

ISSN 0044-4669

Том 63, Номер 2

Февраль 2023



ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 63, номер 2, 2023 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Унифицированный анализ методов решения вариационных неравенств:
редукция дисперсии, сэмплирование, квантизация и покомпонентный спуск
А. Н. Безносиков, А. В. Гасников, К. Э. Зайнуллина, А. Ю. Масловский, Д. А. Пасечнюк 189
- Анализ формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова
при наличии пограничного слоя
А. И. Задорин 218
- Об одновременном приведении к диагональному виду пары юнитоидных матриц
Х. Д. Икрамов 227
- Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя
П. А. Крутицкий, И. О. Резниченко 230
-

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Сингулярные нелинейные задачи для фазовых траекторий
некоторых автомодельных решений уравнений пограничного слоя:
корректная постановка, анализ и расчеты
Н. Б. Колюхова, С. В. Курочкин 245
- A class of singularly perturbed equations with discontinuous right-hand side
in the critical case
Shitao Liu, M. Ni 262
-

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- К приближенному решению одного класса особых интегродифференциальных уравнений
Н. С. Габбасов 263
- Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного
дифференциально-операторного уравнения переноса с малой диффузией
А. В. Заборский, А. В. Нестеров 273
- Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений
некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме.
II. Теория потенциала
М. О. Корпусов, Е. А. Овсянников 282
-

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Коэффициент аналогии Рейнольдса в продольной цилиндрической задаче Куэтта:
от режима сплошной среды до свободномолекулярного
А. А. Абрамов, В. Ю. Александров, А. В. Бутковский 317
- Memory response on thermoelastic behaviour with temperature dependent material
moduli under mechanical strip load
Aktar Seikh, Soumen Shaw, Smita Pal (Sarkar) 327

Об устойчивости приближенного решения задачи Коши для некоторых
интегриродифференциальных уравнений первого порядка

П. Н. Вабищевич

328

Решение уравнения Больцмана в режиме сплошной среды

Ф. Г. Черемисин

336

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 519.85

УНИФИЦИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ: РЕДУКЦИЯ ДИСПЕРСИИ, СЭМПЛИРОВАНИЕ, КВАНТИЗАЦИЯ И ПОКОМПОНЕНТНЫЙ СПУСК¹⁾

© 2023 г. А. Н. Безносиков¹, А. В. Гасников^{1,2,3,*}, К. Э. Зайнуллина¹,
А. Ю. Масловский¹, Д. А. Пасечнюк^{1,2}

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9,
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Россия

² 127051 Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1,
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Россия

³ 385000 Республика Адыгея, Майкоп, ул. Первомайская, 208, Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета, Россия

*e-mail: gasnikov@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.01.2022 г.
Переработанный вариант 28.01.2022 г.
Принята к публикации 14.10.2022 г.

Предлагается унифицированный анализ методов для такого широкого класса задач, как вариационные неравенства, который в качестве частных случаев включает в себя задачи минимизации и задачи нахождения седловой точки. Предлагаемый анализ развивается на основе экстраградиентного метода, являющегося стандартным для решения вариационных неравенств. Рассматриваются монотонный и сильно монотонный случаи, которые соответствуют выпукло-вогнутым и сильно-выпукло-сильно-вогнутым задачам нахождения седловой точки. Теоретический анализ основан на параметризованных предположениях для итераций экстраградиентного метода. Следовательно, он может служить прочной основой для объединения уже существующих методов различных типов, а также для создания новых алгоритмов. В частности, чтобы показать это, мы разрабатываем некоторые новые надежные методы, в том числе метод с квантизацией, покомпонентный метод, распределенные рандомизированные локальные методы и др. Большинство из упомянутых подходов прежде никогда не рассматривались в общности вариационных неравенств и применялись лишь для задач минимизации. Стабильность новых методов подтверждается предоставляемыми численными экспериментами по обучению моделей GAN. Библ. 35. Фиг. 3. Табл. 1.

Ключевые слова: экстраградиентный метод, стохастические вариационные неравенства, квантизация, редукция дисперсии.

DOI: 10.31857/S0044466923020059, **EDN:** BMKMFV

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная постановка задачи, рассматриваемой в настоящей статье, – решение вариационного неравенства (ВН) – имеет следующий вид:

$$\text{найти } z^* \in \mathcal{L} \text{ такое, что } \langle F(z^*), z - z^* \rangle + h(z) - h(z^*) \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{L}, \quad (1)$$

где $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – подходящая полунепрерывная снизу выпуклая функция, $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – оператор, \mathcal{L} – непустое замкнутое выпуклое подмножество \mathbb{R}^d .

Приведем сразу некоторые классические примеры задач, которые могут быть представлены в виде (1).

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание) № 075-00337-20-03 (проект 0714-2020-0005).

Задача минимизации. Положим, что $F(x)$ является градиентом некоторой функции $f(x)$, а $h(x) = \delta_{\mathcal{X}}(x)$ – индикаторная функция множества \mathcal{X} . В частности, при $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, $x^* \in \mathcal{X}$ является решением (1) тогда и только тогда, когда $\nabla f(x^*) = 0$. В случае выпуклой функции ему соответствует глобальный экстремум.

Задача нахождения седловой точки (СТ). Рассмотрим минимаксную задачу

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{y \in \mathcal{Y}} f(x, y). \quad (2)$$

Эта задача может быть также представлена в виде (1). Достаточно выбрать F и g следующим образом:

$$F(z) = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x, y) \\ -\nabla_y f(x, y) \end{pmatrix}, \quad h(z) = \delta_{\mathcal{X}}(x) + \delta_{\mathcal{Y}}(y).$$

Как и в случае задачи минимизации, неравенство (1) является необходимым условием оптимальности. В частности, если $f(x, y)$ выпукло-вогнута и $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{d_x}$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{d_y}$, это условие является также и достаточным, причем решение (x^*, y^*) вариационного неравенства тогда является глобальной седловой точкой:

$$f(x^*, y) \leq f(x, y) \leq f(x, y^*) \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad y \in \mathcal{Y}.$$

Эти примеры показывают, что класс задач ВН достаточно широк. В частности, задачи минимизации могут рассматриваться в общности ВН. Но обычно предпочитают проводить анализ задачи минимизации отдельно и независимо. На данный момент анализ задач минимизации разработан гораздо шире и глубже, чем для задач ВН. Это связано со сложностью задачи ВН: многие техники из минимизации еще не перенесены или не могут быть перенесены на ВН. Поэтому прежде всего решение ВН интересно с точки зрения нахождения СТ.

Задачи СТ имеют множество практических приложений. Как, например, хорошо известные классические примеры из теории игр и оптимального управления (см. [1]). В последние годы задачи СТ стали популярными и в нескольких других отношениях. Можно отметить ветвь работ, посвященных решению негладких задач путем их переформулирования в виде задачи СТ (см. [2], [3]), а также применение таких подходов к задачам обработки изображений (см. [4], [5]). Однако в первую очередь интересны приложения седловых задач в машинном обучении. Конечно, прежде всего здесь стоит упомянуть о GAN. В классической формулировке [6] обучение этих моделей является минимаксной задачей.

Довольно большая часть прикладных задач, в том числе задачи машинного обучения, являются стохастическими, поэтому естественно сосредоточиться на случае, когда невыгодно (или даже невозможно) вычислить полное значение градиента и когда вместо этого используются некоторые стохастические оценки. Например, для функции из (2), имеющей вид $f(x, y) = \mathbb{E}_{p_x \sim D_x, p_y \sim D_y} [f_{p_x, p_y}(x, y)]$. В частности, в случае GAN f есть функция потерь, а переменные x и y интерпретируются как относящиеся к двум моделям: x – параметры дискриминатора, а y – генератора, p_x – обучающий пример из реального набора данных, p_y – случайный вектор, который генератор использует для создания поддельных копий реального набора данных. Стандартное предположение статистического обучения состоит в том, что распределение данных D_x неизвестно, а потому полный градиент $\nabla_x f(x, y)$ не может быть вычислен, тогда как можно легко вычислить градиент для некоторых отдельных данных. Возвращаясь к основной проблеме (1) этой статьи, интерпретируем сказанное выше следующим образом: предположим, что мы не имеем доступа к “честному” $F(z)$, а только к некоторой несмещенной стохастической оценке $F(z, \xi)$:

$$F(z) = \mathbb{E}_{\xi \sim p} [F(z, \xi)]. \quad (3)$$

В настоящей работе нас также будет интересовать другая стохастическая постановка задачи (1), это тот случай, когда значение F – это среднее значение большого числа операторов:

$$F(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F_m(z). \quad (4)$$

Такие постановки возникают в результате применения подхода интегрирования Монте-Карло. Например, пусть для (2) имеется M частей набора данных, тогда можно вычислить градиенты

$\nabla_x f_m(x, y)$, $\nabla_y f_m(x, y)$ для каждой из этих частей, тогда как вычисление полных градиентов $\nabla_x f(x, y)$, $\nabla_y f(x, y)$ будет очень дорогим и потребует много времени. Отсюда кажется естественным выбирать случайный индекс m части набора данных на каждой итерации и учитывать градиенты только на ней. Этот подход обычно используется при практическом решении задач обучения.

