

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ МАТЕРИАЛЕ

© 2024 г. И. Б. Бахолдин^{1,*}¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Россия

*e-mail: ibbakh@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024 г.

Переработанный вариант 18.03.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Исследуется устойчивость уединенных волн, являющихся решениями одного из вариантов уравнения Буссинеска. Уравнение описывает упругие волны при наличии электромагнитного поля. Применен метод функции Эванса и непосредственный численный расчет уравнения для выявления неустойчивости уединенных волн. Результаты, полученные обоими методами, совпали. Разработана методика выявления неустойчивости и методика расчета растущей со временем собственной функции посредством анализа численных решений уравнения в частных производных. Библ. 11. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска, уединенная волна, устойчивость, метод функции Эванса, численные методы, упругость, электродинамика.

DOI: 10.31857/S0044466924110115, EDN: KGJYBU

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] приведено уравнение, описывающее упругие волны в электропроводной микрополярной среде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{I c_\phi^2 c_T^2}{4 \alpha c_0^4} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{I}{4 \alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \frac{I (c_\phi^2 + c_T^2)}{4 \alpha c_0^2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $v(x, t)$ — перемещения, $c_0, c_\phi, c_\tau, I, \alpha$ — некоторые положительные константы, связанные со свойствами материала. Была использована трансформация физических переменных: $x \rightarrow c_0 x, v \rightarrow c_0 v$. Более удобная для исследования форма этого уравнения представляет собой один из вариантов уравнений типа Буссинеска:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{I c_\phi^2 c_T^2}{4 \alpha c_0^4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{I}{4 \alpha} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{I (c_\phi^2 + c_T^2)}{4 \alpha c_0^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 = 0, \quad u = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Уравнение имеет решения в виде уединенных волн:

$$u(\xi) = \Phi_V = -\frac{3m_1}{2m_2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{-m_1}}{2} \xi \right), \quad \xi = x - Vt, \quad (1.3)$$

$$m_1 = \frac{4\alpha(V^2 - 1)}{I Q(V)}, \quad m_2 = \frac{4\alpha c_\tau^2}{I c_0^2 Q(V)}, \quad Q(V) = \left(V^2 - \frac{c_\phi^2}{c_0^2} \right) \left(V^2 - \frac{c_T^2}{c_0^2} \right).$$

Решения существуют при $m_1 < 1$. Устойчивость этих уединенных волн при $V > 1$ (сверхзвуковой случай) аналитически исследовалась методом функции Эванса в [3]. Общие теоретические основы метода Эванса изложены в работах [4]–[6]. Пример исследования устойчивости уединенных волн с помощью функции Эванса с применением численных методов для ее расчета в случае классического интегрируемого уравнения Буссинеска описан в [7].

Ранее был разработан численный метод для решения уравнений в частных производных, основанный на аппроксимации пространственных производных центральными разностями, временных производных — методом Рунге—Кутты [8]. Было показано, что метод устойчив в расчетах для широкого класса уравнений. Ниже производится численное исследование устойчивости уединенных волн методом функции Эванса и делается сравнение с непосредственным расчетом уравнения. Результаты, полученные обоими способами совпадают.

Анализ устойчивости уединенной волны помимо важности оценки возможности физического наблюдения такой волны актуален и для теории теории бездиссипативных разрывов [9]. В недиссипативных системах уравнений с дисперсией, в частности для уравнения (1.2), встречаются решения, названные солитонными структурами разрывов. Это расширяющиеся со временем волновые зоны, в которых первая волна со временем стремится к уединенной. Очевидно, в случае неустойчивости уединенной волны неустойчивыми становятся и солитонные структуры.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЭВАНСА

Теоретические основы и обоснование применения метода функции Эванса к уединенным волнам уравнения (1.2) при $V > 1$ подробно изложены в [3]. Ограничимся здесь приведением формул, необходимых для дальнейшего численного исследования. Уравнение (1.2) можно линеаризовать относительно решений (1.3) подстановкой $u = \Phi_V + w$, w — малая величина, и использовать для исследования линейной устойчивости метод функции Эванса:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{I c_\Phi^2 c_T^2}{4\alpha c_0^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{I}{4\alpha} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \frac{I(c_\Phi^2 + c_T^2)}{4\alpha c_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{2c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi_V w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

Методом Эванса выявляется существование растущих со временем собственных функций $Y(\xi)$, $w = Y \exp \lambda t$, $\text{Re} \lambda > 0$, $Y \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Такая собственная функция существует тогда и только тогда, когда есть ноль функции Эванса $D(\lambda)$ в правой комплексной полуплоскости. Ограничимся здесь рассмотрением случая $W > 1$, сверхзвуковой случай согласно [3]. Функция Эванса строится следующим образом. Рассматриваются система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая собственную функцию, и сопряженная система

