

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2024 г. Е. Д. Котина^{1,*}, Д. А. Овсянников^{1,**}, Д. С. Харченко^{1,***}

¹199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*e-mail: e.kotina@spbu.ru

**e-mail: d.a.ovsyannikov@spbu.ru

***e-mail: st098139@student.spbu.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024 г.

Переработанный вариант 25.04.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

В статье рассматривается новый подход к построению поля скоростей, который основан на методах теории управления и оптимизации динамики ансамблей траекторий. Данный подход не исключает возможности, что яркость вдоль траекторий движения может изменяться. Это позволяет строить направленные методы оптимизации для определения оптических и неоптических потоков. Поле скоростей задается как некоторая функция, зависящая от вектора произвольных параметров, которые определяются в результате минимизации функционала, заданного на ансамбле траекторий, определяемом этим полем скоростей. Разработан алгоритм для решения задач восстановления поля скоростей с использованием аналитического представления вариации исследуемого функционала по параметрам, определяющим поле скоростей, и с учетом вариации по времени. В работе приведены результаты тестирования предложенного алгоритма, в том числе, с разбиением изображения на подобласти. Библ. 28. Фиг. 10.

Ключевые слова: поле скоростей, оптический поток, пучок траекторий, функционал качества, вариация функционала, оптимизация, обработка изображений.

DOI: 10.31857/S0044466924110035, EDN: KGVSNM

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема восстановления поля скоростей может возникать при решении различных теоретических и практических задач [1–6]. В задачах обработки изображений она известна, как проблема определения оптического потока между двумя последовательными изображениями [7–9], т.е. нахождения векторного поля, которое задает трансформацию первого изображения во второе. Различные подходы к построению оптического потока известны в литературе и широко используются на практике [7–12]. Ключевым предположением является предположение постоянства яркости (или другой характеристики изображения) вдоль траектории движения. Наиболее известные методы построения оптического потока — это методы Хорна–Шанка [7], Лукаса–Канаде [8], Фарнебака [9] и их модификации, методы, использующие аппарат фазового и корреляционного анализа [4–6]. Метод Лукаса–Канаде основывается на двух предположениях — о том, что яркость вдоль траекторий движения остается постоянной, и о том, что соседние пиксели смещаются одинаково. Вследствие второго предположения отыскание поля скоростей происходит для некоторой окрестности. Отыскание решения происходит путем минимизации целевого функционала методом наименьших квадратов. Данный метод хорошо справляется с поставленной задачей при малых смещениях, но в результате получается неплотный оптический поток. В методе Хорна–Шанка в качестве дополнительного условия рассматривается предположение о достаточной гладкости оптического потока на всем изображении. Отыскание поля скоростей происходит путем решения уравнений Эйлера–Лагранжа, которые сводятся к системе разностных уравнений большого порядка и решаются блочными итерационными методами [13]. В отличие от метода Лукаса–Канаде, данный метод позволяет строить плотный оптический поток, но является более чувствительным к шумам, а также требует постановки граничных условий. Метод Фарнебака основывается на аппроксимации окрестности каждого пикселя квадратичной формой, описывающей сигнал каждой окрестности. Отыскание параметров квадратичной формы,

описывающей поле скоростей, происходит с использованием взвешенного метода наименьших квадратов, где весовая функция обычно является гауссовой. Стоит также отметить, что корреляционные методы за счет развитых итерационных подходов позволяют получать достаточно точные оценки поля скоростей. Во всех подходах предполагаются малые смещения на рассматриваемых изображениях.

Задача построения поля скоростей в последнее время также решается при помощи подходов, основанных на использовании нейронных сетей [14–16], для обучения которых требуется достаточно большое количество данных.

В данной работе рассматривается принципиально новый подход, который основан на методах оптимизации и управления пучками траекторий [17, 18]. Предполагается, что яркость вдоль траекторий движения может изменяться. Поле скоростей задается как некоторая функция, зависящая от вектора произвольных постоянных. Предлагается алгоритм построения поля скоростей на основе аналитического представления градиента исследуемого функционала, с учетом вариации по времени и с разбиением изображения на подобласти, с тем, чтобы получить возможность искать поле скоростей для каждой области, определяемое отдельной системой. В этом случае появляется возможность более эффективно использовать линейную модель для построения поля скоростей.

2. ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Оптимизационный подход к определению поля скоростей (поля перемещений) в задачах обработки изображений, основанный на методах управления пучками траекторий [17, 18], был предложен в работах авторов статьи, как на основе непрерывных [19–21], так и на основе дискретных систем [22, 23].

В данной работе рассматривается математическая модель построения оптических и неоптических потоков на основе непрерывных систем. Рассматриваются общая модель движения на основе нелинейной системы и линейная модель. Предлагается алгоритм построения поля скоростей с учетом вариации исследуемого функционала по времени. Заметим, что данный подход может применяться не только для решения задач обработки изображений, но и для других прикладных задач, связанных с восстановлением поля скоростей, поэтому далее дается общая постановка задачи для n -мерного случая, а в случае планарных изображений, имеем $n = 2$.

Рассмотрим общую модель движения

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (1)$$

Здесь $t \in [0, T]$ — время, $x \in R^n$ есть n -мерный вектор фазовых координат, $u \in U \subset R^r$ есть r -мерный вектор параметров, f — достаточно гладкая n -мерная вектор-функция.

Решение системы (1) обозначим через $x_t = x(t) = x(t, x_0, u)$, $t \in [0, T]$, $x_0 \in M_0$, M_0 — множество начальных значений. Предполагаем далее, что решение задачи Коши для системы (1) определено на интервале $[0, T]$ при произвольном управлении $u \in U$ и любом начальном условии $x_0 \in M_0$. Обозначим через $M_{t,u} = \{x(t, x_0, u), x_0 \in M_0\}$ сечение пучка траекторий в момент времени t при фиксированном векторе u [21].