Приведенный выше взгляд на (4) справедлив в случае, когда у нас есть только одно устройство для вычислений. Однако в случае распределенного обучения можно просто обмениваться данными между устройствами, и тогда каждому устройству будет соответствовать свой F_m . В такой постановке задачу также можно рассматривать в виде (4), но мы предпочтем переписать ее следующим образом:

$$F(Z) = \Phi(Z) + \lambda(Z - \bar{Z}), \tag{5}$$

где векторы $\Phi(Z) = [F_1^T(z_1), \dots, F_M^T(z_M)] \in \mathbb{R}^{Md}$, $Z = [z_1^T, \dots, z_M^T] \in \mathbb{R}^{Md}$ и $\bar{Z} = [\bar{z}^T, \dots, \bar{z}^T] \in \mathbb{R}^{Md}$ для $\bar{z} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M z_m$. Легко проверить, что задача минимизации $\min_{x_1, \dots, x_M} \left[\sum_{m=1}^M f_m(x_m) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^M \|x_m - \bar{x}\|^2 \right]$ соответствует ВН с оператором (5). Аналогично, задача СТ

$$\min_{x_1, \dots, x_M} \max_{y_1, \dots, y_M} \left[\sum_{m=1}^M f_m(x_m, y_m) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^M \|x_m - \bar{x}\|^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^M \|y_m - \bar{y}\|^2 \right]$$

также соответствует ВН с оператором (5) (как построить ВН из задачи минимизации и задачи нахождения седловой точки описано выше). Разобравшись в интуиции, переходим к интерпретации: z_1, \dots, z_M – локальные модели на каждом устройстве, \bar{z} – глобальная модель, полученная усреднением всех локальных моделей. Понятно, что нужно выбрать параметр регуляризации λ достаточно большим, чтобы решения задач (4) и (5) были примерно одинаковыми: $z_m \approx \bar{z}$. Но имеет ли смысл брать λ малым (например, когда $\lambda = 0$, мы имеем просто локальные модели)? Оказывается, да: такая постановка задачи с переменной λ , значение которой может варьироваться, породила целую тенденцию в персонализированном федеративном обучении – федеративное обучение со смешиванием (см. [7], [8]). Постановка (5) будет последней из формулировок задачи (1), которые будут исследоваться в рамках предлагаемого унифицированного анализа.

1.1. Экстраградиентный метод

Стохастический градиентный спуск по-прежнему является основным методом минимизации, он используется для большого количества задач машинного обучения, несмотря на наличие более современных методов. Основным же методом решения гладких вариационных неравенств является экстраградиентный метод (см. [9]). В простом виде методы такого рода записываются следующим образом:

$$z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(z^k - \gamma g^k), \quad z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(z^k - \gamma g^{k+1/2}), \tag{6}$$

где $\text{prox}_{\gamma h}(z) = \arg \min_x \left\{ \gamma h(x) + \frac{1}{2} \|z - x\|^2 \right\}$. В классическом, детерминированном, варианте $g^k = F(z^k)$ и $g^{k+1/2} = F(z^{k+1/2})$. Этот метод оптимален с точностью до численных констант для гладких монотонных и сильно монотонных вариационных неравенств (см. [10]). Причем на практике этот метод показывает себя лучше, чем спуск с итерацией обычного вида $z^{k+1} = z^k - \gamma g^k$. Более того, известно, что метод без дополнительного шага расходится для наиболее распространенных билинейных задач. Следовательно, вычисление $z^{k+1/2}$ является ключевым. В настоящей работе для нашего унифицированного анализа мы используем метод (6) с несколько более сложной структурой:

$$\bar{z}^k = \tau z^k + (1 - \tau)w^k, \quad z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma g^k), \quad z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma g^{k+1/2}), \tag{7}$$

где $w^{k+1} = z^{k+1}$ с вероятностью $(1 - \tau)$ или w^k – иначе. Видно, что при $\tau = 0$ верно $w^k = z^k$, и метод (7) в точности соответствует (6). Метод (7) был впервые предложен в [11].

1.2. От минимизации к ВН

Метод SGD используется для решения задач минимизации с середины прошлого века (см. [12]) и с того времени был расширен огромным количеством различных модификаций. Это методы уменьшения дисперсии (см. [13]), квантования (см. [14]), координатные методы (см. [15]) и т.д. (различные варианты SGD см. в [16]). В отличие от задач минимизации, вариационные неравенства и седловые задачи не имеют такого широкого набора теоретических результатов, хотя базовый метод для задачи ВН и более сложен, и дает широкий простор для творчества. Но в то же время развитие тех же идей, что и для задач минимизации, для ВН происходит значительно медленнее, в том числе и из-за того, что ВН более общи и сложны в теоретическом анализе. Далее мы перечислим основные достижения в области решения ВН касательно конструирования методов, подобных уже существующим методам минимизации.

Базовые методы. Как отмечалось ранее, базовым методом решения ВН является экстраградиентный метод (см. [9]); еще более общая его версия называется Mirror Prox (см. [3]). Анализ в стохастическом случае с ограниченной дисперсией шума описан в [10]. Стоит обратить внимание на интересные модификации этого метода: с одним дополнительным вызовом оракула (см. [17]) и с повторным вызовом (см. [18]). Можно также причислить классические методы, отличающиеся по структуре от экстраградиентного из [19], [20].

Редукция дисперсии. Направление разработки методов редукции дисперсии для задач ВН и СТ развивалось, начиная с работы [21], где представлен метод, основанный на сильно выпукло–сильно вогнутых седлах (сильно монотонных ВН). Также в [22] был предложен метод для сильно монотонных ВН. Наконец, стоит выделить работу [11], которая пересекается с прошлыми результатами или повторяет их, предоставляя методы редукции дисперсии для монотонных и сильно монотонных ВН. Отметим, что приведенные выше методы сильно отличаются друг от друга, более того, они далеки от классической редукции дисперсии для задач минимизации.

Покомпонентные и квантизованные методы. Покомпонентные методы для задач СТ и ВН изучены не слишком хорошо. Можно выделить работы, посвященные конкретным покомпонентным методам для каких-то определенных классов задач СТ (см. [23], [24]), а также работы по безградиентным методам (см. [25]). Методы же с квантизацией, специализированные для задач СТ, до сих пор совсем не предлагались.

Локальные методы. Направление разработки локальных методов изучено совсем не в той мере (см. [26], [27]), как это сделано для задач минимизации. В настоящей работе мы обращаем внимание не на детерминированные методы типа Local SGD, а на рандомизированные, которые могут быть применены для решения задачи (5), например, как описанные в [7]. Суть этих методов в том, что мы с некоторой вероятностью вызываем и делаем шаг только по оракулу для $\Phi(Z)$, иначе обращаемся к $\lambda(Z - \bar{Z})$. Вызов $\Phi(Z)$ соответствует локальной итерации, а вызов $\lambda(Z - \bar{Z})$ – коммуникации.

1.3. Наш вклад

Унифицированный анализ. В настоящей работе предлагается унифицированный теоретический анализ для методов типа (6) и (7) в сильно монотонном и монотонном случаях. Анализ основан на параметризованных предположениях, поэтому он позволяет легко конструировать и анализировать огромное количество новых методов.

Улучшенные оценки для существующих методов. В исходном анализе Past ES из [17] в стохастическом сильно монотонном случае достигается сублинейная скорость сходимости, тогда как мы можем гарантировать линейную скорость в детерминированном члене и сублинейную в стохастическом члене. Более того, мы предоставляем оценки для Past ES и в стохастическом монотонном случае. Кроме того, мы покрываем результаты для некоторых других существующих методов или немного их обобщаем.

Пять новых методов. Более важным, чем обобщение других результатов, является получение новых надежных методов. В отличие от [16], к моменту написания которой большинство анализируемых там методов уже были описаны в других работах, в нашей работе более половины методов являются новыми. Это покомпонентные методы, методы с квантизацией, методы с сэмплением по важности, локальные рандомизированные методы.

Эксперименты. Мы предоставляем сравнение методов на примере практической задачи, в котором демонстрируем, что предлагаемые нами новые методы могут превосходить по эффективности существующие. Эксперименты проводятся на искусственной билинейной задаче и в некоторых случаях на GAN.

2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для начала введем основные определения. Мы используем аннотацию $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ для скалярного произведения векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$. Оно порождает ℓ_2 -норму в пространстве \mathbb{R}^d в таком виде: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

2.1. Основные предположения

Далее нам потребуются два основных предположения. Наше первое предположение относится к монотонности оператора F из (1) и сильной выпуклости g . В частности, мы рассматриваем строго монотонный и монотонный случаи. С точки зрения задачи поиска седловой точки это соответствует сильно выпукло-сильно вогнутому и выпукло-вогнутому случаям.

Предположение 1. (СМ) Сильная монотонность/сильная выпуклость. *Существуют неотрицательные μ_F, μ_h такие, что $\mu_h + \mu_F > 0$ и следующие неравенства верны для всех $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$:*

$$\begin{aligned} \langle F(z_1) - F(z_2), z_1 - z_2 \rangle &\geq \mu_F \|z_1 - z_2\|^2, \\ h(z_1) - h(z_2) - \langle \nabla h(z_2), z_1 - z_2 \rangle &\geq \frac{\mu_h}{2} \|z_1 - z_2\|^2. \end{aligned}$$

(М) Монотонность/выпуклость. Для всех $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$

$$\langle F(z_1) - F(z_2), z_1 - z_2 \rangle \geq 0, \quad h(z_1) - h(z_2) - \langle \nabla h(z_2), z_1 - z_2 \rangle \geq 0.$$

Второе предположение ключевое и позволяет нам рассматривать разные методы для решения ВН в унифицированном виде. Суть этого предположения проста, аналогично с [16], мы вводим неравенства для основных членов, которые необходимо оценить при анализе экстра-градиентных методов.

