

# СИНГУЛЯРНАЯ ЧАСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛАХ С РЕБРАМИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2024 г. А.Н. Боголюбов<sup>1,\*</sup>, И.Е. Могилевский<sup>1,\*\*</sup>, М.М. Шушарин<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

\*e-mail: bogan7@yandex.ru

\*\*e-mail: imogilevsky@mail.ru

\*\*\*e-mail: nirashush1999@gmail.com

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

Переработанный вариант 21.05.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

В статье рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны на цилиндре произвольной формы сечения с ребром на границе. С помощью метода, впервые предложенного в работах В.А. Кондратьева, для случаев импедансного, идеально проводящего и диэлектрического цилиндров выделяется сингулярная часть решения в окрестности ребра. Библ. 9. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** задача дифракции, особенность электромагнитного поля, ребра, асимптотическое разложение.

DOI: 10.31857/S0044466924110067, EDN: KGRJLD

## ВВЕДЕНИЕ

Активное развитие численных методов в последние десятилетия дало возможность решать практически любые задачи электродинамики. Однако для ряда задач решение требует неосуществимо большого времени счета и хорошего начального приближения. Как известно, наличие ребер на границе области может привести к возникновению у электромагнитного поля особенности в их окрестности [1]–[4], что существенно ухудшит сходимость численных методов и увеличит время счета.

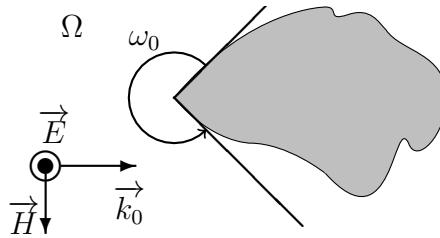
Одним из способов повышения скорости сходимости численных методов является теоретическое исследование поведения решения в окрестности ребра границы. Выделяя особенность электромагнитного поля в явном виде, удастся значительно повысить скорость и точность счета, так как задача сводится к аппроксимации гладкой части электромагнитного поля [5]–[7]. Чтобы построить асимптотику по гладкости для электромагнитного поля, а именно представить решение в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки (не обязательно малой по сравнению с сингулярной частью), можно использовать метод, впервые предложенный в работах В.А. Кондратьева [8], и развитый С.А. Назаровым и Б.А. Пламеневским [9].

В данной статье рассматривается задача дифракции на цилиндре, граница которого в цилиндрической системе координат может быть задана зависимостью угловой координаты от радиальной с незначительными ограничениями на форму границы. При такой постановке метод выделения сингулярной части решения эллиптических уравнений для секториальных областей обобщается на случай сечения произвольной формы при весьма слабых ограничениях на границу области. Исследуется особенность решения в задачах дифракции на идеально проводящем, импедансном и диэлектрическом телах.

Метод, описанный в работе, может быть применен и для внутренних задач. При этом вид главной особенности электромагнитного поля зависит лишь от геометрии границы и одинаков как для внутренних задач, так и для внешних.

## 1. ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ИДЕАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Рассмотрим задачу дифракции плоской гармонической электромагнитной волны на бесконечном цилиндре с ребром на границе. Пусть волна падает под углом  $\psi$  к ребру. Будем рассматривать установившиеся колебания с зависимостью  $e^{-i\omega t}$  от времени. Начнем со случая дифракции на идеально проводящем теле.



Фиг. 1. Рассматриваемая задача.

В данном случае исходная задача может быть сведена к двум краевым задачам для уравнения Гельмгольца, соответствующим двум типам поляризации для вертикальных компонент электрического и магнитного полей.

Для вертикальной:

$$\begin{aligned}\Delta E + k^2 E &= 0, \\ E|_S &= 0, \\ \frac{\partial E_{\text{дифр}}}{\partial r} - ikE_{\text{дифр}} &= \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\end{aligned}$$

Для горизонтальной:

$$\begin{aligned}\Delta H + k^2 H &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial n}|_S &= 0, \\ \frac{\partial H_{\text{дифр}}}{\partial r} - ikH_{\text{дифр}} &= \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $k = \frac{\omega}{c} \sin \psi$ .

Для этих задач справедливы теоремы существования и единственности обобщенного решения в пространстве  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

Для начала рассмотрим задачу дифракции в области в виде бесконечного сектора (дифракция на клине). Обозначим такую область через  $\Omega'$ . Пусть на границе  $\partial\Omega$  поставлены условия Дирихле (случай вертикальной поляризации). Условия на бесконечности заменяются на условие принадлежности решения пространству специального вида.

Перейдем в полярную систему координат с центром на ребре и, следуя методу, впервые предложенному в работах В.А. Кондратьева, введем семейство нормированных функциональных пространство  $V_\gamma^l(\Omega')$  нормы которых определяются формулой:

$$\|f\|_{V_\gamma^l(\Omega')}^2 = \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega'} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi < \infty.\tag{2}$$

В правую часть уравнения Гельмгольца перенесем слагаемое  $k^2 E$  и переобозначим его за некоторую неизвестную функцию  $f \equiv -k^2 E$ . Предположим для начала, что  $f \in V_\gamma^l(\Omega')$ .

Заменой радиальной переменной  $\tau = \ln \frac{1}{r}$  переведем сектор  $\Omega'$  в бесконечную полосу  $\Pi$ . В новых координатах уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} = f e^{-2\tau} \equiv F.\tag{3}$$

Из принадлежности  $f$  к  $V_\gamma^l(\Omega')$  следует оценка

$$\iint_{\Omega'} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi \leq \|f\|_{V_\gamma^l(\Omega')}^2 < \infty \quad \text{для } j+k \leq l.\tag{4}$$

Путем замены переменных в этом неравенстве получаем оценку на функцию  $F$  из правой части.

$$\iint_{\Pi} e^{2(1+l-\gamma)\tau} \left| \frac{\partial^{j+k} F}{\partial \tau^j \partial \varphi^k} \right|^2 d\tau d\varphi \leq C \|f\|_{V_\gamma^l(\Omega')}^2 < \infty \quad \text{для } j+k \leq l.\tag{5}$$

Вдоль полосы  $\Pi$  проведем преобразование Фурье по переменной  $\tau$ :

$$\widehat{E}(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau, \varphi) e^{-i\lambda\tau} d\tau.\tag{6}$$

