

К ИЗУЧЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ СУММ РЯДОВ И ИХ НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ

© 2024 г. М. Ю. Ватолкин^{1,*}¹426069 Ижевск, ул. Студенческая, 7, Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, Россия

*e-mail: vmyu6886@gmail.com

Поступила в редакцию 17.02.2024 г.

Переработанный вариант 30.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

В теории матричного уравнения $\dot{X} = A(t)X$ большую роль играет известное представление решения в виде ряда. В случае скалярного уравнения n -го порядка также интересно получить представление решения в виде скалярного ряда, члены которого строятся по коэффициентам исходного уравнения. Изучаются различные представления фундаментальной системы решений однородного квазидифференциального уравнения n -го порядка в виде скалярных рядов, члены которых строятся по коэффициентам исходного уравнения. В качестве примера в виде таких рядов строятся представления элементов фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, рассматриваемого на промежутке $[\vartheta, +\infty)$, где $\vartheta > 0$. Библ. 27.

Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, функция Коши, фундаментальная система решений, сумма ряда, начальные приближения, уравнение Бесселя.

DOI: 10.31857/S0044466924110041, EDN: KGSNLM

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазидифференциальное уравнение является простым и в то же время достаточно эффективным обобщением понятия обыкновенного дифференциального уравнения. По-видимому, начало систематическому изучению неоднородного уравнения n -го порядка (с комплекснозначными коэффициентами) было положено работами Д. Ю. Шина (см. [1], [2]). Обстоятельства сложились таким образом, что его работы на долгое время были игнорированы и забыты, и только начиная с 1975 г. стали появляться работы А. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, посвященные этой тематике. Они же возродили интерес к работам Д. Ю. Шина. В настоящее время существует огромное количество работ по этой тематике и опубликованных в различных математических журналах в период с 1975 г. по настоящее время. В монографии [3] изучаются регулярные и сингулярные самосопряженные квазидифференциальные краевые задачи в гильбертовом пространстве функций, которое авторы связывают со сложными симплектическими пространствами, этот подход представляет собой эффективный метод для изучения квазидифференциальных операторов, рассматриваемых авторами в работе, а также для анализа и классификации самосопряженных краевых условий. В статье [4] авторы развивают теорию Вейля–Титчмарша для сингулярных квазидифференциальных операторов второго порядка, рассматриваемых на открытых интервалах вещественной оси, авторы вводят и изучают максимальный и минимальный операторы Штурма–Лиувилля, а также — их самосопряженные расширения. В этой работе рассматриваются самосопряженные граничные условия (разделенные и связанные) и строится резольвента самосопряженного расширения минимального оператора. Кроме того, в [4] строится и изучается сингулярная функция Вейля–Титчмарша–Кодайры, соответствующая любому самосопряженному расширению оператора Штурма–Лиувилля с разделенными граничными условиями, а также строится спектральная функция, соответствующая самосопряженному расширению такого оператора. В статье [5] изучается регулярное представление сингулярных квазидифференциальных выражений второго порядка. В работе [6] исследуются краевые задачи четвертого порядка с разрывными краевыми условиями. Доказано, что собственные значения непрерывно и гладко зависят от параметров в коэффициентах уравнения и граничных условиях, а также найдены формулы для производных собственных значений по параметрам. В статье [7] рассматривается косодиагональная постоянная матрица, удовлетворяющая условию

$C^{-1} = -C = C^*$, далее строятся самосопряженные области для регулярных C -симметричных дифференциальных операторов четного порядка с двухточечными граничными условиями. Монографии [8] и [9] представляют собой обзор основных известных результатов, полученных для задачи Штурма—Лиувилля, монография [9] содержит также обзор новых результатов для этой задачи. Например, в [9] доказываются, что некоторые специальные задачи Штурма—Лиувилля на собственные значения эквивалентны циклическим матричным задачам Якоби на собственные значения. В [9] разработан новый подход к решению задач Штурма—Лиувилля с периодическими краевыми условиями. В статье [10] исследуется дифференциальный оператор четвертого порядка с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра и других параметров, найдены выражения для производных собственных значений по параметрам. Обратим внимание также на известную монографию [11], посвященную теории обобщенных квазидифференциальных уравнений. В [11] рассматриваются различные концепции построения квазипроизводных и, кроме того, — векторные и матричные обобщенные квазидифференциальные уравнения.

Квазидифференциальные уравнения используются во многих работах российских математиков. Тематика этих работ многогранна. Так, например, в статье [12] получены асимптотические представления для решений уравнения Штурма—Лиувилля второго порядка при больших значениях комплексного параметра λ в случае, когда в одном из коэффициентов уравнения имеется распределение первого порядка сингулярности. В работе [13] рассматривается класс операторов Штурма—Лиувилля, порожденных симметрическими (формально самосопряженными) квазидифференциальными выражениями второго порядка с локально интегрируемыми коэффициентами. Основной целью работы [13] является построение теории Титчмарша-Вейля для операторов типа Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями. Вопрос о дефектных числах оператора и об условиях на коэффициенты, обеспечивающих реализацию случая предельной точки или предельного круга Вейля, является центральным вопросом статьи [13]. Изучению асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений при различных предположениях относительно их коэффициентов и корректному определению дифференциальных уравнений в случае, когда производные понимаются в смысле теории распределений, посвящены работы [14] и [15]. В [15] получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений квазидифференциального уравнения нечетного порядка с комплексным параметром λ .

В настоящей статье квазидифференциальные уравнения изучаются на предмет представления их решений в виде сумм рядов, члены которых строятся по коэффициентам исходного уравнения. Насколько нам известно, такие представления ранее систематически не изучались.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИИ КОШИ

2.1. Определение квазидифференциального уравнения и известные формы представления его решений

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $P = (p_{ik})_0^n$ — нижняя треугольная матрица (функции $p_{ik}(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$) такая, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции $1/p_{ii}(\cdot)$ ($i \in 1 : n-1$), $p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot)$ ($i \in 1 : n$, $k \in 0 : i-1$) локально суммируемы в I . Определим квазипроизводные ${}_P^k x$ ($k \in 0 : n$) функции $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$${}_P^0 x \doteq p_{00}x, \quad {}_P^k x \doteq p_{kk} \frac{d}{dt} ({}_P^{k-1} x) + \sum_{v=0}^{k-1} p_{kv} ({}_P^v x) \quad (k \in 1 : n). \quad (1)$$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение

$$({}_P^n x)(t) = 0, \quad t \in I. \quad (2)$$

Его решением называется всякая функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}_P^k x$ ($k \in 0 : n-1$) и почти всюду в I удовлетворяющая уравнению (2) (см. [16], [17]).

