ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 11, с. 2168–2183

УДК 519.635

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОДНОСТОРОННЕГО ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2024 г. А.А. Бобылев[1,*]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия
*e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.
Переработанный вариант 27.05.2024 г.
Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассмотрены задачи одностороннего дискретного контакта упругого полупространства и жесткого штампа конечных размеров с поверхностным микрорельефом. Получена вариационная формулировка задач в виде граничного вариационного неравенства с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого полупространства нормальные напряжения в нормальные перемещения. Приведена эквивалентная вариационному неравенству задача минимизации, в результате аппроксимации которой получена задача квадратичного программирования с ограничениями виде равенств и неравенств. Для решения этой задачи предложен новый вычислительный алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, включающий в расчет три уравнения равновесия штампа. Алгоритм относится к классу методов активного набора и учитывает специфику множества ограничений. Установлены некоторые закономерности контактного взаимодействия поверхностей с регулярным микрорельефом. Библ. 29. Табл. 4.

Ключевые слова: односторонний дискретный контакт, граничное вариационное неравенство, оператор Пуанкаре–Стеклова, задача квадратичного программирования, метод сопряженных градиентов.

DOI: 10.31857/S0044466924110125, **EDN**: KGEZZC

1. ВВЕДЕНИЕ

При контактном взаимодействии твердых тел область фактического контакта, как правило, дискретна. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик тел и их поверхностного микрорельефа. Для описания дискретного (множественного) контакта твердых тел предложены различные математические модели, учитывающие параметры макро- и микрогеометрии реальных поверхностей и условия их контактного взаимодействия [1]–[4]. Большинство этих моделей основано на классической теории контактного взаимодействия деформируемых тел [5], [6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

В настоящей работе рассматриваются задачи дискретного контакта упругого полупространства и жесткого штампа конечных размеров, основание которого имеет поверхностный микрорельеф. На поверхности возможного контакта полупространства со штампом задаются условия одностороннего контакта, трение на площадках контакта отсутствует. Отметим, что в рассматриваемых задачах дискретного контакта априори задается лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны и подлежат определению.

Задачи одностороннего дискретного контакта являются нелинейными вследствие наличия в постановке граничных условий в виде неравенств. Для их численного решения требуется применение итерационных алгоритмов. Наиболее распространенный подход к построению вычислительных алгоритмов решения задач одностороннего контакта состоит в использовании вариационных методов [8]–[10]. Вариационные формулировки также применяются для исследования проблемы существования, единственности и регулярности решения контактных задач [11]–[13].

Используя математический аппарат преобразования вариационных задач [8], можно получить семейство вариационных формулировок. С вычислительной точки зрения наиболее эффективным является применение граничных вариационных формулировок с использованием операторов Пуанкаре–Стеклова (ОПС), отображающих на части границы упругого тела, по которой возможен контакт, поверхностные силы в перемещения поверхности. В этом случае для дискретизации контактной задачи применяется метод граничных элементов, причем дискретизации подлежит не вся граница упругого тела, а лишь ее часть — область номинального контакта.

В результате аппроксимации граничных вариационных формулировок задач одностороннего контакта методом граничных элементов получают задачи квадратичного программирования, для решения которых в настоящее время наиболее эффективными считаются алгоритмы, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (МСГ).

Впервые алгоритм решения задач квадратичного программирования на основе МСГ был предложен в работе [14]. Идея алгоритма состояла в использовании стратегии рабочего списка активных ограничений-неравенств (активного набора) и применении МСГ для нахождения минимума на текущем рабочем (аффинном) подпространстве. Была доказана теоретическая сходимость алгоритма за конечное число шагов. При практическом использовании алгоритма оказалось, что скорость его сходимости существенно зависит от количества и вида ограничений. Поэтому впоследствии были предложены различные модификации базового алгоритма, адаптированные для решения конкретных классов прикладных задач. Описание и анализ алгоритмов на основе МСГ для решения задач одностороннего контакта можно найти, например, в работах [15], [16].

Один из наиболее известных алгоритмов, приведенный в часто цитируемой статье [17], отличается от базового алгоритма [14] учетом специфики множества ограничений решаемой задачи квадратичного программирования, что позволило значительно повысить скорость работы алгоритма. Однако алгоритм [17] имеет существенное ограничение. В нем учитывается только одно уравнение равновесия штампа (для сил) и, следовательно, только поступательное движение штампа. Это не позволяет использовать алгоритм для решения контактных задач при внецентренном нагружении штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

В [18] автором предложен иной алгоритм решения задач одностороннего контакта для упругой полуплоскости, разработанный на основе МСГ. Основная идея этого алгоритма состоит в применении линейного преобразования переменных, позволяющего свести ограничения в виде равенств, которые аппроксимируют уравнения равновесия штампа и содержат все переменные задачи, к простым ограничениям, содержащим только одну переменную. Такие ограничения несложно учесть в алгоритме МСГ. Этот прием позволяет рассматривать все уравнения равновесия штампа и задавать значение моментов внешних сил. В [19] этот алгоритм обобщен для пространственных контактных задач.

В настоящей работе на основе МСГ предложен новый алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для упругого полупространства, включающий в расчет три уравнения равновесия штампа. Алгоритм относится к классу методов активного набора и учитывает специфику множества ограничений. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что при решении рассматриваемого класса задач разработанный алгоритм требует меньших вычислительных затрат, чем алгоритмы [17] и [18].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть невесомое однородное изотропное упругое полупространство занимает область $\Omega = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \leqslant 0\}$ с границей Γ. Далее под $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ будем понимать соответственно значения вектора перемещений и тензоров деформации и напряжений в точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Предполагается, что деформации малы, а напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние полупространства описывается системой уравнений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{def}\,\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

где $\mathbf{def} \equiv 1/2(\mathbf{grad} + \mathbf{grad}^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{S}$ — тензор модулей упругости.

В упругое полупространство вдавливается гладкий жесткий штамп, основание которого имеет поверхностный микрорельеф. Часть поверхности Γ, по которой возможен контакт полупространства со штампом, обозначается Γ_p. Положение и предельные размеры Γ_p, т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Без потери общности будем полагать, что область Γ_p является односвязной и конечной. При вдавливании штампа с поверхностным микрорельефом номинальная область контакта Γ_p включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны.

Форма основания штампа и его поверхностный микрорельеф описываются функцией $\Phi(x_1, x_2)$, значение которой в точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к поверхности Γ_p. Расстояние $\Phi(x_1, x_2)$ отсчитывается относительно недеформированного состояния полупространства. Для определенности будем полагать, что $\min_{\boldsymbol{x} \in \Gamma_p} \Phi(x_1, x_2) = 0$. Для штампа с поверхностным микрорельефом функция $\Phi(x_1, x_2)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется векторами перемещений $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и углов поворота $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ штампа как жесткого целого. Перемещения и углы поворота штампа предполагаются малыми. Главный вектор $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ и главный момент $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, M_3)$ внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения сил выбирается точка $\boldsymbol{x}^c = (x_1^c, x_2^c, x_3^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта полупространства со штампом, поэтому будем полагать

$$\begin{gathered} F_1 = F_2 = 0, \quad -\infty < F_3 < 0, \quad |M_1| < \infty, \quad |M_2| < \infty, \quad M_3 = 0, \\ \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Контактное взаимодействие полупространства со штампом описывается линеаризованными условиями одностороннего гладкого контакта:

$$\begin{gathered} u_3 \leqslant \Phi + \delta_3 + (x_2 - x_2^c)\varphi_1 - (x_1 - x_1^c)\varphi_2, \quad \sigma_{33} \leqslant 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \\ \sigma_{33}\left[u_3 - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2\right] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_p. \end{gathered} \tag{3}$$

Остальная часть поверхности полупространства свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \Gamma_p. \tag{4}$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int\limits_{\Gamma_p} \sigma_{33} d\Gamma_p = F_3; \quad \int\limits_{\Gamma_p} (x_2 - x_2^c)\sigma_{33} d\Gamma_p = M_1; \quad \int\limits_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c)\sigma_{33} d\Gamma_p = -M_2. \tag{5}$$

Следует отметить, что соотношения (5), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{33} \leqslant 0$ на Γ_p, удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (5).