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{M}\mathbf{y}, \quad \mathbf{z}' = -\mathbf{z}\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b + b_1 \Phi'_V & c + b_1 \Phi_V & d \end{pmatrix}, \\ a &= -\frac{c_0^4(4\alpha + I\lambda^2)\lambda^2}{r}, \quad b = \frac{4c_0^4\lambda V(2\alpha + \lambda^2 I)}{r}, \quad b_1 = \frac{8\alpha c_\tau^2 c_0^2}{r}, \\ c &= \frac{c_0^2(-4\alpha c_0^2(-1 + V^2) + I\lambda^2(c_\Phi^2 + c_T^2 - 6c_0^2 V^2))}{r}, \\ d &= -\frac{2Ic_0^2\lambda V(c_\Phi^2 + c_T^2 - 2c_0^2 V^2)}{r}, \quad r = I(c_\Phi^2 - c_0^2 V^2)(c_T^2 - c_0^2 V^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по ξ . Рассматривается матрица

$$\mathbf{M}_\infty = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{M}.$$

Ищется собственное значение μ матрицы $\mathbf{M}_\infty$ такое, что $\text{Re} \mu < 0$, ищутся правый и левый собственные векторы матрицы $\mathbf{M}_\infty$

$$\mathbf{r}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \mu^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = s \left(1, \frac{b}{a} + \frac{1}{\mu}, \frac{c}{a} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{b}{a\mu}, \frac{\mu}{a} \right), \quad s = \frac{a}{3a + 2b\mu + c\mu^2 + \mu^4}. \quad (2.3)$$

Ищутся некоторые вспомогательные решения уравнений (2.2), обладающие свойствами

$$e^{-\mu\xi} \mathbf{y}_0(\xi, \lambda) \rightarrow \mathbf{r}_1(\lambda), \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

$$e^{\mu\xi} \mathbf{z}_0(\xi, \lambda) \rightarrow \mathbf{I}_1(\lambda), \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Функция Эванса на правой комплексной полуплоскости ($\text{Re} \lambda \geq 0$) определяется так:

$$D(\lambda) = \mathbf{z}_0(\xi, \lambda) \mathbf{y}_0(\xi, \lambda).$$

Результат умножения не зависит от ξ , поэтому значение ξ можно выбрать произвольным. Согласно формул (2.3), полученных аналитически, $\mathbf{I}_1 \mathbf{r}_1 = 1$. В случае иного выбора векторов функцию Эванса целесообразно поделить на $\mathbf{I}_1 \mathbf{r}_1$, чтобы $D \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Нули функции Эванса в области $\text{Re } \lambda > 0$ соответствуют неустойчивым собственным функциям с показателем роста $\text{Re } \lambda$.

В работе [3] расчет собственной функции не был осуществлен, но аналитически был найден полином, определяющий знак $D_{\lambda\lambda}(0)$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{V}) = & -336\mathcal{V}^5 + \\ & + 8(29 + 73s_1 + 73s_2)\mathcal{V}^4 - 16(1 + 15s_1^2 + s_2(23 + 15s_2) + s_1(23 + 63s_2))\mathcal{V}^3 + \\ & + 24(s_1(1 + 5s_1) + s_2 + s_1(24 + 17s_1)s_2 + (5 + 17s_1)s_2^2)\mathcal{V}^2 - \\ & - 16s_1s_2(3 + 11s_2 + s_1(11 + 10s_2))\mathcal{V} + 8s_1s_2(s_1 + s_2 + 5s_1s_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$s_1 = c_\phi^2/c_0^2, \quad s_2 = c_T^2/c_0^2, \quad \mathcal{V} = V^2.$$