Линейным неоднородным квазидифференциальным называется уравнение

$$({}_P^n x)(t) \doteq ({}_P^n x)(t) = f(t), \quad t \in I \quad (f : I \rightarrow \mathbb{R}). \quad (3)$$

В монографии [18] рассматривается самосопряженное квазидифференциальное уравнение четного порядка $(-1)^m (p_0 x^{(m)})^{(m)} + (-1)^{m-1} (p_1 x^{(m-1)})^{(m-1)} + \dots + p_m x = f(t)$. Оно получается из уравнения (3) при

$$p_{kk} = 1 \quad (k \in 0 : m-1, \quad m+1 : n),$$

$$p_{i,n-i} = (-1)^i p_{i-m} \quad (i \in m : n), \quad p_{ik} = 0 \quad (i \in 1 : n, \quad k < i; \quad k \neq n - i).$$

Уравнение

$$\sum_{k=0}^n p_k(\ell_k x)(t) = f(t), \quad \ell_0 x \doteq p_0 x, \quad \ell_k x \doteq p_k \frac{d}{dt}(\ell_{k-1} x) \quad (k \in 1 : n),$$

изучавшееся в [19] (см. также [20]–[24] и [25]), можно записать в виде неоднородного квазидифференциального уравнения (3). В работах [26, 27] рассмотрена система уравнений первого порядка, которую тоже можно записать в виде неоднородного уравнения (3).

Решением уравнения (3) называется всякая функция $x(\cdot)$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n - 1$ включительно и удовлетворяющая (3) почти всюду в I . Если функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции

$$1/p_{vv}(\cdot) \quad (v \in 1 : n - 1), \quad p_{vk}(\cdot)/p_{vv}(\cdot) \quad (v \in 1 : n, \quad k \in 0 : v - 1), \quad f/p_{nn}(\cdot)$$

локально суммируемы в I , то задача Коши для уравнения (3) при начальных условиях $(\overset{k}{P}x)(a) = \gamma_k \quad (k \in 0 : n - 1, \quad a \in I, \quad \gamma_k \in \mathbb{R})$ эквивалентна задаче

$$\dot{z} = A(t)z + \tilde{f}(t), \quad z(a) = \gamma, \quad (4)$$

где $z(t) \doteq (\alpha_P x)(t) \doteq (\overset{0}{P}x(t), \dots, \overset{n-1}{P}x(t))^T$, $\tilde{f} \doteq (0, \dots, 0, f/p_{nn})^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -p_{10}/p_{11} & 1/p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -p_{20}/p_{22} & -p_{21}/p_{22} & 1/p_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{p_{n-1,0}}{p_{n-1,n-1}} & -\frac{p_{n-1,1}}{p_{n-1,n-1}} & -\frac{p_{n-1,2}}{p_{n-1,n-1}} & \dots & \frac{1}{p_{n-1,n-1}} \\ -p_{n0}/p_{nn} & -p_{n1}/p_{nn} & -p_{n2}/p_{nn} & \dots & -p_{n,n-1}/p_{nn} \end{pmatrix},$$

$\gamma \doteq (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})^T$, t – знак транспонирования.

Задача (4) однозначно разрешима, а с нею и исходная задача Коши для уравнения (3) имеет единственное решение, компоненты которого, квазипроизводные $\overset{k}{P}x \quad (k \in 0 : n - 1)$, локально абсолютно непрерывны в I (см. [16], [17]). Например (см. там же), пусть $n = 2$ и в матрице P положим

$$p_{00}(t) = p_{11}(t) = p_{22}(t) \doteq \sqrt[3]{t}, \quad p_{10}(t) \doteq t^{-3/5}, \quad p_{21}(t) = p_{20}(t) \doteq 0, \quad I = (-c, c), \quad \text{где } 0 < c < +\infty.$$

Тогда решением уравнения $(\overset{2}{P}x)(t) = 0, \quad t \in I$, удовлетворяющим начальному условию $(\overset{0}{P}x)(0) = 1$, является функция $x(t) = t^{-1/3} \exp(-15 \sqrt[15]{t})$. Согласно определениям квазипроизводных, имеем

$$\overset{0}{P}x(t) = \exp(-15 \sqrt[15]{t}), \quad \overset{1}{P}x(t) = t^{1/3} \left(\exp(-15 \sqrt[15]{t}) \right)' + t^{-3/5} \exp(-15 \sqrt[15]{t}).$$

Каждое из слагаемых в $\overset{1}{P}x(t)$ при $t = 0$ разрывно, а их сумма $\overset{1}{P}x(t) \equiv 0$ является абсолютно непрерывной функцией.

Для квазидифференциального уравнения справедливы основные утверждения общей теории обыкновенного дифференциального уравнения. Так, однородное квазидифференциальное уравнение имеет фундаментальную систему решений $\{u_v(\cdot)\}_0^{n-1}$, для которой определитель $W_P(t) \doteq \det(\overset{v}{P}u_k(t))_0^{n-1}$ не обращается в нуль ни в одной точке из I . Частное решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $(\alpha_P u_*)(a) = 0$, имеет вид $u_*(t) = \int_a^t C(t, s) (f(s)/p_{nn}(s)) ds \quad (t \in I)$, где

$$C(t, s) = \begin{vmatrix} \overset{0}{P}u_0(s) & \dots & \overset{0}{P}u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\overset{n-2}{P}u_0)(s) & \dots & (\overset{n-2}{P}u_{n-1})(s) \\ u_0(t) & \dots & u_{n-1}(t) \end{vmatrix} / W_P(s)$$

есть функция Коши уравнения (2), она по аргументу t является его решением и удовлетворяет начальным условиям $\overset{k}{P}C(t, s)|_{t=s} = 0 \quad (k \in 0 : n - 2), \quad \overset{n-1}{P}C(t, s)|_{t=s} = 1$. Общее решение уравнения (3) дается формулой

$u = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1} + u_*$, где c_v есть произвольные постоянные. Определитель $W_P(\cdot)$ локально абсолютно непрерывен, он удовлетворяет уравнению $dW_P/dt = - \sum_{v=0}^{n-1} (p_{v+1,v}(t)/p_{v+1,v+1}(t)) W_P(t)$. Имеет место аналог формулы Остроградского-Лиувилля

$$W_P(t) = W_P(a) \exp \int_a^t \left(- \sum_{v=0}^{n-1} (p_{v+1,v}(\tau)/p_{v+1,v+1}(\tau)) \right) d\tau.$$

Уравнение (3) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением (см. [16], [17])

$$(\ell^+ y)(t) \doteq (-1)^n ({}_R y)(t) = g(t), \quad t \in I \quad (g: I \rightarrow \mathbb{R}),$$

где $R = (r_{vk})_0^n$ — нижняя треугольная матрица,

$$r_{vk} = (-1)^{v+k} p_{n-k,n-v} p_{n-v,n-v}/p_{n-k,n-k} \quad (k \in 0 : v, v \in 0 : n). \quad (5)$$

Это означает, что имеет место почти для всех $t \in I$ тождество Лагранжа

$$\begin{aligned} y(t) (\ell x)(t) - x(t) (\ell^+ y)(t) &\equiv \frac{d}{dt} [x, y](t), \\ [x, y](t) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} ({}^{k-1}_P x)(t) ({}^{n-k}_R y)(t) \end{aligned}$$

(для всех функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, имеющих локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно). Пусть $C^*(t, s)$ есть функция Коши сопряженного однородного уравнения. Имеет место соотношение ${}_P C(t, s) = (-1)^{n-1} {}_R C^*(s, t)$ (см. там же).

