

ДУАЛИЗМ В ТЕОРИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ. II¹⁾© 2024 г. Л. А. Бекларян^{1,*}¹ 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия

*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

Переработанный вариант 15.07.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Работа является продолжением одноименной работы Бекларян, Бекларян (2024). Приводится доказательство теоремы существования и единственности солитонных решений и соответствующих им решений функционально-дифференциального уравнения из дуальной пары “функция—оператор”, которая была сформулирована в отмеченной работе в виде гипотезы. Это позволило, в частности, изучить в модели транспортного потока на манхэттенской решетке солитонные решения с более сложными характеристиками, чем характеристики, задаваемые аддитивной циклической подгруппой группы $\mathbb{R}$. Библ. 4. Фиг. 1.

Ключевые слова: солитонные решения, функционально-дифференциальное уравнение, манхэттенская решетка.

DOI: 10.31857/S0044466924110051, EDN: KGSDFX

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение солитонных решений является одним из интенсивно развивающихся направлений (см. [1]–[23]). В предыдущей работе [1] был развит формализм, в рамках которого установлено соответствие между солитонными решениями и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа из дуальной пары “функция—оператор”. Теорема существования и единственности солитонных решений и решений соответствующего функционально-дифференциального уравнения в наиболее общем случае, когда отклонения аргумента в функционально-дифференциальном уравнении задаются элементами конечно порожденной группы диффеоморфизмов прямой, была сформулирована в виде гипотезы, доказательство которой в частном случае, когда отклонения аргумента в функционально-дифференциальном уравнении задаются элементами циклической группы сдвигов на прямой, приводится в монографии [11]. В рамках разработанного формализма приводится доказательство этого общего утверждения. Это позволяет, в частности, рассмотреть модель транспортного потока на манхэттенской решетке с более сложными характеристиками солитонных решений, отличных от аддитивной циклической подгруппы группы $\mathbb{R}$.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем ряд определений и результатов из работы [1]. Для определения солитонного букета там приводится хорошо известное определение условий Каратеодори, а также определяются условия Каратеодори в сильном смысле, которое необходимо для корректного определения элементов дифференциального и интегрального исчислений над бесконечномерными вектор-функциями.

Определение 1. Совокупность конструкций $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Upsilon | Q, g)$ называется *солитонным букетом* и однозначно определяется набором $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, где:

- 1) Υ — конечно порожденная группа с образующими $\{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_d\}$ и выделенными элементами $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$, а также соответствующее пространство

$$\mathcal{K}_\Upsilon^n = \overline{\prod_{\gamma \in \Upsilon} R_\gamma}, \quad R_\gamma = \mathbb{R}^n$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-11-00080).

бесконечных последовательностей $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}^n$, $x_\gamma = (x_{\gamma_1}, \dots, x_{\gamma_n})'$ со стандартной топологией полного прямого произведения;

- 2) $\mathbb{T}_\Upsilon = \{T_{\hat{\gamma}} : \hat{\gamma} \in \Upsilon\}$ – конечно порожденная группа сдвигов, действующих в пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ по следующему правилу

$$T_{\hat{\gamma}}\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon} = \{x_{\gamma\hat{\gamma}}\}_{\gamma \in \Upsilon}, \quad \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon} \in \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad T_{\hat{\gamma}} \in \mathbb{T}_\Upsilon;$$

- 3) $\eta : \Upsilon \rightarrow Q$ – эпиморфизм, где Q – группа диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, т.е. $Q \subset \text{Diff}_+^{(1)}(\mathbb{R})$, и, соответственно, Q – конечно порожденная группа с образующими $\check{q}_j = \eta(\check{\gamma}_j)$, $j = 1, \dots, d$, и выделенными элементами $q_j = \eta(\gamma_j)$, $j = 1, \dots, s$;

- 4) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори;

- 5) оператор

$$G_\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{K}_\Upsilon^n \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad \Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$$

такой, что координата $(G_\Gamma(t, \varkappa))_e$ бесконечномерной вектор-функции $G_\Gamma(t, \varkappa)$, соответствующая единичному элементу e группы Υ , зависит только лишь от конечного числа координат и равна

$$(G_\Gamma(t, \varkappa))_e = g(t, x_{\gamma_1}, \dots, x_{\gamma_s});$$

- 6) при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ выполняются “почти перестановочные” соотношения

$$T_{\hat{\gamma}} G_\Gamma(t, \varkappa) = \frac{d}{dt} \eta(\hat{\gamma})(t) \cdot G_\Gamma(\eta(\hat{\gamma})(t), T_{\hat{\gamma}} \varkappa), \quad \forall \varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon.$$

Для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ в фазовом пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ с фазовой переменной $\varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n$ определим систему

$$\dot{\varkappa}(t) = G_\Gamma(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon. \quad (2)$$

Производная в бесконечномерном дифференциальном уравнении (1) понимается как *производная по Гато*.

Вектор-функция $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$,

$\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$ называется *слабо дифференцируемой* в точке $t \in [a, b]$, если для любого $\gamma \in \Upsilon$ функция $x_\gamma(\cdot)$ дифференцируема в точке t . Очевидно, что такая вектор-функция слабо дифференцируема в точке $t \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда она дифференцируема по Гато. Вектор-функция $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$ называется *слабо абсолютно непрерывной (слабо измеримой)*, если для любого $\gamma \in \Upsilon$ функция $x_\gamma(\cdot)$ абсолютно непрерывна (измерима) на интервале $[a, b]$. *Решением системы (1)–(2)* называется всякая слабо абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, почти всюду удовлетворяющая уравнению (1) и при любом $t \in \mathbb{R}$ ограничению (2). Нелокальные ограничения (2) означают, что для решений системы *сдвиг по пространству равен сдвигу по времени*. Решения такой системы называются *решениями типа бегущей волны (солитонные решения)*, а группа Q называется *характеристикой бегущей волны*.

В паре с системой (1)–(2) рассматривается индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Каждый солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ индуцирует дуальную пару $(G_\Gamma|Q, g)$ *функция-оператор*, а также *канонический солитонный букет* $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ с канонической дуальной парой $(G_\Gamma|Q, g)$, в которой $\mathcal{I}$ тождественный автоморфизм группы Q . Для заданных Q, g канонический солитонный букет выделяется наиболее простой структурой набора $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и, соответственно, оператора G_Γ .

Для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ каждому решению $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) соответствует решение $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $t \in \mathbb{R}$, бесконечномерной системы (1)–(2) (солитонное решение) и наоборот. Такие решения связаны соотношениями $x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t))$, $x_e(t) = x(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, $t \in \mathbb{R}$.

Так как пространство $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ всего лишь метризуемо, то исследование пространства солитонных решений (пространства решений системы (1)–(2)) весьма затруднительно. Более продвинутое изучение требует локализации пространства солитонных решений, основанной на тех или иных представлениях, и, в частности, на учете асимптотики решений по пространству, как траекторий в бесконечномерном пространстве последовательностей $\mathcal{K}_\Upsilon^n$. На таком пути определим семейство подпространств $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $\mu \in (0, 1]$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, следующим образом:

$$\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n = \left\{ \varkappa : \varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n; \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_\gamma\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} < +\infty \right\},$$

$$\|\varkappa\|_{\Upsilon\infty\mu h} = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_\gamma\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h},$$

где $l(\gamma)$ обозначает длину слова $\gamma \in \Upsilon$ в конечно порожденной группе Υ ([24]). Параметр h в таких банаховых пространствах задается по группе Q из рассматриваемого солитонного букета следующим образом:

$$h \geq \check{h}, \quad \check{h} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} h_{\check{q}_j}, \quad h_{\check{q}_j} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - \check{q}_j(t)|, \quad j = 1, \dots, d,$$

где $\check{q}_j$, $j = 1, \dots, d$, — образующие группы Q .

Сформулируем дополнительные условия на функцию g в виде условий роста, а также условия для группы диффеоморфизмов Q из рассматриваемого солитонного букета:

(a*) функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори;

(b*) для любых $z_j, \bar{z}_j, j = 1, \dots, s$, и почти всех t имеет место условие роста типа

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^s \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

и условие Липшица

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$(M_0(t) = \|g(t, 0, \dots, 0)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad M_1 = M_2);$$

(c*) существует $\mu^* \in (0, 1]$ такое, что

$$M_0(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}), \quad \left(\mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \mu^{|\cdot|} \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \right\} \right)$$

(d*) задана группа диффеоморфизмов Q с системой образующих $\check{q}_1, \dots, \check{q}_d$ и выделенными элементами $q_1, \dots, q_s \in Q$, для любого $q \in Q$ величины

$$h_q = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - q(t)|, \quad h_{\check{q}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \dot{q}(t)$$

конечны, семейство величин $h_{\check{q}}$, $q \in Q$, равномерно ограничены и поэтому величины

$$\check{h} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - \check{q}_j(t)|, \quad h_{\check{Q}} = \sup_{q \in Q} h_{\check{q}}$$

конечны.