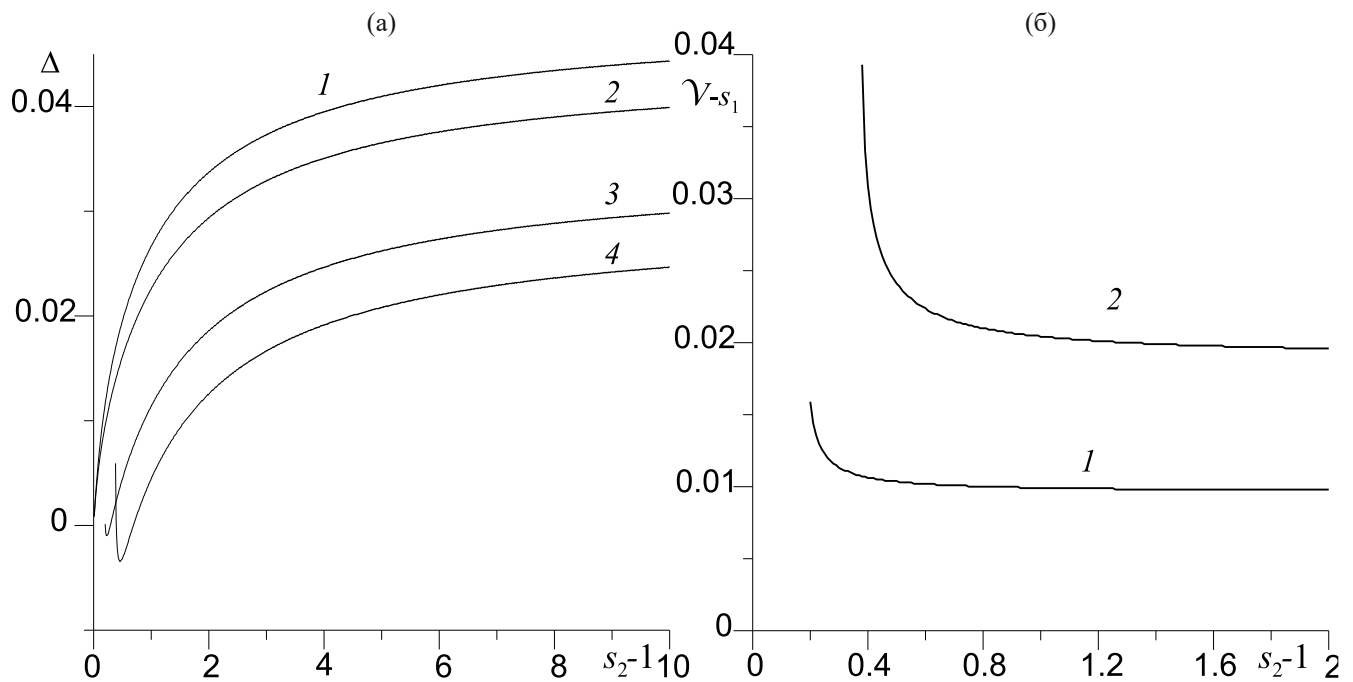
Утверждалось, что, поскольку $D(0) = 0$, при $P(\mathcal{V}) < 0$ имеется неустойчивая собственная функция. В виде таблиц были приведены границы интервалов отрицательных значений P для некоторых s_1 и s_2 . Ниже приводятся результаты исследований, полученных непосредственным вычислением функции Эванса, показавшие, что наоборот в этом случае уединенная волна устойчива, исследование текста работы [3] показало, что при выводе (2.4) был перепутан знак.

Сформулируем постановку задачи на получение функции Эванса в виде удобном для численных расчетов. Вначале находим значение μ . В данном случае это можно сделать, решив аналитически полиномиальное уравнение четвертого порядка. Однако была использована стандартная подпрограмма для поиска собственных значений и собственных векторов матриц произвольной размерности. Это позволяет использовать разработанную программу для более сложных случаев. В частности был сделан вариант программы для случая $V < 1$, где требуется использовать матрицу 6×6 . Получены результаты, аналогичные представленным в [7]. Нужное значение μ выбирается из списка найденных собственных значений как значение с минимальной действительной частью. Для нахождения левого собственного вектора с помощью стандартных средств матрицу $\mathbf{M}_\infty$ нужно предварительно транспонировать. Численный эксперимент показал, что более точные результаты получаются, если сначала найти μ , а затем найти собственные векторы посредством решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Далее находим вспомогательные функции и функцию Эванса так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}'_0 &= (\mathbf{M} - \mu \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{y}}_0, \quad 0 < \xi < \zeta, \quad \tilde{\mathbf{y}}_0(\zeta) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{y}_0 = e^{i\mu\xi} \tilde{\mathbf{y}}_0, \\ \tilde{\mathbf{z}}'_0 &= -(\mathbf{M}^T - \mu \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{z}}_0, \quad 0 > \xi > -\zeta, \quad \tilde{\mathbf{y}}_0(\zeta) = \mathbf{I}_1^T, \quad \mathbf{z}_0 = e^{-i\mu\xi} \tilde{\mathbf{z}}_0^T, \\ D(\lambda) &= (\tilde{\mathbf{y}}_0(0), \tilde{\mathbf{z}}_0(0)) / (\tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{I}}_1^T). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $(*, *)$ — скалярное произведение векторов с комплексными компонентами, ζ — достаточно большая величина такая, что $\Phi_V(\zeta)$ близко к нулю. Обыкновенные дифференциальные уравнения решались методом Рунге—Кутты второго порядка. Проверяться сходимость результатов при изменении пространственного шага и величины ζ . Расчеты велись с двойной точностью. Есть вариант программы с учетверенной точностью, но он не показал существенных отличий при вычислении функции Эванса применительно к уединенным волнам умеренной амплитуды. Однако для очень растянутых уединенных волн при V близком к единице учетверенная точность может быть полезна, поскольку для расчета Φ_V требуется расчет экспонент с большим показателем.