Уравнение для фурье-образа решения примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \widehat{E}}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \widehat{E} = \widehat{F}. \quad (7)$$

Из свойств преобразования Фурье для правой части получаем оценки:

$$\int_0^{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^{j+k} F}{\partial \tau^j \partial \varphi^k} \right|^2 e^{2(1+l-\gamma)\tau} d\tau d\varphi = \int_0^{\omega_0} \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} |\lambda|^{2j} \left| \frac{\partial^k \widehat{F}}{\partial \varphi^k} \right|^2 d\lambda d\varphi \quad (8)$$

$$\text{при } j+k \leq l, \quad \text{где } \hbar = -\gamma + l + 1,$$

$$\sum_{k=0}^l \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} |\lambda|^{2k} \|\widehat{F}\|_{H^{l-k}(0, \omega_0)}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}^2. \quad (9)$$

Уравнение (7) допускает решение в виде ряда

$$\widehat{E}(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{F}_n^s(\lambda)}{\lambda^2 + \left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right)^2} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0}, \quad (10)$$

где

$$\widehat{F}_n^s(\lambda) = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} F(\tau, \varphi) \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} d\varphi.$$

Как несложно заметить, фурье-образ решения имеет полюсы на мнимой оси в точках:

$$\lambda_n = \pm i \frac{\pi n}{\omega_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Поскольку коэффициенты ряда имеют в знаменателе слагаемое  $\lambda^2$ , фурье-образ решения интегрируем по прямой  $\text{Im } \lambda = \hbar$  с большим весом, чем функция  $\widehat{F}(\lambda, \varphi)$ . Поэтому, если у решения нет полюсов на прямой  $\text{Im } \lambda = \hbar$ , то справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{l+2} \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} |\lambda|^{2k} \|\widehat{E}\|_{H^{l-k+2}(0, \omega_0)}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}^2. \quad (12)$$

Из этой оценки следует, что интеграл, соответствующий обратному преобразованию Фурье, сходится на прямой  $\text{Im } \lambda = \hbar$  на комплексной плоскости

$$R_E(\tau, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} \widehat{E}(\lambda, \varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda. \quad (13)$$

Этот интеграл определяет функцию  $R_E(\tau, \varphi)$ , для которой справедливо:

$$\iint_{\Pi} \left| \frac{\partial^{j+k} R_E}{\partial \tau^j \partial \varphi^k} \right|^2 e^{-2(\gamma-l-1)\tau} d\tau d\varphi \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}^2 \quad \text{для } j+k \leq l+2. \quad (14)$$

Переходя обратно в полярную систему координат, получаем

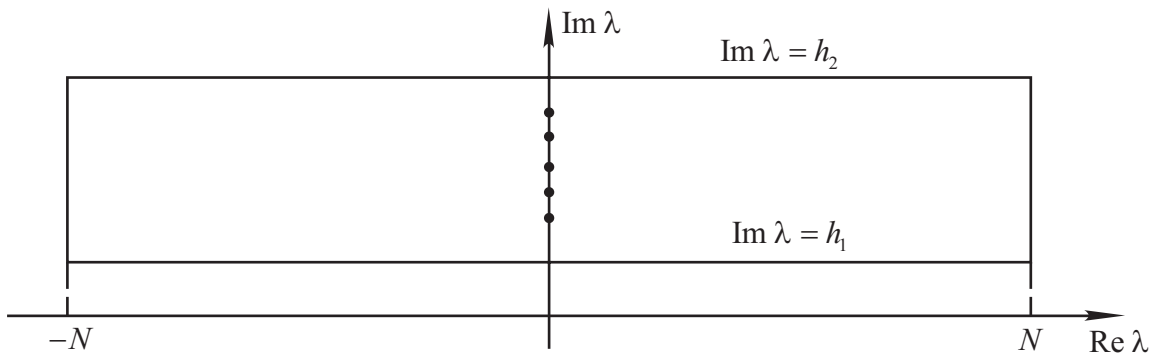
$$\|R_E(r, \varphi)\|_{V_{\gamma}^{l+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}, \quad (15)$$

т.е.  $R_E \in V_{\gamma}^{l+2}(\Omega')$ . Таким образом,  $R_E$  является более гладкой, чем  $f \in V_{\gamma}^l(\Omega')$  из правой части.

Для построения асимптотики решения предположим, что  $f$  принадлежит пересечению пространств  $V_{\gamma_1}^l(\Omega') \cap V_{\gamma_2}^l(\Omega')$ . Тогда  $\widehat{F}(\lambda, \varphi)$  из правой части уравнения (7) для фурье-образа является мероморфной функцией в полосе  $\hbar_1 < \text{Im } \lambda < \hbar_2$ , где  $\hbar_1 = 1 + l - \gamma_1$ , а  $\hbar_2 = 1 + l - \gamma_2$ .

Используя основную теорему о вычетах, можно перейти от интегрирования по прямой  $\text{Im } \lambda = h_1$  к интегрированию по  $\text{Im } \lambda = h_2$ :

$$E(\tau, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N+ih_1}^{+N+ih_1} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-N+ih_2}^{+N+ih_2} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-N+ih_1}^{-N+ih_2} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda + \int_{+N+ih_1}^{+N+ih_2} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda \right) + \sqrt{2\pi}i \sum_{h_1 \leq \frac{\pi n}{\omega_0} \leq h_2} \text{Res} \left[ e^{i\lambda\tau} \widehat{E}, \lambda_n \right]. \quad (16)$$



Фиг. 2. Контур, используемый при применении теоремы о вычетах.