Уравнение (3), таким образом, общее, оно не обязательно четного порядка и не является, вообще говоря, самосопряженным, если этого заранее не предполагать. Поэтому общепринятые простые и лаконичные обозначения квазипроизводных (см. [18]) заменены в нашем случае на более сложные обозначения, так как при переходе к сопряженному уравнению, матрица, с помощью которой строятся квазипроизводные, меняется. Неоднородное квазидифференциальное уравнение (3) позволяет с единой точки зрения рассматривать различные уравнения, которые принято называть «обобщенными», «уравнениями с особенностями в коэффициентах» и т. п. Обыкновенное дифференциальное уравнение с локально суммируемыми коэффициентами и его формально сопряженное в смысле Лагранжа уравнение также представляют собой частные случаи квазидифференциального уравнения (3).

Квазидифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах в случае, если коэффициенты

$$p_{vk} = 0 \quad (k \in 0 : v-2, v \in 2 : n).$$

2.2. О представлении решений уравнения (2) в терминах функции Коши

Пусть $Lz \doteq \dot{z} - Az$, $B = (b_{vj})_1^n$, $b_{vj} = a_{vj} \delta_{v+1,j}$ ($v, j \in 1 : n$, δ_{vj} — символ Кронекера),

$$N = A - B, \quad Mz \doteq \dot{z} - Bz.$$

Система $Mz = 0$ эквивалентна квазидифференциальному уравнению

$$({}_Q^n x)(t) = 0, \quad t \in I, \quad Q \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1,n-1}, 1). \quad (6)$$

Фундаментальная система решений уравнения (6) такова

$$\begin{aligned} {}_Q^0 w_0(t) &= 1, \quad {}_Q^0 w_1(t) = \int_a^t ds/p_{11}(s), \\ {}_Q^v w_v(t) &= \int_a^t \frac{ds_0}{p_{11}(s_0)} \int_a^{s_0} \frac{ds_1}{p_{22}(s_1)} \cdots \int_a^{s_{v-2}} \frac{ds_{v-1}}{p_{vv}(s_{v-1})} \quad (v \in 2 : n-1). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть, далее, $\{u_v\}_0^{n-1}$ — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая условиям $(\alpha_P u_v)(a) = (\alpha_Q w_v)(a)$ ($v \in 0 : n-1$), $C_L(t, s) = (c_{vj}(t, s))_1^n$ — матрица Коши однородной системы (4). Пусть

$$v_v \doteq \alpha_P u_v - \alpha_Q w_v.$$

Так как $v_v(a) = 0$ и $0 = L(\alpha_P u_v) = L(\alpha_Q w_v) + L v_v = M(\alpha_Q w_v) - N(\alpha_Q w_v) + L v_v$, т.е. $L v_v = N(\alpha_Q w_v)$, то

$$(\alpha_P u_v)(t) = (\alpha_Q w_v)(t) + \int_a^t C_L(t, s) N(\alpha_Q w_v)(s) ds \quad (v \in 0 : n-1). \quad (8)$$

Равенство (8) для первых координат имеет вид

$${}_0^0 u_v(t) = {}_Q^0 w_v(t) - \int_a^t \sum_{j=1}^n c_{1j}(t, s) \sum_{\mu=0}^{j-1} \frac{p_{j\mu}(s)}{p_{jj}(s)} {}_Q^\mu w_v(s) ds \quad (v \in 0 : n-1). \quad (9)$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$c_{1, n-j}(t, s) = (-1)^{n+j-1} {}_R^j C^*(s, t) \quad (j \in 0 : n-1),$$

где квазипроизводные в правой части берутся по первому аргументу.

Доказательство. Так как $C_L(t, s) = V(t)V^{-1}(s)$, где $V(\cdot)$ — фундаментальная матрица системы (4) ($\tilde{f}(t) \equiv 0$), то $c_{1j}(t, s)$ ($j \in 1 : n$) представляются в виде отношения двух определителей: знаменатель равен $\det({}_P^{v-1} u_{k-1}(s))_1^n$, а числитель получается из знаменателя заменой j -й строки строкой $({}_P^0 u_0(t), \dots, {}_P^0 u_{n-1}(t))$. Отсюда

$$c_{1n}(t, s) = {}_P^0 C(t, s) = (-1)^{n-1} {}_R^0 C^*(s, t),$$

так что утверждение леммы для $j = 0$ верно. Предположим его справедливость для некоторого j ($0 < j < n-1$).

Найдем $\left({}_R^j C^*(s, t)\right)_s'$, учитывая отмечавшееся выше представление для $c_{1j}(t, s)$, определения (5) матрицы R и квазипроизводных (1), и полагая для краткости записи $g(s) \doteq \frac{(-1)^{n+j-1}}{|V(s)|^2}$, $h(s) \doteq (-1)^j |V(s)|$:

$$\begin{aligned} \left({}_R^j C^*(s, t)\right)_s' &= (-1)^{n+j-1} (c_{1, n-j}(t, s))_s' = (-1)^{n+j-1} \times \\ &\times \left(\frac{1}{|V(s)|} \begin{vmatrix} {}_P^0 u_0(s) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(s) \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-1} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-1} u_{n-1}(s) \end{vmatrix} \right)_s' = g(s) \left(h(s) \begin{vmatrix} {}_P^0 u_0(s) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(s) \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-2} u_{n-1}(s) \\ ({}_P^{n-1} u_0(s))' & \dots & ({}_P^{n-1} u_{n-1}(s))' \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \end{vmatrix} \right)' + \\ &+ \begin{vmatrix} {}_P^0 u_0(s) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(s) \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-3} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-3} u_{n-1}(s) \\ ({}_P^{n-2} u_0(s))' & \dots & ({}_P^{n-2} u_{n-1}(s))' \\ {}_P^{n-1} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-1} u_{n-1}(s) \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} ({}_P^0 u_0(s))' & \dots & ({}_P^0 u_{n-1}(s))' \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-1} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-1} u_{n-1}(s) \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \end{vmatrix} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^j \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| \left(\left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ ({}^{n-1}_P u_0(s))' & \dots & ({}^{n-1}_P u_{n-1}(s))' \end{array} \right| + \dots \right) = \\
& = \frac{(-1)^{n-1}}{|V(s)|^2} \left(|V(s)| \left(- \sum_{\mu=0, \mu \neq j}^{n-1} \frac{p_{n-\mu, n-\mu-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & {}^0_P u_1(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & {}^1_P u_1(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & {}^{n-j-2}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & {}^{n-j}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & {}^{n-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & {}^0_P u_1(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| - \frac{p_{n, n-j-1}(s)}{p_{nn}(s)} \times \right. \\
& \quad \times \left. \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-2}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j-1}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| - \dots - \frac{p_{n-j+1, n-j-1}(s)}{p_{n-j+1, n-j+1}(s)} \right. \\
& \quad \left. \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-3}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-3}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j-1}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-1}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| \right) + \\
& \quad - \frac{1}{p_{n-j-1, n-j-1}(s)} \left(\left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & {}^0_P u_1(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-3}_P u_0(s) & {}^{n-j-3}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-3}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j-1}_P u_0(s) & {}^{n-j-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-1}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & {}^{n-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & {}^0_P u_1(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| + \right. \\
& \quad \left. + |V(s)| \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{p_{n-\mu, n-\mu-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} \left(\left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & {}^0_P u_1(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & {}^1_P u_1(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & {}^{n-j-2}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & {}^{n-j}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & {}^{n-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & {}^0_P u_1(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| \right) \right) = \\
& = (-1)^{n-1} (-1)^j \left(\sum_{\mu=0}^j \frac{p_{n-\mu, n-j-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} c_{1, n-\mu}(t, s) + \frac{c_{1, n-j-1}(t, s)}{p_{n-j-1, n-j-1}(s)} \right) = \\
& = (-1)^{n+j-1} \sum_{\mu=0}^j (-1)^{n+\mu-1} \frac{p_{n-\mu, n-j-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) + (-1)^{n+j-1} \frac{c_{1, n-j-1}(t, s)}{p_{n-j-1, n-j-1}(s)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\left({}^j_R C^*(s, t) \right)'_s = \sum_{\mu=0}^j (-1)^{j+\mu} \frac{p_{n-\mu, n-j-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) + (-1)^{n+j-1} \frac{c_{1, n-(j+1)}(t, s)}{p_{n-(j+1), n-(j+1)}(s)},$$

отсюда получаем следующее соотношение $c_{1,n-(j+1)}(t, s) = (-1)^{n+(j+1)-1} {}^j_R C^*(s, t)$, т.е. справедливость утверждения леммы для $j + 1$. По индукции оно верно для любого $j \in 0 : n - 1$. Лемма доказана.

Из равенства (9) и леммы 1 следует представление

$${}_P^0 u_v(t) = {}_Q^0 w_v(t) + \int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+j} {}^j_R C^*(s, t) \sum_{\mu=0}^{n-j-1} \frac{p_{n-j,\mu}(s)}{p_{n-j,n-j}(s)} {}^\mu_Q w_v(s) ds \quad (v \in 0 : n - 1). \quad (10)$$

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Представление решений уравнения (2) рядами в случае наиболее простого выбора начальных приближений

Пусть

$$A_{n-\mu-1,v}^0(t) \doteq {}^\mu_Q w_v(t) \quad (\mu \in 0 : n - 1), \quad (11)$$

$$a_{kv}^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-k-1} \frac{p_{n-k,\mu}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-\mu-1,v}^j(t) \quad (k \in 0 : n - 1), \quad (12)$$

$$A_{0v}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0v}^j(s) ds, \quad (13)$$

$$A_{kv}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \left(a_{kv}^j(s) + \frac{A_{k-1,v}^{j+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds \quad (14)$$

$$(k \in 1 : n - 1, v \in 0 : n - 1, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 1. Фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая начальным условиям

$$({}^i_P u_v)(a) = \delta_{vi} \quad (v, i \in 0 : n - 1), \quad (15)$$

может быть представлена в виде

$${}_P^0 u_v(t) = \sum_{j=0}^m (-1)^j A_{n-1,v}^j(t) + \int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+m+j} {}^j_R C^*(s, t) a_{jv}^m(s) ds \quad (16)$$

$$(v \in 0 : n - 1, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказательство. При $m = 0$ представление (16) следует из (10) и (11).

Пусть представление (16) имеет место для некоторого $m > 0$. Покажем, что тогда оно справедливо и для $m + 1$. Преобразуем второе слагаемое в (16) с помощью определений матрицы R и квазипроизводных (1), и используя интегрирование по частям

$$\begin{aligned} & \int_a^t {}^0_R C^*(s, t) a_{0v}^m(s) ds = - \int_a^t ({}^0_R C^*(s, t))'_s A_{0v}^{m+1}(s) ds = \\ & = - \int_a^t \frac{1}{p_{n-1,n-1}(s)} \left(p_{n-1,n-1}(s) ({}^0_R C^*(s, t))'_s - \frac{p_{n,n-1}(s)p_{n-1,n-1}(s)}{p_{nn}(s)} {}^0_R C^*(s, t) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{p_{n,n-1}(s)p_{n-1,n-1}(s)}{p_{nn}(s)} {}^0_R C^*(s, t) \right) A_{0v}^{m+1}(s) ds = \\ & = - \int_a^t \frac{p_{n,n-1}(s)}{p_{nn}(s)} {}^0_R C^*(s, t) A_{0v}^{m+1}(s) ds - \int_a^t {}^1_R C^*(s, t) \frac{A_{0v}^{m+1}(s)}{p_{n-1,n-1}(s)} ds. \end{aligned}$$

Аналогично, для $k \in 1 : n - 2$ получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^k \int_a^t {}^k_R C^*(s, t) \left(a_{kv}^m(s) + \frac{A_{k-1,v}^{m+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds = \\ & = \int_a^t \sum_{\mu=0}^k (-1)^{\mu+1} \frac{p_{n-1,n-k-1}(s)}{p_{n-\mu,n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) A_{kv}^{m+1}(s) ds + \\ & + (-1)^{k+1} \int_a^t {}^{k+1}_R C^*(s, t) \frac{A_{kv}^{m+1}(s)}{p_{n-k-1,n-k-1}(s)} ds. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} \int_a^t {}^{n-1}_R C^*(s, t) \left(a_{n-1,v}^m(s) + \frac{A_{n-2,v}^{m+1}(s)}{p_{11}(s)} \right) ds = \\ & = (-1)^{n+1} A_{n-1,v}^{m+1}(t) + \int_a^t \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu+1} \frac{p_{n-\mu,0}(s)}{p_{n-\mu,n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) A_{n-1,v}^{m+1}(s) ds. \end{aligned}$$

Из доказанных равенств получаем

$$\int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {}^j_R C^*(s, t) a_{jv}^m(s) ds = (-1)^{n+1} A_{n-1,v}^{m+1}(t) - \int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {}^j_R C^*(s, t) a_{jv}^{m+1}(s) ds,$$

что и означает справедливость представления (16) для $m + 1$. По индукции утверждение теоремы справедливо для всех значений $m = 0, 1, 2, \dots$. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно рассматривать как некий «квазидифференциальный» аналог формулы Тейлора с остаточным членом в форме интеграла.