Все перечисленные условия для функции g как правой части дифференциального уравнения являются стандартными в теории дифференциальных уравнений. Правая часть $g(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) является элементом банахового пространства функций $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ с липшицевой нормой

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) = \{g(\cdot) : g(\cdot) \text{ удовлетворяет условиям } (a^*) - (d^*)\},$$

$$\|g(\cdot)\|_{Lip} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t, 0, \dots, 0)(\mu^*)^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \sup_{(t, z_1, \dots, z_s, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s) \in \mathbb{R}^{1+2ns}} \frac{\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n}}{\sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}}, \quad (4)$$

где параметр $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (c^*).

В рамках дуализма между солитонными решениями и решениями соответствующего функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) мы будем изучать решения последних, а также характеристики уравнения в параметрических семействах банаховых подпространств (пространства функций с весами) с параметром $\mu \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}) &= \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|\cdot|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \\ \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(\mathbb{R}) &= \left\{ x(\cdot) : x(\cdot)\mu^{|\cdot|} \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \right\}, \end{aligned}$$

и нормой

$$\|x(\cdot)\|_\mu^{(0)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|\cdot|}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \|x(\cdot)\|_\mu = \text{vrai sup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|\cdot|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Опишем свойства оператора $G_{\Gamma \infty \mu h} = G_\Gamma|_{\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n}$ (условия роста и Липшица):

$$\begin{aligned} \|G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa)\|_{\Gamma \infty \mu h} &\leq \mathcal{M}_0 \Upsilon_{\infty \mu h}(t) + \mathcal{M}_1 \Upsilon_{\infty \mu h} \|\varkappa\|_{\Gamma \infty \mu h}, \\ \|G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa) - G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \bar{\varkappa})\|_{\Gamma \infty \mu h} &\leq \mathcal{M}_2 \Upsilon_{\infty \mu h} \|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{\Gamma \infty \mu h}, \end{aligned}$$

действующего из пространства $\mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ в себя, где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \Upsilon_{\infty \mu h}(t) &= h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h}, \quad \mathcal{M}_0 \Upsilon_{\infty \mu h}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}), \\ \mathcal{P}_{\Gamma \mu h} &= \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}, \quad \mathcal{M}_1 \Upsilon_{\infty \mu h} = h_{\dot{Q}} M_1 \mathcal{P}_{\Gamma \mu h}, \quad \mathcal{M}_2 \Upsilon_{\infty \mu h} = h_{\dot{Q}} M_2 \mathcal{P}_{\Gamma \mu h}. \end{aligned}$$

Для заданных $\mu \in (0, 1]$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, наряду с системой (1)–(2) в исходном фазовом пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$, в подпространстве $\mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ рассматривается система

$$\frac{d\varkappa(t)}{dt} = G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma}, t, \quad \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

в виде дифференциального уравнения (5) с нелокальными ограничениями (6). Здесь дифференциальное уравнение (5) понимается в сильной форме (производная по Фреше), а не в слабой форме (производная по Гато) как в (1). По лемме 3 работы [1] установлена сильная измеримость оператора $G_{\Gamma \infty \mu h}$. Поэтому для любой сильно измеримой (тем более непрерывной) вектор-функции $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ суперпозиция $G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa(t))$, $t \in \mathbb{R}$ является сильно измеримой и интегрируемой по Бохнеру вектор-функцией. Решением такого дифференциального уравнения с фазовым пространством $\mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ называется всякая сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (непрерывная вектор-функция, почти всюду дифференцируемая по Фреше, производная $\dot{\varkappa}(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ однозначно восстанавливается по производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$) почти всюду, удовлетворяющая этому уравнению. Для такого уравнения (5) справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши. Решения бесконечномерного дифференциального уравнения (5) имеет асимптотику по пространству, которая определяется параметром μ . Важной задачей является определение асимптотики решения системы (5)–(6) (солитонное решение) и по времени. На этом пути в предложении 1 работы [1] для решения $\varkappa(\cdot)$ бесконечномерного дифференциального уравнения (5) установлена асимптотика по времени, задаваемая вложением

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma \infty \mu h}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_2 \Upsilon_{\mu h}}\}. \quad (7)$$

Если теорема 1 работы [1] устанавливает соответствие между всем пространством солитонных решений (решений системы (1)–(2)) и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3), то в теореме 2 той же работы уточняется это соответствие для подсемейства солитонных решений, как решений

системы (5)–(6), с решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) в терминах асимптотики по пространству и времени для первых, и асимптотики по времени для вторых. Каждому решению

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R), \quad \mu \in (0, \mu^*], \quad (8)$$

функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) соответствует солитонное решение $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$ с асимптотикой по времени вида

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Обратное. Каждому солитонному решению $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0, \mu^*]$ с асимптотикой по времени вида

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \bar{\mu} \in (0, 1], \quad (10)$$

соответствует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3). Одной из важных задач в отмеченном соответствии является уточнение диапазона изменения $\bar{\mu}$ в зависимости от μ .

С другой стороны, в теореме 4 той же работы установлено, что всякое решение системы (5)–(6) (солитонное решение) при любом фиксированном начальном значении $\bar{t} \in \mathbb{R}$ является решением бесконечномерной краевой задачи

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}) \quad k = 1, \dots, d, \quad (12)$$

и наоборот. Таким образом, изучение солитонных решений для системы (5)–(6) эквивалентно изучению сложной, но вполне понятной краевой задачи (11)–(12).

3. ОСНОВНАЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. ОСНОВНОЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ, А ТАКЖЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . В фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $\mu \in (0, \mu^*]$, $h \in [\bar{h}, +\infty)$ при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ будем рассматривать основную бесконечномерную начально-краевую задачу

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}), \quad k = 1, \dots, d, \quad (14)$$

$$(\varkappa(\bar{t}))_{\bar{\gamma}} = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon. \quad (15)$$

Для уравнения (13) понятие решения было дано в предыдущем разделе. Там же отмечалось, что в фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$ солитонные решения и только они являются решениями бесконечномерной краевой задачи (13), (14), а следовательно, и бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15).

Будем рассматривать соответствующее основное бесконечномерное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varkappa(t) = & \left[\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ & + \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (16)$$

где P_γ — проектор в банаховом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, для которого $Im P_\gamma$ совпадает с подпространством, порожденным координатой x_γ , а $\tilde{S}_{\infty\mu h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$ — оператор, действующий по правилу $(\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x})_\gamma = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \gamma \in \Upsilon$.

Определение 2. При заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) будем называть всякую непрерывную вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, удовлетворяющую этому уравнению.

В этом разделе будет дано доказательство теоремы существования и единственности, а также непрерывной зависимости от параметров решения основного бесконечномерного интегрального уравнения (16). Это нам позволит в следующем разделе установить соответствие между решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) и основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15).

Для пространства солитонных букетов существует ряд канонических преобразований. Определим одно из таких преобразований.

Определение 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Для диффеоморфизма $\theta(\cdot) \in Diff_+^{(1)}(\mathbb{R})$ типа сдвиг $\theta(t) = t + \xi$, $t \in \mathbb{R}$ определим солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta_\theta, G_{\Gamma_\theta}|Q_\theta, g_\theta)$ с $\Gamma_\theta = (\Upsilon, d, s, \eta_\theta, Q_\theta, g_\theta)$, в котором

$$g_\theta(t, z_1, \dots, z_s) = g(\theta^{-1}(t), z_1, \dots, z_s); \quad Q_\theta = \theta Q \theta^{-1}, \quad \forall q \in Q, \\ q_\theta = \theta q \theta^{-1}; \quad G_{\Gamma_\theta}(t, \varkappa) = G_\Gamma(\theta^{-1}(t), \varkappa), \quad \eta_\theta(\Upsilon) = \theta \eta(Q) \theta^{-1}.$$

Наряду с бесконечномерной начально-краевой задачей (13)–(15) будем рассматривать систему

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma_\theta \infty \mu_0 h_0}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$\varkappa(\eta_\theta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t}_\theta)) = T_{\tilde{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}_\theta), \quad k \in \{1, \dots, d\}, \quad (18)$$

$$(\varkappa(\bar{t}_\theta))_{\bar{\gamma}} = \bar{x}, \quad \bar{t}_\theta \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon. \quad (19)$$

Лемма 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . При замене времени типа сдвиг $\theta(t) = t + \xi$ для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta_\theta, G_{\Gamma_\theta}|Q_\theta, g_\theta)$ с $\Gamma_\theta = (\Upsilon, d, s, \eta_\theta, Q_\theta, g_\theta)$ будут справедливы условия

$$\mu_\theta^* = \mu^*, \quad \check{h}_\theta = \check{h}, \quad h_{\dot{Q}_\theta} = h_{\dot{Q}}, \quad \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu_0 h_0} = \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h}, \\ \forall q \in Q, \quad l(q_\theta) = l(q),$$

и при заданных начальном моменте $\bar{t}_\theta = \theta(\bar{t})$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta_\theta, G_{\Gamma_\theta}|Q_\theta, g_\theta)$ с $\Gamma_\theta = (\Upsilon, d, s, \eta_\theta, Q_\theta, g_\theta)$ основная бесконечномерная начально-краевая задача (17)–(19) в фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu_0 h_0}^n$, $\mu_0 = \mu$, $h_0 = h$ может быть получена в результате замены времени $\theta(t)$ в основной бесконечномерной начально-краевой задаче (13)–(15) с фазовым пространством $\mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $\mu \in (0, \mu^*]$, $h \in [\check{h}, +\infty)$, соответствующей солитонному букету $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$.