Введем функцию $\rho = \rho(t, x)$, называемую плотностью распределения и характеризующую интенсивность распределения некоторых частиц в фазовом пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$.

Пусть $\rho_0(x)$ есть некоторая заданная плотность распределения. Уравнение, описывающее изменение плотности распределения $\rho_0(x)$ в фазовом пространстве с течением времени в силу уравнений (1), имеет вид [17–19]

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + \rho(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0, \quad (2)$$

где $\operatorname{div}_x f(t, x, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_i}$.

При этом в начальный момент имеем

$$\rho(0, x) = \rho_0(x). \quad (3)$$

Заметим, что функция $\rho = \rho(t, x)$ может быть, в частности, количественной характеристикой (яркостью) изображения, определяемой, например, интенсивностью распределения радиофармпрепарата [19, 26]. Учитывая это будем далее трактовать ее, как яркость изображения.

Уравнение изменения яркости изображения вдоль траекторий системы (1) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt}|_{(1)} = -\rho \operatorname{div}_x f(t, x(t), u), \quad (4)$$

с начальным условием $\rho(0, x_0) = \rho_0(x_0)$, $x_0 \in M_0$.

Отметим, что в случае $\operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0$ мы имеем оптический поток, в противном случае имеет место неоптический поток.

Пусть $\rho_0(x)$ — известная яркость некоторого изображения в момент $t = 0$. Пусть нам также известна яркость изображения $\hat{\rho}(x)$ при $t = T$. Предполагаем, что движение определяется системой (1), а изменение яркости определяется уравнением (2). Возникает следующая задача.

Необходимо найти вектор параметров u , который определит вектор-функцию $f(t, x, u)$, такую, что при $t = T$ яркость изображения (плотность распределения РФП), определяемая уравнением (2) при условии (3), совпала бы с яркостью изображения $\hat{\rho}(x)$:

$$\rho(T, x) = \hat{\rho}(x). \quad (5)$$

С этой целью рассмотрим задачу минимизации следующего функционала на решениях системы (1), (2):

$$J(u) = \int_{M_{T,u}} g(x_T, \rho(T, x_T)) dx_T, \quad (6)$$

где $g(x, \rho)$ — неотрицательная непрерывно-дифференцируемая по своим параметрам функция. В частности, мы можем положить $g(x, \rho) = q(x)(\rho(T, x(T, x_0, u)) - \hat{\rho}(x))^2$, где $q(x)$ — весовая функция, позволяющая выделить значимые области изображения. Например, можно рассматривать функцию $q = e^{-(x-\bar{x})^2}$, которая позволяет выделить центр изображения или области интереса, где $\bar{x}$ — координаты центра; также можно выделять центр тяжести множества [26].

Минимизируя функционал (6), мы определяем вектор параметров u и восстанавливаем функцию $f(t, x, u)$, таким образом, определяем поле скоростей, задаваемое (1).

Используя методы исследования функционалов типа (6), задаваемых на сечении пучка траекторий в момент T , и учитывая, что T не фиксировано, вариацию функционала (6) можно представить в виде [17–19]

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_0^T \int_{M_{t,u}} (\psi^*(t, x_t) \Delta_u f(t, x_t, u) + \lambda(t, x_t) \Delta_u \operatorname{div}_x f(t, x_t, u)) dx_t dt - \\ & - \Delta T \int_{M_{T,u}} H(T, x_T, \lambda(T, x_T), \psi(T, x_T), u) dx_T. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее знак $*$ означает транспонирование вектора или матрицы,

$$H(t, x, \lambda, \psi, u) = \psi^*(t, x) f(t, x, u) + \lambda(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u),$$

$$\Delta_u f(t, x_t, u) = f(t, x_t, u + \Delta u) - f(t, x_t, u),$$

$$\Delta_u \operatorname{div}_x f(t, x_t, u) = \operatorname{div}_x f(t, x_t, u + \Delta u) - \operatorname{div}_x f(t, x_t, u).$$

Вспомогательные вектор-функция $\psi(t, x)$ и скалярная функция $\lambda(t, x)$ удовлетворяют вдоль траекторий системы (1) уравнениям

$$\frac{d\psi}{dt} = - \left(\frac{\partial f(t, x(t), u)}{\partial x} + E \operatorname{div}_x f(t, x(t), u) \right)^* \psi - \lambda \left(\frac{\partial \operatorname{div}_x f(t, x(t), u)}{\partial x} \right)^*, \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \operatorname{div}_x f(t, x(t), u). \quad (9)$$

При конечных условиях

$$\psi^*(T, x(T)) = - \frac{\partial g(x(T), \rho(T, x(T)))}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\lambda(T, x(T)) = -g(x(T), \rho(T, x(T))) + \frac{\partial g(x(T), \rho(T, x(T)))}{\partial \rho} \rho(T, x(T)). \quad (11)$$

В формуле (8) и далее E — единичная матрица.

Выражения для компонент градиента функционала (6) имеют вид

$$\frac{\partial J}{\partial u} = - \int_0^T \int_{M_{t,u}} \left(\psi^*(t, x_t) \frac{\partial f(t, x_t, u)}{\partial u} + \lambda(t, x_t) \frac{\partial \operatorname{div}_x f(t, x_t, u)}{\partial u} \right) dx_t dt, \quad (12)$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} = - \int_{M_{T,u}} H(T, x_T, \lambda(T, x_T), \psi(T, x_T), u) dx_t. \quad (13)$$

На основе выражений (12), (13) для компонент градиента функционала можно строить различные методы направленного поиска вектора параметров u . Заметим, что исследование функционалов с нефиксированным временем позволит восстанавливать оптические и неоптические потоки не только для случаев достаточно малых смещений, таким образом, появляется возможность реконструкции динамики исследуемых объектов, что отличает данный подход от имеющихся подходов.