Напомним, что в настоящей работе всюду предполагается, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции

$$1/p_{ii}(\cdot) \quad (i \in 1 : n - 1), \quad p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot) \quad (i \in 1 : n, k \in 0 : i - 1)$$

локально суммируемы в I . Для краткости записи в формулировках нижеприводимых теорем 2 и 3 эти предположения повторно не оговариваются.

Теорема 2. Пусть $p_{vv}(t) > 0$ почти всюду в I ($v \in 1 : n - 1$), функции

$$1/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n - 1), \quad p_{vk}(t)/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n, k \in 0 : v - 1)$$

локально ограничены в существенном на I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая начальным условиям (15), представима в виде

$${}_P^0 u_v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1,v}^j(t) \quad (t \in I, v \in 0 : n - 1). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $v \in 0 : n - 1$. Формально продифференцируем ряд (17)

$$({}_P^0 u_v)' = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu (A_{n-1,v}^\mu)' = \frac{p_{10}}{p_{11}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} A_{n-1,v}^\mu + \frac{1}{p_{11}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_{n-2,v}^\mu,$$

откуда

$${}_P^1 u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_{n-2,v}^\mu(t).$$

Пусть при некотором m ($1 < m < n - 1$) выполняется равенство

$${}_P^m u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m-1,v}^{\mu}(t). \quad (18)$$

Формально продифференцируем равенство (18) с помощью определений (11)–(14)

$$\begin{aligned} ({}_P^m u_v)' &= \frac{p_{m+1,0}}{p_{m+1,m+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} A_{n-1,v}^{\mu} + \dots \\ &\dots + \frac{p_{m+1,m}}{p_{m+1,m+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} A_{n-m-1,v}^{\mu} + \frac{1}{p_{m+1,m+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m-2,v}^{\mu}. \end{aligned}$$

Получим

$${}_P^{m+1} u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m-2,v}^{\mu}(t).$$

А это есть равенство (18) для $m + 1$. При $m = n - 1$ имеет место равенство

$${}_P^{n-1} u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{0,v}^{\mu}(t).$$

Отсюда, после формального дифференцирования, получим что

$${}_P^n u_v(t) = 0 \quad (t \in I, \quad v \in 0 : n - 1). \quad (19)$$

Обоснуем теперь законность почленного дифференцирования рядов (17) и (18) при $m \in 1 : n - 1$. Пусть $[a, T] \subset I$, где $T > 0$, $T \in \mathbb{R}$. Для этого покажем, что ряды $\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m,v}^{\mu}(t)$ ($m \in 1 : n$) и полученные из них почленным дифференцированием сходятся абсолютно и равномерно на $[a, T]$. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &\doteq 1 + \int_a^t \sum_{\mu=0}^{n-1} |p_{n,\mu}(s)| ds / p_{nn}(s), \\ \varphi_{n-k}(t) &\doteq 1 + \int_a^t \left(\sum_{\mu=0}^{n-k-1} |p_{n-k,\mu}(s)| + 1 \right) ds / p_{n-k,n-k}(s) \quad (k \in 1 : n - 1), \\ \varphi_0(t) &\doteq \sum_{\mu=0}^{n-1} A_{n-1,\mu}^0(t). \end{aligned}$$

Из определения (11) и формул (7) получаем, что

$$\begin{aligned} A_{n-1,0}^0(t) &= 1, \quad A_{n-1,1}^0(t) = \int_a^t ds / p_{11}(s), \\ A_{n-1,v}^0(t) &= \int_a^t \frac{ds_0}{p_{11}(s_0)} \int_a^{s_0} \frac{ds_1}{p_{22}(s_1)} \dots \int_a^{s_{v-2}} \frac{ds_{v-1}}{p_{vv}(s_{v-1})} \quad (v \in 2 : n - 1). \end{aligned} \quad (20)$$

Докажем справедливость оценки

$$|A_{n-m,v}^k(t)| \leq \varphi_0(t) \left(\prod_{\mu=1}^n \varphi_{\mu}(t) \right)^k (k!)^{-1} \quad (21)$$

$$(m = n, n - 1, \dots, 1; \quad v \in 0 : n - 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

Для $k = 0, m = n, n - 1, \dots, 2$

$$A_{n-m,v}^0(t) = {}^{m-1}_Q w_v(t),$$

где ${}^{m-1}_Q w_v(t)$ либо тождественный нуль, либо одна из функций (20).

Из определения $\varphi_0(\cdot)$ и равенств (20) следует, что

$$A_{n-m,v}^0(t) \leq \varphi_0(t) \quad (m = n, n - 1, \dots, 2; v \in 0 : n - 1)$$

(для $m = 1$ справедливость такого неравенства следует из определения $\varphi_0(\cdot)$ и положительности всех функций в (20)). Таким образом, для $k = 0, m = n, n - 1, \dots, 1, v \in 0 : n - 1$, оценка (21) доказана.

Пусть для некоторого $k > 0$ и названных m и n неравенства (21) справедливы. Покажем их справедливость и для $k + 1$ при тех же m и n .

Индукцией по m можно показать, что

$$|A_{n-m,v}^{k+1}(t)| \leq \varphi_0(t) \left(\prod_{\mu=m}^n \varphi_\mu(t) \right)^{k+1} \left(\prod_{\mu=1}^{m-1} \varphi_\mu(t) \right)^k ((k+1)!)^{-1} \\ (m = n, n - 1, \dots, 1; v \in 0 : n - 1; t \in [a, T]).$$

Учитывая, что $\varphi_\mu(t) \geq 1$ ($\mu \in 0 : n$), усилим эту оценку до оценки (21) для $k + 1$. По индукции оценка (21) имеет место для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Условия настоящей теоремы и оценка (21) согласно признаку Вейерштрасса обеспечивают равномерную сходимость рядов (17) и (18) для $m = 1, \dots, n - 1$, и полученных из них почленным дифференцированием. Таким образом, почленное дифференцирование их, обосновано.

Суммы рядов в правой части (17) удовлетворяют в точке $t = a$ тем же условиям, что и ${}_Q^0 w_v(\cdot)$ ($v \in 0 : n - 1$). Следовательно, эти суммы линейно независимы на $[a, T]$ и согласно уравнению (19) образуют фундаментальную систему решений уравнения (2). Теорема доказана.