При  $N \rightarrow \infty$  интегралы по боковым сторонам прямоугольника стремятся к нулю:

$$E(\tau, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih_2}^{+\infty+ih_2} \widehat{E}(\lambda, \varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda + \sqrt{2\pi}i \sum_{h_1 \leq \frac{\pi n}{\omega_0} \leq h_2} \text{Res} \left[ e^{i\lambda\tau} \widehat{E}, \lambda_n \right], \quad (17)$$

где для вычетов справедливо

$$\text{Res} \left[ e^{i\lambda\tau} \widehat{E}, i \frac{\pi n}{\omega_0} \right] = \text{Res} \left[ \frac{e^{i\lambda\tau} \widehat{F}_n^s(\lambda)}{\lambda^2 + (\frac{\pi n}{\omega_0})^2}, i \frac{\pi n}{\omega_0} \right] \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} = \frac{\widehat{F}_n^s(i \frac{\pi n}{\omega_0})}{2i \frac{\pi n}{\omega_0}} e^{-\frac{\pi n}{\omega_0} \tau} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0}. \quad (18)$$

Делая обратную замену переменных  $r = e^{-\tau}$ , получаем асимптотическое представление для интеграла по нижней прямой  $\text{Im } \lambda = h_1$ :

$$E(r, \varphi) = \sum_{h_1 < \frac{\pi n}{\omega_0} < h_2} C_n r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R_E(r, \varphi), \quad (19)$$

где было введено обозначение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih_2}^{+\infty+ih_2} \widehat{E}(\lambda, \varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda \equiv R_E(r, \varphi). \quad (20)$$

Аналогично (15), получаем оценку на гладкую добавку  $R_E$ :

$$\|R_E\|_{V_{\gamma_2}^{l+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{V_{\gamma_2}^l(\Omega')}. \quad (21)$$

Подобным образом, можно получить ряд фурье-образа решения для горизонтальной поляризации:

$$\widehat{H}(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{F}_n^c(\lambda)}{\lambda^2 + (\frac{\pi n}{\omega_0})^2} \cos \frac{\pi n \varphi}{\omega_0}, \quad (22)$$

где  $\widehat{F}_n^c(\lambda)$  — коэффициенты разложения  $\widehat{F}$  в ряд Фурье.

При условиях Неймана появляется слагаемое  $\widehat{H}_0(\lambda) = -\frac{\widehat{F}_0^c(\lambda)}{\lambda^2}$ . Исследуя его поведение отдельно, до преобразования Фурье, можно получить оценку  $H_0(r) \in V_\gamma^{l+2}(\Omega')$ . Поэтому слагаемое  $H_0(r)$  может быть внесено внутрь  $R_H(r, \varphi) \in V_\gamma^{l+2}(\Omega')$ .

Чтобы оценить правую часть введем срезающую функцию  $\chi(r) \in C^\infty(\Omega')$ :

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq \frac{d}{2}, \\ 0 & \text{при } r > d. \end{cases} \quad (23)$$

Из условия Мейкснера следует, что  $E \in H_{\text{loc}}^1(\Omega')$ :

$$\|E\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{k+j \leq 1} \iint_{\Omega} r^{-2k} \left| \frac{\partial^{j+k} E}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi < \infty. \quad (24)$$

Используя лемму 4.4 из [1], получаем оценку

$$\|\chi E\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C \iint_{\Omega} r^{2\gamma} \left| \frac{\partial(\chi E)}{\partial r} \right|^2 r dr d\varphi \geq C(\gamma) \iint_{\Omega} r^{2\gamma-2} |\chi E|^2 r dr d\varphi. \quad (25)$$

Из нее для нормы  $E$  в пространстве  $V_\gamma^1$  при  $\gamma > 0$  следует

$$\begin{aligned} \|\chi E\|_{V_\gamma^1(\Omega)}^2 &= \sum_{j+k \leq 1} \iint_{\Omega} r^{2(\gamma-1+j)} \left| \frac{\partial^{j+k}(\chi E)}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi = \\ &= \iint_{\Omega} \left( r^{2\gamma} \left| \frac{\partial(\chi E)}{\partial r} \right|^2 + r^{2\gamma-2} \left| \frac{\partial(\chi E)}{\partial \varphi} \right|^2 + r^{2\gamma-2} |\chi E|^2 \right) r dr d\varphi \leq C \|\chi E\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом,  $\chi E \in V_\gamma^1(\Omega')$  для  $\gamma \in (0, 2]$ . Но так как между прямыми  $\text{Im } \lambda = 2$  и  $\text{Im } \lambda = 2 - \gamma$  при малых значениях  $\gamma$  нет полюсов функции  $\chi \widehat{E}$ , то  $f \in V_2^1(\Omega') \cap V_0^1(\Omega')$ .

Используя метод, описанный выше, получаем асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 2} C_{En} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R_E(r, \varphi), \\ H(r, \varphi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 2} C_{Hn} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R_H(r, \varphi), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $R_E, R_H \in V_0^3(\Omega)$ .

Итак, решение в окрестности ребра представлено в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой получена оценка через норму соответствующего функционального пространства. Для углов  $\omega_0 > \pi$  уже первая производная сингулярной части стремится к бесконечности в окрестности ребра.

## 2. СИНГУЛЯРНОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть теперь граница  $\partial\Omega = S$  задана зависимостью угловой координаты от радиальной:

$$\Omega = \{(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) : \varphi \in (\varphi_1(r), \varphi_2(r))\}, \quad (28)$$

Наложим на форму границы следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \varphi_i &\in C^2(0, d] \cap C[0, d], \quad d > 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, \quad \varphi_2(0) = \omega_0 \in (0, 2\pi), \\ \varphi_i' &= \underline{O}(r^{\alpha-1}), \quad \varphi_i'' = \underline{O}(r^{\alpha-2}) \text{ при } r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для условий Неймана потребуем чтобы  $\alpha > 1$ , а для Дирихле чтобы  $\alpha > 0$ . Сведем задачу с произвольной формой границы к задаче в бесконечном секторе, используя преобразование координат следующего вида:

$$R = r, \quad \Phi = \omega_0 \frac{\varphi - \varphi_1(r)}{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)}. \quad (30)$$

Таким образом, переходим в область  $\Omega' = (0, \infty) \times (0, \omega_0)$ .