Доказательство. Доказательство можно получить с помощью прямой проверки.

В силу леммы 1, не нарушая общности, можем полагать, что в основной бесконечномерной начально-краевой задаче (13)–(15) начальный момент можно положить равным нулю, т.е. $\bar{t} = 0$.

В пространстве непрерывных вектор-функций $C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$ определим подпространство вектор-функций

$$C_\theta^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n) = \left\{ \varkappa(\cdot) : \varkappa(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n), \right. \\ \left. \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h} \theta^{|t|} < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|\varkappa(\cdot)\|_{\Upsilon \infty \mu h C_\theta^{(0)}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h} \theta^{|t|}.$$

Нас будут интересовать непрерывные вектор-функции $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, являющиеся решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (16). Очевидно, что всякое такое решение будет удовлетворять бесконечномерному дифференциальному уравнению (13). Как отмечалось в предыдущем разделе, решение $\varkappa(\cdot)$ такого бесконечномерного дифференциального уравнения имеет следующую асимптотику (справедливо вложение)

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h}}\}, \quad (20)$$

т.е. принадлежит банаховому пространству непрерывных вектор-функций $C_{\mu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n)$. Введем обозначение

$$\text{sign } \check{h} = \begin{cases} 1 & \text{при } \check{h} \neq 0, \\ 0 & \text{при } \check{h} = 0. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . При заданных параметрах $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, 1]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \check{h} h \dot{Q} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при } \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при } \check{h} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

тогда и только тогда, когда найдется двойственный параметр $\vartheta \in (0, 1]$ (двойственная пара μ и ϑ) для которого справедлива двойственная система оценок

$$\begin{aligned} \mu^h &\leq \vartheta^{\check{h}}, \quad \vartheta < \hat{\mu}, \quad (1 - \text{sign } \check{h})\mu \leq (1 - \text{sign } \check{h})\vartheta, \\ \hat{\mu} &= \min\{\mu^*, e^{-M_2 \Upsilon_{\infty\mu h}}\}, \end{aligned} \quad (22)$$

из которой следуют оценка

$$\begin{aligned} \mu^{h/\check{h}} &< \hat{\mu} \quad \text{при } \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \hat{\mu} \quad \text{при } \check{h} = 0, \end{aligned}$$

а также непрерывное вложение

$$C_{\mu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n) \subset C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n). \quad (23)$$

Более того, всякой двойственной паре μ и ϑ соответствует каноническая пара двойственных параметров μ и ν , связанных следующим образом

$$\nu = \begin{cases} \mu^{h/\check{h}} & \text{при } \check{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при } \check{h} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Доказательство. Так как $M_2 \Upsilon_{\infty\mu h} = h \dot{Q} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}$, то при $\check{h} = 0$ имеет место соотношение $M_2 \Upsilon_{\infty\mu h} = M_2 s$.

Пусть для параметра μ выполняются условия (21). Тогда для канонически двойственного параметра ν из (24) справедлива двойственная система оценок (22).

Обратное. Если для двойственного параметра $\vartheta \in (0, 1]$, справедлива двойственная система оценок (22), то из них непосредственно следуют условия (21). Вложение и оценка из (23) следуют из оценок (22).

В условиях леммы 2, в силу вложений из (20), (23), для каждого решения $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0, \mu^*]$ бесконечномерного дифференциального уравнения (13) справедлива асимптотика по времени вида

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\nu}^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon_{\infty\mu h}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

что уточняет значения $\bar{\mu}$ в описанных соответствиях (8)–(10). В случае $h = \check{h}$ справедливо равенство $\nu = \mu$ и асимптотика решений бесконечномерного дифференциального уравнения (13) как по пространству, так и по времени задается параметром μ . Это приводит к обращению соответствия (8), (9).

В дальнейшем нам понадобится еще одно преобразование солитонного букета, основанное на перенормировке фазового пространства $\mathcal{K}_{\infty\mu h}^n$ в следующем виде: для заданного $r = 0, 1, \dots$ через $\mathcal{K}_{r\Upsilon_{\infty\mu h}}^n$ обозначается пространство $\mathcal{K}_{\infty\mu h}^n$ с нормой

$$\|\varkappa\|_{r\Upsilon_{\infty\mu h}} = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh}.$$

Между такими пространствами имеет место естественный изоморфизм $\mathcal{K}_{r\Upsilon_{\infty\mu h}}^n \cong \mathcal{K}_{\Upsilon_{\infty\mu h}}^n$, а норма пространства $C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon_{\infty\mu h}}^n)$ обозначается через $\|\varkappa\|_{r\Upsilon_{\infty\mu h} C_{\vartheta}^{(0)}}$.

Определение 4. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q — условиям (d^*) . Для каждого заданного $r = 0, 1, \dots$ через $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ будем обозначать солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$.

Очевидно, что в результате перенормировки фазового пространства сама основная начально-краевая задача (13)–(15) не изменяется. При заданном $r \in \{0, 1, \dots\}$ соответствующая *основная бесконечномерная начально-краевая задача* имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}(t) &= G_{r\Upsilon\infty\mu h}(t, \varkappa) && \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \\ \varkappa(\eta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t})) &= T_{\tilde{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}), && k = 1, \dots, d, \\ (\varkappa(\bar{t}))_{\bar{\gamma}} &= \bar{x}, && \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon, \end{aligned}$$

где индекс r означает, что фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$. Очевидно, что при $r = 0$ выполнены равенства $\mathcal{K}_{0\Upsilon\infty\mu h}^n = \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $G_{0\Upsilon\infty\mu h} = G_{\Upsilon\infty\mu h}$, а также при всяком $r \in \{0, 1, \dots\}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) &= \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) \mu^{rh}, \quad \mathcal{M}_{r1\Upsilon\infty\mu h} = \mathcal{M}_{1\Upsilon\infty\mu h}, \\ \mathcal{M}_{r2\Upsilon\infty\mu h} &= \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h}. \end{aligned} \quad (25)$$

При заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ будем рассматривать соответствующее *основное бесконечномерное интегральное уравнение*

$$\begin{aligned} \varkappa(t) &= \left[\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ &+ \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (26)$$

а также определим операторы

$$A_r : \varkappa(\cdot) \longrightarrow \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_r : \varkappa(\cdot) &\longrightarrow \left[\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma [(A_r[\varkappa(\cdot), \bar{x}])(\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))] \right] + \\ &+ (A_r[\varkappa(\cdot), \bar{x}])(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (28)$$

действующие из пространства $C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя. Оператор A_r , $r \in \{0, 1, \dots\}$ получен из оператора A_0 , в котором фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$.

Лемма 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q — условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\dot{h} \geq 0$, $h \in [\dot{h}, +\infty)$ для параметров $\mu \in (0, \mu^*]$, $\vartheta \in (0, \mu^*]$ выполняется оценка

$$\mu^h \leq \vartheta^{\dot{h}},$$

то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{A}_r$ из (28) является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_\vartheta^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя.

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем полагать, что $\bar{t} = 0$. Этого мы можем добиться с помощью замены времени типа сдвиг для рассматриваемого солитонного букета.

Пусть $\varkappa(\cdot) \in C_\vartheta^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$. Тогда, учитывая вложение $\mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R})$ и соотношения (25), получим

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\bar{t}}^{(\cdot)} G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_\vartheta^0} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left\| \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \leq \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left\| \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left| \int_{\bar{t}}^t \left[\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \leq \\
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left| \int_{\bar{t}}^t \vartheta^{-|\tau|} \left[\vartheta^{|\tau|} \mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \vartheta^{|\tau|} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \leq \\
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left| \int_{\bar{t}}^t \vartheta^{-|\tau|} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] d\tau \right| \leq \\
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] |\vartheta^{-|t|} - \vartheta^{-|\bar{t}|}| \leq \\
 & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \sup_{t \in \mathbb{R}} |1 - \vartheta^{(|t| - |\bar{t}|)}| = \\
 & = [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right]. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Таким образом, третье слагаемое в операторе $\hat{\mathcal{A}}_r$ действует из пространства $C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty ph}^n)$ в себя.

Покажем, что в операторе $\hat{\mathcal{A}}_r$ величина в квадратных скобках является вектором пространства $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$. По определению величина $\tilde{S}_{\infty\mu h} \tilde{x}$ из квадратной скобки является вектором пространства $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$. Изучим второе слагаемое из квадратной скобки.

