УДК 517.956

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА[1)]

© 2024 г. В. И. Качалов[1,*], Д. А. Маслов[1,]**

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ «МЭИ», Россия
**e-mail: vikachalov@rambler.ru*
***e-mail: maslovdma@mpei.ru*

Поступила в редакцию 04.06.2024 г.
Переработанный вариант 30.07.2024 г.
Принята к публикации 23.08.2024 г.

Введенное Г. Бейтманом в 1915 г. и изученное Й. М. Бюргерсом в 1948 г. уравнение Бюргерса нашло широкое применение в механике жидкости, нелинейной акустике и других областях прикладной математики. Подходы к его решению были самые разнообразные: асимптотические, численные, аналитические. В данной работе развивается аналитический метод решения уравнения типа Бюргерса в банаховом пространстве. А именно, после искусственного введения в уравнение малого параметра доказывается существование аналитического по этому параметру решения. При этом, рассматривается также и многомерный вариант уравнения Бюргерса. Библ. 16.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, ε-регулярное решение, сильно непрерывная полугруппа, функция Грина.

DOI: 10.31857/S0044466924120104, **EDN**: KBRHHS

1. ВВЕДЕНИЕ

Известное уравнение вязкого Бюргерса в одном пространственном измерении для поля скоростей $u(x,t)$ и коэффициента диффузии ν

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u, \quad u(x,0) = \varphi(x) \tag{1}$$

является одним из эталонных нелинейных уравнений математической физики. Оно является модельным для описания одномерной турбулентности, а в нелинейной акустике уравнение Бюргерса описывает распространение одномерных акустических волн конечной амплитуды в условиях проявления диссипации. В связи с тем, что это уравнение описывает довольно большое число различных по своей природе физических явлений, появилось много работ, посвященных анализу и методам его решений [1]–[3].

Уникальность одномерного уравнения Бюргерса прежде всего состоит в том, что с помощью замены Хопфа-Коула

$$u(x,t) = -2\nu\partial_x[\ln v(x,t)] \tag{2}$$

уравнение (1) сводится к уравнению теплопроводности

$$\begin{gathered} \partial_t v = \nu\partial_x^2 v, \ \ t > 0, \\ v(x,0) = \exp\left(-\tfrac{1}{2\nu}\int_0^x \varphi(\xi)d\xi\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда решение начальной задачи (1) следующее:

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-y}{t}\exp\left(-\frac{G(y,x,t)}{2\nu}\right)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{G(y,x,t)}{2\nu}\right)dy}, \tag{4}$$

где

$$G(y,x,t) = \frac{(x-y)^2}{2t} + \int\limits_0^y \varphi(\xi)d\xi.$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00496).

В работе [4] для начальной задачи (1) при $\nu = 1$ при условии, что $\psi(x) = v(x,0)$ является целой функцией порядка $0 < \rho < 2$, построено мероморфное по x решение

$$u(x,t) = -2\frac{\psi'(x) + t\psi''(x) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n+1)}(x) + \ldots}{\psi(x) + t\psi'(x) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n)}(x) + \ldots}. \tag{5}$$

Чтобы получить решение (5) методом малого параметра была решена задача

$$\begin{aligned} &\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u, \;\; t > 0,\\ &u(0,x) = \nu\varphi(x), \end{aligned} \tag{6}$$

а затем положили $\nu = 1$.

Следует также отметить, что развитие получил и метод решения краевых задач для уравнения Бюргерса [5, 6]. В представленной работе будет изучаться уравнение типа Бюргерса в банаховом пространстве.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ε-РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Пусть в банаховом пространстве E задана начальная задача

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \varepsilon B(u, Hu) = Au, \;\; t \in (0,T],\\ &u\big|_{t=0} = u^0, \end{aligned} \tag{7}$$

в которой A и H — неограниченные линейные операторы; $B(u,v)$ — ограниченный билинейный оператор.

Уравнение (7) называется уравнением типа Бюргерса. Если в нем отсутствует малый параметр, и $u^0 = \varepsilon v^0$ (см. начальное условие в задаче (6)), то его можно ввести, пользуясь билинейностью оператора B с помощью замены $u = \varepsilon v$.

Сформулируем условия на данные задачи (7).

1°. Оператор $A : E \to E$ — неограниченный замкнутый и имеет непрерывный обратный A^{-1}.