В новых координатах Лапласиан принимает следующий вид:

$$\Delta_{r\varphi} H = (H''_{RR} + 2H''_{R\Phi} \Phi'_r + H''_{\Phi\Phi} (\Phi'_r)^2 + H'_\Phi \Phi''_{rr}) + \frac{1}{R} (H'_R + H'_\Phi \Phi'_r) + \frac{1}{R^2} H''_{\Phi\Phi} (\Phi'_\varphi)^2, \quad (31)$$

где производные определяются выражениями

$$\Phi'_r = -\frac{\Phi(\varphi'_2 - \varphi'_1) + \varphi'_1 \omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1}; \quad \Phi''_{rr} = -\frac{\Phi(\varphi''_2 - \varphi''_1) + \varphi''_1 \omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1}; \quad \Phi'_\varphi = \frac{\omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (32)$$

Якобиан перехода — ограниченная в нуле функция:

$$J = \frac{D(R, \Phi)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} R'_r & R'_\varphi \\ \Phi'_r & \Phi'_\varphi \end{vmatrix} = \Phi'_\varphi = \frac{\omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1} \xrightarrow{R \rightarrow 0} 1. \quad (33)$$

Оценим гладкость решения в новых координатах. Покажем, что из  $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$  следует, что  $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega')$ . Для этого проведем замену координат в выражении для нормы:

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{H^1(\Omega')} &= \iint_{\Omega'} \left( |U'_R|^2 + \frac{1}{r^2} |U'_\Phi|^2 + |U|^2 \right) R dR d\Phi = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \left| U'_r - U'_\varphi \frac{\Phi'_r}{\Phi'_\varphi} \right|^2 + \frac{1}{r^2} |U'_\varphi (\Phi'_\varphi)^{-1}|^2 + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} \left( |U'_r|^2 + |U'_\varphi|^2 \left( \frac{1+r^2 \Phi'^2_r}{r^2 \Phi'^2_\varphi} \right) + 2 |U'_\varphi| |U'_r| \left| \frac{\Phi'_r}{\Phi'_\varphi} \right| + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} \left( |U'_r|^2 + |U'_\varphi|^2 \left( \frac{1+r^2 \Phi'^2_r}{r^2 \Phi'^2_\varphi} \right) + \left( |U'_\varphi|^2 \Phi'^2_r + \frac{|U'_r|^2}{\Phi'^2_\varphi} \right) + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi = \\ &= \iint_{\Omega} \left( |U'_r|^2 (1 + \Phi'^{-2}_\varphi) + |U'_\varphi|^2 \left( \frac{1+r^2 \Phi'^2_r}{r^2 \Phi'^2_\varphi} + \Phi'^2_r \right) + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi \leq \\ &\leq M \iint_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|^2 + |U|^2 \right) r dr d\varphi = M \|U\|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где в качестве  $M$  можно выбрать

$$M = \max \left\{ \max_{r \in (0, d)} (\Phi'_\varphi + \Phi'^{-1}_\varphi); \max_{r \in (0, d)} \frac{1+r^2 \Phi'^2_r (1+\Phi'^2_\varphi)}{\Phi'_\varphi}; \max_{r \in (0, d)} \Phi'_\varphi \right\}. \quad (35)$$

Интеграл по области  $r > d$  будет сходиться, так как в качестве  $U$  будет рассматриваться функция  $U = \chi(r)H$ , равная тождественно нулю  $r > d$ . Существование такого числа  $M$  следует из ограниченности в окрестности нуля функций  $\Phi'_\varphi$  и  $r\Phi'_r$ . Итак, в новых координатах справедлива оценка  $\chi H \in V^1_0(\Omega) \cap V^1_2(\Omega)$ .

Перейдем к рассмотрению граничных условий Неймана. В полярной системе координат нормальная производная выглядит следующим образом:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \pm \frac{-r\varphi'_i H'_r + \frac{1}{r} H'_\varphi}{\sqrt{1 + (r\varphi'_i)^2}} \Big|_{\partial\Omega}. \quad (36)$$

В криволинейной системе координат  $(R, \Phi)$  граничные условия примут вид

$$\left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \pm \frac{-R\varphi'_i H'_R + H'_\Phi \left( -R\varphi'_i \Phi'_r + \frac{\Phi'_\varphi}{R} \right)}{\sqrt{1 + (R\varphi'_i)^2}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (37)$$

Запишем граничные условия в виде неоднородных условий Неймана с неизвестной правой частью:

$$H'_\Phi = H'_R \left( \frac{\Phi'_\varphi}{R^2 \Phi'_i} - \Phi'_r \right)^{-1} = H'_R \frac{R^2 \Phi'^2_i}{R^2 \Phi'^2_i + \omega_0} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega_0}. \quad (38)$$

Чтобы свести граничные условия к однородным, будем искать решение в виде:

$$H(R, \Phi) = g(R, \Phi) + \tilde{H}(R, \Phi), \quad (39)$$

где  $g$  удовлетворяет граничным условиям. Например, можно подобрать  $g$  следующим образом:

$$g(R, \Phi) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega_0} \int_0^\Phi H'_R \frac{R^2 s^2}{R^2 s^2 + \omega_0} d\tilde{\Phi}, \quad (40)$$

где  $s(R, \Phi)$  — функция, обращающаяся в  $\varphi'_i(R)$  на границе. Примем ее за линейную по  $\Phi$  функцию:

$$s(R, \Phi) = \varphi'_1 + \frac{\Phi}{\omega_0} (\varphi'_2 - \varphi'_1). \quad (41)$$

Из условий на  $\varphi_i$  следует, что  $s \in C^1(\overline{\Omega'})$ . Поэтому при  $R \rightarrow 0$  функция  $g$  будет вести себя как  $g \sim R^{2\alpha} H'_R$ . Опираясь на упомянутую ранее лемму 4.4 из [1], можно получить оценки для слагаемых из правой части уравнения на  $\tilde{H}$ :

$$H \in V^l_\gamma(\Omega') \Rightarrow \Delta g \in V^{l-1}_{\gamma-2\alpha+2}(\Omega'), g \in V^{l-1}_{\gamma-2\alpha}(\Omega'). \quad (42)$$

Оценим теперь слагаемые, появившиеся за счет перехода в криволинейную систему координат. После перехода в сектор уравнение принимает следующий вид:

$$\Delta_{R\Phi} \tilde{H} = -k^2 H + f - \Delta g = \tilde{f}, \quad (43)$$

где функция  $f(R, \Phi)$  определяется выражением:

$$f = -2H''_{R\Phi} \Phi'_r - H'_\Phi \Phi''_{rr} - \frac{1}{R} H'_\Phi \Phi'_r + \frac{1}{R^2} H''_{\Phi\Phi} (1 - \Phi'^2_\varphi - R^2 \Phi'^2_r). \quad (44)$$

Можно оценить, что  $H \in V^l_\gamma(\Omega') \Rightarrow f \in V^{l-1}_{\gamma+1-\alpha}(\Omega')$ , исходя из

$$\Phi'^2_\varphi = 1 + \underline{O}(R^\alpha); \quad \Phi'_r = \underline{O}(R^{\alpha-1}); \quad \Phi''_{rr} = \underline{O}(R^{\alpha-2}). \quad (45)$$

Приходим к оценке на  $\tilde{f}$  из правой части уравнения Пуассона для  $\tilde{H}$ :

$$H \in V^l_\gamma(\Omega') \Rightarrow \tilde{f} \in V^{l-1}_{\gamma+1-\alpha}(\Omega'). \quad (46)$$

В случае задачи Дирихле на  $E(R, \Phi)$  оценка для правой части будет иметь такой же вид, а константа  $\alpha$  принимать значения меньше единицы.