3.2. Случай обыкновенного дифференциального уравнения при наиболее простом выборе начальных приближений

Рассмотрим случай обыкновенного дифференциального уравнения. Для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0 \quad (22)$$

условия теоремы 2 могут быть расширены, а определения (11)–(14) заменены более простыми. Пусть

$$A_v^0(t) \doteq (t - a)^v / v!, \quad (23)$$

$$a_v^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-1} p_{n-\mu}(t) (A_v^j(t))^{(\mu)}, \quad (24)$$

$$A_v^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} a_v^j(s) ds \\ (v \in 0 : n - 1, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Замечание 1. (В. Я. Дерр) Пусть функции $p_k(\cdot)$ ($k \in 1 : n$) локально суммируемы в I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (22) имеет вид

$$u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_v^\mu(t) \quad (v \in 0 : n - 1).$$

3.3. Представление решений уравнения (2) рядами в случае более сложного выбора начальных приближений

В настоящем пункте предлагается представление фундаментальной системы решений уравнения (2) в виде сумм других рядов, которые также сходятся к функциям ${}_P^0 u_i(t)$ ($t \in I, i \in 0 : n - 1$). Пусть сейчас $Q \doteq Q_1 + Q_2$, где

$$Q_1 \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1,n-1}, p_{nn}),$$

а матрица $Q_2 = (q_{ij})_0^n$ строится следующим образом: $q_{ij} \doteq p_{ij} \delta_{i,j+1}$ ($i, j \in 0 : n$). Известно, что фундаментальная система решений уравнения $(\frac{n}{Q}x)(t) = 0, t \in I$, удовлетворяющая начальным условиям $({}_P^0 w_i)(a) = \delta_{vi}$ ($v, i \in 0 : n - 1$), в этом случае имеет вид (см. [16], [17]) (ср. с равенствами (7))

$$\begin{aligned}
{}_Q^0 w_0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \\
{}_Q^0 w_i(t) &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \cdots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{v=1}^{i+1} \int_{t_{v-1}}^{t_v} \frac{p_{v,v-1}(\tau)}{p_{vv}(\tau)} d\tau \right) \\
&\quad (t \in I, t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1).
\end{aligned} \tag{26}$$

Пусть сейчас (ср. с определениями (11)–(14))

$$A_{n-v-1,i}^0(t) \doteq {}_Q^v w_i(t) \quad (v \in 0 : n-2), \tag{27}$$

$$a_{ki}^0(t) \doteq \sum_{v=0}^{n-k-2} \frac{p_{n-k,v}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-v-1,i}^0(t) \quad (k \in 0 : n-2), \quad a_{n-1,i}^0(t) \doteq 0, \tag{28}$$

$$a_{ki}^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-k-1} \frac{p_{n-k,\mu}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-\mu-1,i}^j(t), \quad \text{если } j \geq 1 \quad (k \in 0 : n-1), \tag{29}$$

$$A_{0i}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0i}^j(s) ds, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
A_{ki}^{j+1}(t) &\doteq \int_a^t \left(a_{ki}^j(s) + \frac{A_{k-1,i}^{j+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds \\
&\quad (k \in 1 : n-1, i \in 0 : n-1, j = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{31}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $p_{vv}(t) > 0$ почти всюду в I ($v \in 1 : n-1$), функции

$$1/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n-1), \quad p_{vk}(t)/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n, k \in 0 : v-1)$$

локально ограничены в существенном на I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая начальным условиям (15), представима в виде

$${}_P^0 u_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1,i}^j(t) \quad (t \in I, i \in 0 : n-1). \tag{32}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, за исключением одного момента, а, именно, равенства (20) необходимо заменить равенствами

$$\begin{aligned}
A_{n-1,0}^0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \\
A_{n-1,v}^0(t) &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \cdots \int_a^{t_{v-1}} \frac{dt_v}{p_{vv}(t_v)} \exp \left(- \sum_{j=1}^{v+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{p_{j,j-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)} d\tau \right) \\
&\quad (t_0 = t, t_n = a, v \in 1 : n-1).
\end{aligned} \tag{33}$$

И, далее, пройти по ходу доказательства теоремы 2, но заменяя везде ссылки на равенства (20) ссылками на равенства (33). Теорема доказана.

В силу более точного и соответственно более сложного (снова ср. с равенствами (7)) выбора начальных приближений к элементам фундаментальной системы решений уравнения (2), ряды, находящиеся в правых частях представлений (32), являются более быстро сходящимися к решениям уравнения (2), по сравнению с рядами в правых частях представлений (17). Представления (32) могут быть использованы, наряду с представлениями (17), например, для приближенного построения элементов фундаментальной системы решений исходного квазидифференциального уравнения (2).

3.4. Случай обыкновенного дифференциального уравнения при более сложном выборе начальных приближений

Снова рассмотрим случай обыкновенного дифференциального уравнения (22). Определим «вспомогательное» дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} = 0. \quad (34)$$

Пусть $\{A_0^0(t), \dots, A_{n-1}^0(t)\}$ — фундаментальная система решений уравнения (34), удовлетворяющая начальным условиям $(A_v^0(a))^{(i)} = \delta_{vi}$ ($v, i \in 0 : n-1$). Введем следующие обозначения (ср. с определениями (23)–(25)):

$$a_v^0(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-2} p_{n-\mu}(t) (A_v^0(t))^{(\mu)}, \quad (35)$$

$$a_v^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-1} p_{n-\mu}(t) (A_v^j(t))^{(\mu)}, \quad \text{если } j \geq 1, \quad (36)$$

$$A_v^{j+1}(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} a_v^j(s) ds \quad (v \in 0 : n-1, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (37)$$

Замечание 2. Пусть функции $p_k(\cdot)$ ($k \in 1 : n$) локально суммируемы в I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (22) имеет вид

$$u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_v^\mu(t) \quad (v \in 0 : n-1).$$

3.5. Пример к замечаниям 1 и 2

В качестве примера к замечаниям 1 и 2 приведем построение фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, которое будем рассматривать не на всей вещественной оси, а на промежутке $[\vartheta, +\infty)$, т.е.

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right)x = 0, \quad t \in [\vartheta, +\infty), \quad \vartheta > 0. \quad (38)$$

Построим фундаментальную систему решений $\{u_0(t), u_1(t)\}$ уравнения (38), удовлетворяющую начальным условиям $u_0(\vartheta) = 1$, $(u_0(t))'|_{t=\vartheta} = 0$ и $u_1(\vartheta) = 0$, $(u_1(t))'|_{t=\vartheta} = 1$.

Уравнение (34) примет вид $x'' + \frac{1}{t}x' = 0$, $t \in [\vartheta, +\infty)$. Его фундаментальная система решений $\{A_0^0(t), A_1^0(t)\}$, удовлетворяющая начальным условиям $A_0^0(\vartheta) = 1$, $(A_0^0(t))'|_{t=\vartheta} = 0$ и $A_1^0(\vartheta) = 0$, $(A_1^0(t))'|_{t=\vartheta} = 1$ такова: $\{A_0^0(t) = 1, A_1^0(t) = \vartheta \ln(t/\vartheta)\}$.