Было исследовано полиномиальное уравнение $P(\mathcal{V}) = 0$. С математической точки зрения при перемене местами s_1 и s_2 значения корней не меняются, как не меняются и решения уравнения (1.2) и эти величины могут принимать произвольные значения при $m_1 < 0$. Однако следует учитывать, что согласно исходной физической модели $s_2 \geq 1$ (см. [2]); $s_2 = 1$ — формально физически допустимое значение для исходной системы уравнений, но вывести из них при этом уравнение (1.2) невозможно. Поэтому рассматриваются случаи $s_2 > \mathcal{V} > 1 > s_1$ и $s_2 > \mathcal{V} > s_1 > 1$ (или $s_1 > \mathcal{V} > s_2 > 1$). В первом случае есть уединенные волны малой амплитуды при $V \rightarrow 1$, они устойчивы, при увеличении квадрата скорости до некоторого значения $\mathcal{V}_2$ (и соответственно увеличения амплитуды) они становятся неустойчивыми. Неустойчивость сохраняется вплоть до $\mathcal{V} = s_2$. Численные исследования показывают, что точка перехода к неустойчивости хорошо описывается формулой $\mathcal{V} = 1 + 2(s_2 - 1)/3$. Можно проверить, что это асимптотическая формула при больших значениях s_2 и $\mathcal{V}$. Но она хорошо описывает корень полинома и при умеренных значениях, как видно из фиг. 1а, кривые 1, 2 соответствуют $s_1 = 0, 81, 0.9$. Показана величина $\Delta = 2(s_2 - 1)/3 - (\mathcal{V}_2 - 1)$. Графики $\mathcal{V}_2(s_2)$ представляют собой практически прямые линии, сливаются при разных значениях s_1 и поэтому не наглядны. Во втором случае уединенных волн сколь угодно



Фиг. 1.

малой амплитуды нет, а на обоих границах области допустимых значений $\mathcal{V}$ длина уединенной волны стремится к нулю, т.е. волны не описываются слабонелинейно-длинноволновым приближением, использованным при выводе уравнения (1.2). Возле этих границ волны неустойчивы, а на среднем интервале $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V} < \mathcal{V}_2$ волны устойчивы. Корень $\mathcal{V}_2$ здесь тоже неплохо описывается формулой $\mathcal{V} = 1 + 2(s_2 - 1)/3$, см. фиг. 1а, кривые 3, 4 соответствуют $s_1 = 1.1, 1.2$. Было обнаружено, что $\mathcal{V}_1$ стремится при $s_2 \rightarrow \infty$ к некоторой константе, зависящей от s_1 , см. фиг. 1б, кривые 1, 2 соответствуют $s_2 = 1.1, 1.2$.