Наконец, асимптотическое представление в новых координатах может быть получено тем же методом, что и для случая бесконечного сектора. Однако, в силу ослабления оценки для правой части до  $f \in V^{0}_{1-\alpha}(\Omega') \cap V^0_1(\Omega')$ , в обратном преобразовании Фурье интегрирование будет производиться по прямой  $\text{Im } \lambda = \alpha$ . Из-за этого в сингулярную часть будет выделено меньше слагаемых, а оценка для гладкой добавки станет слабее. Итак, вблизи ребра справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} E(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < \alpha} C_{En} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_E(R, \Phi), \\ H(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < \alpha} C_{Hn} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_H(R, \Phi), \end{aligned} \quad (47)$$

где  $R_E, R_H \in V^2_{1-\alpha}(\Omega')$ .

Чтобы получить решение в старых координатах, достаточно произвести обратное преобразование. В силу того, что  $R \equiv r$ , а  $\Phi \xrightarrow{r \rightarrow 0} \varphi$ , при заданных ограничениях на форму границы, главная особенность решения  $r^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin \frac{\pi \varphi}{\omega_0}$  будет иметь такой же вид, что и для бесконечного клина того же угла раствора.

## 3. ЗАДАЧА ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИКА

Рассмотрим теперь дифракцию на цилиндре из диэлектрика с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . Через  $\Omega_e$  и  $\Omega_i$  обозначим области вне и внутри цилиндра. В случае изотропного диэлектрика можно представить полное поле в виде суперпозиции полей электрического и магнитного типов. Таким образом, задача может быть сведена к двум задачам для вертикальной и горизонтальной поляризации соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta E^i + k_i^2 E^i &= 0, \text{ в } \Omega_i, & \Delta H^i + k_i^2 H^i &= 0, \text{ в } \Omega_i, \\ \Delta E^e + k_e^2 E^e &= 0, \text{ в } \Omega_e, & \Delta H^e + k_e^2 H^e &= 0, \text{ в } \Omega_e, \\ (E^e - E^i)|_S &= 0, & (H^e - H^i)|_S &= 0, \\ \left( \mu\beta \frac{\partial E^e}{\partial n} - \frac{\partial E^i}{\partial n} \right) \Big|_S &= 0, & \left( \epsilon\beta \frac{\partial H^e}{\partial n} - \frac{\partial H^i}{\partial n} \right) \Big|_S &= 0, \\ \frac{\partial E_{\text{дифр}}^e}{\partial r} - ik_e E_{\text{дифр}}^e &= \bar{\partial} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), & \frac{\partial H_{\text{дифр}}^e}{\partial r} - ik_e H_{\text{дифр}}^e &= \bar{\partial} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\beta = \frac{1 - \mu\epsilon \cos^2 \psi}{\sin^2 \psi}$ , а волновые числа

$$k^2 = \begin{cases} k_e^2 = k_0^2 \sin^2 \psi & \text{в } \Omega_e, \\ k_i^2 = k_0^2 (\epsilon\mu - \cos^2 \psi) & \text{в } \Omega_i. \end{cases} \quad (49)$$

Рассмотрим задачу для вертикальной поляризации. Для горизонтальной, ввиду схожего вида граничных условий, справедливы аналогичные рассуждения.

Как и для идеального проводника, рассмотрим сперва задачу в области в виде бесконечного сектора. Область внутри сектора, соответствующую внутренней части цилиндра, назовем  $\Omega'_i$ , ее дополнение —  $\Omega'_e$ .

Введем семейство пространств Кондратьева  $V_\gamma^l(\mathbb{R}^2)$  с нормами:

$$\|f\|_{V_\gamma^l(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega_i} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi + \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega_e} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi. \quad (50)$$

Проведем замену  $\tau = \ln \frac{1}{r}$  и преобразование Фурье по  $\tau$ .

Задача для фурье-образа принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{E}^e}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \hat{E}^e &= \hat{F}^e \text{ при } \varphi \in (0, \omega_0), \\ \frac{\partial^2 \hat{E}^i}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \hat{E}^i &= \hat{F}^i \text{ при } \varphi \in (\omega_0, 2\pi), \\ \hat{E}^e \Big|_{\varphi=0} &= \hat{E}^i \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad \hat{E}^e \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = \hat{E}^i \Big|_{\varphi=\omega_0+0}, \\ \mu\beta \frac{\partial \hat{E}_z^e}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{\partial \hat{E}_z^i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad \mu\beta \frac{\partial \hat{E}_z^e}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = \frac{\partial \hat{E}_z^i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0+0}. \end{aligned} \quad (51)$$

Ее решение можно найти в виде ряда по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \eta^2 u &= 0 \text{ при } \varphi \in (0, 2\pi), \\ u \Big|_{\varphi=0} &= u \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad u \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = u \Big|_{\varphi=\omega_0+0}, \\ p \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad p \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0+0}, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $p = \mu\beta$  для вертикальной поляризации. Для горизонтальной поляризации  $p = \epsilon\beta$ .