Линейная модель. Рассмотрим линейную модель движения

$$\dot{x} = Ax + C. \quad (14)$$

Здесь A – квадратная матрица: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, C – вектор: $C = \{c_i\}_{i=1}^n$. Таким образом, искомый вектор параметров будет состоять из компонент матрицы A и вектора C :

$$u = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, c_1, \dots, c_n)^*.$$

Исходя из уравнения (4), можно записать выражение для изменения яркости вдоль траекторий движения

$$\rho(t, x(t, x_0, u)) = \rho_0(x_0) \exp \left[- \int_0^t \operatorname{div}_x f(\tau, x, u) d\tau \right] = \rho_0(x_0) e^{-sp(A)t}.$$

Здесь $sp(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ – след матрицы A .

Заметим, что для оптического потока из условия $\operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0$ при использовании линейной модели для данного случая, следует выполнение равенства $sp(A) = 0$.

Выражения (12), (13) для компонент градиента функционала (6), когда поле скоростей, определяется системой (14), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_{ii}} &= - \int_0^T \int_{M_{t,u}} [\psi_i x_i + \lambda] dx_t dt, \quad i = j, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial J}{\partial a_{ij}} &= - \int_0^T \int_{M_{t,u}} \psi_i x_j dx_t dt, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial J}{\partial c_i} &= - \int_0^T \int_{M_{t,u}} \psi_i dx_t dt, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial J}{\partial T} &= - \int_{M_{T,u}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j + c_i) \psi_i + sp(A) \lambda \right) dx_T. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (8), (9) примут следующий вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = -[A + sp(A)E]^* \psi, \quad (16)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -sp(A)\lambda \quad (17)$$

с конечными условиями (10), (11).

Полученные выражения (15) можно использовать для реализации оптимизационного алгоритма построения поля скоростей при рассмотрении линейной модели движения.

3. ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ

На основе предложенного оптимизационного подхода был разработан и численно реализован алгоритм построения поля скоростей. В силу полученного представления компонент градиента функционала в аналитическом виде, минимизация функционала проводилась градиентным методом.

Схема работы алгоритма.

Шаг 1. Ввод исходных данных ρ_0 и $\hat{\rho}$, задание конкретной модели (вида функции f), выбор начального приближения вектора параметров u_0 и времени T_0 , ввод неотрицательных констант, использующихся при задании условий остановки работы алгоритма. Номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Вычисление интегрального функционала $J(u_k, T_k)$ на основе формулы (6).

Шаг 3. Определение вспомогательных функций ψ и λ путем интегрирования уравнений (8), (9) при конечных условиях (10), (11); для линейного случая упрощенной системы (16), (17).

Шаг 4. Вычисление компонент градиента функционала $\frac{\partial J}{\partial u}|_{u=u_k}$ и $\frac{\partial J}{\partial T}|_{T=T_k}$ на основе выражений (12), (13), для линейной модели — формулы (15).

Шаг 5. Определение значений параметров на следующем итерационном шаге по формулам:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha \frac{\partial J}{\partial u}|_{u=u_k},$$

$$T^{k+1} = T^k - \bar{\alpha} \frac{\partial J}{\partial T}|_{T=T_k},$$

$\alpha, \bar{\alpha}$ — параметры градиентного спуска.

Шаг 6. Проверка условий остановки (достижение заданной точности или заданного количества итераций):

условия остановки не выполнены — $k = k + 1$, возвращение на шаг 2;

условия остановки выполнены — переход на шаг 7.

Шаг 7. Построение поля скоростей, формула (1) — общий случай, (14) — для линейной модели.

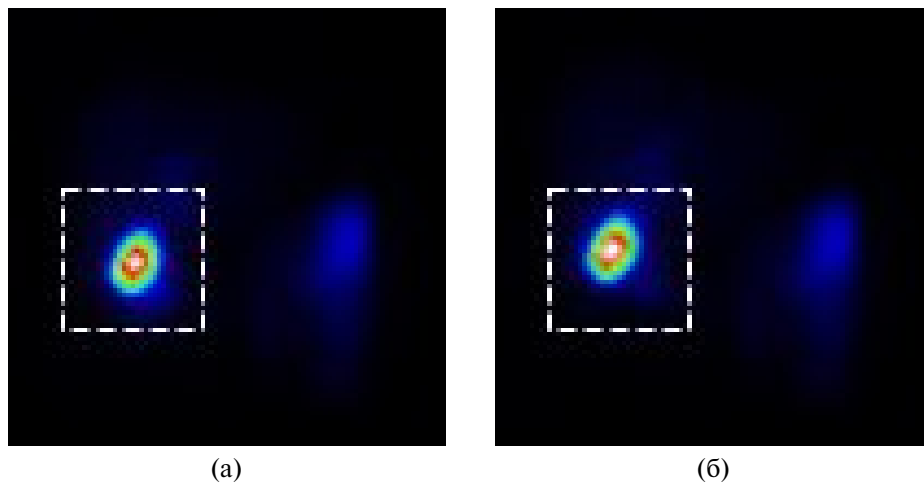
Приведенный выше алгоритм позволяет определить значения искомого вектора параметров u и времени T , и построить поле скоростей в каждой точке изображения по формуле (1) или для линейной модели по формуле (14). Заметим, что в данном подходе нет принципиальных ограничений на величину смещений.