Предположение 2. Пусть последовательности $\{z^k\}$ и $\{w^k\}$ были получены в результате случайных итераций (7). Предположим, что стохастические операторы $g^{k+1/2}$ не смещены для всех k :

$$\mathbb{E}[g^{k+1/2} | z^{k+1/2}] = F(z^{k+1/2}). \tag{10}$$

Далее предположим, что существуют неотрицательные $A, B, C, E, D_1, D_2, D_3$ и $\rho \in (0; 1]$ и случайная последовательность $\{\sigma^k\}$ (может быть нулевой), что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2] &\leq A\mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2] + B\mathbb{E}[\sigma_k^2] + D_1, \\ \mathbb{E}[\sigma_{k+1}^2] &\leq (1 - \rho)\mathbb{E}[\sigma_k^2] + C\mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2] + D_2, \\ \mathbb{E}[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2] &\leq E\mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2] + D_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Похожие неравенства могут быть найдены в анализе методов (6) и (7) (см. [10], [11]). Это первая работа, которая рассматривает вариационные неравенства в такой общности.

2.2. Унифицированная теорема

Мы готовы представить основной теоретический результат данной статьи. Для начала введем функцию Ляпунова, с помощью которой будем анализировать сходимость:

$$V^k = \tau \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2 + T\gamma^2 \sigma_k^2,$$

где константа $T > 0$. Этот критерий используется в сильно монотонном случае.

Для монотонного случая используется другой критерий – функция зазора (см. [3], [10]):

$$\text{Gap}(z) = \max_{u \in \mathcal{C}} [\langle F(u), z - u \rangle + h(z) - h(u)].$$

Здесь максимум берется не по всему множеству \mathcal{L} (как в классической версии), а по \mathcal{C} – компактному подмножеству множества \mathcal{L} . Таким образом, мы можем рассматривать неограниченные множества \mathcal{L} . Это допустимо, так как такой вариант критерия верен, если решение z^* лежит в \mathcal{C} (см. [20]).

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 2. Тогда, если дополнительно выполняется одно из условий предположения 1, верны следующие оценки:

- для сильно монотонного/сильно выпуклого случаев с $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2A+TC}}; \frac{1-\tau}{4(\mu_F + \mu_h)} \right\}$ и $T \geq \frac{4B}{\rho}$:

$$\mathbb{E}[V_K] \leq \max \left\{ \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right)^{K-1}; \left(1 - \frac{\rho}{2} \right)^{K-1} \right\} V_0 + \frac{\gamma^2(2D_1 + TD_2)}{\min \left\{ \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16}; \frac{\rho}{2} \right\}};$$

- для монотонного/выпуклого случаев с $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2A+TC} + E}$ и $T \geq \frac{2B}{\rho}$

$$\mathbb{E}[\text{Gap}(\bar{z}^K)] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} [\|z^0 - u\|^2] + 4\gamma^2 T \sigma_0^2}{\gamma K} + \gamma(7D_1 + 3TD_2 + D_3),$$

где $\bar{z}^K = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} z^{k+1/2}$.

Метод (7) в условиях предположения 2 сходится линейно в сильно монотонном случае и суб-линейно ($\sim 1/K$) в монотонном случае до определенного радиуса осцилляции сходимости, который зависит от второго члена в теореме 1. Формально можно добиться сходимости по этому члену за фиксированное число шагов. Для этого необходимо правильно выбрать шаг γ (см. [28]). Для некоторых методов мы используем это, чтобы получить классические оценки сходимости (см. подробнее об этом в п. 2.3). Оптимальный выбор шага для каждого метода находится в приложении, соответствующем этому методу.

Далее приведем доказательство теоремы 1. Для начала докажем лемму.

Лемма 1. Пусть h μ_h – сильно выпуклая и $z^+ = \text{prox}_{\gamma h}(z)$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^d$ справедливо следующее неравенство:

$$\langle z^+ - z, x - z^+ \rangle \geq \gamma \left(h(z^+) - h(x) + \frac{\mu_h}{2} \|z^+ - x\|^2 \right).$$

Доказательство. Мы используем $\gamma\mu$ -сильно выпуклость функции γh (9):

$$\gamma(h(x) - h(z^+)) - \langle \gamma \nabla h(z^+), x - z^+ \rangle \geq \frac{\gamma \mu_h}{2} \|x - z^+\|^2.$$

Вместе с определением prox и необходимым условием оптимума: $\gamma \nabla h(z^+) = z - z^+$, это завершает доказательство.

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 для $z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma g^k)$ и $z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma g^{k+1/2})$ для $x = u$ получаем

$$\begin{aligned} \langle z^{k+1} - \bar{z}^k + \gamma g^{k+1/2}, u - z^{k+1} \rangle &\geq \gamma \left(h(z^{k+1}) - h(u) + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - u\|^2 \right), \\ \langle z^{k+1/2} - \bar{z}^k + \gamma g^k, z^{k+1} - z^{k+1/2} \rangle &\geq \gamma \left(h(z^{k+1/2}) - h(z^{k+1}) + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Далее суммируем два неравенства и проводим некоторые перестановки:

$$\begin{aligned} & \langle z^{k+1} - \bar{z}^k, u - z^{k+1} \rangle + \langle z^{k+1/2} - \bar{z}^k, z^{k+1} - z^{k+1/2} \rangle + \gamma \langle g^{k+1/2} - g^k, z^{k+1/2} - z^{k+1} \rangle + \\ & + \gamma \langle g^{k+1/2}, u - z^{k+1/2} \rangle \geq \gamma \left(h(z^{k+1/2}) - h(u) + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - u\|^2 \right). \end{aligned}$$

Умножая на 2 и используя определение \bar{z}^k из (7), получаем

$$\begin{aligned} & 2\tau \langle z^{k+1} - z^k, u - z^{k+1} \rangle + 2(1 - \tau) \langle z^{k+1} - w^k, u - z^{k+1} \rangle + 2\tau \langle z^{k+1/2} - z^k, z^{k+1} - z^{k+1/2} \rangle + \\ & + 2(1 - \tau) \langle z^{k+1/2} - w^k, z^{k+1} - z^{k+1/2} \rangle + 2\gamma \langle g^{k+1/2} - g^k, z^{k+1/2} - z^{k+1} \rangle + 2\gamma \langle g^{k+1/2}, u - z^{k+1/2} \rangle \geq \\ & \geq 2\gamma \left(h(z^{k+1/2}) - h(u) + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - u\|^2 \right). \end{aligned}$$

Для первой и второй строки используем выражение $2\langle a, b \rangle = \|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$ и получаем

$$\begin{aligned} & \tau \left(\|z^k - u\|^2 - \|z^{k+1} - z^k\|^2 - \|z^{k+1} - u\|^2 \right) + (1 - \tau) \left(\|w^k - u\|^2 - \|z^{k+1} - w^k\|^2 - \|z^{k+1} - u\|^2 \right) + \\ & + \tau \left(\|z^{k+1} - z^k\|^2 - \|z^{k+1/2} - z^k\|^2 - \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right) + (1 - \tau) \left(\|z^{k+1} - w^k\|^2 - \|z^{k+1/2} - w^k\|^2 - \right. \\ & \left. - \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right) + 2\gamma \langle g^{k+1/2} - g^k, z^{k+1/2} - z^{k+1} \rangle + 2\gamma \langle g^{k+1/2}, u - z^{k+1/2} \rangle \geq \\ & \geq 2\gamma \left(h(z^{k+1/2}) - h(u) + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 + \frac{\mu_h}{2} \|z^{k+1} - u\|^2 \right). \end{aligned}$$

Небольшая перестановка дает

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma\mu_h) \|z^{k+1} - u\|^2 \leq \tau \|z^k - u\|^2 + (1 - \tau) \|w^k - u\|^2 - \tau \|z^{k+1/2} - z^k\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1/2} - w^k\|^2 - \\ & - (1 + \gamma\mu_h) \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 + 2\gamma \langle g^{k+1/2} - g^k, z^{k+1/2} - z^{k+1} \rangle - 2\gamma \langle g^{k+1/2}, z^{k+1/2} - u \rangle - 2\gamma (h(z^{k+1/2}) - h(u)). \end{aligned}$$

Из простого факта: $2\langle a, b \rangle \leq \eta \|a\|^2 + \frac{1}{\eta} \|b\|^2$ с $a = g^{k+1/2} - g^k$, $b = z^{k+1/2} - z^{k+1}$, $\eta = 2\gamma$, следует

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma\mu_h) \|z^{k+1} - u\|^2 \leq \tau \|z^k - u\|^2 + (1 - \tau) \|w^k - u\|^2 - \tau \|z^{k+1/2} - z^k\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1/2} - w^k\|^2 - \\ & - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h \right) \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 + 2\gamma^2 \|g^{k+1/2} - g^k\|^2 - 2\gamma \langle g^{k+1/2}, z^{k+1/2} - u \rangle - 2\gamma (h(z^{k+1/2}) - h(u)). \end{aligned} \tag{12}$$

Далее рассмотрим разные случаи теоремы. Начнем с сильно монотонного/выпуклого случая. Заменим $u = z^*$, возьмем полное математическое ожидание и получим

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma\mu_h) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \tau \mathbb{E} \left[\|z^k - z^*\|^2 \right] + (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|w^k - z^*\|^2 \right] - \tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] - \\ & - (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h \right) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2\gamma^2 \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] - \\ & - 2\gamma \mathbb{E} \left[\langle g^{k+1/2}, z^{k+1/2} - z^* \rangle + h(z^{k+1/2}) - h(z^*) \right] = \tau \mathbb{E} \left[\|z^k - z^*\|^2 \right] + (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|w^k - z^*\|^2 \right] - \\ & - (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h \right) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2\gamma^2 \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] - \\ & - 2\gamma \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [g^{k+1/2} | z^{k+1/2}], z^{k+1/2} - z^* \right] + h(z^{k+1/2}) - h(z^*). \end{aligned}$$

Далее применим предположение 2, а именно, (10) и (11):