Собственные функции могут быть представлены в виде:

$$u(\varphi) = \begin{cases} A_i \sin(\eta(\varphi - 2\pi)) + B_i \cos(\eta(\varphi - 2\pi)), & \varphi \in (\omega_0, 2\pi), \\ A_e \sin \eta\varphi + B_e \cos(\eta\varphi), & \varphi \in (0, \omega_0). \end{cases} \quad (53)$$



Подставляя такой вид собственных функций в условия сопряжения, получаем систему уравнений на коэффициенты:

$$\begin{aligned} B_e &= B_i, & pA_e &= A_i, \\ A_e \sin \omega_0 \eta + B_e \cos \omega_0 \eta &= A_i \sin (\omega_0 - 2\pi) \eta + B_i \cos (\omega_0 - 2\pi) \eta, \\ p(A_e \cos \omega_0 \eta - B_e \sin \omega_0 \eta) &= A_i \cos (\omega_0 - 2\pi) \eta - B_i \sin (\omega_0 - 2\pi) \eta. \end{aligned} \quad (54)$$

Условие существования решения - равенство нулю определителя системы:

$$(p-1)^2 \sin^2 (\omega_0 - \pi) \eta - (p+1)^2 \sin^2 \pi \eta = 0.$$

Итак, собственные значения можно найти из уравнений:

$$\sin \pi \eta \pm \frac{(p-1)}{(p+1)} \sin (\omega_0 - \pi) \eta = 0, \quad \eta \neq 0. \quad (55)$$

Для вертикальной поляризации обозначим их корни за  $\eta_n^E$ , а соответствующие собственные функции за  $u_n^E(\varphi)$ . Для горизонтальной обозначим их через  $\eta_n^H$  и  $u_n^H(\varphi)$ . Они отличаются лишь из-за того, что коэффициенты  $p$  из уравнения (55) различны, в зависимости от поляризации. Пусть собственные функции также удовлетворяют условию нормировки:  $\int_0^{2\pi} u_n(\varphi) d\varphi = 1$ . Тогда ряд для фурье-образа решения примет вид:

$$\hat{E}(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{F}_n(\lambda)}{\lambda^2 + (\eta_n^E)^2} u_n^E(\varphi). \quad (56)$$

Итак, фурье-образ решения имеет полюсы, расположенные в точках  $\lambda_n = i\eta_n^E$ .

Начальная оценка  $f \in V_0^1(\mathbb{R}^2) \cap V_2^1(\mathbb{R}^2)$  та же, что и для предыдущего случая. Поэтому, аналогично случаю идеальной проводимости, фурье-образ решения окажется мероморфной функцией в полосе  $\text{Im } \lambda \in [0, 2]$ .

Следовательно, при обратном преобразовании Фурье переходим от интегрирования по  $\text{Im } \lambda = 0$  к интегрированию по  $\text{Im } \lambda = 2$ . Как и в случае условий идеальной проводимости, интеграл по верхней прямой  $R_E \in V_0^3(\mathbb{R}^2)$  оказывается более гладкой функцией в окрестности нуля, чем интеграл по нижней. Поэтому вычеты в полюсах, лежащих между прямыми, передают сингулярную часть решения.

Пусть теперь форма боковых поверхностей цилиндра задается зависимостями  $\varphi(r) = \varphi_i(r)$ , на которые наложены те же ограничения, что и для условий Неймана, т.е. с константой  $\alpha > 1$ . Сделаем замену переменных по-отдельности в областях  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$ :

$$R = r, \quad \Phi^e = \omega_0 \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad \Phi^i = \frac{\varphi(2\pi - \omega_0) + \omega_0(2\pi + \varphi_1) - 2\pi\varphi_2}{2\pi + \varphi_1 - \varphi_2}. \quad (57)$$

В условии на разрыв нормальной производной появятся новые слагаемые:

$$\mu\beta E_{\Phi^e}^{e'}|_S - E_{\Phi^e}^{e'}|_S = \left( (\mu\beta - 1)s_1 E_R' + \mu\beta s_2^e E_{\Phi^e}^{e'} - s_2^i E_{\Phi^i}^{i'} \right)|_S, \quad (58)$$

где функции  $s_1, s_2^e, s_2^i$  имеют следующий вид:

$$s_1 = R^2 s; \quad s_2^e = 1 + R^2 s \Phi_r^{e'} - \Phi_\varphi^{e'}; \quad s_2^i = 1 + R^2 s \Phi_r^{i'} - \Phi_\varphi^{i'}; \quad (59)$$

где использовано обозначение:

$$s(R, \varphi) = \begin{cases} \varphi_1' + \frac{\Phi}{\omega_0}(\varphi_2' - \varphi_1'), & \Phi \in (0, \omega_0), \\ \varphi_2' + \frac{\Phi - \omega_0}{2\pi - \omega_0}(\varphi_1' - \varphi_2'), & \Phi \in (\omega_0, 2\pi). \end{cases} \quad (60)$$

Вновь ищем решение в виде  $E = \tilde{E} + g$ , где функция  $g(R, \Phi)$  удовлетворяет неоднородным граничным условиям. Функцию  $g$  выберем следующим образом:

$$g = \begin{cases} (s_1 E_R^{e'} + s_2^e E_{\Phi^e}^{e'}) \frac{\Phi(\omega_0 - \Phi)}{\omega_0}, & \Phi \in (0, \omega_0), \\ (s_1 E_R^{i'} + s_2^i E_{\Phi^i}^{i'}) \frac{(\Phi - \omega_0)(\Phi - 2\pi)}{2\pi - \omega_0}, & \Phi \in (\omega_0, 2\pi). \end{cases} \quad (61)$$

Коэффициенты в выражении для  $g$  ведут себя в нуле не хуже, чем  $s_1 \sim R^{1+\alpha}$ ,  $s_2 \sim R^\alpha$ . Поэтому справедливо:

$$E \in V_\gamma^l(\mathbb{R}^2) \Rightarrow g \in V_{\gamma-\alpha}^{l-1}(\mathbb{R}^2); \quad \Delta g \in V_{\gamma+2-\alpha}^{l-1}(\mathbb{R}^2). \quad (62)$$

Таким образом, для правой части выполнена оценка:

$$E \in V_\gamma^l(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \tilde{f} \in V_{\gamma+2-\alpha}^{l-1}(\mathbb{R}^2). \quad (63)$$

Исходя из начальной оценки для решения, правая часть  $f \in V_{2-\alpha}^0(\mathbb{R}^2) \cap V_1^0(\mathbb{R}^2)$ . Поэтому обратное преобразование Фурье будем производить вдоль прямой  $\text{Im } \lambda = \alpha - 1 > 0$ . Асимптотическое представление решения принимает вид:

$$\begin{aligned} E(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \eta_n^E < \alpha-1} C_n R^{\eta_n^E} u_n^E(\Phi) + R_E(R, \Phi), \\ H(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \eta_n^H < \alpha-1} C_n R^{\eta_n^H} u_n^H(\Phi) + R_H(R, \Phi), \end{aligned} \quad (64)$$

где  $R_E, R_H \in V_{2-\alpha}^2(\mathbb{R}^2)$ . Подобно случаю идеальной проводимости, главная особенность не изменится, если заменить боковые поверхности на касательные к ним на ребре плоскости.