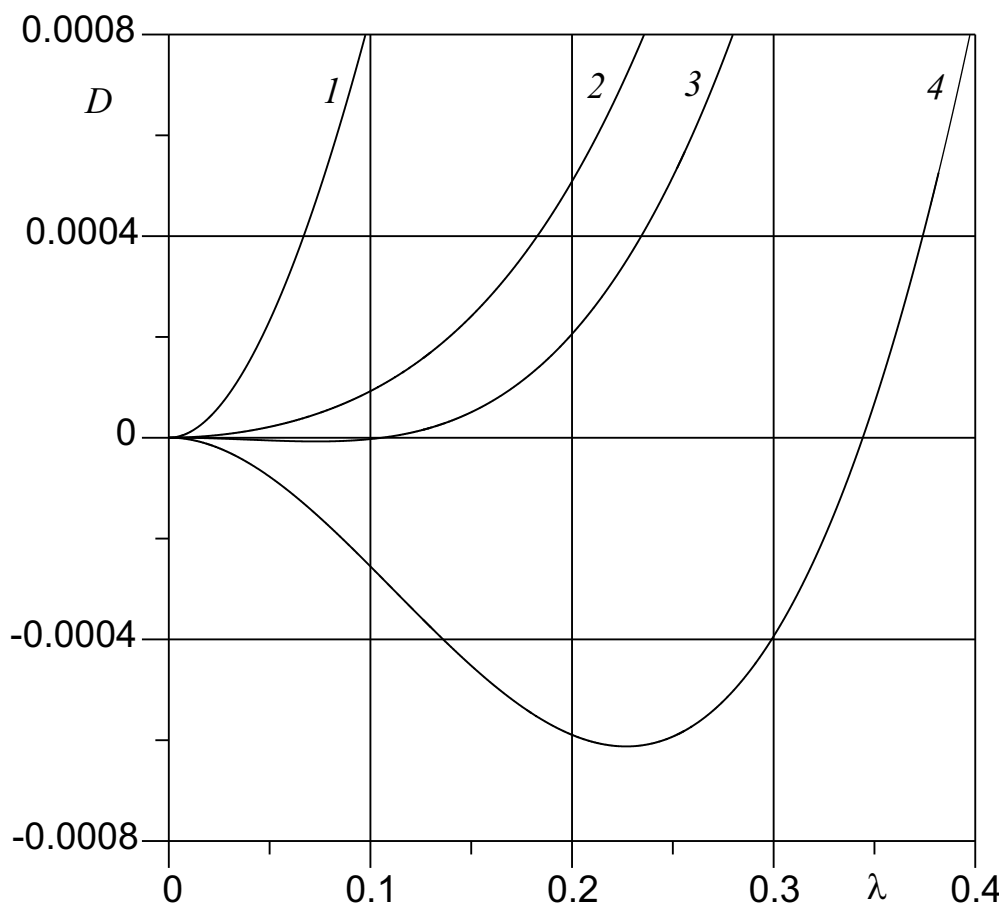
Наличие указанных выше точек переходов между устойчивыми и неустойчивыми волнами с хорошей точностью подтверждается непосредственным расчетом функции Эванса, см. фиг. 2, кривым 1, 2, 3, 4 соответствует $V = 1.35, 1.41, 1.42, 1.45$; показана функция Эванса на действительной оси. Наличие нуля на действительной оси свидетельствует о существовании при $V > 1.41$ растущей собственной функции. Здесь и для фигур разд. 3 набор констант следующий: $I = 1, c_\phi = 1.6, c_T = 0.9, \alpha = 1, c_\tau = 1, c_0 = 1$ ($s_1 = 0.81, s_2 = 2.56$). Функция Эванса — аналитическая функция в правой комплексной полуплоскости, стремящаяся к 1 при $\lambda \rightarrow \infty$. Применение принципа аргумента для подсчета числа нулей в правой комплексной полуплоскости [4] с исследованием функции Эванса на мнимой оси показывает, что других растущих собственных функций здесь нет.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ РАСЧЕТОМ УРАВНЕНИЯ

Преобразуем уравнение (1.2) к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u_1, \\ \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= u_3, \\ \dot{u}_3 &= -(u_2 - u_{xx} + Au_{xxxx} + Cu_{2xx} + D(u^2)_{xx})/B.\end{aligned}$$

Здесь A, B, C, D — коэффициенты при четырех последних членах уравнения (1.2). В соответствии с методикой, разработанной в [8] для широкого класса уравнений, временные производные аппроксимируются методом Рунге–Кутты четвертого порядка, а пространственные — методом центральных разностей второго порядка. Это позволяет получить корректную и малую схемную вязкость (пятого порядка по пространственным и временным шагам), и использовать в качестве условия устойчивости естественное условие Куранта для шагов по времени и пространству, $\tau < ch$, выявленное экспериментально. Как и в ранее исследованных моделях волн, трубы с упругими стенками, наполненные жидкостью или газом [8], [10], электромагнитная гидродинамика плазмы [11], скорость распространения волн здесь конечная, что и приводит к классическому условию

