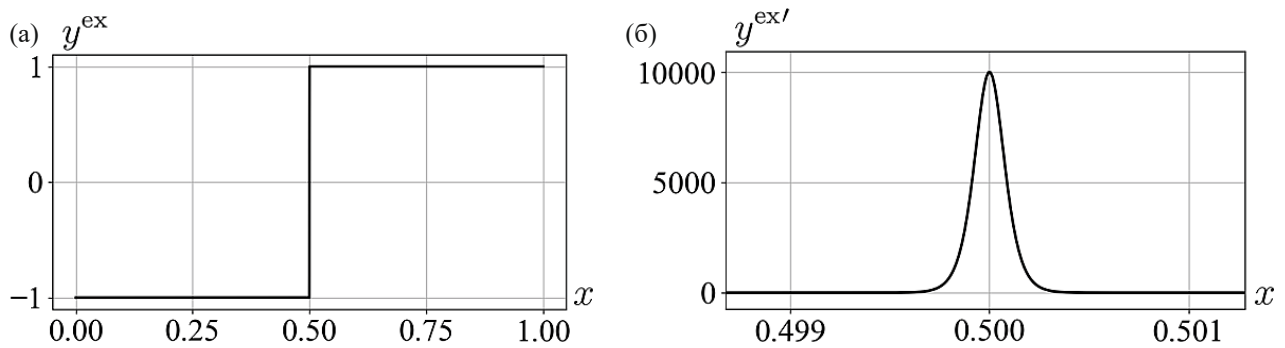
Алгоритм 3.1.3 (обозначение: $GQ(2)$). *численно-аналитический метод, основанный на представлениях (2.62), (2.63), с получением частных решений $\tilde{y}_k(x)$ на отрезках разбиения (2.8) с помощью квадратурной формулы Гаусса порядка 3 по двум точкам и интерполяцией результата кубическим полиномом (см. п. 2.5.2).*

Численное решение $y^{\text{an}}(x)$ задачи (2.1), (2.3), получаемое при помощи численно-аналитического алгоритма 3.1.2 либо 3.1.3, а также решение $y^{\text{diff}}(x)$ той же задачи, получаемое разностным методом 3.1.1, вычисляются на последовательности равномерных сеток (2.8) при $L = 1$ с возрастающим количеством N отрезков разбиения.

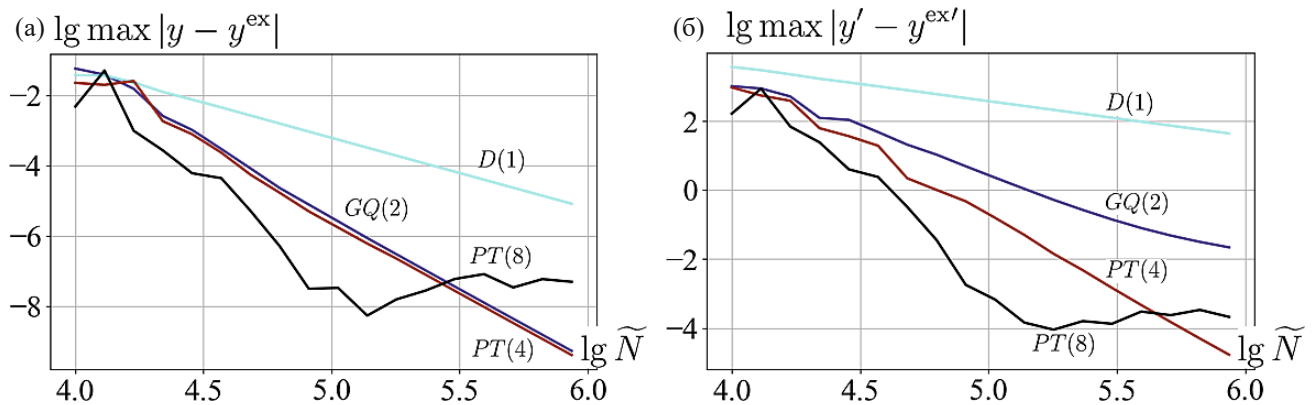
Погрешность численного решения $y^{\text{an}}(x)$ или $y^{\text{diff}}(x)$ находится как максимум модуля разности между этим решением и известным аналитическим решением $y^{\text{ex}}(x)$. Аналогичным образом вычисляется погрешность производной dy^{an}/dx либо dy^{diff}/dx .

В обозначениях $D(1), PT(m), GQ(2)$ алгоритмов 3.1.1–3.1.3 в скобках указано количество m точек на каждом из отрезков пространственной сетки (2.8), значения в которых правой части $g(x)$ уравнения (2.1) используются в работе соответствующего алгоритма. При сопоставлении численных результатов, полученных различными методами, учитывается точность, достигнутая при одном и том же полном числе узлов

$$\tilde{N} := mN. \quad (3.1)$$



Фиг. 1. Пример 3.1.1. (а) – График точного решения $y = y^{\text{ex}}(x)$ уравнения (3.2), (3.3). (б) – График производной $y^{\text{ex}'}(x)$.



Фиг. 2. Пример 3.1.1. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 4$ и 8. (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

На фиг. 2, 4, 6, 7 даны графики погрешности численного решения и его производной в логарифмической шкале, полученные для алгоритмов 3.1.1–3.1.3, в зависимости от полного числа (3.1) узлов расчетной сетки. Отметим, что каждый из алгоритмов 3.1.1–3.1.3 имеет линейную по N алгоритмическую сложность при $N \rightarrow \infty$.

Пример 3.1.1. Уравнение

$$k_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y(x) = g(x) \quad (3.2)$$

при

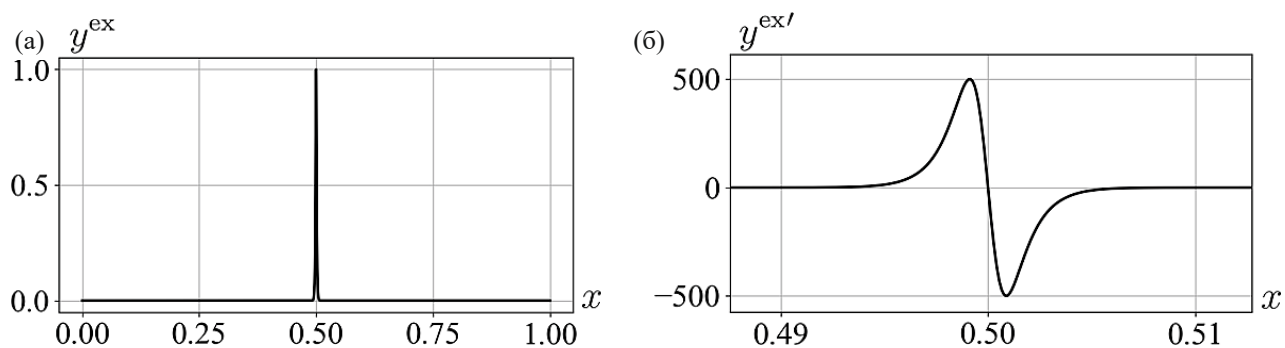
$$k_2 = -10^{-7}, \quad y^{\text{ex}}(x) = \text{th}(10^4(x - 0.5)), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Графики решения $y^{\text{ex}}(x)$ и его производной $y^{\text{ex}'}(x)$ даны на фиг. 1 а,б. Логарифмические графики погрешности численного решения и производной в зависимости от полного числа $\tilde{N}$ отрезков расчетной сетки приведены на фиг. 2 а,б.