Для единственности поля перемещений необходимо исключить смещения упругого полупространства как жесткого целого. Поэтому будем дополнительно предполагать, что полупространство закреплено в бесконечно удаленной точке:

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющих уравнениям (1), граничным условиям (3), (4), условиям равновесия штампа (5) и условию на бесконечности (6). Также необходимо найти смещение δ_3 и углы поворота φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче одностороннего дискретного контакта априори задается лишь номинальная область контакта Γ_p, положение и форма пятен фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Решение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ контактной задачи (1)–(6), принадлежащее классу функций $\left[C^2(\Omega)\right]^3 \cap \left[C^1(\overline{\Omega})\right]^3$, является классическим решением. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет определить обобщенное решение. Введем необходимые для этого функциональные пространства.

Поскольку область Γ_p является ограниченной, при сделанных выше допущениях (2) и (6) имеет место асимптотическое представление [6]

$$u_i(\boldsymbol{x}) = O\left(|\boldsymbol{x}|^{-1}\right) \quad \text{при } |\boldsymbol{x}| \to \infty, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Поэтому компоненты вектора перемещений будем рассматривать как элементы функционального пространства Соболева с весами [20]:

$$H^1(\Omega; \varrho) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \quad \varrho v \in L_2(\Omega); \quad \partial v / \partial x_i \in L_2(\Omega), \ i = 1, 2, 3 \right\},$$

где $\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство распределений на Ω; $L_2(\Omega)$ — пространство функций с интегрируемым квадратом по Ω; $\varrho(\boldsymbol{x}) = (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-1/2}$ — весовая функция. Пространство $H^1(\Omega; \varrho)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(v, w)_{H^1(\Omega;\varrho)} = \int\limits_{\Omega} \varrho^2 v w d\Omega + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega.$$

Введем далее пространство вектор-функций

$$\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)=\left\{\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\left[H^1(\Omega;\varrho)\right]^3:\ \ \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v})\in[L_2(\Omega)]^3\right\}.$$

Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)}=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{[H^1(\Omega;\varrho)]^3}+(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}),\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w}))_{[L_2(\Omega)]^3}.$$

Учитывая (7), можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях относительно свойств гладкости функции $\Phi(x_1,x_2)$, описывающей форму штампа, классическое решение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ контактной задачи (1)–(6) принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)$.

Введем необходимые для построения граничной вариационной формулировки задачи пространства следов функций из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)$.

Рассмотрим произвольную ограниченную подобласть $\Omega'\subset\Omega$ с границей Γ' класса $C^{1,1}$, примыкающую к границе Γ полупространства так, что

$$\Gamma_p\Subset\Gamma\cap\Gamma'. \tag{8}$$

Известно [21], что существуют линейные непрерывные операторы

$$\boldsymbol{\gamma}'_u:\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega')\to[H^{1/2}(\Gamma')]^3,\quad \boldsymbol{\gamma}'_t:\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega')\to[H^{-1/2}(\Gamma')]^3, \tag{9}$$

определяющие для полей перемещений из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega')\equiv\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega';1)$ соответственно векторные функции перемещений и напряжений на Γ'. Кроме того, существует линейный непрерывный оператор

$$\boldsymbol{\chi}'_t:[H^{-1/2}(\Gamma')]^3\to\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega') \tag{10}$$

такой, что для заданного $\boldsymbol{t}\in[H^{-1/2}(\Gamma')]^3$ можно построить функцию $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega')$, обладающую свойством $\boldsymbol{\gamma}'_t\boldsymbol{v}=\boldsymbol{t}$.

Введем пространство сужений на Γ_p функций из $H^{1/2}(\Gamma')$

$$H^{1/2}(\Gamma_p)=\{v=w|_{\Gamma_p}:\ w\in H^{1/2}(\Gamma')\}$$

и оснастим его нормой:

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)}=\inf_{w\in H^{1/2}(\Gamma')}\{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma')}:\ \ v=w|_{\Gamma_p}\}.$$

Имеет место вложение пространств $H^{1/2}(\Gamma_p)\subset L_2(\Gamma_p)$ [22]. Двойственным к пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$ является пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ — пополнение $L_2(\Gamma_p)$ по норме

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)}=\sup_{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)}=1}|(p,v)_{L_2(\Gamma_p)}|,$$

т.е. отношение двойственности ${}_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)}\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_p)}$ порождено продолжением скалярного произведения на $L_2(\Gamma_p)$ и имеет место плотное вложение

$$L_2(\Gamma_p)\subset\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p). \tag{11}$$

Для упрощения обозначений указанное отношение двойственности будем обозначать как $\langle\cdot,\cdot\rangle$, иные отношения двойственности далее не рассматриваются.

Весовая функция $\varrho(\boldsymbol{x})$ непрерывна и ограничена в ограниченной подобласти $\Omega'\subset\Omega$, поэтому сужения функций из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)$ на Ω' принадлежат пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega')$, для элементов которого определены операторы следа (9). Как следствие существуют линейные непрерывные операторы

$$\gamma_u:\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)\to H^{1/2}(\Gamma_p),\quad \gamma_t:\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)\to\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p). \tag{12}$$

Обратно, для любой функции $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega')$ существует функция $\tilde{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)$ такая, что $\boldsymbol{v}$ является сужением $\tilde{\boldsymbol{v}}$ на Ω'. Поэтому с учетом (10) существует линейный непрерывный оператор

$$\boldsymbol{\chi}_t:\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)\to\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho) \tag{13}$$

такой, что для заданного $p\in\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ можно построить функцию $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\varrho)$, обладающую свойством $\gamma_t\boldsymbol{v}=p$.

Можно показать, что при выполнении условия (8) пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, а также операторы следа (12) и оператор (13) не зависят от выбора области Ω'.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение контактной задачи (1)–(6) можно представить в виде [6]

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma_p} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_p(\boldsymbol{\xi}), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ — поле перемещений, соответствующее решению задачи Буссинеска о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругого полупространства, $q \equiv \sigma_{33}$ — нормальные напряжения на Γ_p.

Из свойств решения задачи Буссинеска следует, что если $q \in L_2(\Gamma_p)$, то поле перемещений (14) удовлетворяет соотношениям (1), граничным условиям (3), (4) и условиям на бесконечности (6). Кроме того, оператор $\boldsymbol{G}_p : q \mapsto \boldsymbol{u}$, определяемый формулой (14), является непрерывным оператором из $L_2(\Gamma_p)$ в $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega; \varrho)$. Учитывая плотность вложения (11), оператор $\boldsymbol{G}_p$ можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (13) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega; \varrho)$.