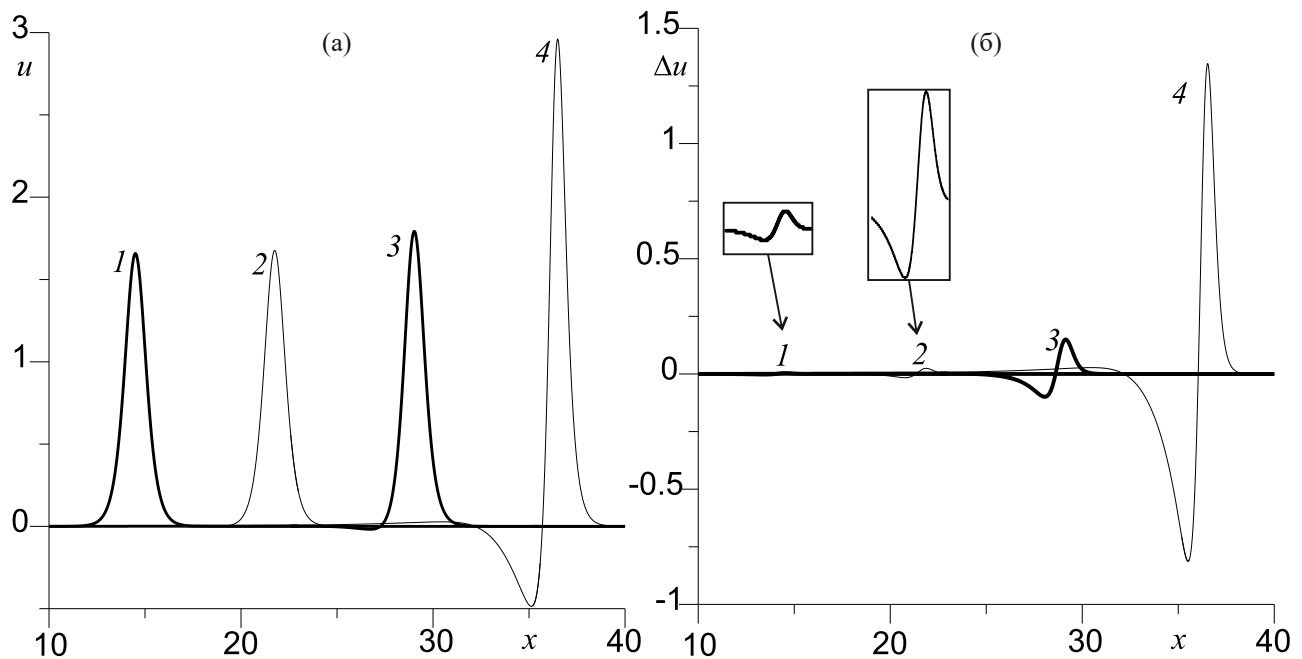


Фиг. 2.

Куранта. Напомним, что согласно [8] применение методов Рунге–Кутты 1–3 порядков тоже возможно, но при методах 1–2 порядков схемная вязкость некорректная, что приводит к неестественному условию устойчивости и невозможности продолжать длительные расчеты, особенно это чувствительно при методе первого порядка. При методе третьего порядка схемная вязкость корректна, но она имеет третий порядок по пространственным и временным шагам, в случае уравнений без диссипации лучше применять метод четвертого порядка для максимального исключения диссипативных искажений решений.

Ставились начальные данные $u = \Phi_V$, $u_1 = \dot{\Phi}_V$, $u_2 = \ddot{\Phi}_V$. На границах ставились условия нулевых значений u в трех краевых узлах численной схемы, математически это означает, что $u = u_x = u_{xx} = 0$ на границе. Расчет велся на достаточно протяженном пространственном отрезке, так что видимых взаимодействий волн с границами не было. На фиг. 3а показана эволюция решения со временем, кривым 1, 2, 3, 4 соответствует $t = 10, 15, 20, 25$, $V = 1.45$, а на фиг. 3б — эволюция разности расчетного и аналитического решений, $\Delta u = u - \Phi_V$. Фрагменты графиков при $t = 10, 15$, увеличенные по вертикали в 20 раз на фиг. 3б показаны в рамках. Видно, что развивается неустойчивость. Расчет завершается аварийной остановкой из-за вычислительного блоуапа, возможно связанного с нелинейным опрокидыванием волны. В случае конечной скорости распространения волн в обратимых системах с дисперсией могут образовываться как дисперсионные структуры разрывов, так и возникать опрокидывание волн, то есть может быть отсутствие классического решения [8], [11]. Таким образом, погрешность вычислений в неустойчивом случае со временем провоцирует формирование растущей собственной функции и никаких дополнительных действий по дестабилизации уединенной волны не требуется. Это дает метод выявления неустойчивости, независимый от исследования функции Эванса.

Ранее вычисление собственной функции способом исследования разности численного и теоретического решения проводилось для неустойчивой стоячей уединенной волны для уравнений волн в трубах с упругими стенками и контролируемым давлением [10]. Проводилось это как для полного варианта уравнений, так и для упрощенного варианта, представляющего собой классическое уравнение Буссинеска. Было показано, что для более точного расчета собственной функции можно использовать линейризованное уравнение с начальными данными, получаемыми как разность между численным и теоретическим решением нелинейного уравнения на некотором начальном этапе. Поскольку уравнение линейное, то нелинейные эффекты не оказывают влияния