Построим функцию $u_0(t)$. По формулам (35)–(37) найдем

$$\begin{aligned} a_0^0(t) &= 1 - \frac{v^2}{t^2}, \quad A_0^1(t) = \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds, \\ a_0^1(t) &= \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds + \frac{1}{t} \int_{\vartheta}^t \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds = \\ &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds, \\ A_0^2(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) d\tau ds, \\ a_0^2(t) &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) d\tau ds, \end{aligned}$$

$$A_0^3(t) = \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) d\mu d\tau ds$$

и так далее. Решение $u_0(t)$ уравнения (38) представимо в виде

$$\begin{aligned} u_0(t) &= A_0^0(t) - A_0^1(t) + A_0^2(t) - A_0^3(t) + \dots = \\ &= 1 - \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) ds + \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) d\tau ds - \\ &\quad - \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \times \\ &\quad \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) d\mu d\tau ds + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Построим функцию $u_1(t)$. По формулам (35)–(37) найдем

$$\begin{aligned} a_1^0(t) &= \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{t}{\vartheta} \right), \quad A_1^1(t) = \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds, \\ a_1^1(t) &= \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds + \frac{1}{t} \int_{\vartheta}^t \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds = \\ &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) + \frac{1}{t} \right) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds, \\ A_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) d\tau ds, \\ a_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) + \frac{1}{t} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) d\tau ds, \\ A_1^3(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \times \\ &\quad \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) d\mu d\tau ds \end{aligned}$$

и так далее. Решение $u_1(t)$ уравнения (38) представимо в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1^0(t) - A_1^1(t) + A_1^2(t) - A_1^3(t) + \dots = \\ &= \vartheta \ln \left(\frac{t}{\vartheta} \right) - \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) d\tau ds - \\
& \quad - \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \times \\
& \quad \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) d\mu d\tau ds + \dots
\end{aligned} \tag{40}$$

Оценим сверху модуль четвертого слагаемого в правой части представления (40)

$$\begin{aligned}
|A_1^3(t)| & < \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 + \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \times \\
& \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{\mu} \right) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) \right) d\mu d\tau ds < \\
& < \int_{\vartheta}^t \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) \times \\
& \times \int_{\vartheta}^s \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 + \frac{v^2}{\tau^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) \right) \times \\
& \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{\mu} \right) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) \right) d\mu d\tau ds = \\
& = \left(\int_{\vartheta}^t \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^3 / 3!.
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$|A_1^n(t)| < \left(\int_{\vartheta}^t \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^n / n!.$$

В ряде (40) оставим первые $n+1$ слагаемых, остальные слагаемые в ряде (40) отбросим и оценим сверху модуль остатка ряда (40), предполагая при этом, что вещественное положительное число T ($t \in [\vartheta, T]$) и натуральное число n таковы, что выполняется следующее неравенство

$$\left(\left(\int_{\vartheta}^T \left((T-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right) / (n+2) \right) < 1.$$

Итак, при всех значениях $t \in [\vartheta, T]$ оценим сверху модуль остатка ряда (40)

$$\begin{aligned}
& |(-1)^{n+1}(A_1^{n+1}(t) - A_1^{n+2}(t) + A_1^{n+3}(t) - A_1^{n+4}(t) + \dots)| < \\
& < \frac{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+1)}}{(n+1)!} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+2)}}{(n+2)!} + \dots < \\
& < \frac{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+1)}}{(n+1)!} \times \\
& \times \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^j / (n+2)^j \right) = \\
& = \left(\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+1)} / (n+1)! \right) \times \\
& \times \left((n+2) / \left((n+2) - \int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right) \right). \tag{41}
\end{aligned}$$

Из оценок (41) следует, что для любого сколь угодно большого вещественного положительного числа T можно всегда подобрать такое натуральное число n , что при всех значениях $t \in [\vartheta, T]$ соответствующий остаток ряда (40) по модулю не превзойдет любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε . Все вышесказанное относительно оценок и оценивания остаточного члена применимо и к членам ряда (39), за исключением того, что интеграл

$$\frac{\int_{\vartheta}^t \left((t - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds}{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)}$$

необходимо заменить во всех оценках на интеграл

$$\int_{\vartheta}^t \left((t - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) ds \left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) ds \right).$$

Второй элемент фундаментальной системы решений $\{u_0(t), u_1(t)\}$ уравнения (38), функция $u_1(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $u_1(\vartheta) = 0$, $(u_1(t))' \Big|_{t=\vartheta} = 1$, допускает другое представление. Действительно по формулам (23)–(25) найдем

$$A_1^0(t) = t - \vartheta, \quad a_1^0(t) = \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) (t - \vartheta) + \frac{1}{t},$$

$$A_1^1(t) = \int_{\vartheta}^t (t - s) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) (s - \vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds,$$

$$\begin{aligned}
a_1^1(t) &= \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds + \frac{1}{t} \int_{\vartheta}^t \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds = \\
&= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds, \\
A_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) (\tau-\vartheta) + \frac{1}{\tau} \right) d\tau ds, \\
a_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) (\tau-\vartheta) + \frac{1}{\tau} \right) d\tau ds, \\
A_1^3(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \times \\
&\times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) (\mu-\vartheta) + \frac{1}{\mu} \right) d\mu d\tau ds
\end{aligned}$$

и так далее. Решение $u_1(t)$ уравнения (38) представимо также и в следующем виде (ср. с представлением (40))

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= A_1^0(t) - A_1^1(t) + A_1^2(t) - A_1^3(t) + \dots = (t-\vartheta) - \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds + \\
&+ \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) (\tau-\vartheta) + \frac{1}{\tau} \right) d\tau ds - \\
&- \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) + \frac{1}{\tau} \right) \times \\
&\times \left(\left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) (\mu-\vartheta) + \frac{1}{\mu} \right) d\mu d\tau ds + \dots
\end{aligned}$$

Все оценки также аналогично могут быть получены. Представление функции $u_0(t)$, удовлетворяющей условиям $u_0(\vartheta) = 1$, $(u_0(t))' \Big|_{t=\vartheta} = 0$, найденное по формулам (23)–(25), совпадает с представлением (39).

3.6. О представление квадратур одного квазидифференциального уравнения специального вида в виде сумм рядов

Рассмотрим однородное квазидифференциальное уравнение произвольного порядка вида (2) такое, что в матрице P заполнены главная диагональ и первая поддиагональ, а все остальные ее элементы равны нулю. В этом случае определения квазипроизводных (1) примут вид

$${}_P^0 x \doteq p_{00} x, \quad {}_P^{k+1} x \doteq p_{k+1, k+1} \frac{d}{dt} \left({}_P^k x \right) + p_{k+1, k} \left({}_P^k x \right) \quad (k \in 0 : n-1).$$

Элементы фундаментальной системы решений $\{{}_P^0 u_i(t)\}_0^{n-1}$ уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям (15), выражаются в этом случае в виде квадратур (в отличие от рассмотренных в пп. 3.1–3.5 случаев). Как уже говорилось в пп. 3.3, они находятся по формулам (см. [16], [17])

$$\begin{aligned}
{}_P^0 u_0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \\
{}_P^0 u_i(t) &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \dots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{j=1}^{i+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{p_{j, j-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)} d\tau \right) \\
&\quad (t \in I, t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1).
\end{aligned} \tag{42}$$