Данный алгоритм был реализован для линейного случая. В основе нахождения вспомогательной вектор функции ψ на шаге 3 лежит метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который определяет трудоемкость алгоритма интегрирования. Отметим, что выражение для скалярной функции λ в линейном случае, исходя из (17), (11), можно сразу записать в явном виде $\lambda = \lambda(T)e^{sp(A)(T-t)}$. Если говорить о производительности реализации предложенного алгоритма, то можно сказать, что скорость анализа составляет ~ 28 мкс на вектор скорости при размере области 64×64 пикселя на одну итерацию. Но стоит отметить, что скорость работы алгоритма может быть значительно увеличена путем использования параллельных вычислений, так как в рамках одной итерации используются данные только с прошлой итерации. Помимо этого, как и для случая с корреляционными алгоритмами [24], могут быть использованы вычисления с применением GPU.

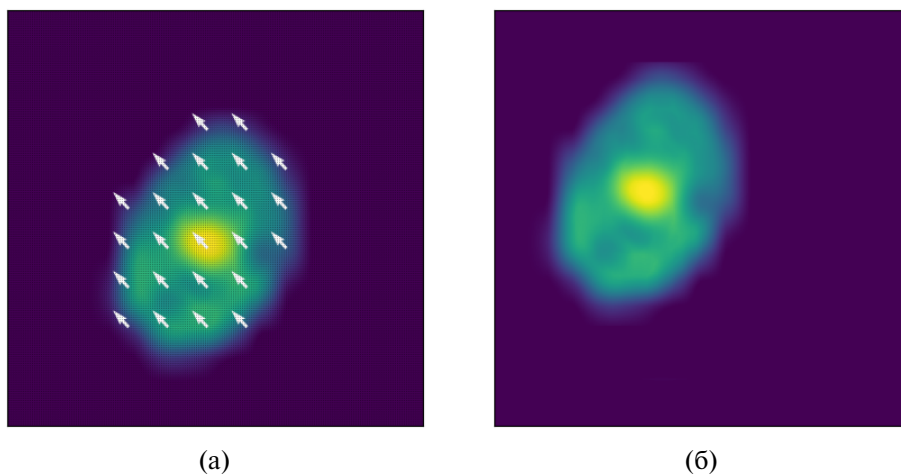
4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Алгоритм был апробирован на тестовых изображениях. В данном разделе приведены результаты работы алгоритма для различных модельных изображений, в частности, радионуклидных. В одном из численных экспериментов была рассмотрена пара изображений, на которых присутствует движение области интереса при проведении динамического радионуклидного исследования [25]. Исходные изображения с выделенными областями интереса представлены на фиг. 1а,б. Далее описан один из возможных алгоритмов для выделения соответствующих областей на изображениях с целью сокращения вычислений. Для выделенных областей был применен приведенный выше алгоритм построения поля скоростей (фиг. 2а).

Также были рассмотрены результаты работы алгоритма с учетом и без учета вариации по времени. На фиг. 3а–в. приведены графики изменения компонент градиента и график изменения компонент вектора C в зависимости от номера итерации без варьирования времени и с учетом вариации по времени.



Фиг. 1. Изображение подвижной области интереса: (а) — кадр 1, (б) — кадр 2.



Фиг. 2. Поле скоростей, построенное на выделенной области: (а) — кадр 1, (б) — кадр 2.

Здесь $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ обозначены компоненты вектора C для случая, когда алгоритм учитывает вариацию по времени T , c_1, c_2 — без учета вариации по времени.

Таким образом, при учете вариации по времени для данной пары изображений необходимые параметры были определены уже на 8 итерации, в то время как без учета вариации по времени идентификация значений произошла только к 13 итерации.

4.1. Оптимизационный алгоритм с разбиением на подобласти

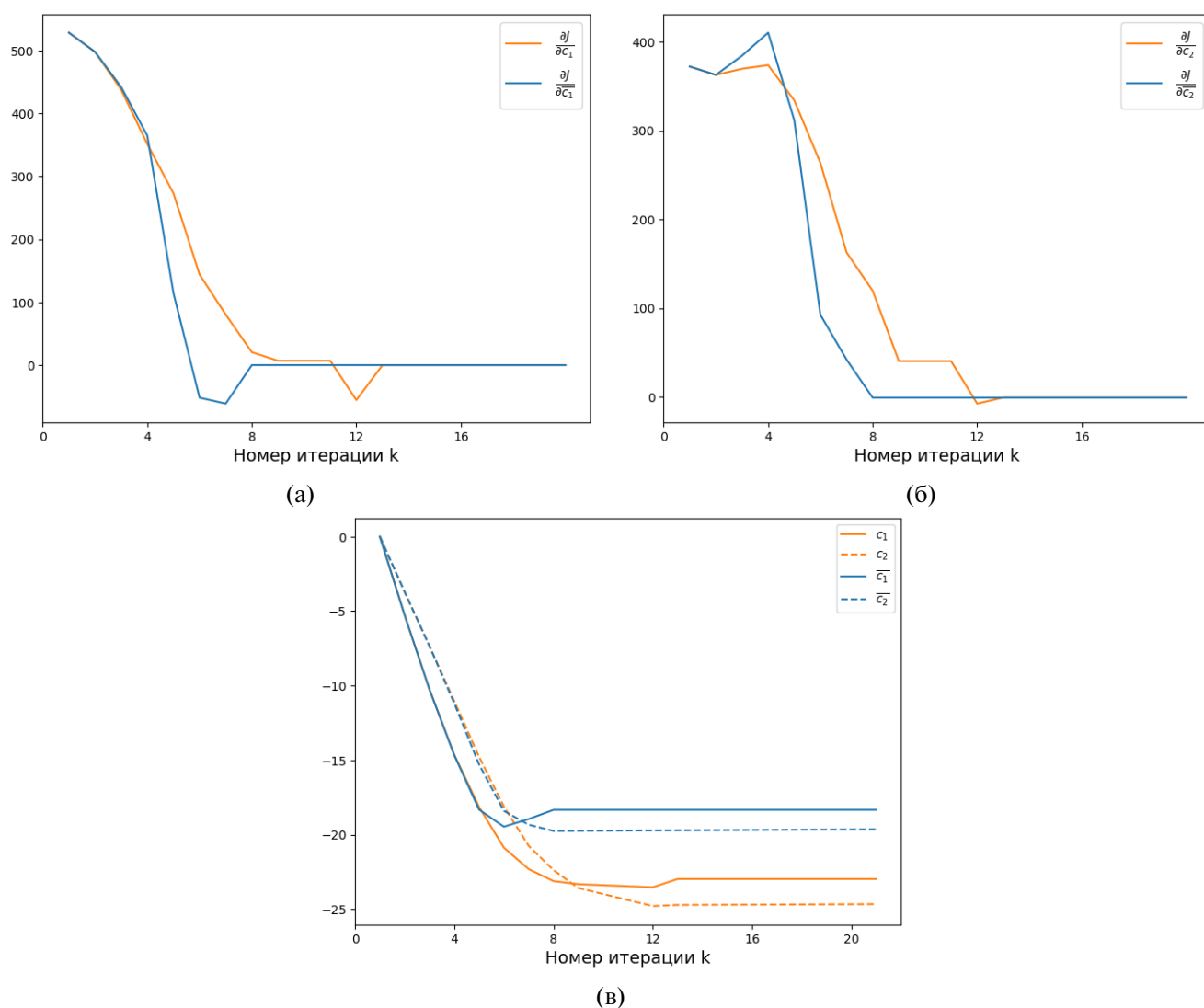
Как правило, описать поле скоростей одной системой для всего изображения бывает затруднительно в силу того, что на изображениях могут присутствовать сложные движения нескольких объектов. Разбивая изображения на подобласти, мы получаем возможность искать поле скоростей для каждой области, определяемое отдельной системой, что может существенно упростить решение задачи. Здесь продуктивно может использоваться линейная модель.