Таким образом, использование оператора $\boldsymbol{G}_p$ в предположении, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$, позволяет свести решение контактной задачи (1)–(6) к нахождению нормальных напряжений $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \leqslant 0 \;\text{ на }\; \Gamma_p, \tag{15}$$

$$u_3(q) \leqslant \Phi + \delta_3 + (x_2 - x_2^c)\varphi_1 - (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \;\text{ на }\; \Gamma_p, \tag{16}$$

$$q\left[u_3(q) - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2\right] = 0 \;\text{ на }\; \Gamma_p, \tag{17}$$

$$\langle q, 1\rangle = F_3, \quad \langle q, x_2 - x_2^c\rangle = M_1, \quad \langle q, x_1 - x_1^c\rangle = -M_2, \tag{18}$$

где условия (15) и (17) выполняются в смысле пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, а условие (16) — в смысле пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Перемещения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_p q$, соответствующие решению $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ системы (15)–(18), будем называть обобщенным решением задачи (1)–(6).

5. ОПЕРАТОР ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА

Введем ОПС $G_s : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (14) нормальные напряжения $q(x_1, x_2) \equiv \equiv \sigma_{33}(x_1, x_2, 0)$ на части Γ_p границы упругого полупространства в нормальные перемещения $w(x_1, x_2) \equiv \equiv u_3(x_1, x_2, 0)$ на Γ_p. Из свойств решения задачи Буссинеска следует, что для $q \in L_2(\Gamma_p)$ сужение функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, определяемой формулой (14), на область Ω' принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega')$. Учитывая определения пространств $H^{1/2}(\Gamma_p)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, а также существование операторов следа (9) и оператора (10), будем рассматривать G_s как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Соответствующее решению (14) выражение для ОПС $G_s : q \mapsto w$ для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид [6]:

$$w(x_1, x_2) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int\limits_{\Gamma_p} \frac{q(\xi_1, \xi_2)}{\left((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\right)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2, \tag{19}$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона полупространства.

Интегральный оператор со слабой особенностью (19) ограничен в $L_2(\Gamma_p)$ [23]. Учитывая плотность вложения (11), продолжим оператор (19) по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ билинейную форму

$$g_s(p, q) = \langle p, G_s q\rangle.$$

Из результатов [24] следует, что билинейная форма $g_s(\cdot, \cdot)$ и ОПС G_s являются положительно-определенными на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

6. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Для решения системы (15)–(18), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [8], [11]. Образуем множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$\begin{gathered} \Sigma = \{\, p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) : \; q \leqslant 0, \\ \langle q, 1\rangle = F_3, \quad \langle q, x_2 - x_2^c\rangle = M_1, \quad \langle q, x_1 - x_1^c\rangle = -M_2 \,\}\,. \end{gathered} \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что множество Σ является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Пусть $q \in \Sigma$ — решение системы (15)–(18). Тогда для произвольного $p \in \Sigma$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}\langle p-q, G_s q - \Phi\rangle =&\langle p-q, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2\rangle + \\ &+\langle p-q, \delta_3 + (x_2 - x_2^c)\varphi_1 - (x_1 - x_1^c)\varphi_2\rangle = \\ &=\langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2\rangle - \\ &-\langle q, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2\rangle + \\ &+\delta_3\langle p, 1\rangle + \varphi_1\langle p, x_2 - x_2^c\rangle - \varphi_2\langle p, x_1 - x_1^c\rangle - \\ &-\delta_3\langle q, 1\rangle - \varphi_1\langle q, x_2 - x_2^c\rangle + \varphi_2\langle q, x_1 - x_1^c\rangle = \\ &=\langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2\rangle \geqslant 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) следует, что искомые нормальные напряжения $q \in \Sigma$ удовлетворяют граничному вариационному неравенству

$$g_s(p-q, q) - \phi(p-q) \geqslant 0, \tag{22}$$

где $\phi(\cdot)$ — определенная на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ линейная форма

$$\phi(p) = \langle p, \Phi\rangle.$$

Отметим, что неравенство (22) не содержит неизвестных смещения δ_3 и углов поворота φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Как нетрудно видеть из преобразований (21), это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений Σ удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (18).

Используя известные приемы [8], [21], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (22) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (15)–(18).

Учитывая, что билинейная форма $g_s(\cdot,\cdot)$ является положительно-определенной, а множество Σ — непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (22) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in \Sigma$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p\in\Sigma}\left\{J(p) = g_s(p,p)/2 - \phi(p)\right\}. \tag{23}$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (22) и задачи минимизации (23) существует и единственно [8], [21].

Отыскав нормальные напряжения $\sigma_{33} = q$ на Γ_p как решение задачи (23), можно определить напряженно-деформированное состояние всего упругого полупространства при помощи приведенного в [6] интегрального представления решения (14), сужением которого на Γ_p является (19).

7. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ

Без потери общности будем полагать, что номинальная область контакта является прямоугольной:

$$\Gamma_p = \{0 \leqslant x_1 \leqslant d_1,\ \ 0 \leqslant x_2 \leqslant d_2,\ \ x_3 = 0\}. \tag{24}$$

Если из геометрических соображений следует, что область номинального контакта имеет иную форму, ее можно расширить до прямоугольника.

Построим на Γ_p регулярную (равномерную) сетку T_p, состоящую из $N = N_1 \times N_2$ одноузловых прямоугольных граничных элементов нулевого порядка размеров $d_1^e \times d_2^e$, где $d_i^e = d_i/N_i$, $i = 1,2$. Узлы сетки обозначим t_n, $n \in I_N = \{1,\ldots,N\}$. Далее векторы из арифметического пространства $\mathbb{R}^N$ и матрицы из пространства квадратных вещественных матриц $\mathbb{M}^N$ будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы — соответствующими малыми латинскими буквами.

Используя для аппроксимации задачи (23) метод Ритца, получим следующую задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\boldsymbol{Q}_p = (q(t_1), q(t_2), \ldots, q(t_N)) \in \mathbb{R}^N$ такую, что

$$J_h(\boldsymbol{Q}_p) = \min_{\boldsymbol{Q}\in V}\left\{J_h(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{Q}/2 - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\right\}, \tag{25}$$

где $A \in \mathbb{M}^N$ — матрица податливости упругого полупространства Ω, матрица Гессе минимизируемой функции $J_h(\boldsymbol{Q})$; $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^N$ — вектор обобщенных узловых параметров, характеризующих форму основания штампа; V — множество статически допустимых узловых нормальных напряжений.

Элементы матрицы A и вектора $\boldsymbol{B}$ вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int\limits_{\Gamma_p} \psi_i G_s \psi_j d\Gamma_p, \quad b_i = \int\limits_{\Gamma_p} \Phi\psi_i d\Gamma_p, \quad i,j \in I_N,$$

где ψ_i — базисная функция, соответствующая узлу t_i. Из положительной определенности ОПС G_s на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ следует, что матрица A является симметричной положительно-определенной матрицей.

Допустимое множество V имеет вид

$$V = \left\{ \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^N: \quad q_n \leqslant 0, \ n \in I_N; \ \ C\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D} \right\}, \tag{26}$$

где C — матрица размерности $3 \times N$, элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{1n} = \int\limits_{\Gamma_p} \psi_i d\Gamma_p, \ \ c_{2n} = \int\limits_{\Gamma_p} (x_2 - x_2^c)\psi_i d\Gamma_p, \ \ c_{3n} = \int\limits_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c)\psi_i d\Gamma_p, \ \ n \in I_N;$$

$\boldsymbol{D} = \{F_3, M_1, -M_2\}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Нетрудно видеть, что множество V является замкнутым и выпуклым. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество непусто.