Для заданного элемента $\tilde{\gamma} \in \Upsilon$ и $\bar{t} = 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \mathcal{Z}(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left\| \left(\int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \mathcal{Z}(\tau)) d\tau \right) \right\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \|G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \mathcal{Z}(\tau))\|_{r\Upsilon\infty\mu h} d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \left[\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \vartheta^{-|\tau|} \left[\vartheta^{|\tau|} \mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \vartheta^{|\tau|} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \vartheta^{-|\tau|} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \times \\
 & \times \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \vartheta^{-|\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})|} - \vartheta^{-|\bar{t}|} \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \times \\
 & \times \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \vartheta^{-l(\gamma)\tilde{h}} \vartheta^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \vartheta^{-|\bar{t}|} - \vartheta^{-|\bar{t}|} \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} = \\
 & = [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \times \\
 & \times \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \left(\frac{\mu^h}{\vartheta^{\tilde{h}}} \right)^{l(\gamma)} \vartheta^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} - \mu^{l(\gamma)h} \right| \vartheta^{-|\bar{t}|} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \text{sign } \tilde{h} [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \vartheta^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ действует из пространства $C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя.

Остается установить непрерывность оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$. Повторяя действия, проведенные при оценках (29), (30), для $\varkappa(\cdot), \tilde{\varkappa}(\cdot) \in C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ получим

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\mathcal{A}}_r[\varkappa(\cdot)](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_r[\tilde{\varkappa}(\cdot)](\cdot))(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \leq \\ & \leq \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} [G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) - G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))] d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} + \\ & + \left\| \int_{\bar{t}}^{(\cdot)} [G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) - G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))] d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \leq \\ & \leq \text{sign } \check{h} [\ln \bar{\mathfrak{t}}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \bar{\mathfrak{t}}^{-l(\bar{\gamma})\check{h}} \mu^{rh} + \\ & + [\ln \bar{\mathfrak{t}}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \leq \\ & \leq [\ln \bar{\mathfrak{t}}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} [1 + \bar{\mathfrak{t}}^{-l(\bar{\gamma})\check{h}} \mu^{rh} \text{sign } \check{h}] \end{aligned} \quad (31)$$

откуда и следует непрерывность оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, \mu^*]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} & \check{h} h_{\bar{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} < h \ln \mu^{-1} \quad \text{при } \check{h} \neq 0, \\ & \mu < \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при } \check{h} = 0, \end{aligned}$$

то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_{\bar{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя.

Доказательство. Оценка $\mu^h \leq \hat{\mu}^{\check{h}}$ следует из условия (23) в лемме 2, а непрерывность оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$, действующего из пространства $C_{\bar{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, следует из леммы 3.

Теперь мы можем корректно переопределить понятие решения основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Определение 5. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если для параметров $\mu \in (0, \mu^*]$, $\bar{\mathfrak{t}} \in (0, 1]$, $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ выполняются оценки $\mu^h \leq \bar{\mathfrak{t}}^{\check{h}}$, $\bar{\mathfrak{t}} < \hat{\mu}$, то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) будем называть всякую непрерывную вектор-функцию $\varkappa(\cdot) \in C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, удовлетворяющую этому уравнению.

Покажем эквивалентность определений 2 и 5. Если непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ удовлетворяет основному бесконечномерному интегральному уравнению (16), то она удовлетворяет бесконечномерному обыкновенному дифференциальному уравнению (25). В силу (7), имеет место включение $\varkappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, а в силу условия $\bar{\mathfrak{t}} < \hat{\mu}$ имеет место вложение $C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n) \subset C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$. Поэтому определения 2 и 5 эквивалентны.

Покажем, что при достаточно больших $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ является сжимающим. Оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ состоит из трех слагаемых. Одним из слагаемых является оператор $\mathcal{A}_r$, который оказывается сжимающим при любом $r \in \{0, 1, \dots\}$. Две другие составляющие оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$ складываются из постоянного вектора и слагаемого, определяемого координатой с индексом $\bar{\gamma}$. Вклад последнего слагаемого в операторе $\hat{\mathcal{A}}_r$ удастся уменьшить за счет перенормировки пространства, что и делает оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ при достаточно больших r сжимающим.

Лемма 4. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если для заданных параметров $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ для параметров $\mu \in (0, \mu^*]$, $\bar{\mathfrak{t}} \in (0, 1]$ выполняются оценки

$$\mu^h \leq \bar{\mathfrak{t}}^{\check{h}}, \quad \bar{\mathfrak{t}} < \hat{\mu}, \quad (1 - \text{sign } \check{h}) \mu \leq (1 - \text{sign } \check{h}) \bar{\mathfrak{t}},$$

$$\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h}}\}, \quad (32)$$

то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{A}_r$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, а при достаточно больших r является сжимающим оператором. Более того, оператор A_r при любом $r \in \{0, 1, \dots\}$ является сжимающим.

Доказательство. Непрерывность операторов $\hat{A}_r$, $r \in \{0, 1, \dots\}$ следует из леммы 3. Из оценок (31) для $\varkappa(\cdot)$, $\tilde{\varkappa}(\cdot) \in C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ получим

$$\begin{aligned} & \|(\hat{A}_r[\varkappa(\cdot)](\cdot) - (\hat{A}_r[\tilde{\varkappa}(\cdot)](\cdot))(\cdot))\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}} \leq \\ & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} [1 + \vartheta^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}}. \end{aligned}$$

Из условий (32) и леммы 2 следует справедливость условий (21), а из последних следует неравенство

$$[\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} < 1. \quad (33)$$

Поэтому, при достаточно больших r будет выполняться оценка

$$[\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} [1 + \vartheta^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] < 1$$

откуда и следует, что оператор $\hat{A}_r$ сжимающий.

Доказательство последнего утверждения леммы. В силу оценки для второго слагаемого из (31), для любого $r \in \{0, 1, \dots\}$ получим

$$\begin{aligned} & \| (A_r[\varkappa(\cdot)](\cdot) - (A_r[\tilde{\varkappa}(\cdot)](\cdot))(\cdot)) \|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}} \leq \\ & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}}. \end{aligned}$$

В силу оценки (33), оператор A_r при любом $r \in \{0, 1, \dots\}$ является сжимающим.

Следствие 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r = 0, 1, \dots$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\tilde{h} \geq 0$, $h \in [\tilde{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, \mu^*]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} & \tilde{h} h_{\tilde{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} < h \ln \mu^{-1}, \quad \text{при } \tilde{h} \neq 0, \\ & \mu < \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\}, \quad \text{при } \tilde{h} = 0, \end{aligned}$$

то для канонически двойственного параметра

$$\nu = \begin{cases} \mu^{h/\tilde{h}} & \text{при } \tilde{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при } \tilde{h} = 0. \end{cases}$$

при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{A}_r$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, а также при достаточно больших r непрерывный оператор $\hat{A}_r$ является сжимающим оператором.

Доказательство. Оценки $\mu^h \leq \nu^{\tilde{h}}$, $\nu < \hat{\mu}$ следуют из леммы 2, непрерывность оператора $\hat{A}_r$, действующего из пространства $C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя следует из леммы 3, а из леммы 4 следует, что при достаточно больших r он является сжимающим.

Замечание 1. Так как строгое неравенство $\hat{\mu} < \hat{\mu}$ неверно, то лемма 3 не может гарантировать того, что непрерывный оператор $\hat{A}_r$, действующий из пространства $C_{\bar{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, является сжимающим.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Теорема 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, \mu^*]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \check{h} h_{\check{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при} \quad \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при} \quad \check{h} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

то при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) существует решение $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Такое решение является единственным. Для решения $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$ основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) асимптотика по переменной времени t в терминах функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$ задается вложением $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\hat{\mu}}^1 C^{(0)}(R)$, $\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-M_2 \Upsilon\infty\mu h}\}$, т.е. $\varkappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$. Более того, для параметра ν

$$\nu = \begin{cases} \mu^{\frac{h}{\check{h}}} & \text{при} \quad \check{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при} \quad \check{h} = 0 \end{cases}$$

выполняется оценка $\nu < \hat{\mu}$, имеет место непрерывное вложение

$$C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n) \subset C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n),$$

а решение $\varkappa(\cdot)$ как элемент пространства вектор-функций $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Если вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16), то она будет решением бесконечномерного дифференциального уравнения (13). Тогда утверждения об асимптотике функции $\rho(\cdot) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $\varkappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, следует из предложения 1 работы [1]. Так как параметр μ удовлетворяет условиям (34), то по следствию 1 оператор $\hat{A}_0$ является непрерывным оператором из пространства $C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя. Если рассматривать солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ с $r = 0, 1, \dots$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, то по следствию 2 при канонически двойственном параметре ν из (24) и любом $r = 0, 1, \dots$ оператор $\hat{A}_r$ является непрерывным оператором из пространства $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя и, в частности, оператор $\hat{A}_0$ является непрерывным оператором из пространства $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя. Более того, при достаточно больших r оператор $\hat{A}_r$ является сжимающим.