В качестве примера варианта выделения областей, был разработан алгоритм разбиения изображений на подобласти на основе морфологического подхода. Работу алгоритма можно кратко описать следующей блок-схемой, см. фиг. 4.

После выделения областей, в которых присутствует движение, к каждой из них может быть применен описанный выше алгоритм построения поля скоростей.

Данный алгоритм был протестирован на изображениях, на которых присутствует несколько движущихся объектов (фиг. 5а,б). Здесь пунктирными линиями выделены области, внутри которых есть движение между последовательными кадрами.

После того, как было произведено разбиение изображений, к каждой из подобластей был применен оптимизационный алгоритм построения поля скоростей. Результирующее поле скоростей приведено на фиг. 6.



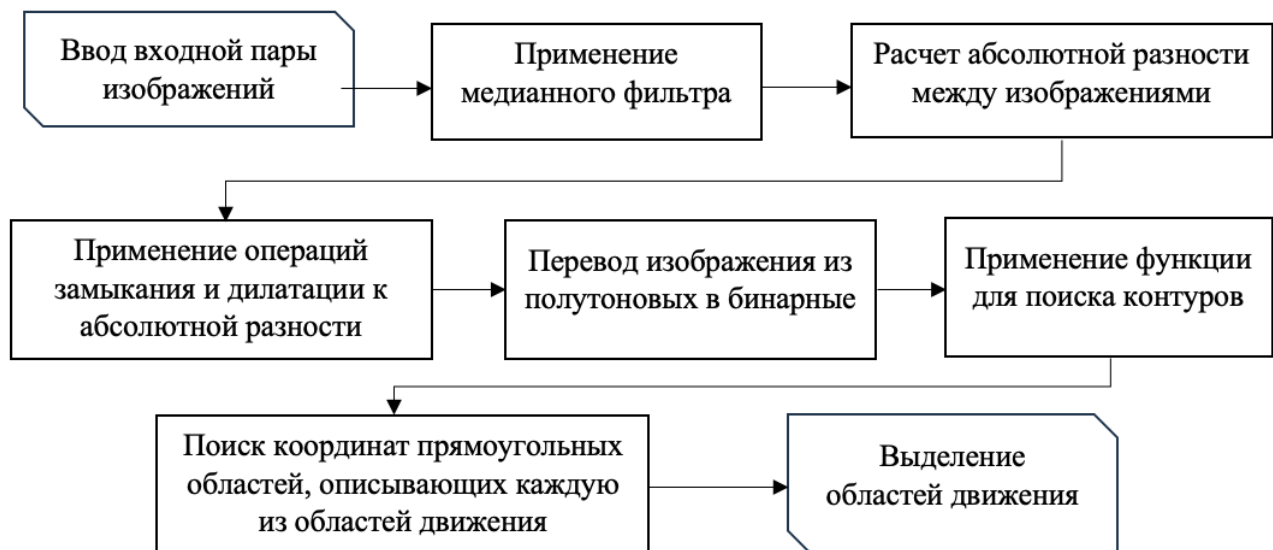
Фиг. 3. (а) — график изменения компоненты 1, (б) — компоненты 2, (в) — график изменения компонент вектора от номера итерации