2°. Оператор A — инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$.

3°. H — неограниченный замкнутый оператор с областью определения $D_H \supset D_A$.

Будем искать решение уравнения (7) в виде формального ряда по степеням малого параметра — это следствие того, что, благодаря условию 3°, задача является регулярно возмущенной:

$$u^f(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t) + \ldots . \tag{8}$$

Если ряд (8) подставить в уравнение (7) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε, то получится следующая серия задач:

$$\begin{aligned} &\partial_t u_0 = Au_0, \;\; u_0\big|_{t=0} = u^0,\\ &\partial_t u_1 = Au_1 - B(u_0, Hu_0), \;\; u_1\big|_{t=0} = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\partial_t u_n = Au_n - \sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1}), \;\; u_n\big|_{t=0} = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Определение. Если ряд (8) с коэффициентами, определяемыми из серии (9), сходится равномерно на отрезке $[0,T]$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то его сумма $u^r(t,\varepsilon)$ называется ε-регулярным решением задачи Коши (7).

В работе [7] приведены достаточные условия существования ε-регулярного решения, а в работе [8] указан способ построения приближений к точному решению $u(t,\varepsilon)$ ε-регулярными. Заметим, что $u^r(t,\varepsilon)$ совпадает с точным решением $u(t,\varepsilon)$ лишь тогда, когда $u^r(t,\varepsilon)$ будет иметь сильную производную по $t \in (0,T]$ и $u^r(t,\varepsilon) \in D_A$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *задана рекуррентно:* $a_0 = 1$, $a_1 = 1, \ldots, a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0, \ldots$. *Тогда производящая функция этой последовательности голоморфна в круге радиуса* $1/4$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{10}$$

есть производящая функция данной последовательности. Имеем

$$\varphi^2(z) = a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)z + \ldots + (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0)z^{n-1} + \ldots ,$$

т.е.

$$\varphi^2(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots . \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает уравнение для $\varphi(z)$:

$$z\varphi^2(z) - \varphi(z) + 1 = 0,$$

из которого следует, что

$$\varphi(z) = (2z)^{-1}(1 - \sqrt{1-4z}).$$

Голоморфность производящей функции очевидна. Итак,

$$\varphi(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + 429z^7 + \ldots ,$$

и лемма доказана.

Сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема. *При выполнении условий* $1^\circ - 3^\circ$ ε-*регулярное решение* $u^r(t,\varepsilon)$ *существует, единственно и совпадает с точным решением* $u(t,\varepsilon)$.

Доказательство. В соответствии с условием 2°, все задачи серии (9) корректно разрешимы и

$$\begin{gathered}
u_0(t) = \mathcal{U}(t)u^0,\ \ v_0(t) = A[u_0(t)] = A\mathcal{U}(t)[u^0];\\
u_1(t) = \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(u_0, Hu_0)d\tau,\ \ v_1(t) = A[u_1(t)] = A\left[\int\limits_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(u_0, Hu_0)d\tau\right];\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n(t) = \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\left(\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1})\right)d\tau,\\
v_n(t) = A[u_n(t)] = A\left[\int\limits_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\left(\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1})\right)d\tau\right].\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь, помимо $u_0(t), u_1(t), \ldots, u_n(t), \ldots$, введены функции $v_0(t), v_1(t), \ldots, v_n(t), \ldots$, которые понадобятся в дальнейшем.

Введем операторы $F(s) = A\mathcal{U}(s)$, $G = HA^{-1}$. Оба оператора являются ограниченными по теореме Банаха о замкнутом графике [9, гл. III, п. 15.4]. Действительно, $\mathcal{U}(s)$ является непрерывным в E и $\mathrm{Im}\,\mathcal{U}(s) \subset D_A$ при каждом $s \geqslant 0$, а значит, оператор $F(s)$ является замкнутым, как произведение замкнутого оператора на ограниченный оператор, и определен на всем пространстве E. То же самое можно сказать об операторе G: замкнутый, как произведение замкнутого оператора H на непрерывный оператор A^{-1}, и определенный на всем пространстве E ($\mathrm{Im}\,A^{-1} = D_A$, $D_A \subset D_H$). Представим функции $v_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, из серии (12) с помощью операторов F и G:

$$\begin{gathered}
v_1(t) = \int\limits_0^t F(t-\tau)B(A^{-1}v_0, Gv_0)d\tau,\\
v_2(t) = \int\limits_0^t F(t-\tau)(B(A^{-1}v_0, Gv_1) + B(A^{-1}v_1, Gv_0))d\tau,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n(t) = \int\limits_0^t F(t-\tau)\left(\sum_{k=0}^{n-1} B(A^{-1}v_k, Hv_{n-k-1})\right)d\tau,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{13}$$