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma\mu_h) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \tau \mathbb{E} \left[\|z^k - z^*\|^2 \right] + (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|w^k - z^*\|^2 \right] - \tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] - \\ & - (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h \right) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2\gamma^2 \left(A \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + B \mathbb{E} [\sigma_k^2] + D_1 \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\gamma\mathbb{E}\left[\left\langle F(z^{k+1/2}), z^{k+1/2} - z^* \right\rangle + h(z^{k+1/2}) - h(z^*)\right] = \tau\mathbb{E}\left[\|z^k - z^*\|^2\right] + (1-\tau)\mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right] - \\
& -\tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2\right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2\right] - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] + 2\gamma^2 B\mathbb{E}\left[\sigma_k^2\right] - \\
& -2\gamma\mathbb{E}\left[\left\langle F(z^{k+1/2}), z^{k+1/2} - z^* \right\rangle + h(z^{k+1/2}) - h(z^*)\right] + 2\gamma^2 D_1.
\end{aligned}$$

Свойство решения (1) дает

$$\begin{aligned}
(1 + \gamma\mu_h)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] & \leq \tau\mathbb{E}\left[\|z^k - z^*\|^2\right] + (1-\tau)\mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right] - \tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2\right] - \\
& - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2\right] - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] + 2\gamma^2 B\mathbb{E}\left[\sigma_k^2\right] - \\
& - 2\gamma\mathbb{E}\left[\left\langle F(z^{k+1/2}) - F(z^*), z^{k+1/2} - z^* \right\rangle\right] + 2\gamma^2 D_1.
\end{aligned}$$

И по предположению 1 в сильно монотонном случае получим

$$\begin{aligned}
(1 + \gamma\mu_h)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] & \leq \tau\mathbb{E}\left[\|z^k - z^*\|^2\right] + (1-\tau)\mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right] - \tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2\right] - \\
& - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2\right] - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] + 2\gamma^2 B\mathbb{E}\left[\sigma_k^2\right] - \\
& - 2\gamma\mu_f\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^*\|^2\right] + 2\gamma^2 D_1.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E}\left[\|w^{k+1} - z^*\|^2\right] = (1-\tau)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] + \tau\mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right].$$

Суммируя два предыдущих неравенства, имеем

$$\begin{aligned}
\tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|w^{k+1} - z^*\|^2\right] & \leq \tau\mathbb{E}\left[\|z^k - z^*\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right] - \tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2\right] - \\
& - \gamma\mu_h\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2\right] - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] + \\
& + 2\gamma^2 B\mathbb{E}\left[\sigma_k^2\right] + 2\gamma^2 D_1 - 2\gamma\mu_f\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^*\|^2\right].
\end{aligned}$$

Добавив $\mathbb{E}\left[\gamma^2 T \sigma_{k+1}^2\right]$, мы получим функцию Ляпунова с левой стороны:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_{k+1}] & = \tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|w^{k+1} - z^*\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\gamma^2 T \sigma_{k+1}^2\right] \leq \tau\mathbb{E}\left[\|z^k - z^*\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right] - \\
& - \tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2\right] - 2\gamma\mu_f\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^*\|^2\right] - \gamma\mu_h\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2\right] - \\
& - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] + 2\gamma^2 B\mathbb{E}\left[\sigma_k^2\right] + \mathbb{E}\left[\gamma^2 T \sigma_{k+1}^2\right] + 2\gamma^2 D_1.
\end{aligned}$$

С предположением 2 для σ_{k+1} получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_{k+1}] & \leq \tau\mathbb{E}\left[\|z^k - z^*\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|w^k - z^*\|^2\right] + \left(1 - \rho + \frac{2B}{T}\right)\mathbb{E}\left[\gamma^2 T \sigma_k^2\right] - \tau\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2\right] - \\
& - \gamma\mu_h\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^*\|^2\right] - \left(\frac{1}{2} + \gamma\mu_h\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2\right] - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A - \gamma^2 TC\right)\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] - \\
& - 2\gamma\mu_f\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - z^*\|^2\right] + \gamma^2(2D_1 + TD_2).
\end{aligned}$$

Используем $-\|z^{k+1} - z^*\|^2 \leq -\frac{1}{2}\|z^{k+1/2} - z^*\|^2 + \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2$, что дает

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{k+1}] &\leq \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] + \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \left(1 - \rho + \frac{2B}{T}\right) \mathbb{E}[\gamma^2 T \sigma_k^2] - \tau \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2] - \\ &\quad - \left((1 - \tau) - 2\gamma^2 A - \gamma^2 TC\right) \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2] - \left(\frac{1}{2} + \gamma \mu_h\right) \mathbb{E}[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2] - \\ &\quad - \gamma \left(2\mu_F + \frac{\mu_h}{2}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^*\|^2] - \gamma \left(2\mu_F + \frac{\mu_h}{2}\right) (1 - \tau) \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^*\|^2] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2). \end{aligned}$$

Из простых фактов: $\|z^{k+1/2} - z^*\|^2 \geq \frac{1}{2}\|z^k - z^*\|^2 - \|z^{k+1/2} - z^k\|^2$ и $\|z^{k+1/2} - z^*\|^2 \geq \frac{1}{2}\|w^k - z^*\|^2 - \|z^{k+1/2} - w^k\|^2$, следует

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{k+1}] &\leq \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] + \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \left(1 - \rho + \frac{2B}{T}\right) \mathbb{E}[\gamma^2 T \sigma_k^2] - \\ &\quad - \left((1 - \tau) - 2\gamma^2 A - \gamma^2 TC - \gamma \left(2\mu_F + \frac{\mu_h}{2}\right) (1 - \tau)\right) \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2] - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \gamma \mu_h\right) \mathbb{E}[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2] - \left(1 - \gamma \left(2\mu_F + \frac{\mu_h}{2}\right)\right) \tau \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2] - \\ &\quad - \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) (1 - \tau) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Далее работаем с предпоследней строкой (13):

$$\begin{aligned} &-\gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) (1 - \tau) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] = -\frac{\gamma}{2} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \\ &-\frac{\gamma}{2} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) (1 - \tau) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] \leq -\frac{\gamma}{2} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \\ &-\frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \frac{\gamma}{2} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - w^k\|^2] - \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) (1 - \tau) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] \leq \\ &\leq -\frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \frac{\gamma}{2} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - w^k\|^2] \leq \\ &\leq -\frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2] + \\ &\quad + \gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2]. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{k+1}] &\leq \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] + \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \left(1 - \rho + \frac{2B}{T}\right) \mathbb{E}[\gamma^2 T \sigma_k^2] - \\ &\quad - \left((1 - \tau) - 2\gamma^2 A - \gamma^2 TC - \gamma \left(2\mu_F + \frac{\mu_h}{2}\right)\right) \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2] - \left(\frac{1}{2} + \gamma \mu_h\right) \mathbb{E}[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2] - \\ &\quad - \left(1 - 3\gamma \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right)\right) \tau \mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2] - \frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] - \\ &\quad - \frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right) \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Остается только выбрать $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1 - \tau}}{2\sqrt{2A + TC}}; \frac{1 - \tau}{4(\mu_F + \mu_h)} \right\}$, $T \geq \frac{4B}{\rho}$ и получить

$$\mathbb{E}[V_{k+1}] \leq \left(1 - \frac{\gamma}{4} \left(\mu_F + \frac{\mu_h}{4}\right)\right) \left(\tau \mathbb{E}[\|z^k - z^*\|^2] + \mathbb{E}[\|w^k - z^*\|^2]\right) + \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \mathbb{E}[\gamma^2 T \sigma_k^2] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2).$$

В результате

$$\mathbb{E}[V_{k+1}] \leq \max \left\{ \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right); \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) \right\} \mathbb{E}[V_k] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2).$$

Выполнение рекурсивных переходов завершает доказательство.

Далее рассмотрим монотонный/выпуклый случай ($\mu_h = 0, \mu_F = 0$). Начнем с (12) с дополнительным обозначением $\text{gap}(z^{k+1/2}, u) = \langle F(z^{k+1/2}), z^{k+1/2} - u \rangle + h(z^{k+1/2}) - h(u)$:

$$2\gamma \text{gap}(z^{k+1/2}, u) + \|z^{k+1} - u\|^2 \leq \tau \|z^k - u\|^2 + (1 - \tau) \|w^k - u\|^2 - \tau \|z^{k+1/2} - z^k\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1/2} - w^k\|^2 + 2\gamma^2 \|g^{k+1/2} - g^k\|^2 - 2\gamma \langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), z^{k+1/2} - u \rangle.$$

Добавив к обеим частям $\|w^{k+1} - u\|^2$ и проведя некоторые перестановки, получим

$$2\gamma \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \leq \left[\tau \|z^k - u\|^2 + \|w^k - u\|^2 \right] - \left[\tau \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] - \tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 - \tau \|z^{k+1/2} - z^k\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1/2} - w^k\|^2 + 2\gamma^2 \|g^{k+1/2} - g^k\|^2 - 2\gamma \langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), z^{k+1/2} - u \rangle.$$

Просуммируем по $k = 0, 1, \dots, K-1$, возьмем максимум от обеих частей по $z \in \mathcal{C}$, далее возьмем математическое ожидание и получим

$$2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\tau \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] + (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - 2\gamma^2 \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] \right] + 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), u - z^{k+1/2} \rangle \right] \right].$$

Используя предположение 2 для $\mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right]$, получаем

$$2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\tau \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] + (1 - \tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - 2\gamma^2 \left(A \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + B \mathbb{E} \left[\sigma_k^2 \right] + D_1 \right) \right] + 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), u - z^{k+1/2} \rangle \right] \right].$$