4.2. Коррекция движения

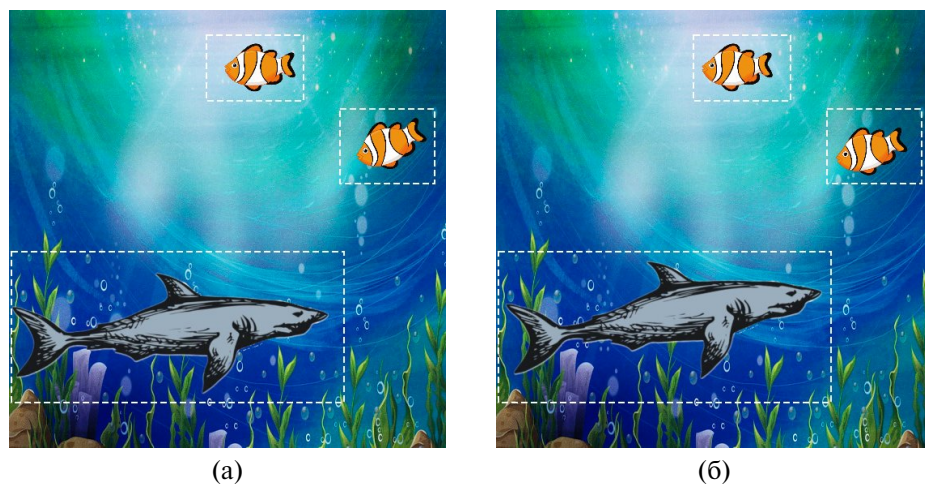
Одним из направлений применения алгоритма построения поля скоростей является диагностическая медицина. В процессе проведения радионуклидного исследования может иметь место движение пациента, что при анализе результатов может привести к их неправильной интерпретации. Поэтому требуется выполнить коррекцию движения для восстановления исходного положения, чтобы получить более точные результаты исследования. На фиг. 7 представлена иллюстрация коррекции движения при проведении динамического исследования головного мозга методом позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ) [27].

Вычисляя поле скоростей, мы можем определить характер и направление движения исследуемого объекта, что в дальнейшем позволит произвести коррекцию. В ходе численного эксперимента были рассмотрены модельные томосцинтиграммы, на которых присутствует движение между кадрами. Был применен алгоритм построения поля скоростей, после чего была выполнена соответствующая коррекция. На фиг. 8–10 приведены результаты работы алгоритма. Поле скоростей представлено на трансверсальном, сагиттальном и корональном срезах. Для каждого из срезов представлены изображения до выполнения коррекции движения, поле скоростей, в направлении которого требуется выполнить коррекцию, и изображение после коррекции.

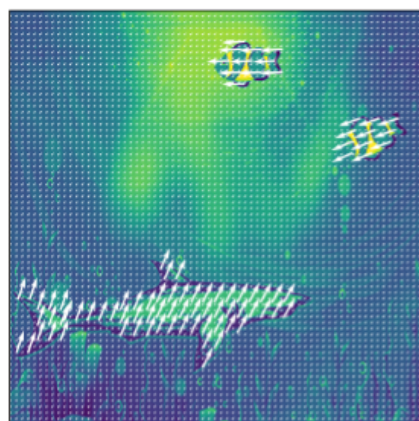
Таким образом, была произведена коррекция движения на модельных томосцинтиграммах в соответствии с полем скоростей, построенным с использованием предложенного в данной статье оптимизационного алгоритма.



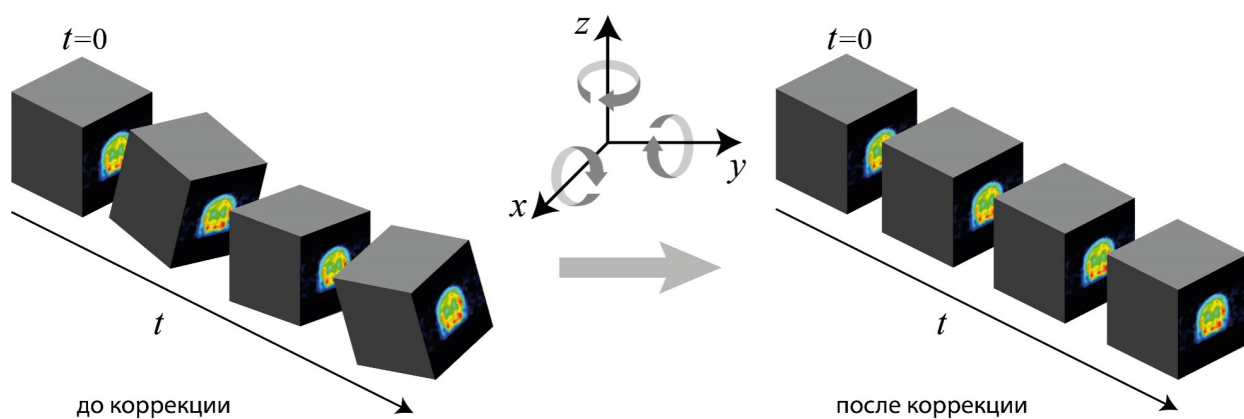
Фиг. 4. Блок-схема работы алгоритма разбиения изображений



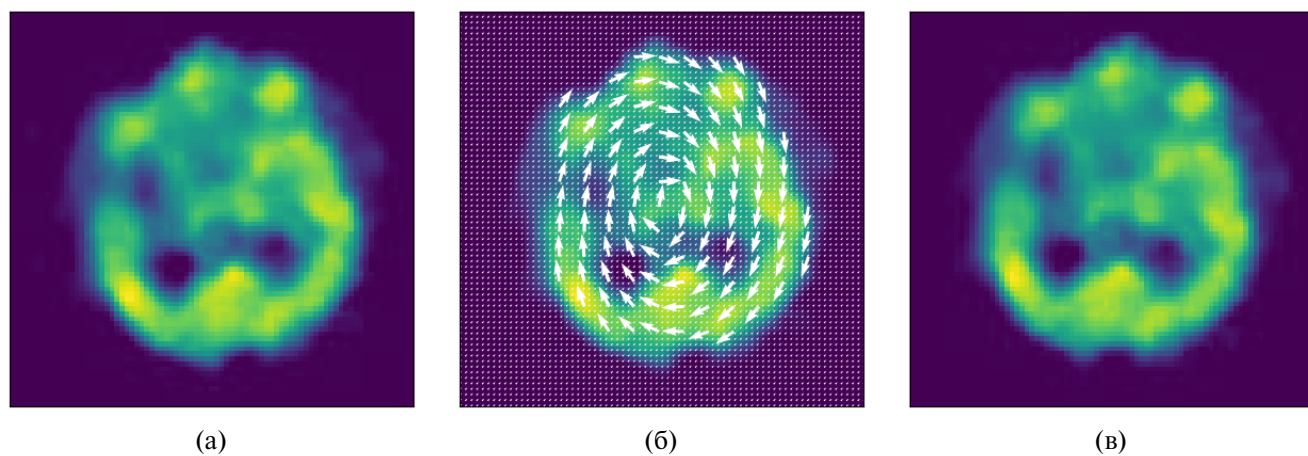
Фиг. 5. (а) — первый кадр с выделенными областями, (б) — второй кадр с выделенными областями.