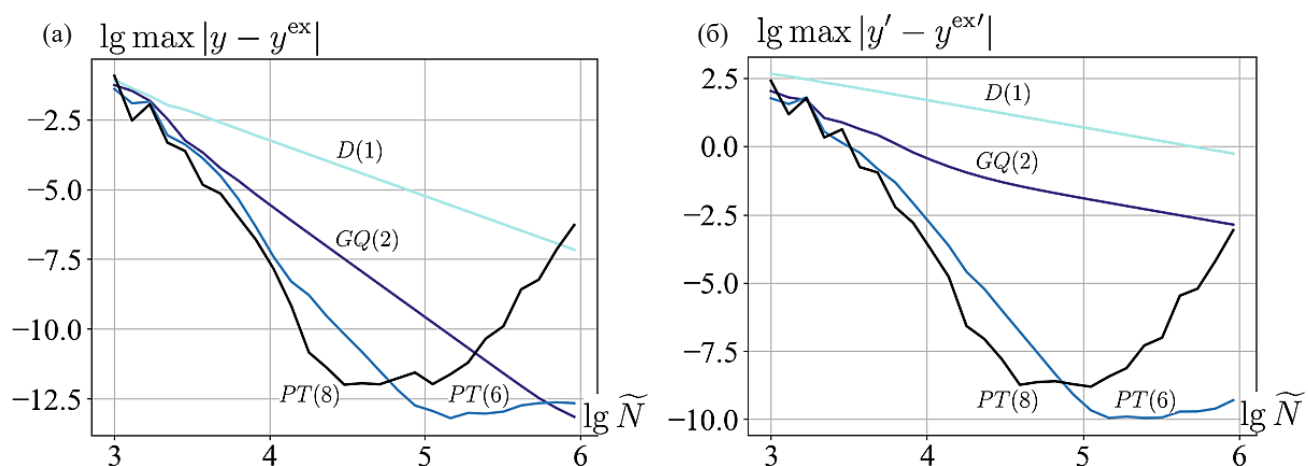
Пример 3.1.2. Уравнение (3.2) при

$$k_2 = -10^{-6}, \quad y^{\text{ex}}(x) = \frac{1}{\text{ch}(1000(x - 0.5))}, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Графики решения $y^{\text{ex}}(x)$ и его производной $y^{\text{ex}'}(x)$ даны на фиг. 3 а,б. Логарифмические графики погрешности численного решения и производной в зависимости от полного числа $\tilde{N}$ отрезков расчетной сетки приведены на фиг. 4 а,б.



Фиг. 3. Пример 3.1.2. (а) – График точного решения $y = y^{\text{ex}}(x)$ уравнения (3.2), (3.4). (б) – График производной $y^{\text{ex}'}(x)$.



Фиг. 4. Пример 3.1.2. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 6$ и 8. (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

Пример 3.1.3. Уравнение

$$-10^{-9} \frac{d^2 y}{dx^2} + 10^{-4} \frac{dy}{dx} + y(x) = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

при

$$y^{\text{ex}}(x) = \sin \frac{\pi}{x + 0.01} \quad x \in [0, 1].$$

Графики решения $y^{\text{ex}}(x)$ и его производной $y^{\text{ex}'}(x)$ даны на фиг. 5 а,б. Логарифмические графики погрешности численного решения и производной в зависимости от полного числа $\tilde{N}$ отрезков расчетной сетки приведены на фиг. 6 а,б.

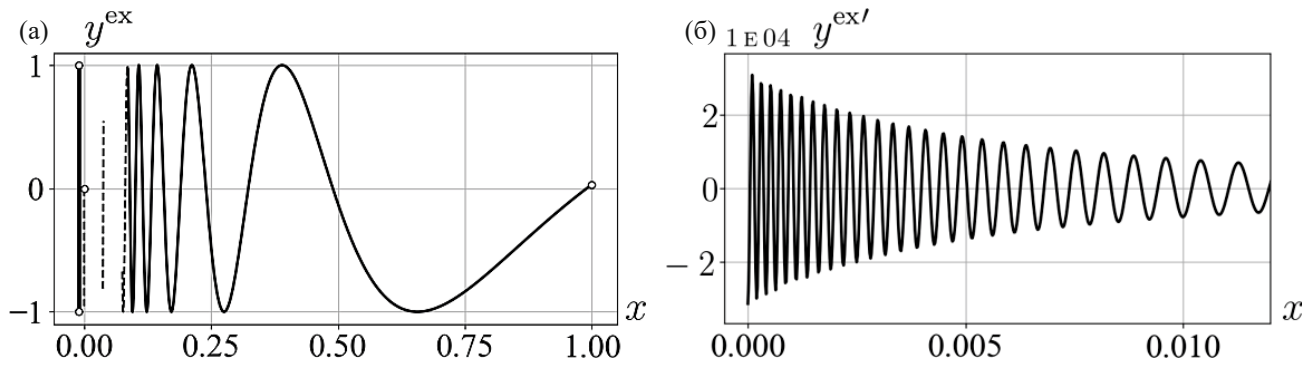
Пример 3.1.4. Уравнение

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y(x) = g(x), \quad (3.6)$$

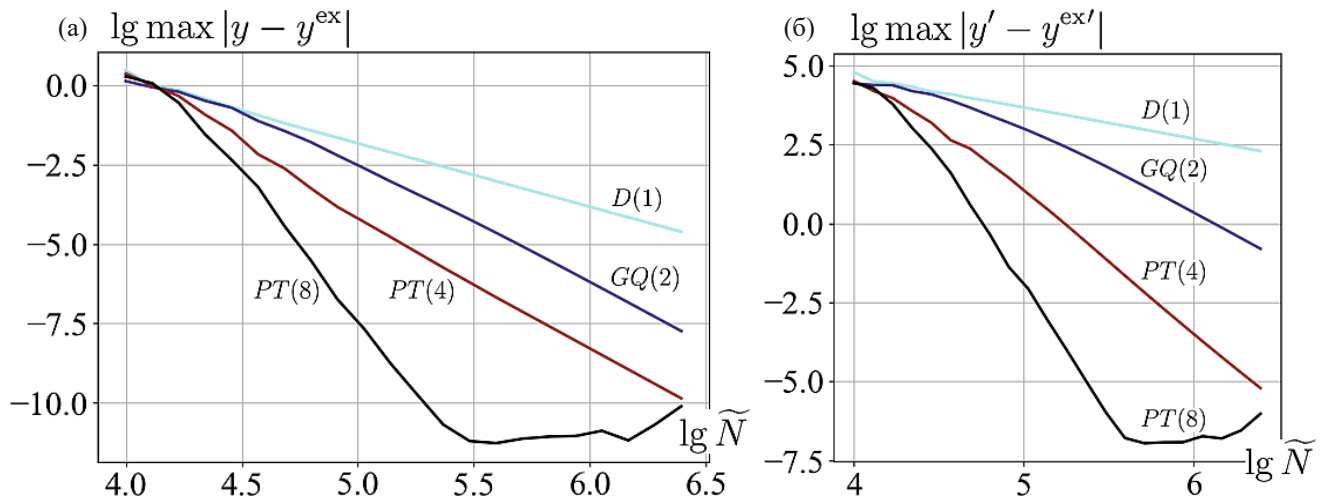
при

$$y^{\text{ex}}(x) = \sin(3\pi x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

Логарифмические графики погрешности численного решения и его производной, найденные с помощью алгоритмов 3.1.1–3.1.3, приведены на фиг. 7 а,б.