Добавим и вычтем $\sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \mathbb{E} \left[\sigma_{k+1}^2 \right] \right]$ и применим предположение 2 для σ_k , что дает

$$2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\tau \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \mathbb{E} \left[\sigma_{k+1}^2 \right] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \mathbb{E} \left[\sigma_{k+1}^2 \right] \right] + \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - \tau - 2\gamma^2 A) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + 2\gamma^2 K D_1 + \sum_{k=0}^{K-1} \left[2\gamma^2 B \mathbb{E} [\sigma_k^2] \right] + \\
 & + 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), u - z^{k+1/2} \rangle \right] \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\tau \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \left((1 - \rho) \mathbb{E} [\sigma_k^2] + C \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + D_2 \right) \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \mathbb{E} [\sigma_{k+1}^2] \right] + \\
 & + \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] \right] + \\
 & + (1 - \tau - 2\gamma^2 A) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + 2\gamma^2 K D_1 + \sum_{k=0}^{K-1} \left[2\gamma^2 B \mathbb{E} [\sigma_k^2] \right] + \\
 & + 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), u - z^{k+1/2} \rangle \right] \right] = \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\tau \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \left(1 + \frac{2B}{T} - \rho \right) \mathbb{E} [\sigma_k^2] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma^2 T \mathbb{E} [\sigma_{k+1}^2] \right] + \\
 & + \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] - \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2 \right] \right] + \\
 & + (1 - \tau - \gamma^2 (2A + TC)) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + \gamma^2 K (2D_1 + TD_2) + \\
 & + 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), u - z^{k+1/2} \rangle \right] \right].
 \end{aligned}$$

С $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{\sqrt{2A+TC}}$ и $T \geq \frac{2B}{\rho}$ получим

$$\begin{aligned}
 & 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\tau \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \gamma^2 T \sigma_0^2 + \\
 & + \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1 - \tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] + \\
 & + 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\langle g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2}), u - z^{k+1/2} \rangle \right] \right] + \gamma^2 K (2D_1 + TD_2).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Для того чтобы завершить доказательство, надо оценить члены в последних двух строках. Начнем с $\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \langle F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}, z^{k+1/2} - u \rangle \right]$. Определим последовательность v : $v^0 = z^0$, $v^{k+1} = \text{прох}_{\gamma h}(v^k - \gamma \delta_k)$ с $\delta^k = F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}$. Тогда получим

$$\sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - u \rangle = \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - v^k \rangle + \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, v^k - u \rangle. \tag{17}$$

По определению v^{k+1} (свойство прох), для всех $z \in \mathcal{Z}$

$$\langle v^{k+1} - v^k + \gamma \delta^k, z - v^{k+1} \rangle \geq 0.$$

Переписав это неравенство, получим

$$\begin{aligned} \langle \gamma \delta^k, v^k - z \rangle &\leq \langle \gamma \delta^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \langle v^{k+1} - v^k, z - v^{k+1} \rangle \leq \langle \gamma \delta^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{1}{2} \|v^k - z\|^2 - \\ &- \frac{1}{2} \|v^{k+1} - z\|^2 - \frac{1}{2} \|v^k - v^{k+1}\|^2 \leq \frac{\gamma^2}{2} \|\delta^k\|^2 + \frac{1}{2} \|v^k - v^{k+1}\|^2 + \frac{1}{2} \|v^k - z\|^2 - \frac{1}{2} \|v^{k+1} - z\|^2 - \\ &- \frac{1}{2} \|v^k - v^{k+1}\|^2 = \frac{\gamma^2}{2} \|\delta^k\|^2 + \frac{1}{2} \|v^k - z\|^2 - \frac{1}{2} \|v^{k+1} - z\|^2. \end{aligned}$$

Вместе с (17) это дает

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - u \rangle &\leq \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - v^k \rangle + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{\gamma^2}{2} \|\delta^k\|^2 + \frac{1}{2} \|v^k - u\|^2 - \frac{1}{2} \|v^{k+1} - u\|^2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - v^k \rangle + \frac{\gamma}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \|\delta^k\|^2 + \frac{1}{2\gamma} \|v^0 - u\|^2. \end{aligned}$$

Берем максимум по u и получаем

$$\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - u \rangle \leq \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - v^k \rangle + \frac{1}{2\gamma} \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 + \frac{\gamma}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \|F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}\|^2.$$

Берем полное математическое ожидание и получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - u \rangle \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \langle \delta^k, z^{k+1/2} - v^k \rangle \right] + \frac{\gamma}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}\|^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2\gamma} \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \langle \mathbb{E} [F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2} | z^{k+1/2} - v^k], z^{k+1/2} - v^k \rangle \right] + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}\|^2 \right] + \frac{1}{2\gamma} \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 = \frac{\gamma}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}\|^2 \right] + \frac{1}{2\gamma} \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее оценим

$$\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1-\tau) \|z^{k+1} + u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right],$$

для этого заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1-\tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-2 \langle (1-\tau) z^{k+1} + \tau w^k - w^{k+1}, u \rangle - (1-\tau) \|z^{k+1}\|^2 - \tau \|w^k\|^2 + \|w^{k+1}\|^2 \right] \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-2 \langle (1-\tau) z^{k+1} + \tau w^k - w^{k+1}, u \rangle \right] \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{K-1} - (1-\tau) \|z^{k+1}\|^2 - \tau \|w^k\|^2 + \|w^{k+1}\|^2 \right]. \end{aligned}$$

По определению, w^{k+1} : $\mathbb{E} \left[(1-\tau) \|z^{k+1}\|^2 + \tau \|w^k\|^2 - \|w^{k+1}\|^2 \right] = 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[-\tau \|w^k - u\|^2 - (1-\tau) \|z^{k+1} - u\|^2 + \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] = \\ &= 2\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \langle (1-\tau) z^{k+1} + \tau w^k - w^{k+1}, -u \rangle \right] = 2\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \langle (1-\tau) z^{k+1} + \tau w^k - w^{k+1}, u \rangle \right]. \end{aligned}$$

Далее можно провести рассуждения аналогично цепочке рассуждений для (18):

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau \|w^k - u\|^2 + (1-\tau) \|z^{k+1} - u\|^2 - \|w^{k+1} - u\|^2 \right] \right] \leq \\
 & \leq \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[\|(1-\tau)z^{k+1} + \tau w^k - w^{k+1}\|^2 \right] + \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[\|\mathbb{E}_{w^{k+1}}[w^{k+1}] - w^{k+1}\|^2 \right] + \\
 & + \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[-\|\mathbb{E}_{w^{k+1}}[w^{k+1}]\|^2 + \mathbb{E}_{w^{k+1}} \|w^{k+1}\|^2 \right] + \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 = \\
 & = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} \left[-\|(1-\tau)z^{k+1} + \tau w^k\|^2 + (1-\tau) \|z^{k+1}\|^2 + \tau \|w^k\|^2 \right] + \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2 = \\
 & = \sum_{k=0}^{K-1} \tau(1-\tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - w^k\|^2 \right] + \max_{u \in \mathcal{C}} \|v^0 - u\|^2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Подставив (18) и (19) в (16), получим

$$\begin{aligned}
 & 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[(2+\tau) \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \gamma^2 T \sigma_0^2 + \\
 & + \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau(1-\tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - w^k\|^2 \right] + \gamma^2 \mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}\|^2 \right] \right] + \gamma^2 K(2D_1 + TD_2).
 \end{aligned}$$

Предположение 2 для $\mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - g^{k+1/2}\|^2 \right]$ дает

$$\begin{aligned}
 & 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[(2+\tau) \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{K-1} \left[\tau(1-\tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - w^k\|^2 \right] + \gamma^2 E \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] \right] + \gamma^2 T \sigma_0^2 + \gamma^2 K(2D_1 + TD_2 + D_3).
 \end{aligned}$$

С $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{\sqrt{E}}$ приходим к

$$\begin{aligned}
 & 2\gamma \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{C}} \sum_{k=0}^{K-1} \text{gap}(z^{k+1/2}, u) \right] \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[(2+\tau) \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + (1-\tau) \sum_{k=0}^{K-1} \left[\mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - w^k\|^2 \right] + \right. \\
 & + \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] \left. \right] + \gamma^2 T \sigma_0^2 + \gamma^2 K(2D_1 + TD_2 + D_3) \leq \max_{u \in \mathcal{C}} \left[(2+\tau) \|z^0 - u\|^2 + \|w^0 - u\|^2 \right] + \\
 & + \gamma^2 T \sigma_0^2 + 3(1-\tau) \sum_{k=0}^{K-1} \left[\mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] \right] + \gamma^2 K(2D_1 + TD_2 + D_3).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Вернемся к (15) с $\mu_h = 0, \mu_F = 0, T \geq \frac{2B}{\rho}, \gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2A+TC}}$ и получим

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[V_{k+1}] \leq \mathbb{E}[V_k] - \left((1-\tau) - 2\gamma^2 A - \gamma^2 TC \right) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2) \leq \\
 & \leq \mathbb{E}[V_k] - \frac{(1-\tau)}{2} \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] - \frac{(1-\tau)}{2} \mathbb{E} \left[\|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] + \gamma^2 (2D_1 + TD_2).
 \end{aligned}$$

Откуда

$$3(1-\tau) \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 + \|z^{k+1} - z^{k+1/2}\|^2 \right] \leq 6\mathbb{E}[V_k - V_{k+1}] + 6\gamma^2 (2D_1 + TD_2). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), получаем

$$\begin{aligned} 2\gamma\mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{C}}\sum_{k=0}^{K-1}\text{gap}(z^{k+1/2},u)\right] &\leq \max_{u\in\mathcal{C}}\left[(2+\tau)\|z^0-u\|^2+\|w^0-u\|^2\right]+\gamma^2T\sigma_0^2+ \\ &+ 6\sum_{k=0}^{K-1}\left[\mathbb{E}[V_k]-\mathbb{E}[V_{k+1}]+\gamma^2(2D_1+TD_2)\right]+\gamma^2K(2D_1+TD_2+D_3)\leq \\ &\leq \max_{u\in\mathcal{C}}\left[(2+7\tau)\|z^0-u\|^2+7\|w^0-u\|^2\right]+7\gamma^2T\sigma_0^2+\gamma^2K(14D_1+7TD_2+D_3)\leq \\ &\leq \max_{u\in\mathcal{C}}\left[16\|z^0-u\|^2\right]+7\gamma^2T\sigma_0^2+\gamma^2K(14D_1+7TD_2+D_3). \end{aligned}$$