#### 4. ЗАДАЧА ДЛЯ ИМПЕДАНСНЫХ УСЛОВИЙ

Если проводимость  $\sigma$  среды велика, но приближение идеальной проводимости не дает достаточную точность, используют граничные условия Шукина-Леонтовича, также называемые импедансными условиями.

Рассмотрим задачу в области  $\Omega = (\varphi_1, \varphi_2) \times (0, +\infty)$  с теми же требованиями, что и для условий Неймана, т.е. при  $\alpha > 1$ .

Введем в окрестности границы криволинейную ортогональную систему координат, базис которой обращается в тройку векторов  $\mathbf{n}, \mathbf{s} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{n}]$ ,  $\mathbf{e}_z$  на границе. Импедансные условия в таких координатах принимают вид:

$$\begin{aligned} E_z \Big|_S &= w H_s \Big|_S, \\ E_s \Big|_S &= -w H_z \Big|_S, \end{aligned} \quad (65)$$

где  $w = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$  — поверхностный импеданс,  $\epsilon' = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ .

Используя уравнения Максвелла, импедансные условия можно свести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial n} &= -\cos \Psi \frac{\partial H_z}{\partial s} - i \frac{k_0}{w} \sin^2 \Psi E_z, \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} &= \cos \Psi \frac{\partial E_z}{\partial s} - i k_0 w \sin^2 \Psi H_z, \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$\frac{\partial H_z}{\partial s} = s_x H'_x + s_y H'_y = \frac{H'_r + H'_\varphi \Phi'_i}{\sqrt{1 + (R\Phi'_i)^2}}. \quad (67)$$

Преобразуем координаты:

$$R = r, \quad \Phi = \omega \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (68)$$

Пусть  $E_z = E$ ,  $H_z = H$ . В граничные условия подставим выражения для производных в новых координатах. Приходим к следующему представлению граничных условий:

$$\begin{aligned} E'_\Phi &= R \cos \Psi H'_R + S_E(R), \\ H'_\Phi &= -R \cos \Psi E'_R + S_H(R). \end{aligned} \quad (69)$$

Через  $S_E$  и  $S_H$  обозначены функции:

$$\begin{aligned} S_E &= E'_\Phi (1 - \Phi'_\varphi + R^2 \Phi'_i \Phi'_r) + E'_R R^2 \Phi' + \\ &+ R (\Phi'_r + \Phi'_\varphi \Phi'_i) \cos \Psi H'_\Phi \pm i \frac{k_0}{w} R \sin^2 \Psi E \sqrt{1 + (R\Phi'_i)^2} = A_E \pm B_E; \\ S_H &= H'_\Phi (1 - \Phi'_\varphi + R^2 \Phi'_i \Phi'_r) + H'_R R^2 \Phi' - \\ &- R (\Phi'_r + \Phi'_\varphi \Phi'_i) \cos \Psi H'_\Phi \pm i k_0 w R \sin^2 \Psi H \sqrt{1 + (R\Phi'_i)^2} = A_H \pm B_H. \end{aligned} \quad (70)$$

Функции  $S$  разбиты на суммы  $A$  и  $B$  для упрощения вида формул. Продлим  $S_E$  и  $S_H$  на всю  $\Omega$ , снова вводя функцию  $s(R, \Phi) = \varphi'_1 + \frac{\Phi}{\omega_0}(\varphi'_2 - \varphi'_1)$ .

Ищем решение в виде  $E = \tilde{E} + g$ , а функцию  $g$ , удовлетворяющую граничным условиям, выберем в виде

$$g = \cos \Psi \left( \int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\tilde{\Phi} + C(R) \right) + \int_0^{\Phi} A_E d\tilde{\Phi} + \sin \frac{\pi \Phi}{\omega_0} \int_0^{\Phi} B_E d\tilde{\Phi}, \quad (71)$$

где  $C(R)$  и  $\delta$  будут подобраны ниже таким образом, чтобы  $g \in V_Y^l(\Omega')$ ,  $\Delta g \in V_Y^{l-1}(\Omega')$ .

Функция  $\tilde{E}(r, \varphi)$  удовлетворяет однородным условиям Неймана и уравнению:

$$\Delta \tilde{E} = -(\Delta g + k^2 E) + f = \tilde{f}. \quad (72)$$

Будем исследовать слагаемые, входящие в  $g$  по отдельности. Рассмотрим первое слагаемое и подберем подходящие  $C(R)$  и  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta \int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\tilde{\Phi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\tilde{\Phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \int_{\delta}^{\Phi} H d\tilde{\Phi} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \int_{\delta}^{\Phi} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial H}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \Phi^2} \right) d\tilde{\Phi} + \frac{\partial H}{\partial \Phi}(R, \delta) \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \int_{\delta}^{\Phi} (-k^2 H) d\tilde{\Phi} + \frac{\partial H}{\partial \Phi}(R, \delta) \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Чтобы выполнялось равенство

$$\Delta C(R) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial C}{\partial R} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial H}{\partial \Phi}(R, \delta) \right), \quad (74)$$

подберем  $C(r)$  в виде

$$C(r) = - \int_0^R \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial H}{\partial \Phi}(\tilde{R}, \delta) d\tilde{R}. \quad (75)$$

Тогда имеем

$$\Delta \left( \int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\varphi' + C(R) \right) \in V_Y^l(\Omega'). \quad (76)$$