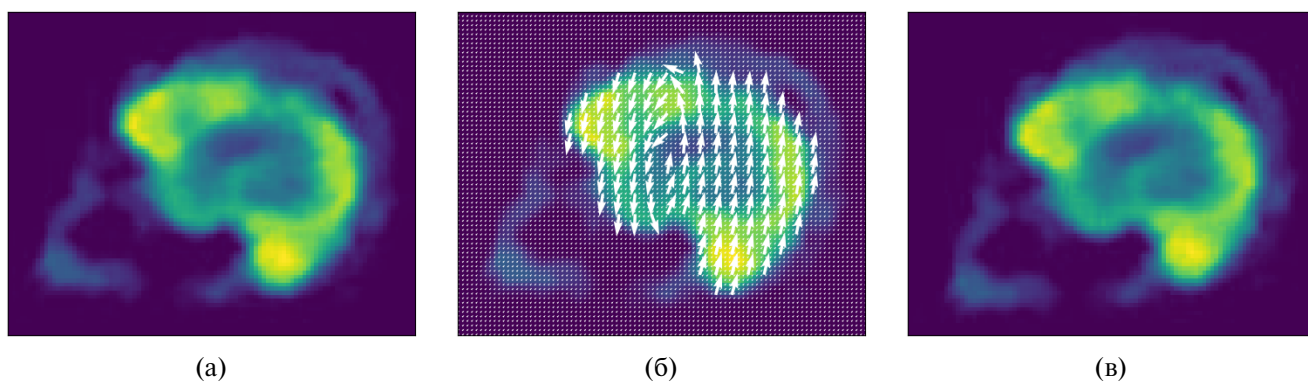
Фиг. 6. Поле скоростей.



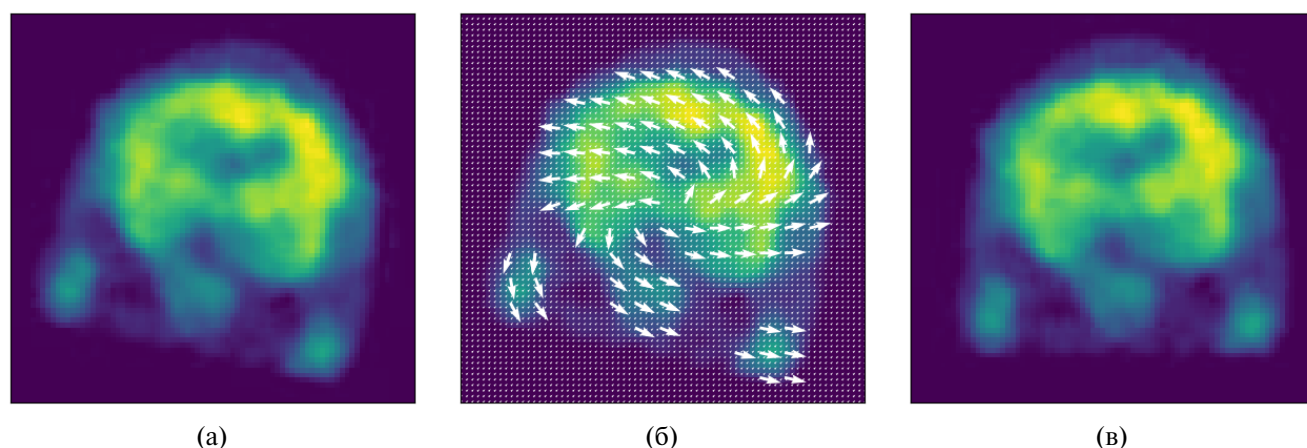
Фиг. 7. Иллюстрация коррекции движения.



Фиг. 8. (а) — трансверсальный срез-до выполнения коррекции, (б) — поле скоростей, (в) — трансверсальный срез-после выполнения коррекции.



Фиг. 9. (а) — сагиттальный срез-до выполнения коррекции, (б) — поле скоростей, (в) — сагиттальный срез-после выполнения коррекции.



Фиг. 10. (а) — корональный срез-до выполнения коррекции, (б) — поле скоростей, (в) — корональный срез-после выполнения коррекции.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение данного алгоритма может быть полезно в различных областях обработки изображений, для обнаружения движения и его коррекции, отслеживания траекторий движения, построения контуров на изображении, для анализа изображений. Особый интерес и развитие данный подход может иметь в радионуклидных исследованиях, для получения, как визуальной, так и количественной информации при обработке диагностических изображений. Реализован алгоритм определения поля скоростей на основе аналитического представления вариации исследуемого функционала. Впервые был реализован алгоритм с учетом вариации по времени, что позволяет проводить реконструкцию динамики и уменьшить время обработки. Реализован алгоритм с разбиением изображения на подобласти, с тем, чтобы получить возможность искать поле скоростей для каждой области, определяемое отдельной системой. В этом случае появляется возможность более эффективно использовать линейную модель. Для разбиения изображения использовался, в частности, алгоритм на основе морфологических операций [28], который отлично зарекомендовал себя при решении задач сегментации изображений.