Интегральное уравнение (26) можно записать в следующем операторном виде:

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}_r[\varkappa(\cdot)])(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как оператор $\hat{A}_r$ при достаточно большом r является сжимающим в пространстве $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$, то основное бесконечномерное интегральное уравнение (26) имеет решение $\varkappa(\cdot) \in C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ и такое решение единственное. Очевидно, что вектор-функции являющиеся решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (26) будут принадлежать также и пространству $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ и удовлетворять основному бесконечномерному интегральному уравнению (16) и наоборот. Следовательно для основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) существует, причем единственное, решение.

Остается показать, что существующее решение непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, в том смысле как сформулировано в теореме.

Операторы A_r и $\hat{A}_r$ по формулам (27), (28) определялись через отображения $G_{r\Gamma\infty\mu h}$, которые в свою очередь определялись функцией $g(\cdot)$. Чтобы указать зависимость операторов A_r , $\hat{A}_r$ от начального значения $\bar{x}$ и функции $g(\cdot)$ будем отображать их с индексами и параметрами $A_{rg}[\cdot, \bar{x}]$, $\hat{A}_{rg}[\cdot, \bar{x}]$.

Рассмотрим солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\tilde{\Gamma}}|Q, \tilde{g})_r$ с $\tilde{\Gamma} = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, \tilde{g})$ с функцией $\tilde{g}(\cdot)$ из малой окрестности функции $g(\cdot)$ в пространстве $V_{\mu^*}(R \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ и начальное значение $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ из окрестности начального значения $\bar{x}$. Для такой функции $\tilde{g}(\cdot)$ также будут выполняться условия теоремы 1. По доказанному в предыдущей части теоремы 1 существуют вектор-функции $\varkappa(\cdot)$, $\tilde{\varkappa}(\cdot) \in C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, удовлетворяющие тождествам

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}_{rg}[\varkappa(\cdot), \bar{x}])(t), \quad \tilde{\varkappa}(t) \equiv (\hat{A}_{r\tilde{g}}[\tilde{\varkappa}(\cdot), \tilde{x}])(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Из тождеств (35) следует очевидная цепочка оценок

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}} = \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](t) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}} \leq \\ & \leq \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}} + \\ & + \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (36) оценивается правой частью неравенства (31), в котором параметр $\mathfrak{h}$ заменен на канонически двойственный параметр v , и дополнительным слагаемым вида $\|\tilde{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{rh}$.

Используя представления (27)–(28) для операторов A_r и $\hat{\mathcal{A}}_r$, оценим второе слагаемое в правой части неравенства (36)

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}} \leq \\ & \leq \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \{ (A_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \} \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}} + \\ & + \left\| (A_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot)) \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Пользуясь представлениями (27)–(28), определением нормы (4), а также воспроизводя логику оценок (29) и (30) с учетом условия $\bar{t} = 0$, первое слагаемое в правой части неравенства (37) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \{ (A_g[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \} \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_v^{(0)}} \leq \\ & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|P_\gamma \{ (A_g[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \} \|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\ & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} \|G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma}\infty\mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau))\|_{r\Upsilon\infty\mu h} d\tau \right| \leq \\ & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \|G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma}\infty\mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau))\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \leq \\ & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \left\| \frac{d}{d\tau} \eta(\tilde{\gamma})(\tau) [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau)) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau))) \right\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} = \\ & = h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)) \|_{\mathbb{R}^n} (\mu^*)^{\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\ & \left. + \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau)) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau))] - [g(\eta(\gamma)(\tau), 0, \dots, 0) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)) \|_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right\} \leq \\ & \leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\ & \left. + \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right\} \leq \\ & \leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h - |\tau|} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\ & \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \|\tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma_j\tilde{\gamma})h} \mu^{-l(\gamma_j\tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} (\mu^*)^{-|\tau|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \|\tilde{\mathcal{K}}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ (\mu^*)^{-|\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \|\tilde{\mathcal{K}}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \hat{\mu}^{|\tau|} \hat{\mu}^{-|\tau|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h-l(\tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \mu^{rh} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \right\} \leq \\
&\leq \text{sign } \tilde{h} \ h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \mu^{rh} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \left[l(\gamma)h + l(\tilde{\gamma})h + |\bar{t}| \right] \\
&\left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-l(\gamma)h} \hat{\mu}^{-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}. \tag{38}
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned}
&\|(A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}]) (\cdot) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}]) (\cdot)\|_{\Upsilon \infty \mu h C_{\gamma}^{(0)}} = \\
&= \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} \|\{(A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}]) (t) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}]) (t)\}\|_{\Upsilon \infty \mu h} \leq \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} \int_{\bar{t}}^t \|G_{r\Gamma \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau))\|_{r\Upsilon \infty \mu h} d\tau \leq \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \|G_{r\Gamma \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau))\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \leq \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \left\| \frac{d}{d\tau} \eta(\tilde{\gamma})(\tau) [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \tilde{\gamma}}(\tau)) - \right. \\
&- \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \tilde{\gamma}}(\tau))] \|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} = \\
&= h_{\dot{Q}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0) - \right. \\
&- \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)] \|_{\mathbb{R}^n} (\mu^*)^{\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \\
&+ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \tilde{\gamma}}(\tau)) - \\
&- \tilde{g}(\eta(\gamma)(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \gamma}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \gamma}(\tau))] - [g(\eta(\gamma)(\tau), 0, \dots, 0) - \\
&- \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)] \|_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{rh} \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h - |\tau|} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{-l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} (\mu^*)^{-|\tau|} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \|\tilde{x}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \|\tilde{x}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \hat{\mu}^{|\tau|} \hat{\mu}^{-|t|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h - l(\tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \|\tilde{x}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-|t|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Используя соотношения (36)–(39) получим оценку

$$\begin{aligned}
 &\|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} = \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \bar{x}](t) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\
 &\leq \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \bar{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\
 &+ \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\
 &\leq \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \bar{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\
 &+ \left| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \{ (A_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \} \right\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\
 &+ \|(A_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](t) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\
 &\leq [\ln \mathbf{v}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + \mathbf{v}^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \text{sign } \tilde{h}] \|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} + \|\bar{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{r\tilde{h}} + \\
 &+ \text{sign } \tilde{h} h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \left[l(\gamma)h + l(\bar{\gamma})h + |\bar{t}| \right] \\
 &\left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-l(\gamma)h} \hat{\mu}^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\} + \\
 &+ h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-|t|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Полученную оценку преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 &\left\{ 1 - [\ln \mathbf{v}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + \mathbf{v}^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \text{sign } \tilde{h}] \right\} \|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \leq \\
 &\leq \text{sign } \tilde{h} h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \mu^{rh} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \left[l(\gamma)h + l(\bar{\gamma})h + |\bar{t}| \right] \\
 &\left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-l(\gamma)h} \hat{\mu}^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mathcal{P}_{r\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\} + \|\bar{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{r\tilde{h}} +
 \end{aligned}$$

$$+ h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-|t|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}. \quad (40)$$

Так как параметр μ удовлетворяет условиям (34), то выполняется неравенство (33). Поэтому при достаточно большом r будет выполняться неравенство

$$[\ln v^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] < 1 \quad (41)$$

и числовой коэффициент в левой части неравенства (40) является положительным. В силу оценок $\mu < \mu^*$, $\mu < \hat{\mu}$, $v \leq \mu$, при заданной вектор-функции $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$ величина правой части конечна. Если покажем, что для $\tilde{x}$ и $\tilde{g}$ из достаточно малой окрестности $\tilde{x}$ и g решения $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$ основного бесконечномерного интегрального уравнения (26) являются ограниченными в пространстве $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon \infty \mu h}^n)$, то установим факт непрерывной зависимости решения $\mathcal{K}(\cdot)$ как элемента пространства вектор-функций $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon \infty \mu h}^n)$ от начального значения $\tilde{x}$ и функции g .

Пусть вектор-функция $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (26). Тогда имеет место тождество

$$\tilde{\mathcal{K}}(t) \equiv (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Следуя последовательности преобразований из (29), (30), а также учитывая тождество (42), получим цепочку оценок

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} &= \|(\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\tilde{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\tilde{t})} G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon \infty \mu h} + \\ &+ \left\| \int_{\tilde{t}}^{(\cdot)} G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \right] v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h} + \\ &+ [\ln v^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \right] + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \right] \times \\ &\times \left[1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h} \right] + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

принимая окончательный вид

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - [\ln v^{-1}]^{-1} \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \left[1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h} \right] \right\} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \leq \\ &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} [1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \quad (43)$$

Так как параметр μ удовлетворяет условиям (34), то при достаточно большом r будет выполняться неравенство (41). Так как $\tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h}$ из малой окрестности $\mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h}$, то будет справедливым соотношение

$$[\ln v^{-1}]^{-1} \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] < 1$$

и числовой коэффициент в левой части неравенства (43) будет положительным. Более того, для $\tilde{x}$ и $\tilde{g}$ из достаточно малой окрестности $\tilde{x}$ и g числовой коэффициент в левой части неравенства (43) строго отделен от нуля. Тогда все решения $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$, соответствующие таким начальным значениям $\tilde{x}$ и функциям $\tilde{g}$, в пространстве $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon \infty \mu h}^n)$ ограничены. Теорема доказана.