Пусть матрица Q снова, как и в §2 (и в пп. 3.1 §3), является диагональной, т.е. она такова $Q \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1, n-1}, 1)$. Тогда определения (11)–(14) примут следующий вид (с учетом того, что сейчас все элементы, находящиеся ниже поддиагонали матрицы P , являются нулями)

$$A_{n-v-1, i}^0(t) \doteq {}^v_Q w_i(t) \quad (v \in 0 : n-1), \quad (43)$$

где функции ${}_Q^0 w_i(t)$ ($i \in 1 : n-1$) определяются по формулам (7),

$$a_{ki}^j(t) \doteq \frac{p_{n-k, n-k-1}(t)}{p_{n-k, n-k}(t)} A_{ki}^j(t) \quad (k \in 0 : n-1), \quad (44)$$

$$A_{0i}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0i}^j(s) ds, \quad (45)$$

$$A_{ki}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \left(a_{ki}^j(s) + \frac{A_{k-1, i}^{j+1}(s)}{p_{n-k, n-k}(s)} \right) ds \quad (k \in 1 : n-1, i \in 0 : n-1, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (46)$$

Далее воспользуемся теоремой 2, с учетом определений (43)–(46), при этом в левые части представлений (17) подставим соответственно правые части равенств (42). Тогда получим, что имеют место следующие разложения интегралов, находящихся в правых частях равенств (42), в суммы сходящихся к ним рядов

$$\exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1, 0}^j(t) \quad (t \in I), \quad (47)$$

$$\int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \cdots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{v=1}^{i+1} \int_{t_{v-1}}^{t_v} \frac{p_{v, v-1}(\tau)}{p_{vv}(\tau)} d\tau \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1, i}^j(t) \quad (48)$$

$(t \in I, t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1).$

Таким образом, ряды в правых частях равенств (47) и (48), как бы независимо от исходного квазидифференциального уравнения (2), являются некоторыми представлениями (некими «квазидифференциальными» аналогами рядов Тейлора) функций, находящихся в левых частях равенств (47) и (48). Одним из применений представлений (47) и (48) может быть также приближенное построение элементов фундаментальной системы решений исходного квазидифференциального уравнения (2) (например, в случае, когда интегралы в левых частях равенств (47) и (48) не выражаются в элементарных функциях).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шин Д.Ю. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n -го порядка // Матем. сборник. 1940. Т. 7(49). №3. С. 479–532.
2. Шин Д.Ю. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. 1943. Т. 13(55). №1. С. 39–70.
3. Everitt W.N., Marcus L. Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // Amer. Math. Soc. 1999. V. 61.
4. Eckhardt J., Gestezy F., Nichols R., Teschl G. Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials // Opuscula Mathematica. 2013. V. 33(3). P. 467–563.
5. Everitt W.N., Race D. The regular representation of singular second order differential expressions using quasi-derivatives // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. V. 65(2). P. 383–404.
6. Xiao xia Lv, Ji-jun Ao, Zettl A. Dependence of eigenvalues of fourth-order differential equations with discontinuous boundary conditions on the problem // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 456(1). P. 671–685.
7. Qinglan Bao, Jiong Sun, Xiaoling Hao, Zettl A. Characterization of self-adjoint domains for regular even order C-symmetric differential operators // Electronic J. of Qualitative Theory of Diff. Equat. 2019. V. 62. P. 1–17.

8. *Zettl A.* Sturm-Liouville Theory. Amer. Math. Soc., 2005.
9. *Zettl A.* Recent Developments in Sturm-Liouville Theory. Berlin, Boston: De Gruyter, 2021.
10. *Jianfang Qin, Kun Li, Zhaowen Zheng, Jinming Cai* Dependence of eigenvalues of discontinuous fourth-order differential operators with eigenparameter dependent boundary conditions // J. of Nonlinear Math. Phys. 2022. V. 29(4). P. 776–793.
11. *Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власий О.О.* Обобщенные квазидифференциальные уравнения. Львов: ЛГУ БЖД, 2017.
12. *Владыкина В.Е., Шкаликов А.А.* Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. 2015. Т. 98. №6. С. 832–841.
13. *Мирзоев К.А.* Операторы Штурма–Лиувилля // Тр. ММО. 2014. Т. 75. №2. С. 335–359.
14. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А.* Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 106. №1. С. 74–83.
15. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А.* Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка // Вестн. Моск. ун-та. 2020. Сер. 1. Матем., мех. №1. С. 23–28.
16. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1999. №1(16). С. 3–105.
17. *Дерр В.Я.* Об адекватном описании сопряженного оператора // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. №3. С. 43–63.
18. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
19. *Nehary Z.* Disconjugate linear differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 129. P. 500–516.
20. *Elias U.* The extremal solutions of the equation $Ly + p(x)y = 0$, II // J. of Math. Anal. and Appl. 1976. V. 55. P. 253–265.
21. *Everitt W.N.* Fourth order singular differential equation // J. Math. Anal. 1963. V. 142. P. 320–340.
22. *Kusano T., Naito M.* Oscillation criteria of general linear ordinary differential equations // Pacific J. Math. 1981. V. 92(2). P. 345–355.
23. *Trench W.F.* Canonical forms and principal systems for general disconjugate equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. 189. P. 319–327.
24. *Trench W.F.* Asymptotic theory perturbed general disconjugate equations // Hiroshima Math. J. 1982. V. 12. P. 43–58.
25. *Everitt W.N.* A note of linear ordinary quasi-differential equations // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. 1985. V. 101A. P. 1–14.
26. *Everitt W.N., Key J.D.* On some properties of matrices associated with linear ordinary quasi-differential equations // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. 1984. V. 96A. P. 211–219.
27. *Nicolson L.S.* Disconjugate systems of linear differential equation // J. of Differential Equat. 1970. 7. P. 570–583.

ON THE STUDY OF VARIOUS REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF QUASI-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE FORM OF SUMS OF SERIES AND THEIR SOME APPLICATIONS

M. Yu. Vatulkin*

426069 Izhevsk, Studencheskaya str., 7, M.T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Russia

*e-mail: vmyu6886@gmail.com

Received: 17.02.2024

Revised: 30.04.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. In the theory of the matrix equation $\dot{X} = A(t)X$, the well-known representation of the solution in the form of a series plays an important role. In the case of an n -th order scalar equation, it is also interesting to get a representation of the solution in the form of a scalar series, the terms of which are constructed from the coefficients of the original equation. Various representations of the fundamental system of solutions of a homogeneous quasi-differential equation of the n -th order in the form of scalar series, the terms of which are constructed from the coefficients of the original equation, are studied. As an example, in the form of such series, representations of the elements of the fundamental system of solutions of the Bessel equation are constructed, considered in the interval $[\vartheta, +\infty)$, где $\vartheta > 0$.

Keywords: quasi-differential equation, Cauchy function, fundamental system of solutions, sum of the series, initial approximations, Bessel equation.