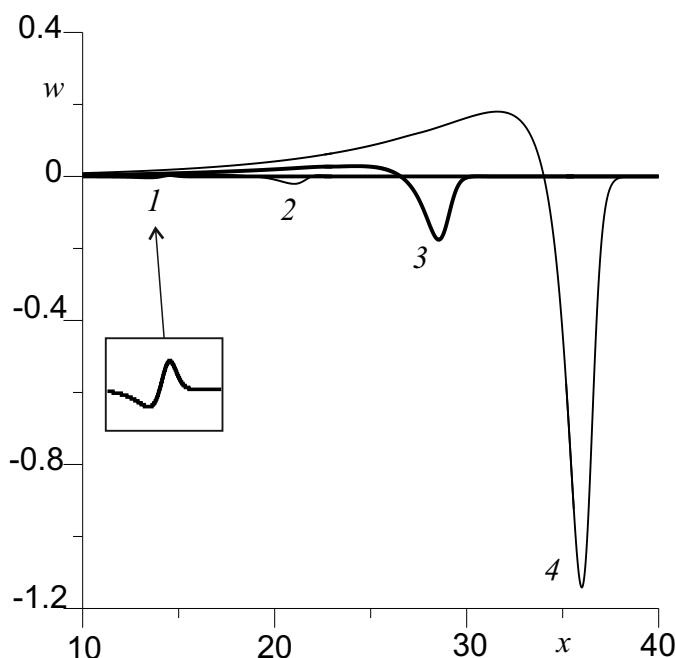


Фиг. 3.

на результаты и опрокидывание волны не происходит, расчет можно вести вплоть до достижения максимально допустимых для используемого языка программирования значений амплитуды. Это было осуществлено и в данном случае. На фиг. 4 показаны результаты решения уравнения (2.1) при $t = 10, 15, 20, 25$, $V = 1.45$, кривые 1, 2, 3, 4. Начальные данные при $t = 10$ брались в виде разности решения уравнения (1.2) и теоретического решения (1.3). Фрагмент графика начальных данных, увеличенный по вертикали в 20 раз показан в рамке. Рассчитанное по по изменению амплитуды значение λ совпало с тем, которое можно определить, рассматривая точку пересечения кривой 4 с прямой $D = 0$ на фиг. 2. В отличие от рассматриваемого здесь случая собственная функция в [10] была симметричной и качественных отличий в виде графиков разности и линейного решения не было. Здесь же качественные отличия значительные, это связано с тем, что решения несимметричны и скорость гребня рассчитываемой волны по прошествии времени заметно отличается от скорости волны в теоретическом решении (1.3).

Отметим, что и в устойчивом согласно анализу функции Эванса случае на графике Δu можно видеть некоторое подобие собственной функции, хотя ее амплитуда на несколько порядков меньше амплитуды уединенной волны, а рост максимальной амплитуды со временем близок к линейному. Это связано в основном с небольшим несовпадением скорости сеточной уединенной волны с теоретическим решением (1.3), поскольку наблюдаемый график Δu качественно сходен с графиком Φ'_V . А в случае расчета уравнения (2.1) на графике w можно видеть переход между двумя однородными состояниями, между которыми расположена локализованная волна, растущая со временем, т.е. некое подобие неустойчивой структуры разрыва. При приближении V к V_2 в обоих случаях возникают временные колебания максимальной амплитуды в решении, а в случае расчета уравнения (2.1) однородное состояние за структурой разрыва становится периодическим. Величины Δu и w при уменьшении пространственного шага в два раза уменьшаются в четыре раза, что указывает на то, что это связано с вычислительной погрешностью второго порядка, как и следовало ожидать от такой схемы. В неустойчивом согласно анализу функции Эванса случае это наблюдается только на начальном этапе, затем из-за экспоненциального роста собственной функции наблюдать это уже невозможно. Эти свойства решений позволяют отличить неустойчивую уединенную волну от устойчивой, не используя метод функции Эванса.

Отметим, что ранее [9] нередко при исследовании волн, движущихся со скоростью, близкой к постоянной, использовался расчет в системе координат наблюдателя, движущейся с этой скоростью. В данном случае решено было от этого воздержаться. При таком переходе в уравнении появятся дополнительные члены и уменьшится константа в условии устойчивости, поскольку тогда скорость волн, движущихся влево, увеличится примерно в два раза. А повышение точности расчета по времени здесь не является актуальной задачей, поскольку для временных производных используется аппроксимация высокого порядка.



Фиг. 4.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что при некотором выборе физических констант имеются устойчивые уединенные волны малой амплитуды, при увеличении амплитуды и скорости они становятся неустойчивыми. При некотором другом выборе констант волн малой амплитуды нет, но есть участок скоростей, при которых уединенные волны устойчивы. Исследования устойчивости уединенных волн методом анализа второй производной функции Эванса, методом расчета функции Эванса и методом непосредственного расчета уравнения (1.2) показали хорошее совпадение результатов. Это позволило разработать метод выявления неустойчивости и методику расчета растущей собственной функции посредством анализа численных решений уравнений в частных производных.