Пусть $\|F(s)\| = f(s)$, $\|G\| = g$, $\|B\| = b$, $\|A^{-1}\| = \alpha$. Докажем методом математической индукции, что

$$\|v_n(t)\| \leqslant a_n t^n b^n f^n(s)\alpha^n g^n \|v_0\|^{n+1}. \tag{14}$$

При $n = 1$ неравенство (14), очевидно, выполняется. Пусть оно справедливо при $n = m$. Получим оценку для $v_{m+1}(t)$. Имеем

$$\|v_{m+1}(t)\| \leqslant tf(s)b\alpha g \sum_{k=0}^{m} (a_k t^k b^k f^k(s)\alpha^k g^k \|v_0(t)\|^{k+1} a_{m-k} t^{m-k} b^{m-k} f^{m-k}(s)\alpha^{m-k} g^{m-k} \|v_0\|^{m-k+1}) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k}\right) t^{m+1} b^{m+1} f^{m+1}(s) \alpha^{m+1} g^{m+1} \|v_0(t)\|^{m+2} = a_{m+1} t^{m+1} b^{m+1} f^{m+1}(s) \alpha^{m+1} g^{m+1} \|v_0(t)\|^{m+2}.$$

Неравенство (14) выполняется и для $n = m+1$ и, значит, доказано. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(t)$ сходится в окрестности радиуса

$$r = \frac{1}{4T\alpha g b(\max_{s\in[0,T]} f(s))(\max_{t\in[0,T]} \|v_0(t)\|)}$$

точки $\varepsilon = 0$.

Таким образом, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A[u_n(t)] \tag{15}$$

сходится равномерно на отрезке $[0,T]$ при $|\varepsilon| < r$. Поскольку A — замкнутый оператор, то ряд (15) совпадает с рядом

$$A\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t),$$

см. [9, гл. III, § 15], а так как A^{-1} — ограниченный оператор, то и ряд (8) сходится и его сумма $u(t,\varepsilon) \in D_A$, т.е. является решением уравнения (7). Теорема доказана.

Пример 1. В пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, задана смешанная задача

$$\partial_t u + \varepsilon \iiint\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y,z,x',y',z') u(x',y',z')(\partial_{x'} u + \partial_{y'} u + \partial_{z'} u) dx'dy'dz' = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u, \tag{16}$$

$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Здесь оператор H является замыканием дифференциальной операции $\partial_x + \partial_y + \partial_z$, определенной на множестве $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; A — замыкание лапласиана $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, заданного на множестве функций из $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающихся в ноль на границе $\partial\Omega$; ядро $\mathcal{K}(x,y,z,x',y',z') \in C^1(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ и положительно на компакте $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$; билинейный оператор

$$B(v,w) = \iiint\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y,z,x',y',z') v(x',y',z') w(x',y',z') dx'dy'dz',$$

действующий из $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ является ограниченным, так как

$$\|B(v,w)\| \leqslant \max_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \mathcal{K}(x,y,z,x',y',z') \iiint\limits_{\Omega} |v(x',y',z') w(x',y',z')| dx'dy'dz' \leqslant \max_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \mathcal{K}(x,y,z,x',y',z') \|v\|\,\|w\|.$$

Пусть область Ω такова, что спектральная задача

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad w\big|_{\partial G} = 0$$

имеет собственные функции $\{w_m(x,y,z)\}_{m=1}^{\infty}$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и образуют в $L_2(\Omega)$ ортонормированную систему; соответствующие им собственные значения $\lambda_m \to +\infty$, $m \to \infty$. В этом случае смешанная задача

$$\begin{aligned} &\partial_t v = \Delta v + f(x,y,z,t), \\ &v\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \\ &v\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