Такой выбор  $C(r)$  гарантирует гладкость первого слагаемого из выражения для  $\Delta g$ . Покажем, что существует  $\delta$  такое, что  $H(r, \delta) \in V_Y^l(\Omega')$  при  $H(r, \varphi) \in V_Y^l(\Omega')$ :

$$\begin{aligned} \|H\|_{V_Y^l(\Omega')}^2 &\geq \int_0^{\infty} \int_0^{\omega_0} \sum_{j=0}^l R^{2(\gamma-1+j)} \left| \frac{\partial^j H}{\partial R^j} \right|^2 d\Phi R dR = \\ &= \omega_0 \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^l R^{2(\gamma-1+j)} \left| \frac{\partial^j H}{\partial R^j} \right|_{\Phi=\delta}^2 R dR = \omega_0 \|H(R, \delta)\|_{V_Y^1(\Omega')}^2, \end{aligned} \quad (77)$$

где при переходе от интеграла по  $\Omega'$  к интегралу по лучу  $r \in [0, \infty)$ ,  $\varphi = \delta$  использовалась теорема о среднем, где утверждается существование  $\delta \in (0, \omega_0)$ , что  $\int_0^{\omega_0} f(\varphi) d\varphi = \omega_0 f(\delta)$  для любой непрерывной на  $[0, \omega_0]$  функции.

Оценим оставшиеся слагаемые из  $S_E$ . Для этого рассмотрим коэффициенты, входящие в выражения для  $A_E$  и  $B_E$ :

$$\begin{aligned} 1 - \Phi'_{\varphi} + R^2 \Phi'_i \Phi'_r &= \underline{O}(R^{\alpha}); & R^2 \varphi' &= \underline{O}(R^{1+\alpha}); \\ R(\Phi'_r + \Phi'_{\varphi} \varphi'_i) &= \underline{O}(R^{\alpha}); & R \sqrt{1 + (R \varphi'_i)^2} &= \underline{O}(R). \end{aligned} \quad (78)$$

Исходя из этого можно заключить, что два последних слагаемых  $g$  принадлежат пространству  $V_{\gamma-\alpha}^l(\Omega)$ , а их лапласианы — пространству  $V_{\gamma+1-\alpha}^{l-1}(\Omega)$ . Оценка для первого слагаемого в  $g$  слабее, поэтому при  $E, H \in V_{\gamma}^l(\Omega)$  справедливо  $g \in V_{\gamma}^l(\Omega)$ ,  $\Delta g \in V_{\gamma}^{l-1}(\Omega)$ .

Исходя из начальной оценки  $E, H \in V_0^1(\Omega')$ , получаем оценку:  $\tilde{f} \in V_0^0(\Omega') \cap V_1^0(\Omega')$  для правой части. Таким образом, приходим к асимптотическому представлению решения:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(R, \Phi) &= \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 1} C_{En} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_E(R, \Phi), \\ \tilde{H}(R, \Phi) &= \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 1} C_{Hn} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_H(R, \Phi),\end{aligned}\tag{79}$$

где  $R \in V_0^2(\Omega')$ .

Подставляя полученные выражения для  $\tilde{E}, \tilde{H}$  в явное выражение для функции  $g$ , несложно убедиться, что в общем случае  $g$  имеет в нуле особенность того же порядка, что и функции  $\tilde{E}, \tilde{H}$ , а в случае ортогонального к ребру падения  $g$  является более гладкой функцией. Решение имеет такую же особенность в окрестности ребра, что и для случая идеальной проводимости.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено представление электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра, граница которого задается зависимостью угловой координаты от радиальной, в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой получена оценка в норме соответствующего функционального пространства.

Для случаев идеальной проводимости и импедансных условий главные особенности имеют одинаковый порядок в окрестности ребра. Для диэлектрического случая показано, что поле имеет степенную особенность с показателем, определяемым из соответствующего алгебраического уравнения.

Строго доказано, что главная особенность электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра произвольной формы не изменится, если заменить угол между его боковыми поверхностями двугранным углом между касательными к ним плоскостями.

Полученное представление может быть использовано для повышения скорости сходимости численных методов при математическом моделировании объектов, содержащих ребра, в частности, при моделировании опорно-поворотного устройства в безэховой камере. Поскольку сингулярная часть поля, благодаря полученному представлению, может быть аппроксимирована точно, задача сводится к аппроксимации гладкой части.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 446.
2. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е. Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // ФОП. 2016. Т. 5. № 2. С. 72–79.
3. Bogolyubov A. N., Mogilevskiy I. E., Rovenko V. V. Mathematical problems of the diffraction theory on bodies with irregularly boundary // PIER Proc. 2017. IEEE Xplore [Piscataway, N.J.]. United States. 2017. С. 2102–2110.
4. Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е. Сингулярность электромагнитного поля в окрестности диэлектрического ребра в задачах дифракции на телах сложной формы // Уч. записки физ. факультета МГУ. 2016. № 3.
5. Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е., Светкин М.И. Гибридный метод решения уравнения Пуассона в области с металло-диэлектрическими углами // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2017. № 1. С. 17–22.
6. Могилевский И. Е. Применение метода смешанных конечных элементов и оценки скорости сходимости для расчета электромагнитного поля волновода с входящими ребрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 2071–2079.

7. Боголюбов А. Н. , Ерохин А. И. , Могилевский И. Е. , Светкин М. И. Гибридный метод численного решения уравнения Пуассона в области с диэлектрическим углом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1321–1330.
8. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 227–313.
9. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.

## THE SINGULAR PART OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN DIFFRACTION PROBLEMS ON BODIES WITH EDGES FOR VARIOUS TYPES OF BOUNDARY CONDITIONS

A. N. Bogolyubov\*, I. E. Mogilevskiy\*\*, M. M. Shusharin\*\*\*

*119991 Moscow, Leninskie Gory, 1, Lomonosov Moscow State University, Russia*

*\*e-mail: bogan7@yandex.ru*

*\*\*e-mail: imogilevsky@mail.ru*

*\*\*\*e-mail: nirashush1999@gmail.com*

Received: 21.05.2024

Revised: 21.05.2024

Accepted: 26.07.2024

**Abstract.** The article considers the problem of diffraction of a plane electromagnetic wave on a cylinder of arbitrary cross-section shape with an edge at the boundary. Using the method first proposed in the works of V. A. Kondratiev, for the cases of impedance, ideally conductive and dielectric cylinders, a singular part of the solution is isolated in the vicinity of the edge.

**Keywords:** diffraction problem, electromagnetic field singularity, edges, asymptotic decomposition.