Фиг. 5. Пример 3.1.3. (а) – График точного решения $y = y^{\text{ex}}(x)$ уравнения (3.5). (б) – График производной $y^{\text{ex}'}(x)$.



Фиг. 6. Пример 3.1.3. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 4$ и 8 . (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

3.2. Решение начально-краевых задач для сингулярно возмущенных квазилинейных параболических уравнений

Рассмотрим ряд примеров численного решения начально-краевых задач для сингулярно возмущенных нелинейных параболических уравнений. Для этого воспользуемся некоторыми известными в явном аналитическом виде решениями $u^{\text{ex}}(x, t)$ модельных уравнений вида (1.7), задавая начальное и краевые условия (1.8)–(1.10) с помощью функций

$$u_0(x) = u^{\text{ex}}(0, x), \quad \varphi_0(t) = u^{\text{ex}}(0, t), \quad \varphi_1(t) = u^{\text{ex}}(L, t), \quad \psi_1(t) = \frac{\partial u^{\text{ex}}}{\partial x}(L, t), \quad (3.8)$$

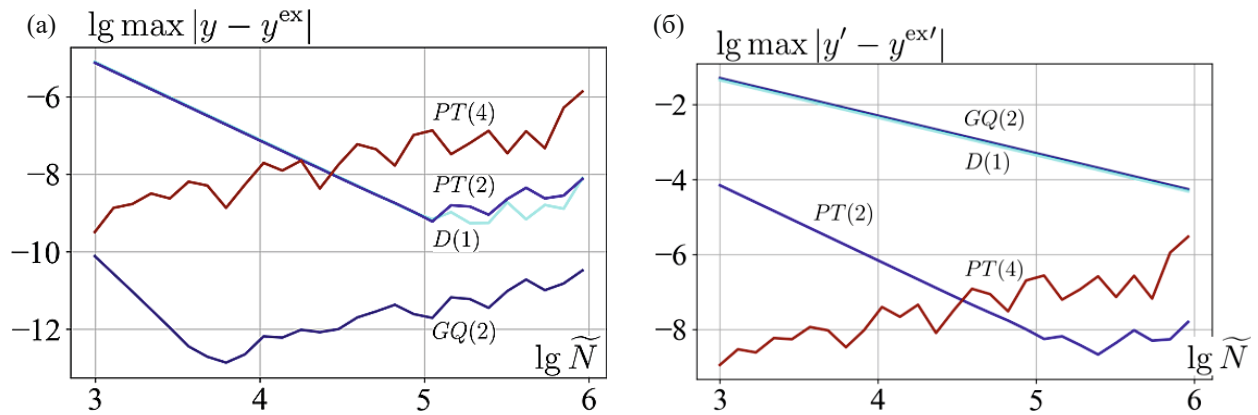
либо накладывая на искомое решение $u(x, t)$ условия периодичности (1.11).

Пример 3.2.1. Рассмотрим уравнение Бюргерса (1.3), которое является частным случаем уравнения (1.7) при

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma = 0.$$

Известно (см., например, [9]), что уравнение (1.3) обладает периодическим по x решением с периодом 1, имеющим следующий явный аналитический вид:

$$u^{\text{ex}}(x, t) = V + \frac{4\pi\lambda \sin(2\pi(x_0 + x - Vt)) e^{-4\pi^2\lambda(t_0+t)}}{1 + \cos(2\pi(x_0 + x - Vt)) e^{-4\pi^2\lambda(t_0+t)}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$



Фиг. 7. Пример 3.1.4. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ уравнения (3.6) в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 2$ и 4. (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

где $x_0, V \in \mathbb{R}, t_0 > 0$ — произвольные постоянные. Максимальное по x значение $U_0 > V$, достигаемое функцией (3.9) при $t = 0$, определяет параметр t_0 по следующей формуле:

$$t_0 = \frac{\ln(1 + (4\pi\lambda/(U_0 - V))^2)}{8\pi^2\lambda}.$$

Проведем численное решение начально-краевых задач для уравнения (1.3) с начальным условием (1.8) и краевыми условиями каждого из видов (1.9)–(1.11), заданными в виде (3.8), (3.9) при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 10^{-3}, \quad V = 4, \quad U_0 = 6, \quad x_0 = 0.4, \quad t_0 \approx 0.0005, \quad (3.10)$$

следуя схеме, изложенной в разд. 1.3. Для этого зададим временной промежуток $t \in [0, T]$ и шаг τ по времени в виде

$$T = 0.009, \quad \tau = 10^{-5}.$$

Начально-краевую задачу (1.3), (1.8), (3.8), (3.9) с условиями периодичности (1.11) будем решать на единичном отрезке $x \in [0, L_1]$, т.е. при $L = L_1 = 1$. Аналогичную задачу со смешанными краевыми условиями (1.10) будем решать на более коротком отрезке $x \in [0, L_2]$, где $L_2 = 0.142$, чтобы получить из формулы (3.8) функции $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ заметно отличающимися от тождественного нуля. Наконец, задачу с краевыми условиями Дирихле (1.9) рассмотрим независимо на обоих отрезках $x \in [0, L_1]$ и $x \in [0, L_2]$.

Следуя алгоритму из разд. 1.3, на $(n + 1)$ -й итерации этого алгоритма, т.е. при $t = t_{n+1} = (n + 1)\tau$, получаем относительно приближенного решения $u_{n+1}(x) \approx u(x, t_{n+1})$ линейную задачу для уравнения (1.19), (1.21), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$-\frac{9}{16}\tau\lambda\frac{d^2u_{n+1}}{dx^2} + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad (3.11)$$