имеет решение

$$v(x,y,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m t} \left[(\varphi(x,y,z), w_m(x,y,z)) + \int\limits_0^t e^{\lambda_k \tau} (f(x,y,z,\tau), w_m(x,y,z)) d\tau \right] w_m(x,y,z) \tag{17}$$

и указанный ряд сходится регулярно в $\overline{\Omega}$. Непрерывная обратимость лапласиана в пространстве $L_2(\Omega)$ известна и для решения уравнения $\Delta w = g(x,y,z)$ имеет место формула

$$w(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-1}(g, w_m)w_m. \tag{18}$$

Серия (9) для задачи (16) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_0 = \Delta u_0, \;\; u_0\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z);\\
&\partial_t u_1 = \Delta u_1 - \iiint\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y,z,x_1,y_1,z_1)u_0(x_1,y_1,z_1,t)(\partial_{x_1} + \partial_{y_1} + \partial_{z_1})\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot u_0(x_1,y_1,z_1,t)dx_1dy_1dz_1, \;\; u_1\big|_{\partial\Omega} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\partial_t u_n = \Delta u_n - \sum_{k=0}^{n-1}\iiint\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y,z,x_1,y_1,z_1)u_k(x_1,y_1,z_1,t)(\partial_{x_1} + \partial_{y_1} + \partial_{z_1})\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot u_{n-k-1}(x_1,y_1,z_1,t)dx_1dy_1dz_1, \;\; u_n\big|_{\partial\Omega} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

В соответствии с формулой (17) имеем:

$$u_0(x,y,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m t}(\varphi(x,y,z), w_m(x,y,z))w_m(x,y,z),$$

$$u_1(x,y,z,t) = -\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)}\times$$

$$\times\left(\iiint\limits_{\Omega}\mathcal{K}(x,y,z,x_1,y_1,z_1)u_0(x_1,y_1,z_1,\tau)(\partial_{x_1}+\partial_{y_1}+\partial_{z_1})u_0(x_1,y_1,z_1)dx_1dy_1dz_1, w_m(x,y,z)\right)w_m(x,y,z)$$

и т.д. В итоге будет построено решение задачи (16)

$$u(x,y,z,t,\varepsilon) = u_0(x,y,z,t) + \varepsilon u_1(x,y,z,t) + \ldots,$$

голоморфное в точке $\varepsilon = 0$.

Пример 2. Построим приближение к решению двумерного уравнения Бюргерса с малым параметром

$$\partial_t u + \varepsilon u(\partial_x u + \partial_y u) = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u, \tag{19}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \psi(x,y), \;\; (x,y) \in \overline{\Pi}, \tag{20}$$

и краевым условием

$$u\big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{21}$$

Здесь,

$$\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 < x < 1, \;\; 0 < y < 1\}$$

есть прямоугольник с границей $\partial\Pi$. Будем рассматривать задачу (18)–(20) в банаховом пространстве $E = C(\overline{\Pi})$, при этом оператор $H = \partial_x + \partial_y$ имеет область определения $D_H = \{v(x,y) \in C^1(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}), \;\; v(0,y) = 0\}$, а оператор $A = \partial_x^2 + \partial_y^2$ имеет область определения $D_A = \{w(x,y) \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}), \;\; w\big|_{\partial\Pi} = 0\}$.

Замкнутость обоих операторов очевидна. Как известно [10, гл. 5, § 26], двумерная задача на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u\big|_{\partial\Pi} = 0$$

имеет следующее решение: $\lambda_{kj} = \pi^2(k^2 + j^2)$ — собственные значения, $X_{kj} = 2\sin \pi kx \sin \pi jy$ — собственные функции.

Функция Грина первой краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\partial_t w = \Delta w + g(x,y,t), \;\; (x,y) \in \Pi, \;\; t > 0,\\
&w\big|_{t=0} = \theta(x,y), \;\; w\big|_{\partial\Pi} = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

строится в виде регулярно сходящегося при $t > 0$ ряда

$$G(x, y; \xi, \eta; t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} e^{-\lambda_{kj} t} X_{kj}(x, y) X_{kj}(\xi, \eta),$$

при этом решение задачи (22) имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \iint\limits_{\Pi} G(x, y; \xi, \eta; t)\theta(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{\Pi} G(x, y; \xi, \eta; t - \tau) g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta. \tag{23}$$