4. ТЕОРЕМА О СООТВЕТСТВИИ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ОСНОВНОГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Установим соответствие между решениями основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) и основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Теорема 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q — условиям (d^*) . Заданы параметры $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$, при которых параметр $\mu \in (0, 1]$, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \check{h} h \dot{Q} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при} \quad \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при} \quad \check{h} = 0. \end{aligned}$$

Тогда при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ сильно абсолютно непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, являющаяся решением основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15), будет решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, являющаяся решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16), будет сильно абсолютно непрерывной, а также решением основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15).

Доказательство. Пусть сильно абсолютно непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$ является решением основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15). Для такой вектор-функции справедливо интегральное представление

$$\varkappa(t) = \varkappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad (44)$$

а также краевые условия (14). В силу теорем 3 и 4 работы [1], для такого решения $\varkappa(\cdot)$ при любых $t \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in \Upsilon$ также справедливы соотношения $\varkappa(\eta(\gamma)(t)) = T_\gamma \varkappa(t)$ и, в частности, соотношения

$$\varkappa(\eta(\gamma)(\bar{t})) = T_\gamma \varkappa(\bar{t}) \quad \forall \gamma \in \Upsilon. \quad (45)$$

Используя интегральное представление (44) для представления $\varkappa(\eta(\gamma)(\bar{t}))$, соотношения (45) преобразуются к виду

$$\varkappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma)(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau = T_\gamma \varkappa(\bar{t}) \quad \forall \gamma \in \Upsilon.$$

В силу начального условия (15), имеют место равенства $\{T_\gamma \varkappa(\bar{t})\}_{\bar{\gamma} \gamma^{-1}} = \{\varkappa(\bar{t})\}_{\bar{\gamma}} = \bar{x} \quad \forall \gamma \in \Upsilon$, из которых с учетом соотношений (4) будет следовать система равенств

$$x_{\bar{\gamma} \gamma^{-1}}(\bar{t}) + \left\{ \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma)(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\}_{\bar{\gamma} \gamma^{-1}} = \bar{x} \quad \forall \gamma \in \Upsilon. \quad (46)$$

Если член с интегралом перенести в правую часть и произвести переиндексацию координат, то получим равенства

$$x_\gamma(\bar{t}) = \bar{x} - \left\{ \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\}_\gamma \quad \forall \gamma \in \Upsilon, \quad (47)$$

эквивалентные равенствам (46). Система равенств (47) в векторной форме примет вид

$$\varkappa(\bar{t}) = \tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau. \quad (48)$$

Если значение $\varkappa(\bar{t})$ из (48) подставить в интегральное представление (44), то мы получим, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Доказательство второго утверждения теоремы. Пусть непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16), из которого следует, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ будет сильно абсолютно непрерывной и удовлетворять дифференциальному уравнению (13). Если в то же интегральное уравнение подставить значение $t = \bar{t}$, то получим равенство (48), в котором координата с индексом $\bar{\gamma}$ совпадает с начальным условием (15).

Остается показать, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ будет удовлетворять и краевым условиям (14). При каждом фиксированном $k \in \{1, \dots, d\}$ и элементе системы образующих $\check{\gamma}_k \in \Upsilon$ к обоим частям основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) применим оператор сдвига $T_{\check{\gamma}_k}$:

$$T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(t) = T_{\check{\gamma}_k} \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + T_{\check{\gamma}_k} \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau.$$

Используя равенство $T_{\check{\gamma}_k} \tilde{S}_{\infty \mu h} = \tilde{S}_{\infty \mu h}$, перестановочное соотношение $T_{\check{\gamma}_k} P_\gamma = P_{\check{\gamma}_k^{-1} \gamma} T_{\check{\gamma}_k}$, а также почти перестановочное соотношение (6) из определения солитонного букета, получим

$$T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(t) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\check{\gamma}_k^{-1} \gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} \frac{d}{dt} \eta(\check{\gamma}_k)(\tau) G_{\Gamma \infty \mu h}(\eta(\check{\gamma}_k)(\tau), T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ + \int_{\bar{t}}^t \frac{d}{dt} \eta(\check{\gamma}_k)(\tau) G_{\Gamma \infty \mu h}(\eta(\check{\gamma}_k)(\tau), T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\tau)) d\tau.$$

Сделав замену времени $\xi = \eta(\check{\gamma}_k)(\tau)$ под знаками интеграла получим

$$T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(t) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\check{\gamma}_k^{-1} \gamma} \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k \gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k^{-1})(\xi))) d\xi \right] + \\ + \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k^{-1})(\xi))) d\xi. \quad (49)$$

Введя обозначение $\overline{\varkappa}(\xi) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k^{-1})(\xi))$, переобозначив $\hat{\gamma} = \check{\gamma}_k^{-1} \gamma$ и используя очевидное тождество $\check{\gamma}_k^{-1} \check{\gamma}_k = e$ перепишем соотношение (49)

$$\overline{\varkappa}(\eta(\check{\gamma}_k)(t)) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\hat{\gamma} \in \Upsilon} P_{\hat{\gamma}} \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\hat{\gamma}^{-1} \check{\gamma}_k^{-1})(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \overline{\varkappa}(\xi)) d\xi \right] + \\ + \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \overline{\varkappa}(\xi)) d\xi.$$

Следовательно, сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\overline{\varkappa}(\cdot)$ при заданных начальном моменте $\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}) \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и индексе координаты $\check{\gamma}_k^{-1} \in \Upsilon$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

С другой стороны, справедливо равенство

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(t)) = \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) + \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \varkappa(\xi)) d\xi.$$

Используя основное бесконечномерное интегральное уравнение (16), получим представление

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ + \int_{\bar{t}}^{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

которое с использованием очевидного тождества $\gamma_k \gamma_k^{-1} = e$ преобразуется к виду

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = \tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\gamma^{-1} \check{\gamma}_k^{-1})(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau.$$

Значение $\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))$ из (4) подставив в равенство (50), получим

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(t)) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\gamma^{-1} \check{\gamma}_k^{-1})(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] +$$

$$+ \int_{\eta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\tilde{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \kappa(\xi)) d\xi.$$

Следовательно, сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\kappa(\cdot)$ при заданных начальном моменте $\eta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t}) \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и индексе координаты $\tilde{\gamma}_k^{-1} \in \Upsilon$ также является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16). В силу единственности решения основного бесконечномерного интегрального уравнения получим, что $\kappa(\xi) = \bar{\kappa}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Так как $\bar{\kappa}(\xi) = T_{\gamma_k} \kappa(\eta(\tilde{\gamma}_k^{-1})(\xi))$, то получим $\kappa(\xi) = T_{\gamma_k} \kappa(\eta(\tilde{\gamma}_k^{-1})(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}$. Сделав замену $\eta(\tilde{\gamma}_k^{-1})(\xi) = t$, получим соотношение $\kappa(\eta(\tilde{\gamma}_k)(t)) = T_{\gamma_k} \kappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, что и доказывает выполнение краевых условий (14). Теорема доказана.

5. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ, А ТАКЖЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ, РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Пользуясь теоремой 2 о соответствиях между решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) и основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15), мы можем сформулировать теорему существования и единственности, а также непрерывной зависимости от параметров, для решений основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15). Такая теорема была сформулирована в работе [1] в виде гипотезы.

Теорема 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q – условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\tilde{h} \geq 0$, $h \in [\tilde{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, 1]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \tilde{h} h_{\dot{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при} \quad \tilde{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при} \quad \tilde{h} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

то при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) существует решение $\kappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Такое решение является единственным. Для решения $\kappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$ основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) асимптотика по переменной времени t в терминах функции $\rho(t) = \|\kappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, задается вложением $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^1 C^{(0)}(R)$,

$\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-M_2 \Upsilon \infty \mu h}\}$, т.е. $\kappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$. Более того, для v

$$v = \begin{cases} \mu^{h/\tilde{h}} & \text{при} \quad \tilde{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при} \quad \tilde{h} = 0 \end{cases}$$

выполняется оценка $v < \hat{\mu}$, имеет место непрерывное вложение

$$C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n) \subset C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n), \quad (51)$$

а решение $\kappa(\cdot)$ как элемент пространства вектор-функций $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Данное утверждение непосредственно следует из теоремы 1 и теоремы 2 о соответствиях.

Следствие 3. Пусть выполняются условия теоремы 3 и при $\tilde{h} \neq 0$ выполнено соотношение $h = \tilde{h}$. Тогда $v = \mu < \hat{\mu}$ и для решения $\kappa(\cdot)$ имеет место вложение $\kappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$.

Доказательство. Данное утверждение следует из вложения (51).