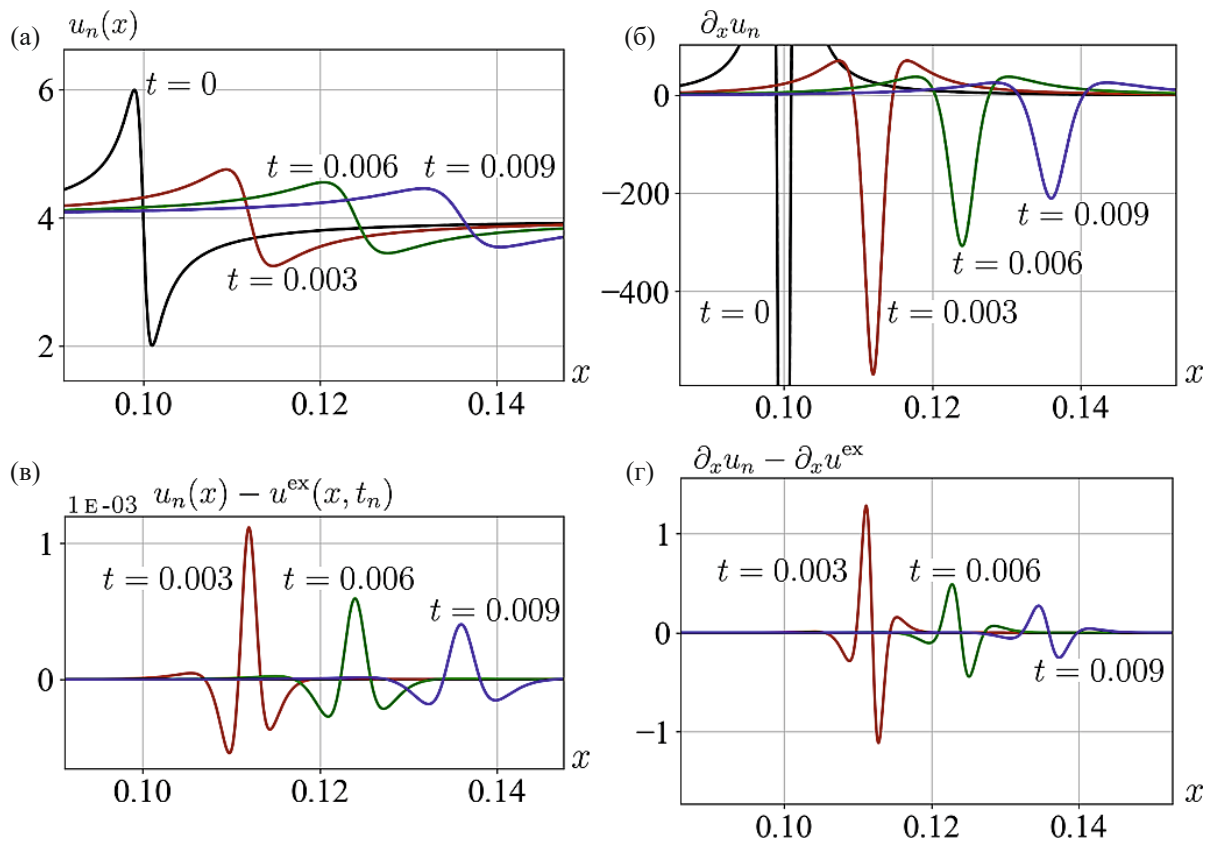
где правая часть определяется по формуле

$$g_{n+1}(x) = \frac{5}{3}u_n(x) + \frac{1}{9}u_{n-1}(x) - \frac{2}{3}g_n(x) - \frac{1}{9}g_{n-1}(x) - \tau\left(\frac{3}{2}u_n(x)\frac{du_n}{dx} - \frac{1}{2}u_{n-1}(x)\frac{du_{n-1}}{dx}\right), \quad (3.12)$$

на отрезке $x \in [0, L]$, где $L = L_1$ или L_2 , с краевыми условиями (1.22)–(1.24), отвечающими краевым условиям (1.9)–(1.11) исходной задачи, и принимающими с учетом (3.9) одну из форм

$$u_{n+1}(0) = u^{\text{ex}}(0, t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L_j) = u^{\text{ex}}(L_j, t_{n+1}), \quad j = 1, 2, \quad (3.13)$$

$$u_{n+1}(0) = u^{\text{ex}}(0, t_{n+1}), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(L_2) = \frac{\partial u^{\text{ex}}}{\partial x}(L_2, t_{n+1}), \quad (3.14)$$



Фиг. 8. пример 3.2.1. (а) — Решение вида (3.9) периодической задачи для уравнения Бюргерса (1.3) при значениях параметров (3.10), найденное численно-аналитическим методом на основе представления (2.62), (2.53), (2.54), (2.67) в различные моменты времени. (б) — Производная решения, полученная из представления (2.63). (в) — Погрешность вычисленного решения. (г) — Погрешность вычисленной производной.

либо (1.24) соответственно. Линейную задачу (3.11)–(3.13) решаем с помощью численно-аналитического алгоритма 3.1.2 либо при помощи разностного алгоритма 3.1.1. Задачу (3.11), (3.12), (3.14) со смешанным краевым условием решаем с помощью алгоритма 3.1.2, где при вычислении коэффициентов представлений (2.62), (2.63) по формулам (2.53), (2.54) используются начальные значения (2.64), (2.65). Периодическую задачу (3.11), (3.12), (1.24) решаем также с помощью алгоритма 3.1.2 с учетом формул (2.67), (2.66).

При численной реализации алгоритма 3.1.2 используем пространственную дискретизацию (2.8) с равномерным распределением узлов ξ_k при $N = N_1$ для задачи на единичном отрезке $[0, L_1]$ и при $N = N_2$ для задач на отрезке $[0, L_2]$, где

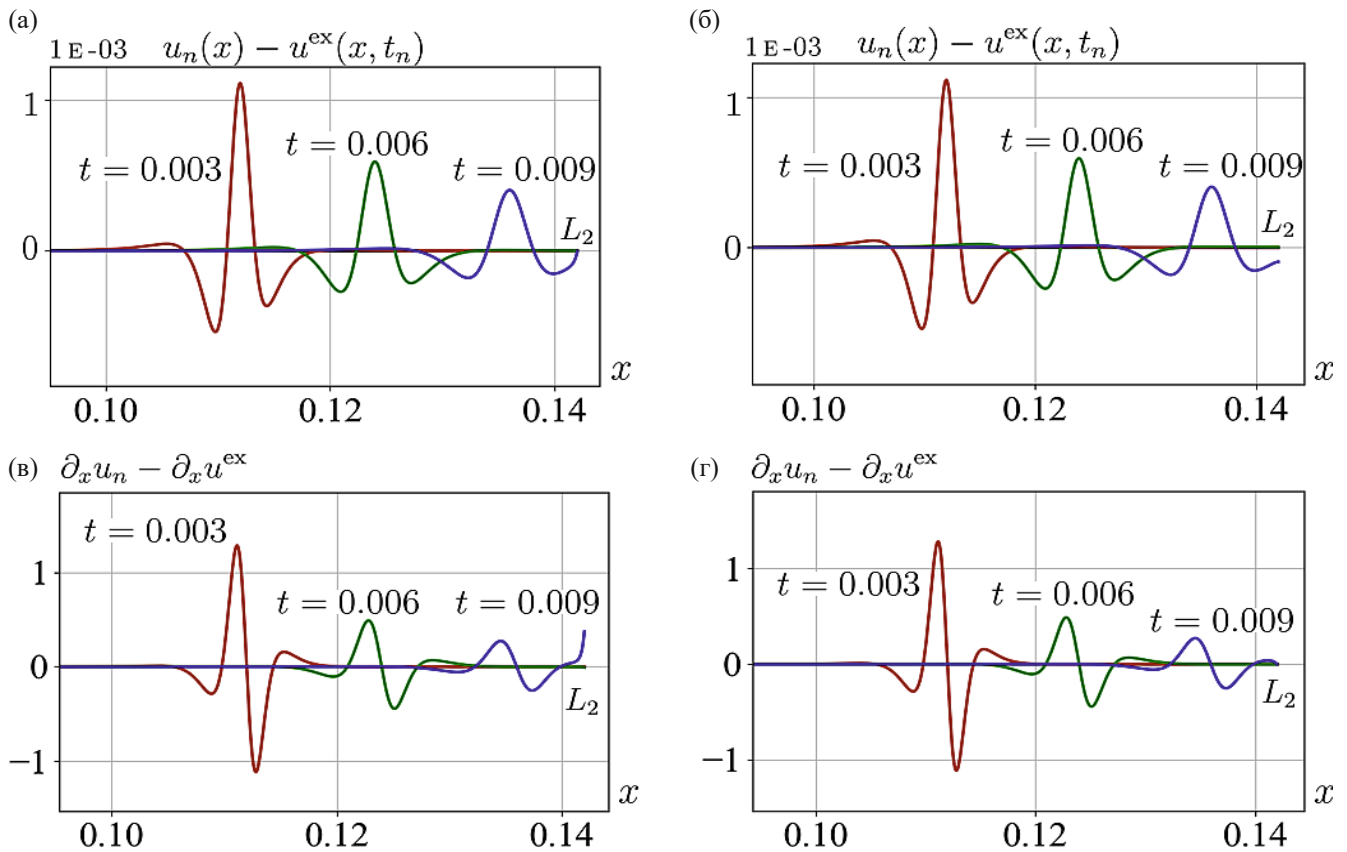
$$N_1 = 5000, \quad N_2 = 710$$

так, что $L_1/N_1 = L_2/N_2$.