Остается немного подкорректировать критерий сходимости на монотонность F и неравенство Йенсена для выпуклых функций:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{C}}\sum_{k=0}^{K-1}\text{gap}(z^{k+1/2},u)\right] &= \mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{C}}\sum_{k=0}^{K-1}\left[\langle F(z^{k+1/2}),z^{k+1/2}-u\rangle+h(z^{k+1/2})-h(u)\right]\right]\geq \\ &\geq \mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{C}}\sum_{k=0}^{K-1}\left[\langle F(u),z^{k+1/2}-u\rangle+h(z^{k+1/2})-h(u)\right]\right]\geq \\ &\geq \mathbb{E}\left[K\max_{u\in\mathcal{C}}\left[\langle F(u),\bar{z}^K-u\rangle+h(\bar{z}^K)-h(u)\right]\right]=K\mathbb{E}\left[\text{Gap}(\bar{z}^K)\right], \end{aligned}$$

где мы используем $\bar{z}^K = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}z^{k+1/2}$. Что приводит к

$$\mathbb{E}\left[\text{Gap}(\bar{z}^K)\right]\leq\frac{8\max_{u\in\mathcal{C}}\left[\|z^0-u\|^2\right]+4\gamma^2T\sigma_0^2}{\gamma K}+\gamma(7D_1+3TD_2+D_3).$$

2.3. Анализ для различных методов

Здесь мы устанавливаем связь между единым анализом и конкретными методами, удовлетворяющими предположению 2. В скобках указаны разделы Приложения, где представлен псевдокод соответствующего метода, а также его анализ при предположении 2, основанный на применении теоремы 1. В большинстве случаев анализируются операторы, удовлетворяющие следующему условию.

Предположение 3. $F(z)$ – ограниченно-липшицев с константами L и D , т.е. для любых $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$ верно

$$\|F(z_1)-F(z_2)\|^2\leq L^2\|z_1-z_2\|^2+D^2.$$

Заметим, что для $D=0$ это эквивалентно определению липшицевости. При $D>0$ это предположение покрывает случай, когда оператор не является липшицевым, но ограничен.

• **Существующие методы (A.1)–(A.3).** Прежде всего хотелось бы упомянуть методы, которые соответствуют нашему параметризованному предположению. Это, конечно, классический экстраградиентный (см. [10]) для задачи (1)–(3). Далее отметим методы с однократным вызовом оракула (см. [17]); отличие этих методов от классического экстраградиентного в том, что на каждой итерации они вычисляют новое значение оператора F лишь один раз. Например, этого можно добиться, используя значение F с предыдущей итерации: $g^k = F(z^{k-1/2})$, $g^{k+1/2} = F(z^{k+1/2})$ (в экстраградиентном методе имеем $g^k = F(z^k)$, $g^{k+1/2} = F(z^{k+1/2})$). Вариант метода редукции дисперсии (см. 11), специализированный для задач решения ВН (1)–(4) также удовлетворяет условиям предлагаемого анализа.

Ко-коэрцитивность. Это предположение аналогично липшицевости оператора:

$$\|F(z_1)-F(z_2)\|^2\leq l\langle F(z_1)-F(z_2),z_1-z_2\rangle.$$

Видно, что l -коэрцитивный оператор также является l -липшицевым (обратное, вообще говоря, неверно). Более того, если F — градиент выпуклой функции, то l -липшицевость и l -коэрцитивность эквивалентны. В литературе имеется анализ некоторых методов (например, метода редукции дисперсии, см. [22]) с этим дополнительным допущением. Довольно легко проанализировать многие методы решения ВН с предположением ко-коэрцитивности. Мы также могли бы построить унифицированную теорию вокруг него и так перенести многие методы минимизации в контекст ВН. Но основная проблема предположения о ко-коэрцитивности состоит в том, что это свойство не выполняется для самой распространенной, билинейной, задачи. Поэтому такой анализ будет справедлив только для минимизации, а это уже сделано в [16].

Coord-ES для (1)–(3) (A.4). Наш первый новый метод позволяет работать не с полным оператором F , а выбирать его случайную координату (координаты) и делать шаг только вдоль нее. Методы этого типа называются координатными (см. [29]). С помощью таких методов можно произвести более тщательный поиск решения — выбрать направления, в которых оператор изменяется в большей степени, и проделывать больше шагов в этих направлениях (см. [30]). Также координатный метод очень близок к безградиентным методам (см. [25]), которые актуальны, когда мы работаем с функциями в соответствии с моделью черного ящика и не можем вычислить оператор F /градиент.

Quant-ES для (1)–(3) (A.5). Суть Quant-ES заключается в использовании так называемого оператора квантизации:

$$\mathbb{E}Q(x) = x, \quad \mathbb{E}\|Q(x)\|^2 = \omega\|x\| \quad \text{для любых } x.$$

Такие операторы могут быть рандомизированными или детерминированными с большим или малым параметром ω (см. [14], [32]), но все они имеют одну и ту же функцию — сжать вектор x . Методы с квантизацией популярны с точки зрения распределенной оптимизации, поскольку основной проблемой там является коммуникация, а сжатие позволяет передавать меньше информации и, следовательно, выигрывать в этом отношении. Мы представляем метод для вариационных неравенств, который может использовать квантизованный оператор.

QVR-ES for (1)–(4) (A.6). QVR-ES сочетает методы редукции дисперсии и квантизации, т.е. сначала мы выбираем случайную функцию с номером m из M вариантов, а затем также квантизуем ее. В простейшем виде это выглядит так: $Q(F_m(z))$, в нашем методе это делается немного в другом виде, но суть остается той же. Этот метод красочно демонстрирует гибкость нашего подхода и возможность создания различных комбинаций методов с использованием параметризованного предположения 2.

IS-ES (1)–(4) (5.7). В этом случае мы рассматриваем задачу более общую, чем (1)–(4). Здесь предполагаем, что мы не вызываем функции случайно и равномерно от 1 до M . Теперь каждый оператор F_m имеет свой вес, в зависимости от которого его можно вызывать чаще или реже.

Local-ES for (1)–(5) (5.8). Этот метод относится к так называемым локальным методам, которые делают ряд локальных обновлений между периодическими коммуникациями. Наш метод является рандомизированным (см. [7]) и основан на методе из предыдущего абзаца, а также использует технику сэмплирования по важности.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен экстраградиентный подход, базовый подход для решения вариационных неравенств, а также различные его модификации. Мы представили унифицированный анализ, с помощью которого можно единообразно анализировать семейство методов, основанных на экстраградиенте. Полученный унифицированный анализ позволил улучшить оценки сходимости уже существующих методов, а также представить новые методы и их гарантии сходимости. В будущем хотелось бы усовершенствовать анализ, чтобы в его предположения попадали методы, которые не могут быть описаны текущей версией анализа.

А. АНАЛИЗ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

А.1. Экстраградиентный метод

Начнем с простейшего случая в рамках (1)–(3) – стохастического с равномерно ограниченным шумом [10]:

$$F(z) = \mathbb{E}[F(z, \xi)], \quad \mathbb{E}[\|F(z, \xi) - F(z)\|^2] \leq \sigma^2,$$

где z и ξ независимые. Для него может быть применен следующий метод (Алгоритм 1):

Algorithm 1. Экстраградиентный метод (Extra Step)

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K - 1$

 Выбрать случайные $\xi^k, \xi^{k+1/2}$,

$$z^{k+1/2} = \text{прох}_{\gamma h}(z^k - \gamma F(z^k, \xi^k)),$$

$$z^{k+1} = \text{прох}_{\gamma h}(z^k - \gamma F(z^{k+1/2}, \xi^{k+1/2})).$$

end for

Заметим, что в этом алгоритме $\tau = 0$, и, следовательно, $w^k = z^k$ для любого k . Также мы полагаем $\sigma_k = 0$. Следующая лемма определяет константы и Предположения 2:

Лемма 2. Предположим, что F ограничено-липшицев с константами L и D (предположение 3), тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 5.1 удовлетворяют предположению 2 с константами $A = 3L^2$, $D_1 = 3D^2 + 6\sigma^2$, $D_3 = \sigma^2$.