Далее, фигурирующий в уравнении (19) билинейный оператор $B(u, v) = uv$ в пространстве E, очевидно, является ограниченным (в отличие от пространства $L_2(\Pi)$). Наряду с уравнением (19) рассмотрим уравнение

$$\partial_t v + \varepsilon v(H_m v) = \Delta v, \ \ m \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

с теми же краевыми условиями, с ограниченными операторами [11, гл. I, § 2.2]

$$H_m = -mI - m^2 R_H(m),$$

сильно сходящимися к оператору H при $m \to +\infty$. Здесь

$$R_H(\lambda)[f] = \int\limits_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi, \xi + y - x) d\xi$$

есть резольвента оператора H.

В работе [7] было доказано, что при каждом натуральном m уравнение (24) имеет ε-регулярное решение $v_m(x, y, t, \varepsilon)$, которое совпадает с его точным решением и, если $u = u(x, y, t, \varepsilon)$ — точное решение задачи (19)–(21), то

$$\|u(x, y, t, \varepsilon) - v_m(x, y, t, \varepsilon)\| \leqslant C_\varepsilon \|(H - H_m)u\|, \tag{25}$$

причем $C_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если мы выберем m столь большим, что $\|(H - H_m)u\| < \delta$ для заданного малого δ, то из неравенства (25) будет следовать, что решение v_m хорошо аппроксимирует решение исходной задачи при достаточно малом ε, порядка $1/\|H_m\|$.

Замечание. Если же $D_H \not\supset D_A$, т.е. возмущение, создаваемое билинейной частью уравнения (7), является сингулярным, то здесь уже применяются методы решения сингулярно возмущенных задач [12]–[14]. Для такого типа задач введено понятие ε-псевдорегулярного решения и разрабатываются как аналитические [15], так и асимптотические подходы [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burgers J.M.* A mathematical model illustraing the theory of turbulance // Advances in Applied Mechanics, 1, eds. R. von Mises. T. von Karman, New York: Acad. Press. 1948. P. 171–199.

2. *Pilant M.S., Rundell W.* An inverse problem for a nonlinear parabolic equation // Commun. Part. Differ. Equ. 1986. V. 11. № 4. P. 445–457.

3. *Henkin G.M.* Asimptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. Fixed Point Theory Appl. 2007. V. 1. № 2. P. 239–291.

4. *Качалов В.И., Федоров Ю.С.* О методе малого параметра в нелинейной математической физике // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1680–1686.

5. *Нефедов Н.Н., Руденко О.В.* О движении, усилении и разрушении фронтов в уравнениях типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью // Докл. АН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 493. С. 26–31.

6. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 6. С. 975–984.

7. *Качалов В.И., Маслов Д.А.* Аналитичность и псевдоаналитичность в методе малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 11. С. 1806–1814.

8. *Качалов В.И.* Об ε-регулярных решениях дифференциальных уравнений с малым параметром // Сиб. матем. журнал. 2023. Т. 64. № 1. С. 113–122.

9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

12. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

13. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.

14. *Нефедов Н.Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.

15. *Качалов В.И.* Псевдоголоморфные и ε-псевдорегулярные решения сингулярно возмущенных задач // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 3. С. 361–370.

16. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. https://doi.org/10.3390/axioms8010027

THE SMALL PARAMETER METHOD IN THE THEORY OF BURGERS-TYPE EQUATIONS

V. I. Kachalov*, D. A. Maslov*

111250 Moscow, Krasnokazarmennaya str., 14, NRU Moscow Energy Institute
**e-mail: vikachalov@rambler.ru*
***e-mail: maslovdma@mpei.ru*

Received: 04.06.2024
Revised: 30.07.2024
Accepted: 23.08.2024

Abstract. Introduced by G. Bateman in 1915 and studied by J. M. Burgers in 1948, the Burgers equation has found wide application in fluid mechanics, nonlinear acoustics and other fields of applied mathematics. The approaches to its solution were very diverse: asymptotic, numerical, and analytical. In this paper, an analytical method for solving a Burgers-type equation in a Banach space is developed. Namely, after artificially introducing a small parameter into the equation, the existence of an analytical solution for this parameter is proved. At the same time, a multidimensional version of the equation is also considered.

Keywords: Burgers equation, ε-regular solution, strongly continuous semigroup, Green's function.