Построение кусочно полиномиальной интерполяции правой части (3.12) уравнения (3.11), составляющее начальный этап работы алгоритма 3.1.2 в соответствии с п. 2.5.1, проведем по $m = 4$ узлам на каждом из N_1 либо N_2 промежутках разбиения (2.8).

На фиг. 8 а приведены графики численного решения $u_n(x)$ периодической начально-краевой задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9), (1.11) на отрезке $[0, L_1]$ при значениях n , соответствующих четырем моментам времени t , полученные при помощи алгоритма 3.1.2; на фиг. 8 б даны графики производной решения $\partial_x u_n(x)$, вычисленной на основе представления (2.63), в те же моменты времени t_n . На фиг. 8 в показаны графики погрешности, найденной как разность между численным решением $u_n(x)$ и точным решением $u^{\text{ex}}(x, t_n)$ в соответствующие моменты t_n . На фиг. 8 г дана погрешность производной, вычисленная аналогичным образом как разность между численным и точным значением. Графики численного решения на фиг. 8 а и его производной на фиг. 8 б визуально совпадают с соответствующими графиками точного решения (3.9), а также с графиками численного решения задачи Дирихле (1.3), (1.8), (1.9), (3.8), (3.9) на отрезке $[0, L_1]$.

На фиг. 9 а, б даны графики погрешности численных решений, полученных с использованием алгоритма 3.1.2, задачи Дирихле (1.3), (1.8), (1.9), (3.8), (3.9) и смешанной начально-краевой задачи



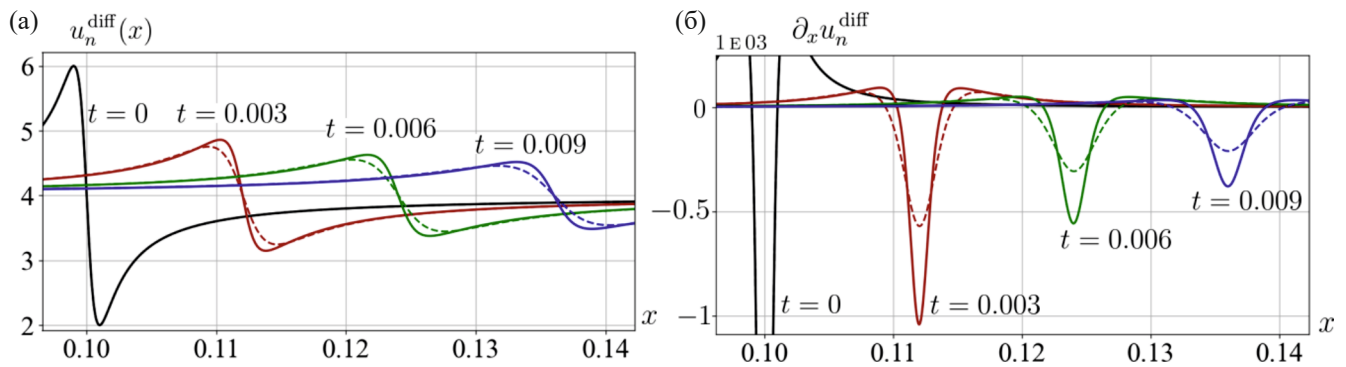
Фиг. 9. Пример 3.2.1. Графики погрешности численных решений начально-краевых задач для уравнения Бюргерса на отрезке $[0, L_2]$, $L_2 = 0.142$, полученных численно-аналитическим методом с использованием алгоритма 3.1.2 при $m = 4$ в различные моменты времени. (а) – Погрешность решения задачи Дирихле (1.3), (1.8), (1.9), (3.8), (3.9). (б) – Погрешность решения смешанной начально-краевой задачи (1.3), (1.8), (1.10), (3.8), (3.9). (в) – Погрешность вычисленной производной решения задачи Дирихле. (г) – Погрешность вычисленной производной решения смешанной начально-краевой задачи.

(1.3), (1.8), (1.10), (3.8), (3.9) на отрезке $[0, L_2]$. На фиг. 9 в, г) показаны соответствующие графики погрешности производной.

Отметим, что численные решения, полученные при помощи алгоритма 3.1.2, четырех указанных выше начально-краевых задач, т.е. периодической задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9), (1.11) на отрезке $[0, L_1]$, смешанной начально-краевой задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9), (1.10) на отрезке $[0, L_2]$ и задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9) с условиями Дирихле (1.9) на отрезках $[0, L_1]$ и $[0, L_2]$, совпали с высокой точностью на общем промежутке определения, т.е. при $x \in [0, L_2]$, за исключением ближайшей окрестности точки L_2 , где наблюдалось небольшое расхождение (см. фиг. 8 в, г и фиг. 9 а–г), очевидно, связанное с различием в способе задания краевого условия.

Для работы алгоритма 3.1.1, использующего разностные схемы аппроксимации производных по пространственной переменной, при решении задачи (3.11)–(3.13) на отрезке $[0, L_1]$ применялась равномерная пространственная сетка, включающая $\tilde{N}_1 = (m N_1) = 20000$ промежутков, где $m = 4$ согласно сказанному выше. На фиг. 10 а сплошными линиями изображены графики численного решения $u_n^{\text{diff}}(x)$ начально-краевой задачи (3.8)–(3.10), (1.8), (1.9) на единичном отрезке, полученного по схеме из разд. 1.3 с решением линейной задачи (3.11)–(3.13) разностным алгоритмом 3.1.1. Пунктиром проведены соответствующие графики точного решения (3.9). На фиг. 10 б сплошными линиями даны графики производной $\partial_x u_n^{\text{diff}}(x)$ решения, найденной численно для тех же моментов времени, а также, пунктиром, графики точного значения производной $\partial_x u^{\text{ex}}(x, t)$, полученного дифференцированием по x формулы (3.9). Из этих графиков видно, что разностный метод дает существенно искаженный профиль решения, а ошибка вычисления производной при таком методе в момент $t = 0.003$ превышает 50% от истинного значения.