Доказательство. Легко убедиться, что $g^{k+1/2}$ несмещенно. Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2] &= \mathbb{E}[\|F(z^{k+1/2}, \xi^{k+1/2}) - F(z^k, \xi^k)\|^2] \leq 3\mathbb{E}[\|F(z^{k+1/2}) - F(z^k)\|^2] + \\ &+ 3\mathbb{E}[\|F(z^{k+1/2}, \xi^{k+1/2}) - F(z^{k+1/2})\|^2] + 3\mathbb{E}[\|F(z^k, \xi^k) - F(z^k)\|^2] \leq \\ &\leq 3L^2\mathbb{E}[\|z^{k+1/2} - z^k\|^2] + 3D^2 + 6\sigma^2, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\mathbb{E}[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2] = \mathbb{E}[\|F(z^{k+1/2}, \xi^{k+1/2}) - F(z^{k+1/2})\|^2] \leq \sigma^2.$$

Следствие 1. Предположим, что F ограничено-липшицев с константами L и D . Тогда экстраградиентный метод Extra Step

- в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min\left\{\frac{1}{6L}; \frac{1}{4(\mu_F + \mu_h)}\right\}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}[\|z^K - z^*\|^2] \leq \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16}\right)^{K-1} \|z^0 - z^*\|^2 + \frac{96\gamma(D^2 + 2\sigma^2)}{\mu_F + \mu_h},$$

- в монотонном случае $\gamma \leq 1/3L$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}[\text{Gap}(\bar{z}^K)] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{L}} [\|z^0 - u\|^2]}{\gamma K} + \gamma(21D^2 + 43\sigma^2).$$

При правильном выборе γ (см., например, [28]), можно прийти к следующим оценкам скорости сходимости:

- в сильно монотонном случае

$$\mathbb{E} \left[\|z^K - z^*\|^2 \right] = \tilde{\mathcal{O}} \left(\exp \left(-\frac{(\mu_F + \mu_h)(K-1)}{96L} \right) \|z^0 - z^*\|^2 + \frac{(D^2 + \sigma^2)}{(\mu_F + \mu_h)^2(K-1)} \right),$$

- в монотонном случае

$$\mathbb{E} \left[\text{Gap}(\bar{z}^K) \right] = \mathcal{O} \left(\frac{L \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2 \right]}{K} + \frac{(D + \sigma) \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\| \right]}{\sqrt{K}} \right).$$

Замечание. Этот анализ покрывает гладкий случай при $D = 0$. Чтобы получить оценки для негладкого, но ограниченного оператора F , достаточно взять $L = 0$ и положить $1/L = +\infty$.

При правильном выборе γ (см., например, [28]), можно прийти к следующим оценкам скорости сходимости:

- в сильно монотонном случае

$$\mathbb{E} \left[\|z^K - z^*\|^2 \right] = \tilde{\mathcal{O}} \left(\exp \left(-\frac{(\mu_F + \mu_h)(K-1)}{96L} \right) \|z^0 - z^*\|^2 + \frac{(D^2 + \sigma^2)}{(\mu_F + \mu_h)^2(K-1)} \right),$$

- в монотонном случае

$$\mathbb{E} \left[\text{Gap}(\bar{z}^K) \right] = \mathcal{O} \left(\frac{L \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2 \right]}{K} + \frac{(D + \sigma) \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\| \right]}{\sqrt{K}} \right).$$

A.2. Экстраградиентный метод без дополнительного вызова оракула

Здесь мы также рассматриваем постановку, аналогичную рассматриваемой в предыдущем пункте: (1)–(3). Однако теперь рассматриваем модификацию метода Extra Step.

Лемма 3. Предположим, что F ограниченно-липшицев с константами L и M (предположение 3), тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 2 удовлетворяют предположению 2 с константами $\rho = 1/3$, $B = 3$, $C = 2L^2$, $D_1 = 6\sigma^2$, $D_2 = 4D^2 + 12\sigma^2$, $D_3 = \sigma^2$.

Algorithm 2. Экстраградиентный метод без дополнительного вызова оракула (Past-ES)

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K - 1$

 Выбрать случайно $\xi_{k+1/2}$,

$$z^{k+1/2} = \text{прох}_{\gamma h}(z^k - \gamma F(z^{k-1/2}, \xi_{k-1/2})),$$

$$z^{k+1} = \text{прох}_{\gamma h}(z^k - \gamma F(z^{k+1/2}, \xi_{k+1/2})),$$

end for

Доказательство. Положим $\sigma_k^2 = \|F(z^{k-1/2}) - F(z^{k+1/2})\|^2$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sigma_k^2 \right] &\leq 2\mathbb{E} \left[\|F(z^k) - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\|F(z^{k-1/2}) - F(z^k)\|^2 \right] \leq 2L^2 \mathbb{E} \left[\|z^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + \\ &\quad + 2L^2 \mathbb{E} \left[\|z^{k-1/2} - z^k\|^2 \right] + 4D^2 = 2L^2 \mathbb{E} \left[\|z^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 4D^2 + \\ &\quad + 2L^2 \mathbb{E} \left[\|z^{k-1} - \gamma F(z^{k-1/2}, \xi_k) - z^{k-1} + \gamma F(z^{k-3/2}, \xi_{k-1})\|^2 \right] = 2L^2 \mathbb{E} \left[\|z^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2L^2\gamma^2\mathbb{E}\left[\|F(z^{k-1/2}, \xi_k) - F(z^{k-3/2}, \xi_{k-1})\|^2\right] + 4D^2 \leq 2L^2\mathbb{E}\left[\|z^k - z^{k+1/2}\|^2\right] + \\
& + 6L^2\gamma^2\mathbb{E}\left[\|F(z^{k-1/2}) - F(z^{k-3/2})\|^2\right] + 4D^2 + 12\sigma^2 \leq \\
& \leq 2L^2\mathbb{E}\left[\|z^k - z^{k+1/2}\|^2\right] + \frac{2}{3}\mathbb{E}\left[\sigma_{k-1}^2\right] + 4D^2 + 12\sigma^2,
\end{aligned}$$

если положить $\gamma \leq 1/(3L)$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\|F(z^{k+1/2}, \xi_{k+1}) - F(z^{k-1/2}, \xi_k)\|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\sigma_k^2\right] + 6\sigma^2,$$

и, наконец,

$$\mathbb{E}\left[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\|F(z^{k+1/2}, \xi_{k+1/2}) - F(z^{k+1/2})\|^2\right] \leq \sigma^2.$$

Следствие 2. Предположим, что F ограниченно-липшицев с константами L и D . Тогда Past-ES

- в сильно монотонном случае с $T = 36$ и $\gamma \leq \min\left\{\frac{1}{12L\sqrt{2}}; \frac{1}{4(\mu_F + \mu_h)}\right\}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}\left[\|z^K - z^*\|^2\right] \leq \left(1 - \gamma\frac{\mu_F + \mu_h}{16}\right)^{K-1} \|z^0 - z^*\|^2 + \frac{192\gamma(37\sigma^2 + 12D^2)}{\mu_F + \mu_h},$$

- в монотонном случае с $T = 18$ и $\gamma \leq \frac{1}{12L\sqrt{2}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}\left[\text{Gap}(\bar{z}^K)\right] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2\right] + 72\gamma^2\sigma_0^2}{\gamma K} + \gamma(216D^2 + 691\sigma^2).$$

Для следующего метода мы рассматриваем постановку оптимизации оператора вида суммы: (1)–(4).

А.3. Экстраградиентный метод с редукцией дисперсии

Algorithm 3. Экстраградиентный метод с редукцией дисперсии (VR-ES)

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 = w^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K - 1$

$$\bar{z}^k = \tau z^k + (1 - \tau)w^k$$

Выбрать равномерно случайно $m_k \in 1, \dots, M$,

$$z^{k+1/2} = \text{прох}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma F(w^k)),$$

$$z^{k+1} = \text{прох}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma(F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k) + F(w^k))),$$

$$w^{k+1} = \begin{cases} z^{k+1}, & \text{с вероятностью } 1 - \tau, \\ w^k, & \text{с вероятностью } \tau. \end{cases}$$

end for

Мы полагаем $\sigma_k = 0$. Следующая лемма дает значения констант для предположения 2:

Лемма 4. Предположим, что каждый F_{m_k} и сам F ограниченно-липшицевы с константами L и D (предположение 3), тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 3 удовлетворяют предположению 2 с константами $A = L^2$, $D_1 = D^2$, $E = 4L^2$, $D_3 = 4D^2$.

Доказательство. Легко убедиться, что $g^{k+1/2}$ несмещенно. Далее

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\|F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k) + F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\|F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k)\|^2\right] \leq L^2\mathbb{E}\left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2\right] + D^2\end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\|F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k) + F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2\right] \leq \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\|F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k)\|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\|F(z^{k+1/2}) - F(w^k)\|^2\right] \leq 4L^2\mathbb{E}\left[\|w^k - z^{k+1/2}\|^2\right] + 4D^2.\end{aligned}$$

Следствие 3. Предположим, что каждый F_{m_k} и сам F ограничено-липшицевы с константами L и D . Тогда VR-ES

- в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min\left\{\frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2}L}, \frac{1-\tau}{4(\mu_F + \mu_h)}\right\}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}\left[\tau\|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2\right] \leq \left(1 - \gamma\frac{\mu_F + \mu_h}{16}\right)^{K-1} \left(\tau\|z^0 - z^*\|^2 + \|w^0 - z^*\|^2\right) + \frac{32\gamma D^2}{\mu_F + \mu_h},$$

- в монотонном случае с $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{6}L}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}\left[\text{Gap}(\bar{z}^K)\right] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2\right]}{\gamma K} + 11\gamma D^2.$$

На каждой итерации мы вычисляем лишь один оператор из M . Но в момент обновления w^k необходимо вычислить все M операторов в новой точке w^k . На основании этого мы можем выбрать оптимальное значение для τ следующим образом:

$$(1 - \tau)M \sim \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M}{M + 1}.$$

A.4. Покомпонентный экстраградиентный метод

Вернемся назад и снова рассмотрим наиболее общую постановку без конечных сумм: (1).

Algorithm 4. Покомпонентный экстраградиентный метод (Coord-ES)

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 = w^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K - 1$

$$\bar{z}^k = \tau z^k + (1 - \tau)w^k$$

Выбрать равномерно случайно $i_k \in 1, \dots, d$,

$$z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma F(w^k)),$$

$$z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma(d[F(z^{k+1/2})]_{i_k} e_{i_k} - d[F(w^k)]_{i_k} e_{i_k} + F(w^k))),$$

$$w^{k+1} = \begin{cases} z^{k+1}, & \text{с вероятностью } 1 - \tau, \\ w^k, & \text{с вероятностью } \tau. \end{cases}$$

end for

Положим $\sigma_k = 0$. Следующая лемма дает значения констант для предположения 2.