Учитывая, что матрица A является положительно-определенной, а множество V — непустым замкнутым и выпуклым множеством, решение задачи (25) существует и единственно.

Интегральное представление (19) ОПС G_s имеет разностное ядро. Вследствие этого при использовании для дискретизации области (24) регулярной сетки T_p матрица A является блочно-тёплицевой матрицей с тёплицевыми блоками. Учет структуры матрицы позволяет существенно сократить время ее формирования и затраты памяти на хранение. Используя известный прием вложения тёплицевой матрицы в циркулянтную, для матрицы A можно построить соответствующую блочно-циркулянтную матрицу с циркулянтными блоками [25]. При вычислении произведения последней на вектор используется двумерное быстрое преобразование Фурье (ДБПФ), что позволяет существенно сократить время счета [26].

8. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Задача минимизации (25) включает три ограничения в виде линейных равенств, каждое из которых содержит все N компонент вектора неизвестных, и N простых ограничений в виде неравенств. Разработанный алгоритм решения задачи (25), как и все алгоритмы решения задач квадратичного программирования на основе МСГ, относится к классу методов активного набора. Вводится рабочий список активных ограничений-неравенств, определяются правила его изменения и применяется МСГ для минимизации целевой функции с ограничениями-равенствами.

8.1. Множества индексов и матрицы

Введем необходимые для описания разработанного алгоритма множества индексов и матрицы.

Построим для произвольного $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^N$ множества индексов:

$$I_0(\boldsymbol{Q}) = \{i \in I_N : q_i = 0\}; \quad I_p(\boldsymbol{Q}) = \{i \in I_N : q_i > 0\}.$$

Введем далее для произвольного $\boldsymbol{Q} \in V$ множество индексов $I_a(\boldsymbol{Q}) \subset I_N$, определяющее рабочий список — перечень ограничений-неравенств из (26), интерпретируемых в процессе решения задачи как равенства. Отметим, что имеет место включение $I_a(\boldsymbol{Q}) \subset I_0(\boldsymbol{Q})$, при этом не все обращающиеся в равенства в точке $\boldsymbol{Q}$ ограничения-неравенства из (26) обязательно включаются в $I_a(\boldsymbol{Q})$. Дополнение $I_f(\boldsymbol{Q}) = I_N \backslash I_a(\boldsymbol{Q})$ определяет подпространство, из которого выбирается направление поиска в точке $\boldsymbol{Q}$. Обозначим $N_a = |I_a|$ и $N_f = |I_f| = N - N_a$. Можно показать, что если множество V непусто, то $N_a \leqslant N - 3$.

Построим для данного рабочего списка $I_a(\boldsymbol{Q})$ бинарную матрицу перестановок $R \in \mathbb{M}^N$, в каждой строке и столбце которой находится лишь один единичный элемент, такую, что $I_a(R\boldsymbol{Q}) = \{N_f + 1, \ldots, N\}$. Обратная перестановка выполняется с помощью матрицы $R^{-1} = R^{\mathrm{T}}$. Используя матрицу перестановок, представим ограничения-равенства из (26) в виде:

$$C\boldsymbol{Q} = CR^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{Q} = [C_f \ C_a] \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_f \\ \boldsymbol{Q}_a \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}, \tag{27}$$

где C_f и C_a — матрицы размеров $3 \times N_f$ и $3 \times N_a$ соответственно; $\boldsymbol{Q}_f$ и $\boldsymbol{Q}_a$ — векторы размерностей N_f и N_a соответственно. При программной реализации вычислительного алгоритма операции умножения на матрицы R и R^{T} сводятся к изменению последовательности дальнейшей обработки строк или столбцов матрицы-сомножителя. Для упрощения выкладок далее будем считать, что на каждом шаге алгоритма векторы и матрицы переупорядочены с помощью матрицы перестановок, соответствующей текущему рабочему списку.

Совокупность ограничений-равенств из (26) и рабочего списка представим в виде:

$$C_e\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} C_f & C_a \\ 0 & E_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_f \\ \boldsymbol{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{0}_a \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_e, \tag{28}$$

где E_a — единичная матрица порядка N_a; $\boldsymbol{0}_a$ — нулевой вектор размерности N_a. Совокупность равенств (28) определяет линейное многообразие (плоскость) V_e в $\mathbb{R}^N$.

Матрица C_e является прямоугольной матрицей размера $(N_a + 3) \times N$. Нетрудно показать, что $\operatorname{rank} C_e = N_a + 3$. Образуем подпространство L_a, натянутое на векторы-строки матрицы C_e, $\dim L_a = N_a + 3$. Матрица ортогонального проектирования (проектор) $P_a \in \mathbb{M}^N$ на это подпространство вычисляется по формуле [27]

$$P_a = C_e^{\mathrm{T}}(C_eC_e^{\mathrm{T}})^{-1}C_e.$$

Используя (28), путем несложных преобразований получим

$$P_a = \begin{bmatrix} C_f^{\mathrm{T}}(C_fC_f^{\mathrm{T}})^{-1}C_f & 0 \\ 0 & E_a \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц $C_f^{\mathrm{T}}(C_fC_f^{\mathrm{T}})^{-1}C_f$ является квадратной матрицей порядка N_f, а произведение $C_fC_f^{\mathrm{T}}$ — квадратной матрицей порядка 3, обращение которой не составляет труда.

Проектор $P_f \in \mathbb{M}^N$ на ортогональное дополнение L_f подпространства L_a имеет вид:

$$P_f = E_N - P_a = \begin{bmatrix} E_f - C_f^{\mathrm{T}}(C_fC_f^{\mathrm{T}})^{-1}C_f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где E_N, E_f — единичные матрицы порядков N и N_f соответственно. Несложно показать, что выполняется равенство $P_fC_e = 0$, следовательно, подпространство L_f является направляющим пространством для линейного многообразия V_e.

Отметим, что матрицы C_e, C_f и C_a, линейное многообразие V_e, а также проекторы P_a и P_f перестраиваются при каждом изменении множества I_a.

Обозначим через $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})$ градиент $\operatorname{grad} J_h(\boldsymbol{Q}) = A\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{B}$. Представим проекцию градиента на подпространство L_f в виде $P_f\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G} + C_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$, где $\boldsymbol{U}$ — вектор множителей Лагранжа. Используя (28) и (29), получим

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_d \\ \boldsymbol{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_fC_f^{\mathrm{T}})^{-1}C_f\boldsymbol{G}_f \\ (C_a)^{\mathrm{T}}(C_fC_f^{\mathrm{T}})^{-1}C_f\boldsymbol{G}_f - \boldsymbol{G}_a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_f \\ \boldsymbol{G}_a \end{bmatrix}, \tag{30}$$

где $\dim \boldsymbol{U}_d = 3$; $\dim \boldsymbol{U}_a = N_a$; $\dim \boldsymbol{G}_f = N_f$; $\dim \boldsymbol{G}_a = N_a$.

Для того, чтобы точка $\boldsymbol{Q}_p \in V$ была точкой минимума $J_h(\boldsymbol{Q})$ на V, необходимо и достаточно, чтобы $I_a(\boldsymbol{Q}_p) = I_0(\boldsymbol{Q}_p)$ и существовал вектор $\boldsymbol{U}$ такой, что $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}_p) + C_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$ и среди компонент $\boldsymbol{U}_a$ не было отрицательных [27].