Сформулируем задачу Коши для уравнения (3)

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (52)$$

$$x(\hat{t}) = \bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{t} \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

В действительности, соответствия, которые описаны в теореме 2 работы [1], продолжают до соответствий между решениями основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) и решениями задачи Коши (52)–(53). Пользуясь дуализмом и, соответственно, теоремой 2 работы [1] о взаимосоответствиях, а также теоремой 3 применительно к каноническому солитонному букету $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$, в которой положено $h = \check{h}$, мы можем переформулировать теорему 3 в терминах, применительных к функционально-дифференциальному уравнению точечного типа (52).

Теорема 4. Пусть функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q -условиям (d^*) . Если при $\mu \in (0, \mu^*]$ справедливо неравенство

$$h_Q M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(q_j)\check{h}} < \ln \mu^{-1}, \quad (54)$$

то для задачи Коши (52)–(53) существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$. Такое решение является единственным, а также как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Формулировка и доказательство теоремы было приведено в работе [1] в предположении справедливости гипотезы из той же работы (теоремы 3 данной работы).

6. ПРИМЕР МАНХЭТТЕНСКОЙ РЕШЕТКИ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ОТЛИЧНЫХ ОТ АДДИТИВНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $\mathbb{R}$

Схема движения в манхэттенской решетке (группа $\mathbb{Z}^2$) такова, что из каждой точки узла решетки движение возможно в трех направлениях по основным магистралям (вперед, влево, вправо) и движение в обратном направлении через накопители. Как и в работе [1] рассмотрим агрегированную модель такого движения, при котором в каждом узле решетки наблюдаемой величиной является только лишь общий объем трафика без разделения его по направлениям движения.

Для группы $\Upsilon = \mathbb{Z}^2$ через $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ обозначим систему ее образующих, где $\gamma_1 = (1, 0)$, $\gamma_2 = (0, 1)$. Движение описывается одномерным конечно разностным аналогом параболического уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\gamma(t) &= \sum_{l=1}^2 \alpha_{\gamma_l} x_{\gamma_l \gamma} - \sum_{l=1}^2 (\alpha_{\gamma_l} + \beta_{\gamma_l}) x_\gamma + \sum_{l=1}^2 \beta_{\gamma_l} x_{\gamma_l^{-1} \gamma} + \phi(x_\gamma), \\ x_\gamma &\in \mathbb{R}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (55)$$

Для каждого $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ (для каждого узла двумерной решетки) через x_γ обозначается величина стока транспортного потока в нем. Сток формируется в результате воздействий, состоящей из диффузионной и конвективной компонент. В диффузионной составляющей величины $\alpha_{\gamma_l} [x_{\gamma_l \gamma} - x_\gamma]$, $\beta_{\gamma_l} [x_{\gamma_l^{-1} \gamma} - x_\gamma]$, $l = 1, 2$, задают интенсивность изменения потока в узле γ в зависимости от разности значений величины потоков в узлах $\gamma, \gamma_l \gamma, \gamma_l^{-1} \gamma$, $l = 1, 2$, соответственно. При отрицательных значениях таких разностей происходит переток потока из узла γ в узлы $\gamma_l \gamma, \gamma_l^{-1} \gamma$, $l = 1, 2$, соответственно. При положительных значениях таких разностей происходит переток потока из накопителей в узел γ . Конвективную составляющую определяет потенциал ϕ и задается непрерывной функцией вида

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [\Delta, +\infty), \\ \phi(t) > 0, & t \in (0, \Delta). \end{cases}$$

Уровень потока равный Δ является критическим для узла и определяется его техническими возможностями. При значениях величины потока меньших критического значения Δ происходит переток потока из накопителей в узел γ . При значениях величины потока больших критического значения Δ он остается в этом же узле. Это соответствует случаю, когда объемы накопителей для разгрузки узла малы. Ранее, в работе [12] рассматривался случай, когда объемы накопителей для разгрузки узла достаточны и происходит переток потока из узла γ в накопители, чему соответствовал отрицательный аффинный потенциал на полупрямой $(\Delta, +\infty)$.

Определение 6. Будем говорить, что решение $\{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$ системы (55), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет тип бегущей волны (солитонное решение), если существуют $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, не зависящие от t и γ , что при всех $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$x_\gamma(t + \tau_1) = x_{\gamma_1 \gamma}(t), \quad x_\gamma(t + \tau_2) = x_{\gamma_2 \gamma}(t). \quad (56)$$

Константы τ_1, τ_2 будем называть *характеристиками* бегущей волны.

Задача заключается в том, чтобы установить в каких диапазонах характеристик τ_1, τ_2 солитонные решения существуют, какова асимптотика таких решений и их зависимость от параметров системы. Среди солитонных решений выделяется важный класс ограниченных солитонных решений, как один из наиболее информативных классов решений.

Определим солитонный букет, порождающий рассматриваемую систему и представим систему (55), (56) в операторной форме. Пусть $\Upsilon = \mathbb{Z}^2$ двумерная решетка. Через $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$ обозначим пространство последовательностей с элементами $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}$, наделенной тихоновской топологией. Определим линейный оператор $\mathbb{A}$, нелинейный оператор $\mathbb{F}$ и группу операторов сдвига $\mathbb{T} = \{T_{\hat{\gamma}} : \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2\}$, действующие непрерывно из пространства $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$ в себя по следующему правилу: для любых $\gamma, \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$, $\varkappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$, $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$

$$(\mathbb{A}\varkappa)_\gamma = \sum_{l=1}^2 \alpha_{\gamma_l} x_{\gamma_l \gamma} - \sum_{l=1}^2 (\alpha_{\gamma_l} + \beta_{\gamma_l}) x_\gamma + \sum_{l=1}^2 \beta_{\gamma_l} x_{\gamma_l^{-1} \gamma}, \quad (\mathbb{F}(\varkappa))_\gamma = \phi(x_\gamma),$$

$$T_{\hat{\gamma}} \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} = \{x_{\gamma \hat{\gamma}}\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}.$$

Рассмотрим группу $Q = \langle \check{q}_1, \check{q}_2 \rangle$, $\check{q}_1 = t + \tau_1$, $\check{q}_2 = t + \tau_2$, являющейся коммутативной группой сдвигов. Если τ_1, τ_2 соизмеримы, то группа $Q = \langle t + \tau_1, t + \tau_2 \rangle$ является циклической группой с образующей $t + \bar{\tau}$, т.е. $Q = \langle t + \bar{\tau} \rangle$. В противном случае, это группа с двумя образующими. Определим эпиморфизм $\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow Q$, где $\eta(\gamma_1) = \check{q}_1$, $\eta(\gamma_2) = \check{q}_2$ для образующих γ_l , $l = 1, 2$ группы $\mathbb{Z}^2$, а также отображение $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$g(z_{01}, z_{10}, z_{00}, z_{-10}, z_{-01}) =$$

$$= \alpha_{\gamma_2} z_{01} + \alpha_{\gamma_1} z_{10} - (\alpha + \beta) z_{00} + \beta_{\gamma_1} z_{-10} + \beta_{\gamma_2} z_{-01} + \phi(z_{00}),$$

$$\alpha = \alpha_{\gamma_1} + \alpha_{\gamma_2}, \quad \beta = \beta_{\gamma_1} + \beta_{\gamma_2}.$$

Коэффициенты α_{γ_1} , α_{γ_2} , β_{γ_1} , β_{γ_2} являются неотрицательными. Зададим солитонный букет $(\mathbb{Z}^2, 2, 2, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\mathbb{Z}^2, 2, 2, \eta, Q, g)$, в котором оператор G_Γ имеет вид $G_\Gamma = \mathbb{A} + \mathbb{F}$. Система (55), (56) имеет следующее эквивалентное операторное представление:

$$\dot{\varkappa}(t) = G_\Gamma(\varkappa), \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}. \quad (57)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (58)$$

Рассмотрим индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = \alpha_{\gamma_2} x(t + \tau_2) + \alpha_{\gamma_1} x(t + \tau_1) - (\alpha + \beta) x(t) +$$

$$+ \beta_{\gamma_1} x(t - \tau_1) + \beta_{\gamma_2} x(t - \tau_2) + \phi(x(t)) \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

Наряду с системой (57)–(58) будем рассматривать ее ограничение на банахово подпространство $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1$, $\mu \in (0, 1)$, $\tau = \bar{h} = \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Такая система имеет вид

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma \infty \mu \tau}(\varkappa) \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}.$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Пусть потенциал ϕ удовлетворяет условию Липшица с константой L_ϕ . Рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