Отметим, что увеличение числа узлов $\tilde{N}$ не приводит к повышению точности метода, использующего разностный алгоритм 3.1.1. В то же время, для численно-аналитического метода на основе алгоритма 3.1.2 число $N = 5000$ промежутков равномерного разбиения (2.8) единичного отрезка может быть уменьшено без заметной потери точности по крайней мере в три раза. Иначе говоря, применение разностного метода 3.1.1 для решения



Фиг. 10. Пример 3.2.1. (а) – Решение вида (3.9) периодической задачи для уравнения Бюргерса (1.3) при значениях параметров (3.10), найденное разностным методом. Пунктиром обозначены соответствующие графики точного решения. (б) – Графики производной, найденной численно (сплошная линия) и ее точного значения в соответствующий момент времени (пунктир).

вспомогательной линейной задачи (3.11)–(3.13), (1.24) в условиях рассматриваемого примера создает ограничение на точность получаемого численного результата при любом значении N ; при использовании же алгоритма 3.1.2 и при $N > 1500$ точность построенного вычислительного алгоритма определяется явно-неявной схемой (1.13), имеющей второй порядок аппроксимации по τ .

Пример 3.2.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для следующего обобщенного уравнения Фишера (см. [2], [12], [13]), т.е. для уравнения (1.2) с правой частью (1.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(x)(1 - u^\alpha(x)), \quad \alpha, \lambda > 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (3.15)$$

с условиями (1.8), (1.9), заданными в виде (3.8) хорошо известным (см., например, [12]) явным решением уравнения (3.15)

$$u^{\text{ex}}(x, t) = 2^{-2/\alpha} \left[1 - \text{th} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda(4+2\alpha)}} (x - \omega t) \right) \right]^{2/\alpha}, \quad \omega := \frac{4 + \alpha}{\sqrt{(4 + 2\alpha)/\lambda}}. \quad (3.16)$$

Численное решение начально-краевой задачи (3.15), (1.8), (1.9), (3.8), (3.16) проведем по схеме, изложенной в разд. 1.3 при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 10^{-5}, \quad \alpha = 10, \quad \omega \approx 0.009 \quad (3.17)$$

с шагом по времени $\tau = 10^{-3}$ на промежутке $t \in [0, T]$ при $T = 100$.

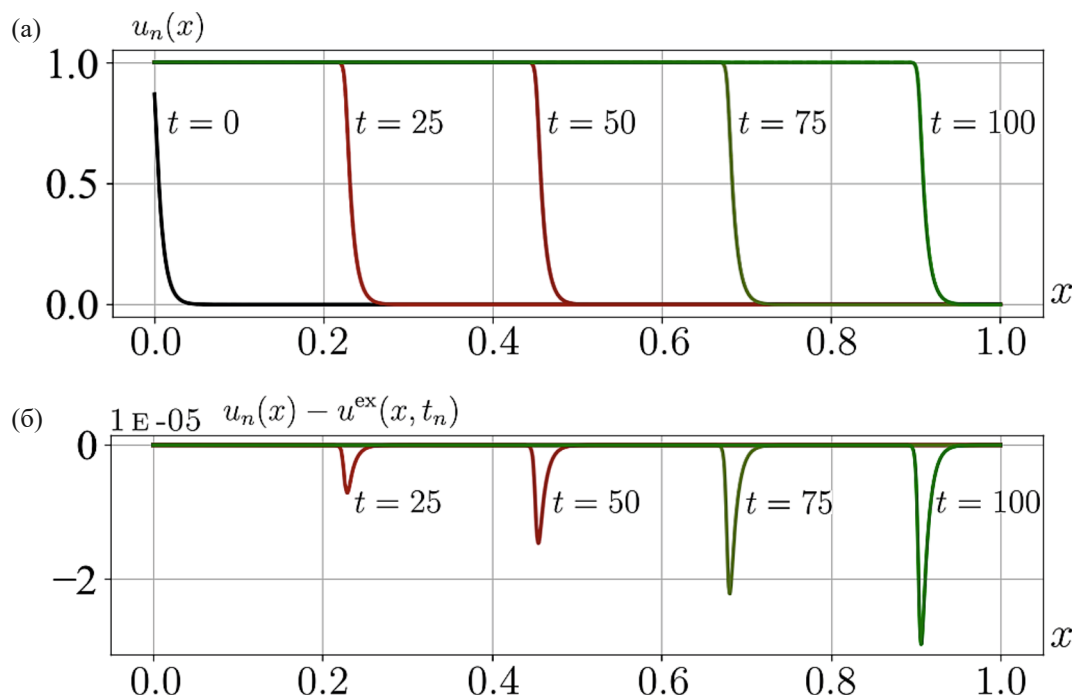
Следуя алгоритму из разд. 1.3, на $(n+1)$ -й итерации этого алгоритма, т.е. при $t = t_{n+1} = (n+1)\tau$, получаем относительно приближенного решения $u_{n+1}(x) \approx u(x, t_{n+1})$ линейную задачу на отрезке $x \in [0, 1]$ для уравнения (1.19), (1.21), которое в рассматриваемом случае принимает вид (3.11) с правой частью, определяемой по формуле

$$g_{n+1}(x) = \frac{5}{3} u_n(x) + \frac{1}{9} u_{n-1}(x) - \frac{2}{3} g_n(x) - \frac{1}{9} g_{n-1}(x) + \tau \left(\frac{3}{2} u_n(x) (1 - u_n^\alpha(x)) - \frac{1}{2} u_{n-1}(x) (1 - u_{n-1}^\alpha(x)) \right), \quad (3.18)$$

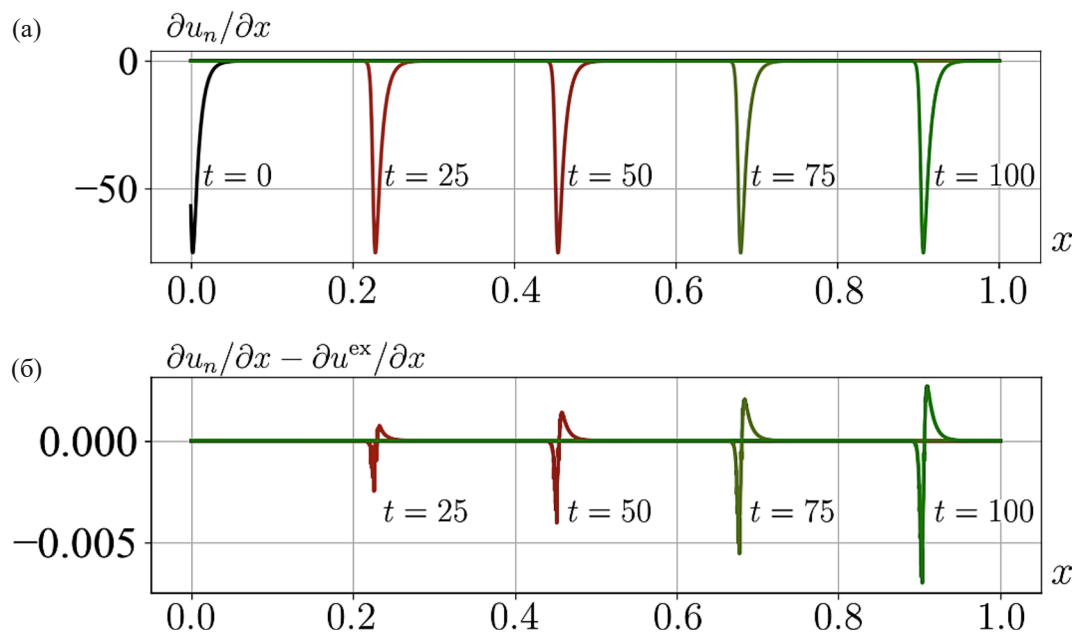
и граничными условиями

$$u_{n+1}(0) = u^{\text{ex}}(0, t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L) = u^{\text{ex}}(L, t_{n+1}). \quad (3.19)$$