8.2. Вычисление проекции текущего приближения

Пусть $\boldsymbol{Q}^* \notin V$ — текущее приближение, а $I_a \subset I_0(\boldsymbol{Q}^*)$ — множество индексов, задающее текущий рабочий список и соответствующее ему линейное многообразие V_e. Вычислим проекцию $\boldsymbol{Q}^*_{pr}$ точки $\boldsymbol{Q}^*$ на выпуклое множество $V \cap V_e$ как решение задачи:

$$s(\boldsymbol{Q}^*_{pr}) = \min_{\boldsymbol{Q} \in V \cap V_e} \left\{ s(\boldsymbol{Q}) = \|\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}^*\|_2/2 \right\}.$$

Для этого используем вспомогательный итерационный алгоритм, формирующий дополнительное множество индексов I_r для расширения рабочего списка. Далее векторы, матрицы и множества на i-й итерации этого алгоритма будем обозначать верхним индексом i.

Алгоритм вычисления проекции $\boldsymbol{Q}^*_{pr}$ состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Установим счетчик итераций $i = 0$. Положим $\boldsymbol{Q}^i = \boldsymbol{Q}^*$ и $I_r^i = I_p(\boldsymbol{Q}^*)$.

Шаг 1. Положим $i := i+1$, построим множество индексов $I_a^i = I_a \cup I_r^{i-1}$ и соответствующие ему матрицу C_e^i и вектор $\boldsymbol{D}_e^i$, которые посредством соотношений (28) определяют линейное многообразие $V_e^i \subset V_e$.

Шаг 2. Используя проектор P_f^i, вычислим проекцию $\boldsymbol{Q}^i$ точки $\boldsymbol{Q}^*$ на V_e^i:

$$\boldsymbol{Q}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_f^i \\ \boldsymbol{Q}_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_f^* - (C_f^i)^{\mathrm{T}}(C_f^i(C_f^i)^{\mathrm{T}})^{-1}(C_f^i\boldsymbol{Q}_f^* - \boldsymbol{D}) \\ \boldsymbol{0}_a \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Шаг 3. Построим множество индексов $I_p(\boldsymbol{Q}^i)$. Если оно непусто, положим $I_r^i := I_r^i \cup I_p(\boldsymbol{Q}^i)$ и перейдем к шагу 1.

Шаг 4. Проверим выполнение условий минимума функции $s(\boldsymbol{Q})$ на $V \cap V_e$ в точке $\boldsymbol{Q}^i$. Полагая в (30) $\boldsymbol{G} = \mathrm{grad}\ s(\boldsymbol{Q}^i) = \boldsymbol{Q}^i - \boldsymbol{Q}^*$, вычислим вектор множителей Лагранжа

$$\boldsymbol{U}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_d^i \\ \boldsymbol{U}_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_f^i(C_f^i)^{\mathrm{T}})^{-1}(C_f^i\boldsymbol{Q}_f^* - \boldsymbol{D}) \\ \boldsymbol{Q}_a^* - (C_a^i)^{\mathrm{T}}(C_f^i(C_f^i)^{\mathrm{T}})^{-1}(C_f^i\boldsymbol{Q}_f^* - \boldsymbol{D}) \end{bmatrix}.$$

Если среди компонент $\boldsymbol{U}_a^i$ есть отрицательные, то номера соответствующих им ограничений исключим из множества индексов I_r^i и перейдем к шагу 1.

Шаг 5. Положим $\boldsymbol{Q}_{pr}^* = \boldsymbol{Q}^i$ и $I_a := I_a \cup I_r^i$.

8.3. Инициализация алгоритма

Установим счетчик итераций $k = 0$. Далее векторы и переменные, вычисляемые на каждой итерации, будем обозначать верхним индексом k. Определяющее рабочий список множество индексов I_a, соответствующие ему матрицы C_e, C_f, C_a, P_a и P_f, а также вектор $\boldsymbol{Z}$, задающий направление предшествующего рестарта, могут сохранять свои значения на нескольких последовательных итерациях, поэтому дополнительным индексом обозначаться не будут.

Выберем произвольную точку $\boldsymbol{Q}^* \in \mathbb{R}^N$ такую, что $q_n^* < 0, n \in I_N$. Тогда $I_a = \emptyset$, т.е. рабочий список пуст, а линейное многообразие V_e определяется соотношениями (27). В качестве начального приближения $\boldsymbol{Q}^0$ выберем проекцию точки $\boldsymbol{Q}^*$ на множество $V \cap V_e$, вычисленную с помощью описанного выше алгоритма. Заметим, что при проектировании возможно расширение множества I_a.

Вычислим градиент $\boldsymbol{G}^0$ и зададим направления поиска $\boldsymbol{S}^0 = -P_f\boldsymbol{G}^0$ и рестарта $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$.

8.4. Итерационный процесс

8.4.1. Вычисление следующего приближения. Аналогично некоторым вариантам метода проекции градиента [28] следующее приближение вычисляется в два этапа. На первом этапе производится поиск в линейном многообразии V_e:

$$\boldsymbol{Q}^{k+1/2} = \boldsymbol{Q}^k + \alpha^k\boldsymbol{S}^k, \tag{32}$$

где

$$\alpha^k = -(\boldsymbol{S}^k, \boldsymbol{G}^k)/(\boldsymbol{S}^k, A\boldsymbol{S}^k). \tag{33}$$

На втором этапе производится проверка условия $\boldsymbol{Q}^{k+1/2} \in V$. Если это условие выполняется, то полагаем $\boldsymbol{Q}^{k+1} = \boldsymbol{Q}^{k+1/2}$. В противном случае, используя описанный выше алгоритм, вычисляем проекцию $\boldsymbol{Q}_{pr}^{k+1/2}$ точки $\boldsymbol{Q}^{k+1/2}$ на $V \cap V_e$ и полагаем $\boldsymbol{Q}^{k+1} = \boldsymbol{Q}_{pr}^{k+1/2}$. Заметим, что в этом случае расширяется множество индексов I_a (рабочий список).

8.4.2. Вычисление градиента. Если в точке $\boldsymbol{Q}^{k+1}$ не расширяется рабочий список, т.е. $\boldsymbol{Q}^{k+1} = \boldsymbol{Q}^{k+1/2}$, то для вычисления градиента в этой точке используется рекуррентная формула $\boldsymbol{G}^{k+1} = \boldsymbol{G}^k + \alpha^k A\boldsymbol{S}^k$, что сокращает объем вычислений, так как матрично-векторное произведение $A\boldsymbol{S}^k$ вычисляется ранее (см. формулу (33)). В противном случае градиент вычисляется стандартным образом: $\boldsymbol{G}^{k+1} = A\boldsymbol{Q}^{k+1} - \boldsymbol{B}$.

8.4.3. Сокращение рабочего списка. Используя соотношения (30), вычислим в точке $\boldsymbol{Q}^k$ вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{U}^k$. В качестве условия сужения множества индексов I_a принимается условие:

$$\|\boldsymbol{U}_a^-\|_2 > \eta\,\|P_f\boldsymbol{G}^k\|_2, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{U}_a^- = \min\{\boldsymbol{U}_a^k, \boldsymbol{0}_a\}$; $\eta > 0$ — заданный параметр алгоритма. Если условие (34) выполняется, то индексы отрицательных компонент вектора $\boldsymbol{U}_a^k$ исключаются из множества I_a, т.е. производится сокращение рабочего списка. На основании многочисленных вычислительных экспериментов рекомендуется выбирать значения параметра η порядка единицы.