Отметим, что хотя формально в слабонелинейно-длинноволновом приближении интерес представляют только длинные уединенные волны малой амплитуды, исследование уединенных волн конечной амплитуды и конечной длины представляет здесь не только математический интерес. Уравнение (1.1) получено в [1], [2] из аналогичного скалярного “полного” уравнения отбрасыванием семи дополнительных нелинейно-дифференциальных членов, линейная часть и первый нелинейный член в полном уравнении такие же как и в (1.1). Можно предполагать, что в случае малости этих дополнительных членов уединенные волны конечной амплитуды будут только несколько модифицированы. При включении части дополнительных членов исследование модифицированного уравнения (1.2) методом расчета функции Эванса требует только изменений в виде численного расчета уединенных волн как решений уравнений бегущих волн, но при непосредственном расчете такого уравнения в частных производных принципиальной разницы нет. Но есть и два дополнительных члена, требующие исследования уравнения в перемещениях, т.е. модифицированного уравнения (1.1). Выбор уравнения (1.2) и $W > 1$ для исследования связан с необходимостью отработки численных методов на материале, где есть некоторый аналитический задел.

Устойчивость уединенных волн видимо имеет отношение к явлению “градиентная катастрофа”, наблюдаемому при расчете уравнений, в которых возможны обобщенные решения с разрывами. За счет недиссипативных дисперсионных схемных эффектов могут возникать колебания, амплитуда которых растет со временем, что приводит к аварийной остановке расчета. Но в некоторых случаях возникает расширяющаяся со временем схемная солитонная структура разрыва. Например, для быстрых магнитозвуковых волн в магнитной гидродинамике (эта модель не обладает дисперсией) с применением описанной выше численной схемы расчет может продолжаться сколь угодно долго [11]. Очевидно, что в данном случае схемная уединенная волна устойчива. Проведенное здесь исследование подсказывает, что при увеличении амплитуды разрыва неустойчивость может возникнуть.

Автор благодарит А.Т.Ильичева за предоставленную литературу и обсуждение результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерофеев В.И., Шеконян А.В., Белубикян М.В. Пространственно-локализованные нелинейные магнитоупругие волны в электропроводящей микрополярной среде // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 4. С. 402–415.
2. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Spatially localized nonlinear magnetoelastic waves in an electrically conductive micropolar medium // Z. Angew. Math. Mech. 2023. V. 103. I. 4.
3. Erofeev V.I., Il'ichev A.T. Instability of supersonic solitary waves in a generalized elastic electrically conductive medium // Continuum Mech. Thremodin. 2023. <https://doi.org/10.1007/s00161-023-01249-1>
4. Ильичев А.Т. Устойчивость граничных состояний в бесконечных пространственных областях. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 32. Москва. МИАН. 2023.
5. Evans J.V. Nerve axon equations, III. Stability of the nerve impulse // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 22. P. 577–594.
6. Pego R.L., Weinstein M.I. Eigenvalues and instabilities of solitary waves // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1992. V. A340. P. 47–94.
7. Alexander J.C., Sachs R. Linear instability of solitary waves of a Boussinesq-type equation: a computer assisted computation. In: Lakshmikantham V., Hallam T.G. (eds.) Nonlinear World 2. P. 471–507. Berlin. Walter de Gruyter. 1995.
8. Бахолдин И.Б. Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1224–1238.
9. Бахолдин И. Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
10. Бахолдин И. Б. Численное исследование уединенных волн и обратимых структур разрывов в трубах с контролируемым давлением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1921–1936.
11. Бахолдин И. Б. Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 68. № 3. С. 458–474.

INVESTIGATION OF STABILITY OF SUPERSONIC SOLITARY WAVES IN AN ELASTIC ELECTRICALLY CONDUCTIVE MICROPOLAR MATERIAL

I. B. Bakholdin*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

**e-mail: ibbakh@yandex.ru*

Received: 18.03.2024

Revised: 18.03.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. Stability of solitary waves that are solutions to one of the variants of the Boussinesq equation is investigated. This equation describes elastic waves in the presence of an electromagnetic field. The Evans function method and direct numerical solution of the equation are used to identify the instability of solitary waves. The results obtained by both methods coincided. A method for identifying instability and a method for calculating an eigenfunction that grows with time by analyzing numerical solutions of a partial differential equation are developed.

Keywords: Boussinesq equation, solitary wave, stability, method of Evans function, numerical methods, elasticity, electrodynamics.