Полученные результаты могут быть применены для обработки различных последовательностей изображений для определения и анализа изменений на кадрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ovsyannikov D. A., Kotina E. D.* Reconstruction of velocity field // Proc. of ICAP2012, Rostock-Warnemunde, Germany. 2012. P. 256–258.
2. *Геча В.Я., Жилнев М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В.* Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты // Russian Technological Journal. 2020. Т. 8. № 1. С. 97–109.
3. *Скляренко М.С., Фрик П.Г., Ястребов А.Г.* Реконструкция поля скорости по распределенным трассерам // Вычисл. методы и программирование. ВЦ МГУ. 2006. Т. 7. № 1. С. 45–50.
4. *Токарев М.П., Маркович Д.М., Бильский А.В.* Адаптивные алгоритмы обработки изображений частиц для расчета мгновенных полей скорости // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12. № 3. С. 109–131.
5. *Зарипов Д.И., Токарев М.П., Лукьянов А.А., Маркович Д.М.* Бессеточный планарный метод Particle Image Velocimetry // Вычисл. методы и программирование. 2022. Т. 23. № 4. С. 328–338.
6. *Карчевский М. Н., Токарев М. П., Ягодницына А. А., Козинкин Л. А.* Корреляционный алгоритм расчета полей скорости в микроканальных течениях с высокой разрешающей способностью // Теплофиз. и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 6. С. 775–784.
7. *Horn B.K.P., Schunck B.G.* Determining optical flow // Artificial Intelligence. 1981. № 17. P. 185–203.

8. *Lucas B. D., Kanade T.* An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proc. of Imaging Understanding Workshop. 1981. P. 121–130.
9. *Barron J., Fleet D.* Performance of optical flow techniques // Internat. Journal Computer Vision. 1994. V. 12. P. 43–77.
10. *Farneback G.* Two-Frame Motion Estimation Based on Polynomial Expansion // Lecture Notes in Computer Science. 2003. T. 2749. C. 363–370.
11. *Papenberg, N., Bruhn, A., Brox, T., Didas, S. and Weickert, J.* Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping // Internat. Journal of Computer Vision. 2006. V. 67. № 2. P. 141–158.
12. *Bruhn, A., Weickert, J., Schnorr, C.* Lucas/Kanade Meets Horn/Schunck: Combining Local and Global Optic Flow Methods // Internat. Journal of Computer Vision. 2005. V. 61. № 3. P. 211–231.
13. *Котина Е. Д.* О сходимости блочных итерационных методов // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 3. С. 41–55.
14. *Bailer C., Varanasi K., Stricker D.* CNN-based patch matching for optical flow with thresholded hinge embedding loss // Proc. of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017. C. 3250–3259.
15. *Fischer P., Dosovitskiy A., Ilg E., Hausser P., Hazrbas C., Golkov V.* FlowNet: Learning Optical Flow with Convolutional Networks // Proc. of the IEEE Internat. Conference on Computer Vision (ICCV). 2015.
16. *Lin Z., Liang T., Xiao T., Wang Y., Tang Z., Yang M.* FlowNAS: Neural Architecture Search for Optical Flow Estimation // Computer Vision and Pattern Recognition. 2022.
17. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
18. *Овсянников Д. А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
19. *Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M.* Optimization approach to the velocity field determining problem // Cybernetics and Physics. 2022. V. 11. № 3. P. 131–135.
20. *Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V.* Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. V. 7. № 4. P. 174–181.
21. *Kotina, E., Bazhanov, P., Ovsyannikov, D.* Optimization Method of the Velocity Field Determination for Tomographic Images // Stability and Control Processes. SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. 2022. Springer, Cham.
22. *Котина Е.Д., Леонова Е.Б., Плоских В.А.* Обработка радионуклидных изображений с использованием дискретных систем // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 543–553.
23. *Kotina E. D., Leonova E. B., Ploskikh V. A.* Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 39. С. 3–16.
24. *Nazarov, N. A., Terekhov, V. V.* High level GPU-accelerated 2D PIV framework in Python // Computer Physics Communications. 2024. T. 295. № 109009.
25. *Kotina, E., Ploskikh, V., Shirikolobov, A.* Digital Image Processing in Nuclear Medicine. Physics of Particles and Nuclei. 2022. V. 53. № 2. P. 535–540.
26. *Овсянников Д. А., Котина Е. Д.* О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 51–65.
27. *Бажанов П. В.* Исследование модели процесса сбора проекционных данных ПЭТ // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 276–281.

28. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Издание 3-е, исправленное и дополненное. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.

AN OPTIMIZATION APPROACH TO THE PROBLEM OF DETERMINING THE VELOCITY FIELD IN IMAGE PROCESSING PROBLEMS

E. D. Kotina*, D. A. Ovsyannikov**, D. S. Kharchenko***

199034 St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg State University

*e-mail: e.kotina@spbu.ru

**e-mail: d.a.ovsyannikov@spbu.ru

***e-mail: st098139@student.spbu.ru

Received: 18.03.2024

Revised: 25.04.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The article considers a new approach to the construction of the velocity field, which is based on the methods of control theory and optimization of dynamics of ensembles of trajectories. This approach does not exclude the possibility that the brightness along the trajectories may vary. This makes it possible to build directional optimization methods for determining optical and non-optical flows. The velocity field is defined as some function depending on the vector of arbitrary parameters, which are determined as a result of minimizing the functional set on the ensemble of trajectories defined by this velocity field. An algorithm has been developed to solve the problems of restoring the velocity field using an analytical representation of the variation of the functional under study according to the parameters determining the velocity field, and taking into account the variation in time. The paper presents the results of testing the proposed algorithm, including splitting the image into subdomains.

Keywords: velocity field, optical flow, trajectory beam, quality functional, functional variation, optimization, image processing.