8.4.4. Вычисление направления поиска. Направление поиска в точке $\boldsymbol{Q}^k$ вычисляется по трехчленной формуле, используемой в алгоритмах с рестартами при безусловной минимизации неквадратичных функций [29]

$$\boldsymbol{S}^k = -P_f\boldsymbol{G}^k + \beta^k\boldsymbol{S}^{k-1} + \gamma^k\boldsymbol{Z}, \tag{35}$$

где

$$\beta^k = (P_f\boldsymbol{G}^k, A\boldsymbol{S}^{k-1})/(\boldsymbol{S}^{k-1}, A\boldsymbol{S}^{k-1}); \quad \gamma^k = (P_f\boldsymbol{G}^k, A\boldsymbol{Z})/(\boldsymbol{Z}, A\boldsymbol{Z}). \tag{36}$$

8.4.5. Рестарты алгоритма. При изменении рабочего списка (множества I_a) производится рестарт алгоритма МСГ.

Если в точке $\boldsymbol{Q}^k$ расширяется рабочий список, то перед вычислением направления поиска $\boldsymbol{S}^k$ по формуле (35) вычисляются проекции $\boldsymbol{S}^{k-1} := P_f\boldsymbol{S}^{k-1}$ и $\boldsymbol{Z} := P_f\boldsymbol{Z}$.

Если точка $\boldsymbol{Q}^{k-1}$ была точкой рестарта, то перед вычислением в точке $\boldsymbol{Q}^k$ направления поиска $\boldsymbol{S}^k$ по формуле (35) следует последовательно выполнить присваивания $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{S}^{k-1}$ и $\boldsymbol{S}^{k-1} := \boldsymbol{0}$, т.е. после рестарта направление поиска $\boldsymbol{S}^k$ вычисляется по двучленной формуле.

Если при вычислениях по формуле (33) получено $\alpha^k < 0$ или при вычислениях по формуле (36) получено $\beta^k < 0$, то производится рестарт алгоритма МСГ с направления проекции антиградиента $-P_f\boldsymbol{G}^k$, т.е. полагается $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{S}^{k-1} := \boldsymbol{0}$.

8.4.6. Условие остановки алгоритма. В качестве условия остановки алгоритма можно использовать одно из условий:

$$\|\boldsymbol{Q}^k - \boldsymbol{Q}^{k-1}\| < \varepsilon_1\|\boldsymbol{Q}^k\| \tag{37}$$

или

$$\|P_f\boldsymbol{G}^k\| < \varepsilon_2, \tag{38}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры, определяющие погрешность приближенного решения; $\|\cdot\|$ — одна из гельдеровских норм: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_\infty$. Проверка этих условий не производится при рестартах или если среди компонент вектора множителей Лагранжа $\boldsymbol{U}_a^k$ есть отрицательные, т.е. если не для всех активных ограничений-неравенств выполняются необходимые условия минимума. Учитывая немонотонную сходимость алгоритма МСГ, целесообразно требовать выполнения условия (37) на нескольких последовательных итерациях при отсутствии рестартов.

8.5. Вычисление смещения и углов поворота штампа

Можно показать, что смещения и повороты штампа как жесткого целого выражаются через компоненты вектора множителей Лагранжа:

$$(\delta_3, \varphi_1, \varphi_2) = (\boldsymbol{U}_d)^{\mathrm{T}}. \tag{39}$$

8.6. Апостериорный анализ численного решения

Для оценки погрешности выполнения сеточных аппроксимаций условий (15)–(18) использовался следующий набор параметров:

$$\varepsilon_q = \max_{1\leqslant n\leqslant N} q_n/q_{nom}, \quad \varepsilon_{f3} = |\sum_{n=1}^{N} c_{1n}q_n - F_3|/|F_3|,$$

$$\varepsilon_{m1} = |\sum_{n=1}^{N} c_{2n}q_n - M_1|/|M_1| \quad \text{для} \quad M_1 \neq 0,$$

$$\varepsilon_{m2} = |\sum_{n=1}^{N} c_{3n}q_n - M_2|/|M_2| \quad \text{для} \quad M_2 \neq 0,$$

$$\varepsilon_{zp} = \min_{1\leqslant n\leqslant N} z_n\,[q_n \geqslant 0]_a\,/|\delta_3|, \quad \varepsilon_{zm} = \max_{1\leqslant n\leqslant N} |z_n|\,[q_n < 0]_a\,/|\delta_3|,$$

где $q_{\text{nom}} = F_3/(d_1d_2)$ — средние (номинальные) контактные напряжения; $z_n = \Phi(x_1^n, x_2^n) + \delta_3 + (x_2^n - x_2^c)\varphi_1 - (x_1^n - x_1^c)\varphi_2 - w_n$ — конечный зазор (проникание) между упругим полупространством и штампом в узле t_n сетки T_p; x_1^n, x_2^n — координаты узла t_n; w_n — нормальное перемещение узла t_n; $[\cdot]_a$ — скобка Айверсона (функция равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае). Сеточная функция нормальных перемещений $\boldsymbol{W}_p = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^{\mathrm{T}}$, соответствующих решению $\boldsymbol{Q}_p$ задачи (25), вычисляется с помощью (19).

Таблица 1. Результаты решения тестовой задачи

Число ГЭ	Число итер.	Число МВП	Время счета	Относит. среднеквадрат. погрешности			
				$\boldsymbol{Q}_p$	S	δ_3	φ_1
2^{12}	37	47	0.20	$61 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$62 \cdot 10^{-6}$	$90 \cdot 10^{-6}$
2^{14}	47	63	0.30	$26 \cdot 10^{-4}$	$36 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-6}$	$15 \cdot 10^{-6}$
2^{16}	62	87	0.75	$14 \cdot 10^{-4}$	$24 \cdot 10^{-4}$	$35 \cdot 10^{-7}$	$56 \cdot 10^{-7}$
2^{18}	83	121	3.48	$73 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-7}$	$12 \cdot 10^{-8}$
2^{20}	104	159	20.39	$36 \cdot 10^{-5}$	$53 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-8}$	$62 \cdot 10^{-9}$
2^{22}	138	221	111.82	$18 \cdot 10^{-5}$	$29 \cdot 10^{-5}$	$61 \cdot 10^{-9}$	$38 \cdot 10^{-9}$
2^{24}	182	313	579.14	$91 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-9}$	$18 \cdot 10^{-9}$

9. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разработанный вычислительный алгоритм реализован на алгоритмическом языке FORTRAN с применением программного пакета для разработчиков NVIDIA HPC SDK. Для выполнения ДБПФ использовалась библиотека cuFFT. Вычисления производились на ПК с процессором Intel Core i7-7820X и видеокартой GeForce RTX 2080 Ti.

Все проведенные в данной работе расчеты выполнялись для упругого полупространства, модуль Юнга которого полагался равным $E = 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона — равным $\nu = 0.3$. Вычисления проводились с двойной точностью до выполнения условия (37) с нормой $\|\cdot\|_2$ и параметром $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ на пяти последовательных итерациях при отсутствии рестартов.

При верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения использовалась тестовая задача для штампа, форма основания которого описывается квадратичной функцией

$$\Phi^*(x_1, x_2) = \alpha_1 d_1 (2x_1/d_1 - 1)^2 + \alpha_2 d_2 (2x_2/d_2 - 1)^2. \tag{40}$$

Компоненты главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_3 = -f d_1 d_2 E, \quad M_1 = e_2 F_3 d_2, \quad M_2 = -e_1 F_3 d_1, \tag{41}$$

где $f > 0$ — безразмерный параметр; e_1, e_2 — безразмерные параметры, определяющие эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $\boldsymbol{x}^c = (d_1/2, d_2/2, 0)$.

В случае отсутствия эксцентриситета $(e_1 = e_2 = 0)$ распределение контактного давления для рассматриваемого штампа описывается решением Герца [6]. Несложно показать аналитически, что при нагружения штампа с эксцентриситетом $(e_1 d, e_2 d)$ относительно точки начального контакта $\boldsymbol{x}^c$ распределение контактного давления также будет описываться этим решением, смещенным вдоль осей координат Ox_1 и Ox_2 соответственно на $e_1 d$ и $e_2 d$, осадка штампа δ_3 уменьшится на $\alpha_1 d_1 e_1^2 + \alpha_2 d_2 e_2^2$, а сам штамп повернется на углы $\Delta\varphi_1 = -2\alpha_2 e_2$ и $\Delta\varphi_2 = 2\alpha_1 e_1$.

В табл. 1 для семи регулярных сеток, состоящих из одноузловых прямоугольных граничных элементов нулевого порядка, приведены относительные среднеквадратичные погрешности определения сеточной функции нормальных напряжений $\boldsymbol{Q}_p$, площади фактического контакта S, осадки штампа δ_3 и угла его поворота φ_1, а также данные о числе итераций, количестве матрично-векторных произведений (МВП) и времени счета в секундах. Расчеты выполнялись для квадратных в плане штампов $(d_1 = d_2 = 1.0)$ при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.3 \times 10^{-4}$, $f = 10^{-4}$, $e_1 = e_2 = 0.05$.

Также проведено сравнение численных решений задач, в которых область фактического контакта состояла из совокупности отдельных пятен контакта, с решениями, полученными с помощью алгоритмов [17] и [18]. Рассматривались задачи для гладких прямоугольных в плане штампов с регулярным поверхностным микрорельефом, состоящим из $K_1 \times K_2$ микровыступов. Номинальная область контакта Γ_p имела вид (24), а форма основания штампов задавалась функцией

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \Psi_1(\xi_1)/K_1 + \Psi_2(\xi_2)/K_2, \tag{42}$$

где $\Phi_0(x_1, x_2)$ — выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Psi_1(\xi_1)$, $\Psi_2(\xi_2)$ — строго выпуклые функции, характеризующие форму микровыступов; $\xi_1 = \{K_1 x_1/d_1\}$, $\xi_2 = \{K_2 x_2/d_2\}$ — «быстрые» координаты, $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Таблица 2. Количество итераций и МВП

$K_1 \times K_2$	Число ГЭ	Алгоритм 1		Алгоритм 2		Алгоритм 3	
		Итер.	МВП	Итер.	МВП	Итер.	МВП
1×1	4096	39	79	62	81	30	36
2×2	16384	49	99	89	124	40	50
4×4	65536	63	127	122	166	55	74
8×8	262144	88	177	205	313	70	95
16×16	1048576	133	267	218	315	97	139
32×32	4194304	289	579	415	646	138	213
64×64	16777216	699	1399	896	1540	191	313
128×128	67108864	1008	2017	1480	2646	264	438

Для заданной тройки функций $\{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2\}$ формула (42) определяет двухпараметрическое семейство штампов $\Xi(K_1, K_2)$, в качестве параметров которого выступают числа микровыступов K_1 и K_2 вдоль сторон штампа. Отдельные штампы этого семейства и относящиеся к ним величины будем обозначать мультииндексом $K = (K_1, K_2)$. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а поперечные сечения их микровыступов, параллельные соответствующим координатным плоскостям, являются подобными.

При проведении расчетов необходимое количество граничных элементов определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. Приведенные далее численные решения для штампов семейства $\Xi(K_1, K_2)$ получены на сетках, в которых каждый микровыступ аппроксимировался 64×64 или 128×128 граничными элементами.

В табл. 2 приведены данные о числе итераций и количестве МВП для трех вычислительных алгоритмов — алгоритма 1 [17], алгоритма 2 [18] и алгоритма 3, предложенного в данной работе. Для сравнительной оценки вычислительной эффективности рассматриваемых алгоритмов следует использовать данные о количестве МВП, так как затраты на вычисление МВП составляют более 95% общего времени работы алгоритмов. Учитывая возможности алгоритма 1 при постановке тестовых задач использовалось лишь первое из уравнений равновесия штампа (5) и полагалось $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Расчеты выполнялись для семейства квадратных в плане штампов $(d_1 = d_2 = d)$:

$$\Phi_0(x_1, x_2) = 3 \times 10^{-5} d(2x_1/d - 1)^2 + 3 \times 10^{-5} d(2x_2/d - 1)^2,$$
$$\Psi_1(\xi_1) = 10^{-4} d(2\xi_1 - 1)^4, \quad \Psi_2(\xi_2) = 10^{-4} d(2\xi_2 - 1)^4.$$

Значения параметров в (41) принимались следующими: $e_1 = e_2 = 0$, $f = 2 \times 10^{-5}$. Выполненные расчеты показали, что относительные среднеквадратичные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений $\boldsymbol{Q}_p$) не превышают 10^{-7} для всех пар алгоритмов.

Аналогично [18] для оценки вычислительной эффективности разработанного алгоритма в качестве метрик использовались средние значения $\bar{\mu}_i$ и $\bar{\mu}_m$ отношений

$$\mu_i = n_i/N, \quad \mu_m = n_m/N,$$

где n_i — количество итераций; n_m — число МВП; N — число неизвестных задачи квадратичного программирования (25). Усреднение проводилось для одинаковых значений параметра N по всем проведенным расчетам (более тысячи) для штампов разной формы и различных условий их нагружения. Из данных, приведенных в табл. 3, следует, что с ростом числа неизвестных N значения $\bar{\mu}_i$ и $\bar{\mu}_m$ уменьшаются. Отметим, что приведенные данные о вычислительных затратах существенно меньше теоретических оценок, полученных для алгоритма [14].

Апостериорный анализ проводился для всех полученных численных решений. В результате установлено, что при проведении вычислений с двойной точностью во всех случаях $\varepsilon_q = 0$, а для остальных параметров выполнялись неравенства: $\varepsilon_f < 10^{-8}$, $\varepsilon_m < 10^{-7}$, $\varepsilon_{zp} < 10^{-10}$ и $\varepsilon_{zm} < 10^{-8}$.