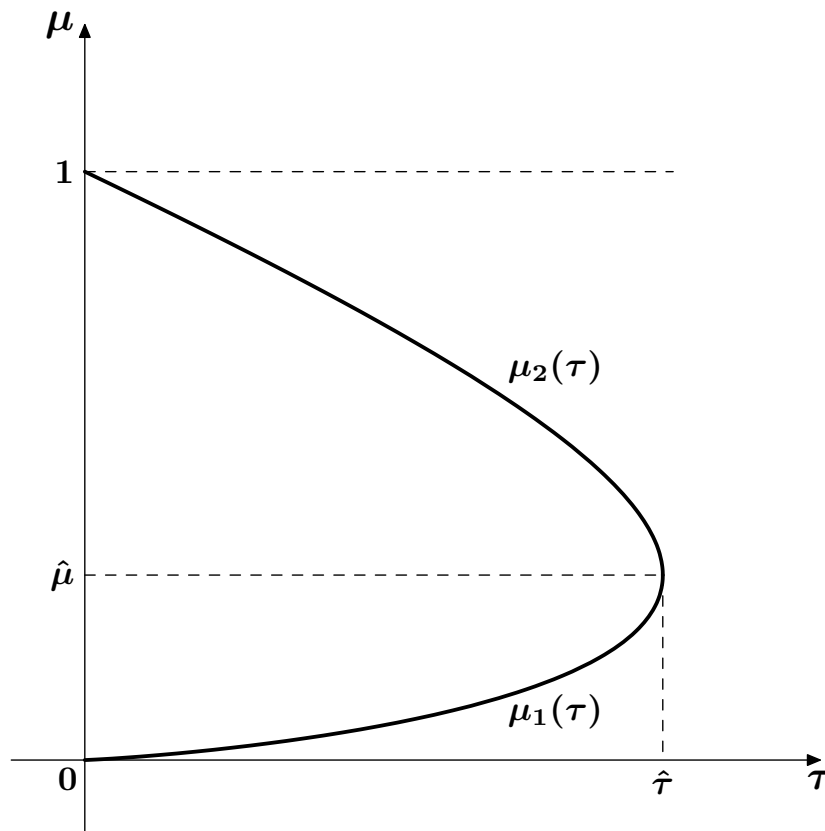
$$4C_\phi \tau \left(\mu^{-1} + \frac{1}{4} \right) = \ln \mu^{-1}, \quad C_\phi = \max \{ \alpha + \beta; L_\phi \}. \quad (60)$$

Левая и правая части трансцендентного уравнения (60) совпадают с левой и правой частями основного соотношения (54) для функционально-дифференциального уравнения (59), в котором положено $\tau = \bar{h}$ и произведена замена $\mu^\tau \rightarrow \mu$. Множество решений уравнения (60) описывается функциями $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$, заданными на фиг. 1.

Сформулируем теорему существования и единственности солитонных решений.

Теорема 5. Пусть потенциал ϕ удовлетворяет условию Липшица с константой L_ϕ . Тогда при любых начальных данных $\hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$, $a \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристике $\tau > 0$, $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$, удовлетворяющей условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$



Фиг. 1. Графики функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$.

для исходной бесконечномерной системы дифференциальных уравнений (55) существует единственное солитонное решение $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, $t \in \mathbb{R}$ (решение системы (55), (56)) с характеристиками τ_1, τ_2 такое, что оно удовлетворяет начальному условию $x_{\tilde{\gamma}}(\tilde{t}) = a$, для любого параметра μ , $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ значения вектор-функции

$$\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$$

при любом $t \in \mathbb{R}$ принадлежат пространству $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1$, а асимптотика по переменной времени t для функции

$$\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}, \quad t \in \mathbb{R},$$

задается вложением

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_2 \tau \infty \mu h}\},$$

т.е. $\varkappa(\cdot) \in C_\mu^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\tau \infty \mu \tau}^n)$. Более того, имеет место оценка $\mu < \hat{\mu}$ и такое решение $\varkappa(\cdot)$, как элемент пространства вектор-функций $C_\mu^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\tau \infty \mu \tau}^n)$, непрерывно зависит от начального данного $a \in \mathbb{R}$, характеристики τ и потенциала $\phi(\cdot)$.

Доказательство. Условие $0 < \tau < \hat{\tau}$ совпадает с условием (50), в котором положено $\tau = h = \tilde{h} \neq 0$ и произведена замена $\mu^\tau \rightarrow \mu$. Поэтому доказываемое утверждение непосредственно следует из теоремы 3 и следствия 3.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для индуцированного функционально-дифференциального уравнения (59).

Теорема 6. Пусть потенциал ϕ удовлетворяет условию Липшица с константой L_ϕ . Тогда при любых начальных данных $a \in \mathbb{R}$, начальном моменте $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

в пространстве $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R}) \quad \forall \mu, \mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ для функционально-дифференциального уравнения (59) существует и причем единственное решение $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что оно удовлетворяет начальному условию $x(\tilde{t}) = a$. Такое решение, как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, непрерывно зависит от начального данного $a \in \mathbb{R}$, характеристики τ и потенциала $\phi(\cdot)$.

Доказательство. Как и в теореме 5 условие $0 < \tau < \hat{\tau}$ совпадает с условием (54), в котором положено $\tau = \tilde{h} \neq 0$ и произведена замена $\mu^\tau \rightarrow \mu$. Поэтому доказываемое утверждение для решений из пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$ непосредственно следует из теоремы 4. Более того, так как правая часть функционально-дифференциального уравнения (59) является непрерывной функцией по всем переменным, то такие решения будут решениями из пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$.

6.1. Ограниченные солитонные решения

Среди солитонных решений особое место занимают ограниченные солитонные решения. В силу соответствия солитонных решений решениям функционально-дифференциального уравнения (59), ограниченными солитонными решениям соответствуют ограниченные решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения и они принадлежат каждому из семейства пространств $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, 1]$, а по теореме 6 в пространствах функций $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, $0 < \tau < \hat{\tau}$, справедливо утверждение о единственности для ограниченных решений.

Ограниченные солитонные решения могут быть построены буквальным повторением соответствующей процедуры из предыдущей работы [1]. Качественная картина графика таких решений также сохраняется. Таким образом, в случае усложнения характеристик солитонных решений, отличных от циклической аддитивной подгруппы группы $\mathbb{R}$ из работы [1], качественная картина поведения солитонных решений сохраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекларян Л.А., Бекларян А.Л. Дуализм в теории солитонных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 7. С. 1472–1490.
2. Френкель Я.И., Конторова Т.А. О теории пластической деформации и двойственности // ЖЭТФ. 1938. № 8. С. 89–97.
3. Toda M. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. С. 262.
4. Мива Т., Джимбо М., Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.
5. Пустыльников Л.Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 3. С. 551–604.
6. Keener J.P. Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. № 3. P. 556–572.
7. Zinner B. Existence of traveling wavefront solutions for the discrete nagumo equation // J. Different. Equat. 1992. 96. P. 1–27
8. Maller-Paret J. The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems. Brown Univer., August, 1997.
9. Maller-Paret J., Cahn J.W., Van Vleck E.S. Traveling wave solutions for systems of ODEs on two-dimensional spatial lattice // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 59. № 2. P. 455–493.
10. Maller-Paret J. The Fredholm alternative for functional-differential equations mixed type. Brown Univer., July, 1997.
11. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. С. 286.
12. Beklaryan L.A., Beklaryan A.L., Akopov A.S. Soliton solutions for the Manhattan lattice // Inter. J. Appl. Math. 2023. V. 36. № 4.
13. Бекларян Л.А. Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 1. С. 19–22.
14. Бекларян Л.А. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система. М.: ВЦ АН СССР, 1989. С. 18.

15. Бекларян Л.А. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 5. С. 1033–1038.
16. Бекларян Л.А. Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты // Итоги науки и техники. 1999. Т. 66. С. 161–182.
17. Beklaryan L.A. Equations of advanced-retarded type and solutions of traveling-wave type for infinite-dimensional dynamic systems // J. Math. Sci. 2004. V. 124. № 4.
18. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Funct. Different. Equat. 2006. V. 13. № 2. P. 125–155.
19. Бекларян Л.А. О квазибегущих волнах // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 12. С. 1731–1775.
20. Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К. Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 10. С. 1649–1667.
21. Бекларян Л.А. Квазибегущие волны как естественное расширение класса бегущих волн // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. 2014. Т. 19. № 2. С. 331–340.
22. Бекларян Л.А., Бекларян А.Л. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2024–2039.
23. Бекларян А.Л., Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с нелинейным потенциалом общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 933–950.
24. Григорчук Р.И., Курчанов П.Ф. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией. Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 58. М.: ВИНТИ, 1990. С. 191–256.

DUALISM IN THE THEORY OF SOLITON SOLUTIONS. II

L. A. Beklaryan*

117418 Moscow, Nakhimovsky Ave., 47, CEMI RAS, Russia

*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

Received: 03.05.2024

Revised: 15.07.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The paper is a continuation of the work of the same name by Belkarian, Belkarian (2024). The proof of the theorem of the existence and uniqueness of soliton solutions and their corresponding solutions of the functionally differential equation from the dual pair “function-operator”, which was formulated in the noted work in the form of a hypothesis, is presented. This made it possible, in particular, to study soliton solutions with more complex characteristics in the model of traffic flow on the Manhattan lattice than the characteristics given by the additive cyclic subgroup of the group $\mathbb{R}$.

Keywords: soliton solutions, functional differential equation, Manhattan lattice.