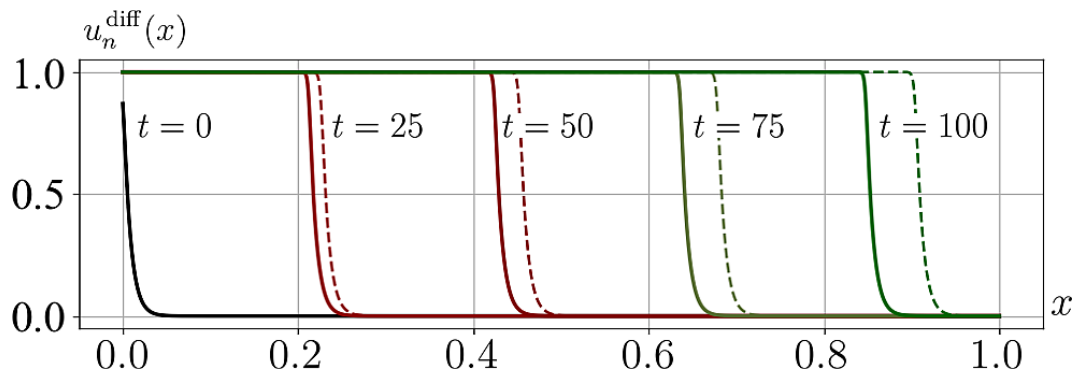
На каждом временном слое решение вспомогательной линейной задачи (3.11), (3.18), (1.22), (3.19), (3.16) построим численно-аналитическим методом, предложенным в разд. 2 и основанным на представлении (2.62), с использованием кусочно полиномиальной интерполяции правой части по $m = 6$ узлам на каждом из $N = 500$ отрезков равномерного разбиения промежутка $[0, 1]$ согласно п. 2.5.1. На фиг. 11 а даны графики численного решения $u_n(x)$ при значениях n , соответствующих различным моментам времени t , а на фиг. 11 б показаны



Фиг. 11. Пример 3.2.2. (а) – Решение типа бегущей волны (3.16) обобщенного уравнения Фишера (3.15), (3.17), найденное численно-аналитическим методом на основе представления (2.62), в моменты времени $t = 0, 25, 50, 75, 100$. (б) – Погрешность вычисленного решения.



Фиг. 12. Пример 3.2.2. (а) – Производная решения, графики которого приведены на фиг. 11 а, полученная численно-аналитическим методом на основе представления (2.63). (б) – Погрешность вычисленной производной.



Фиг. 13. Пример 3.2.2. Решение типа бегущей волны (3.16) обобщенного уравнения Фишера (3.15), (3.17), найденное разностным методом, в моменты времени $t = 0, 25, 50, 75, 100$. Пунктиром обозначены соответствующие графики точного решения.

графики погрешности в те же моменты времени. На фиг. 12 а,б приведены соответственно графики производной по x , вычисленной вместе с решением на основе представления (2.63), и погрешность этого вычисления. Отметим, что графики как самого приближенного решения на фиг. 11 а, так и его производной на фиг. 12 а визуально не отличимы от соответствующих графиков для точного решения (3.16), а относительная погрешность вычислений составляет $\sim 10^{-5}$ для решения и $\sim 10^{-4}$ для его производной.

На фиг. 13 представлены для сравнения графики численного $u_n^{\text{diff}}(x)$ и точного $u^{\text{ex}}(x, t_n)$ решений той же начально-краевой задачи (3.15)–(3.17), (1.8), (1.9), (3.8) при различных n по схеме, изложенной в разд. 1.3, где решение вспомогательной линейной задачи (3.11), (3.18), (1.22), (3.19), (3.16) проведено при помощи разностного алгоритма 3.1.1 на равномерной сетке из $\tilde{N} = (mN) = 3000$ узлов. Графикам точного решения соответствуют пунктирные линии.

Из сопоставления графиков на фиг. 13 видно, что численный метод, использующий разностные аппроксимации производной по пространственной переменной, демонстрирует существенно меньшую скорость распространения бегущей волны по сравнению с целевым значением ω , заданным формулой (3.16). Причиной такого эффекта, как показал проведенный анализ, является то, что разностный метод фактически “игнорирует” сингулярное возмущение, представленное дифференциальным слагаемым с малыми коэффициентами в уравнении (1.19). А именно, если правая часть уравнения (1.19) с достаточной точностью удовлетворяет краевым условиям задачи, то численное решение эквивалентного уравнения оказывается равным правой части.

Напротив, аналитико–численный метод решения линейной задачи, предложенный в разд. 2 настоящей работы, учитывает сингулярное возмущение корректным образом, обеспечивая численный результат с высокой точностью и имея при этом такую же алгоритмическую сложность $O(N)$, как и метод прогонки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов И.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастом количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сек. А. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–25.
2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eug. 1937. № 7. P. 355–369.
3. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
4. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence / Ed. by Richard Von Mises, Theodore Von Karman. Elsevier, 1948. V. 1 of Advances in Applied Mechanics. P. 171–199.
5. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. Vol. 3. № 3. P. 201–230.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
8. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М.: Бином. Лаб. знаний, 2015.

9. Безродных С.И., Пикунин С.В. Численно—аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69. № 2. С. 208—223.
10. Безродных С.И., Власов В.И. Аналитико—численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 7. С. 15—24.
11. Безродных С.И., Власов В.И. Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 12. С. 2220—2251.
12. Wang X.Y. Exact and explicit solitary wave solutions for the generalised Fisher equation // Phys. Lett. A. 1988. V. 131. № 4, 5. P. 277—279.
13. Кудряшов Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера // Теор. и матем. физ. 1993. Т. 94. № 2. С. 296—306.
14. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841—859.
15. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237—248.
16. Шишкин Г.И. Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции—диффузии с движущимся сосредоточенным источником // Матем. моделирование. 2003. Т. 15. № 2. С. 43—61.
17. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
18. Белов А.А., Калиткин Н.Н. Численное моделирование задач с пограничным слоем // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 11. С. 47—55.
19. Тефера Д.М., Тирунх А.А., Дерезе Г.А. Метод операторной подгонки с квадратурной формулой Гаусса для параболической сингулярно возмущенной задачи конвекции—диффузии // Сиб. журн. вычисл. матем. 2022. Т. 25. № 3. С. 315—328.
20. Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. Теория теплового распространения пламени // Журн. физ. химии. 1938. Т. 12. № 1. С. 100—105.
21. Худяев С.И. Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003.
22. Canosa J. Diffusion in nonlinear multiplicative media // J. Math. Phys. 1969. V. 10. № 10. P. 1862—1868.
23. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. B. 1952. V. 237. P. 37—72.
24. Murray J.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. Interdisciplinary Applied Mathematics 17. 3 ed. New York: Springer-Verlag, 2004.
25. Тасевич А.Л., Бочаров Г.А., Вольперт В.А. Уравнения реакции—диффузии в иммунологии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2048—2059.
26. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. V. 117. № 4. P. 500—544.
27. FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // Bull. Math. Biophys. 1955. V. 17. № 4. P. 257—278.
28. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061—2070.
29. Tuckwell H.C. Introduction to theoretical neurobiology: nonlinear and stochastic theories. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1988. V. 2.
30. Noble D. A modification of the Hodgkin—Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pace—maker potentials // J. Physiology. 1962. V. 160. P. 317—352.

31. Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse // Towards a Theoretical Biology. 1972. V. 4. P. 8–67.
32. Aliev R., Panfilov A. A simple two–variable model of cardiac excitation // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. V. 7. № 3. P. 293–301.
33. Biktashev V.N. A simplified model of propagation and dissipation of excitation fronts // Inter. J. Bifurcation and Chaos in Appl. Sci. and Engineer. 2003. V. 12. № 13. P. 3605–3619.
34. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
35. Aronson D.G., Weinberger H.F. Nonlinear diffusion in population genetics combustion and nerve pulse propagation. New York: Springer-Verlag, 1988.
36. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
37. Аллали К., Жунди Ю., Таук А., Вольперт В. Влияние естественной конвекции на тепловой взрыв в пористой среде // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 2. С. 15–21.
38. Taylor J.E., Cahn J.W., Handwerker C.A. Overview No. 98 I—Geometric models of crystal growth // Acta Metallurgica et Materialia. 1992. V. 40. № 7. P. 1443–1474.
39. Volpert A., Volpert V., Volpert V. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 2000. V. 140 of *Translations of mathematical monographs*.
40. Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed // Bulletin of Mathematical Biology. 1979. V. 41. № 6. P. 835–840.
41. Tang S., Weber R. O. Numerical study of Fisher’s equation by a Petrov–Galerkin finite element method // J. Australian Math. Soc. Ser. B. Appl. Math. 1991. V. 33. № 1. P. 27–38.
42. Ascher U.M., Ruuth S.J., Wetton B.T.R. Implicit–explicit methods for time-dependent partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1995. V. 32. № 3. P. 797–823.
43. Ruuth S.J. Implicit–explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation // J. Mathem. Biology. 1995. V. 34. № 2. P. 148–176.
44. Песин Я.Б., Юрченко А.А. Некоторые физические модели, описываемые уравнением реакции–диффузии, и цепочки связанных отображений // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. № 3(357). С. 81–114.
45. Olmos D., Shizgal B.D. A pseudospectral method of solution of Fisher’s equation // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 193. № 1. P. 219–242.
46. Bastani M., Salkuyeh D.K. A highly accurate method to solve Fisher’s equation // Pramana – J. Phys. 2012. V. 78. P. 335–346.
47. Kudryashov N.A., Zakharchenko A.S. A note on solutions of the generalized Fisher equation // Appl. Math. Lett. 2014. V. 32. P. 53–56.
48. Gasull A., Giacomini H. Explicit travelling waves and invariant algebraic curves // Nonlinearity. 2015. V. 28. № 6. P. 1597.
49. Hasnain S., Saqib M. Numerical study of one dimensional fishers kpp equation with finite difference schemes // Am. J. Comput. Math. 2017. V. 7. P. 70–83.
50. Пикулин С.В. О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 244–252.
51. Khater M.M.A., Attia R.A.M., Lu D. Computational and numerical simulations for the nonlinear fractional Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov (FKPP) equation // Physica Scripta. 2020. V. 95. № 5. P. 055213.
52. Khater M.M.A., Attia R.A.M., Abdel-Aty A.-H. et al. Abundant analytical and numerical solutions of the fractional microbiological densities model in bacteria cell as a result of diffusion mechanisms // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 136. P. 109824.

53. *Lopez J.L.* On nonstandard chemotactic dynamics with logistic growth induced by a modified complex Ginzburg — Landau equation // *Studies in Appl. Math.* 2021. Access mode: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/sapm.12440>.
54. *Chemeda H. M., Negassa A. D., Merga F. E.* Compact finite difference scheme combined with Richardson extrapolation for Fisher's equation // *Math. Problems in Engineer.* 2022. Access mode: <https://doi.org/10.1155/2022/7887076>.
55. *Zhang W, X. Hu, Ling X., Li W.* Approximate analytical solution of the generalized Kolmogorov — Petrovsky — Piskunov equation with cubic nonlinearity // *Acta Math. Applicatae Sinica, English Series.* 2023. V. 2.
56. *Drabek P., Zahradnikova M.* Traveling waves for generalized Fisher — Kolmogorov equation with discontinuous density dependent diffusion // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023. V. 46. № 11. P. 12064—12086.
57. *Wongsaijai B., Aydemir T., Ak T., Dhawan S.* Analytical and numerical techniques for initial-boundary value problems of Kolmogorov — Petrovsky — Piskunov equation // *Numer. Meth. Partial Differential Equations.* 2024. V. 40. № 1. P. e22693.
58. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
59. *Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., Zang T.* Spectral Methods in Fluid Dynamics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
60. *Солуян С.И. Хохлов Р.В.* Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // *Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия.* 1961. № 3. С. 52—61.
61. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
62. *Хохлов Р.В.* К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // *Радиотехника и электроника.* 1961. V. 6. № 6. P. 917—925.
63. *Cole J.D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // *Quarterly of Appl. Math.* 1951. V. 9. № 3. P. 225—236.
64. *Вабищевич П. Н., Васильева М. В.* Явно— неявные схемы для задач конвекции—диффузии—реакции // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2012. Т. 15. № 4. С. 359—369.
65. *Кобельков Г.М.* Численные методы. Ч.2. Мехмат МГУ, 2024. Доступно по адресу: https://vk.com/wall-215637188_162.
66. *Crank J., Nicolson P.* A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heatconduction type // *Math. Proceed. Cambridge Philosophic. Soc.* 1947. № 49. P. 50—67.
67. *Лыкосов В.Н., Глазунов А.В., Кулямин Д.В. и др.* Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы. М.: МГУ, 2012.
68. *Чуа Л.О., Лин Пен-Мин.* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. М.: Энергия, 1980.
69. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
70. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHOD FOR NONLINEAR KOLMOGOROV–PETROVSKY–PISKUNOV TYPE EQUATIONS

S. I. Bezrodnykh, S. V. Pikulsh*

*119333 Moscow, GSP-1, Vavilov str., 44, Federal Research Center
“Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Russia*

**e-mail: spikulin@gmail.com*

***e-mail: sbzrodnykh@mail.ru*

Received: 15.05.2024

Revised: 13.06.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The question of the effective solution of the basic initial boundary value problems for spatially one-dimensional nonlinear equations of the parabolic type describing reaction–diffusion processes is considered. Such equations include the Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov and Burgers equations. For these problems, a numerical analytical method based on implicit discretization of the differential operator in combination with explicit Adams–Bashforth extrapolation for the nonlinear term of the equation is proposed. At the same time, a new efficient algorithm based on analytical representations using an explicit form of a fundamental solution system has been developed to solve a sequence of emerging linear problems. The effectiveness of the developed method and its advantages over some traditional algorithms have been demonstrated for a number of complex model examples.

Keywords: nonlinear parabolic equations of the reaction–diffusion–advection type, Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation, Burgers equation, singular perturbation, effective numerical and analytical methods.