Установлен ряд закономерностей процесса вдавливания штампов семейства $\Xi(K_1, K_2)$ с плоским основанием $(\Phi_0 \equiv 0)$ в упругое полупространство. Рассмотрим процесс вдавливания штампа $K = (K_1, K_2)$ при изменении в (41) безразмерного параметра внешней нагрузки f в интервале $[0, f^*]$ и проведем численный анализ

Таблица 3. Метрики для оценки вычислительной эффективности алгоритма

N	262144	1048576	4194304	16777216	67108864
$\bar{\mu}_i$	$0.438 \cdot 10^{-3}$	$0.150 \cdot 10^{-3}$	$0.514 \cdot 10^{-4}$	$0.177 \cdot 10^{-4}$	$0.619 \cdot 10^{-5}$
$\bar{\mu}_m$	$0.548 \cdot 10^{-3}$	$0.203 \cdot 10^{-3}$	$0.751 \cdot 10^{-4}$	$0.277 \cdot 10^{-4}$	$0.102 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Среднеквадратичные относительные отклонения $\tilde{\varepsilon}_i = 10^5 \cdot \varepsilon_i$

$\tilde{\varepsilon}_i$	Номер семейства	Штамп $K = (K_1, K_2)$			
		$(4,4)$	$(8,8)$	$(16,16)$	$(32,32)$
$\tilde{\varepsilon}_0$	1	1517	737	316	103
	2	1181	556	227	71
	3	1643	801	347	114
	4	2502	1266	562	190
$\tilde{\varepsilon}_1$	1	2676	1197	497	162
	2	1210	531	217	70
	3	3400	1525	635	207
	4	11531	5227	2192	720
$\tilde{\varepsilon}_3$	1	1180	528	219	71
	2	528	231	94	30
	3	1500	673	280	91
	4	5066	2299	965	317

зависимости от этого параметра следующих характеристик контактного взаимодействия: относительной фактической площади контакта

$$s \equiv \frac{1}{\operatorname{meas}\Gamma_p} \int\limits_{\Gamma_p} [\sigma_{33} < 0]_a \, d\xi_1 d\xi_2 = B_K^0(f),$$

углов поворота $\varphi_1 = B_K^1(f)$, $\varphi_2 = B_K^2(f)$ и осадки штампа $\delta_3 = B_K^3(f)$.

Введем на $[0, f^*]$ равномерную сетку $T_f = \{f_m = m\Delta f,\ \Delta f = f^*/M_f\}$ и сеточные функции $\boldsymbol{B}_K^i = R_f B_K^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, где R_f — оператор ограничения на сетку T_f. Для вычисления сеточных функций производилось пошаговое нагружение штампа. При проведении расчетов полагалось $M_f = 64$.

В ходе вычислительных экспериментов наблюдалась сходимость последовательностей сеточных функций $\boldsymbol{B}_K^i, i = 0, 1, 2, 3$, при увеличении числа микровыступов. Далее приведены результаты расчетов для четырех семейств $\Xi(K_1, K_2)$ квадратных в плане штампов $(d_1 = d_2 = d)$ с плоским основанием $(\Phi_0 \equiv 0)$:

1) $\Psi_1(\xi_1) = a(2\xi_1 - 1)^2, \quad \Psi_2(\xi_2) = a(2\xi_2 - 1)^2;$

2) $\Psi_1(\xi_1) = a(2\xi_1 - 1)^4, \quad \Psi_2(\xi_2) = a(2\xi_2 - 1)^4;$

3) $\Psi_1(\xi_1) = a\left[1 - \cos(\pi(\xi_1 - 0.5))\right], \quad \Psi_2(\xi_2) = a\left[1 - \cos(\pi(\xi_2 - 0.5))\right];$

4) $\Psi_1(\xi_1) = a\left[1 - \cos^2(\pi(\xi_1 - 0.5))\right], \ \Psi_2(\xi_2) = a\left[1 - \cos^2(\pi(\xi_2 - 0.5))\right],$

где $a = 10^{-4}d$. Параметры, определяющие эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки, принимались равными $e_1 = e_2 = 0.1$, вследствие чего $\varphi_1 = -\varphi_2$.

В табл. 4 указаны относительные среднеквадратичные расхождения

$$\varepsilon_i = \|\boldsymbol{B}_K^i - \boldsymbol{B}_Q^i\|_2 \,/\, \|\boldsymbol{B}_Q^i\|_2, \quad i = 0, 1, 3,$$

где $Q = (64, 64)$ — мультииндекс штампа с наибольшим числом микровыступов в серии расчетов. Значения параметра f^* для семейств штампов 1–4 выбирались таким образом, чтобы обеспечить полный контакт всех штампов семейства с полупространством и полагались равными соотвественно: 3.6×10^{-3}, 5.8×10^{-3}, 3×10^{-3} и 1.1×10^{-3}.

На основании результатов вычислительных экспериментов можно предположить существование для каждого из рассмотренных семейств штампов $\Xi(K_1, K_2)$ набора предельных кривых $s = B^0(f)$, $\varphi_1 = B^1(f)$, $\varphi_2 = B^2(f)$ и $\delta_3 = B^3(f)$.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для упругого полупространства может быть также использован для решения других классов пространственных и плоских контактных задач, в которых удается аналитически или численно построить ОПС, отображающий в номинальной области контакта нормальные напряжения в нормальные перемещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. *Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н.* Основы теории упругого дискретного контакта. СПб: Политехника, 2003. 233 с.
3. *Попов В.Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
4. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Горячева И.Г., Цуканов И.Ю.* Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел // Прикл. матем. и механ. 2020. Т. 84. № 6. С. 757–789.
8. *Kravchuk A.S., Neittaanmaki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
9. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 518 p.
10. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
11. *Eck C., Jarusek J., Krbec M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. New York: CRC Press, 2005. 398 p.
12. *Sofonea M., Matei A.* Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 280 p.
13. *Capatina A.* Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Cham: Springer, 2014. 235 p.
14. *Поляк Б.Т.* Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 807–821.
15. *Dostal Z.* Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities. New York: Springer, 2009. 284 p.
16. *Dostal Z., Kozubek T., Sadowska M., Vondrak V.* Scalable Algorithms for Contact Problems. New York: Springer, 2016. 340 p.
17. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear. 1999. V. 231. № 2. P. 206–219.
18. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 154–172.
19. *Бобылев А.А.* Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя // Изв. РАН. МТТ. 2023, № 2. С. 70–89.

20. *Amrouche C., Girault V., Giroire J.* Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. № 6. P. 579–606.

21. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 252 с.

22. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 620 p.

23. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С, Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.

24. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 357 p.

25. *Davis P.J.* Circulant matrices. New York: Wiley-Interscience, 1979. 250 p.

26. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X., Liu S., Zhu D.* FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. № 61. P. 92–113.

27. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.

28. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

29. *Beale E.M.L.* A derivative of conjugate gradients // Numerical Methods for Nonlinear Optimization. London: Academic Press, 1972. P. 39–43.

APPLICATION OF THE CONJUGATE GRADIENT METHOD FOR SOLVING UNILATERAL DISCRETE CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC HALF-SPACE

A. A. Bobylev*

119991 Moscow, Leninskie Gory, Lomonosov Moscow State University, Russia
**e-mail: abobylov@gmail.com*

Received: 15.03.2024
Revised: 27.05.2024
Accepted: 25.07.2024

Abstract. The problems of unilateral discrete contact of an elastic half-space and a rigid punch of finite dimensions with a surface microrelief are considered. A variational formulation of the problems is obtained in the form of a boundary variational inequality using the Poincare-Steklov operator, which maps normal stresses into normal displacements on a part of the boundary of an elastic half-space. The minimization problem equivalent to the variational inequality is presented, as a result of approximation of which a quadratic programming problem with constraints in the form of equalities and inequalities is obtained. To solve this problem, a new computational algorithm based on the conjugate gradient method is proposed, which includes three equations of punch equilibrium in the calculation. The algorithm belongs to the class of active set methods and takes into account the specifics of the set of constraints. Some patterns of contact interaction of surfaces with regular microrelief have been established.

Keywords: unilateral discrete contact, boundary variational inequality, Poincare-Steklov operator, quadratic programming problem, conjugate gradient method.