Лемма 5. Предположим, что F ограничено-липицев с константами L and D (предположение 3), тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 4 удовлетворяют предположению 2 с константами $A = dL^2$, $D_1 = dD^2$, $E = 2(d+1)L^2$, $D_3 = 2(d+1)D^2$.

Доказательство. Легко убедиться, что $g^{k+1/2}$ несмещенно. Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\|d[F(z^{k+1/2})]_{i_k} e_{i_k} - d[F(w^k)]_{i_k} e_{i_k} + F(w^k) - F(w^k)\|^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\|d[F(z^{k+1/2}) - F(w^k)]_{i_k} e_{i_k}\|^2 \right] \leq d \mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - F(w^k)\|^2 \right] \leq dL^2 \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + dD^2 \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\|d[F(z^{k+1/2})]_{i_k} e_{i_k} - d[F(w^k)]_{i_k} e_{i_k} + F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left[\|d[F(z^{k+1/2}) - F(w^k)]_{i_k} e_{i_k}\|^2 \right] + 2 \mathbb{E} \left[\|F(z^{k+1/2}) - F(w^k)\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2(d+1)L^2 \mathbb{E} \left[\|w^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2(d+1)D^2. \end{aligned}$$

Следствие 4. Предположим, что F ограничено-липицев с константами L и D . Тогда Coord-ES

- в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2dL}}; \frac{1-\tau}{4(\mu_F + \mu_h)} \right\}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\tau \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right)^{K-1} \left(\tau \|z^0 - z^*\|^2 + \|w^0 - z^*\|^2 \right) + \frac{32\gamma d D^2}{\mu_F + \mu_h},$$

- в монотонном случае с $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2L\sqrt{4d+2}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\text{Gap}(\bar{z}^K) \right] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{U}} \left[\|z^0 - u\|^2 \right]}{\gamma K} + \gamma(9d+2)D^2.$$

Оптимальное значение $\tau = d/(d+1)$.

A.5. Квантизованный экстраградиентный метод

В этом пункте рассматривается метод, использующий квантизованный оператор.

Algorithm 5. Квантизованный экстраградиентный метод (Quant-ES)

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 = w^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K-1$

$$\bar{z}^k = \tau z^k + (1-\tau)w^k$$

$$z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma F(w^k)),$$

$$z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma Q(F(z^{k+1/2}) - F(w^k)) + \gamma F(w^k)),$$

$$w^{k+1} = \begin{cases} z^{k+1}, & \text{с вероятностью } 1-\tau, \\ w^k, & \text{с вероятностью } \tau. \end{cases}$$

end for

Определение 1. $Q(x)$ называется квантизацией вектора $x \in \mathbb{R}^d$, если

$$\mathbb{E} Q(x) = x, \quad \mathbb{E} \|Q(x)\|^2 = \omega \|x\|^2$$

для некоторого ω .

Лемма 6. *Предположим, что F ограниченно-липшицев с константами L и D (предположение 3), тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 5 удовлетворяют предположению 2 с константами $A = \omega L^2$, $D_1 = \omega D^2$, $E = 2(\omega + 1)L^2$, $D_3 = 2(\omega + 1)D^2$.*

Доказательство. Легко убедиться, что $g^{k+1/2}$ несмещенно. Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\| Q(F(z^{k+1/2}) - F(w^k)) + F(w^k) - F(w^k) \right\|^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\left\| Q(F(z^{k+1/2}) - F(w^k)) \right\|^2 \right] \leq \omega \mathbb{E} \left[\left\| F(z^{k+1/2}) - F(w^k) \right\|^2 \right] \leq \omega L^2 \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + \omega D^2 \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\| Q(F(z^{k+1/2}) - F(w^k)) + F(w^k) - F(z^{k+1/2}) \right\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[\left\| Q(F(z^{k+1/2}) - F(w^k)) \right\|^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\left\| F(w^k) - F(z^{k+1/2}) \right\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2(\omega + 1)L^2 \mathbb{E} \left[\|w^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2(\omega + 1)D^2. \end{aligned}$$

Следствие 5. Предположим, что F ограниченно-липшицев с константами L и D . Тогда Quant-ES

- в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1-\tau}}{2L\sqrt{2\omega}}; \frac{1-\tau}{4(\mu_F + \mu_h)} \right\}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\tau \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right)^{K-1} \left(\tau \|z^0 - z^*\|^2 + \|w^0 - z^*\|^2 \right) + \frac{32\gamma\omega D^2}{\mu_F + \mu_h},$$

- в монотонном случае с $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2L\sqrt{4\omega+2}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\text{Gap}(\bar{z}^K) \right] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2 \right]}{\gamma K} + \gamma(9\omega + 2)D^2.$$

Рассмотрим случай $D = 0$. Квантизация требуется, чтобы сжать информацию, при этом ω выступает здесь как коэффициент сжатия, т.е. мы передаем в ω раз меньше информации, чем если бы мы использовали не квантизованный оператор. Однако раз в $1/(1-\tau)$ итераций (когда мы обновляем w^k) необходимо вычислить именно не квантизованный оператор. Основываясь на этом, можно выбрать оптимальное значение для τ следующим образом:

$$(1-\tau) \sim \tau \frac{1}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\omega}{\omega+1}.$$

A.6. Квантизованный экстраградиентный метод с редукцией дисперсии

Далее мы совмещаем идеи квантизации и редукции дисперсии для случая задачи (1)–(4) с оператором вида конечной суммы.

Algorithm 6. Квантизованный экстраградиентный метод с редукцией дисперсии

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 = w^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K - 1$

 Выбрать равномерно случайно $m_k \in 1, \dots, M$,

$$\bar{z}^k = \tau z^k + (1-\tau)w^k,$$

$$z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma F(w^k)),$$

$$z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}_k - \gamma Q(F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k)) + \gamma F(w^k)),$$

$$w^{k+1} = \begin{cases} z^{k+1}, & \text{с вероятностью } 1 - \tau, \\ w^k, & \text{с вероятностью } \tau. \end{cases}$$

end for

Положим $\sigma_k = 0$. Следующая лемма дает значения констант для предположения 2.

Лемма 7. *Предположим, что каждый F_{m_k} и сам F ограниченно-липшицевы с константами L и D (предположение 3), тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 6 удовлетворяют предположению 2 с $A = \omega L^2$, $D_1 = \omega D^2$, $E = 2(\omega + 1)L^2$, $D_3 = 2(\omega + 1)D^2$.*

Доказательство. Легко убедиться, что $g^{k+1/2}$ несмещенно. Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\|Q(F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k)) + F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\|Q(F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k))\|^2 \right] \leq \omega \mathbb{E} \left[\|F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k)\|^2 \right] \leq \omega L^2 \mathbb{E} \left[\|w^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + \omega D^2 \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\|Q(F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k)) + F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[\|Q(F_{m_k}(z^{k+1/2}) - F_{m_k}(w^k))\|^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\|F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2(\omega + 1)L^2 \mathbb{E} \left[\|w^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2(\omega + 1)D^2. \end{aligned}$$

Следствие 6. Предположим, что каждый F_{m_k} и сам F ограниченно-липшицевы с константами L и D . Тогда квантизованный экстраградиентный метод с редукцией дисперсии

- в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1-\tau}}{2L\sqrt{2\omega}}, \frac{1-\tau}{4(\mu_F + \mu_h)} \right\}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\tau \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right)^{K-1} \left(\tau \|z^0 - z^*\|^2 + \|w^0 - z^*\|^2 \right) + \frac{32\gamma\omega D^2}{\mu_F + \mu_h},$$

- в монотонном случае с $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2L\sqrt{4\omega+2}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\text{Gap}(\bar{z}^K) \right] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2 \right]}{\gamma K} + \gamma(9\omega + 2)D^2.$$

Оптимальное значение τ здесь то же, что и в предыдущем пункте.

А.7. Экстраградиентный метод с сэмплингом по важности

Здесь мы рассматриваем более общий случай, нежели просто случай конечной суммы. Теперь каждая функция имеет свой вес p_m . А именно, рассмотрим дискретную случайную переменную η вида

$$\mathbb{P}(\eta = m) = p_m, \quad \sum_{m=1}^M p_m = 1.$$

На каждом шаге мы обращаемся к F_{η} . Веса/вероятности p_m могут быть заданы априори, или же мы можем задать их самостоятельно: например, имеет смысл выбрать $p_m = L_m / \left(\sum_m L_m \right)$.

Algorithm 7. Экстраградиентный метод с сэмплированием по важности

Параметры: Размер шага γ , K .

Инициализация: Выбрать $z^0 = w^0 \in \mathcal{L}$.

for $k = 0, 1, \dots, K - 1$

 Выбрать η_k ,

$$\bar{z}^k = \tau z^k + (1 - \tau)w^k,$$

$$z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma F(w^k)),$$

$$z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\bar{z}^k - \gamma \frac{1}{p_{\eta_k}} (F_{\eta_k}(z^{k+1/2}) - F_{\eta_k}(w^k)) + \gamma F(w^k)),$$

$$w^{k+1} = \begin{cases} z^{k+1}, & \text{с вероятностью } 1 - \tau, \\ w^k, & \text{с вероятностью } \tau. \end{cases}$$

end for

Лемма 8. Предположим, что каждый F_m ограниченно-липицев с константами L_m и D_m (предположение 3), как и F соответственно с константами L и D , тогда g^k и g^{k+1} из алгоритма 7 удовлетворяют предположению 2 с константами $A = \sum_{m=1}^M \frac{L_m^2}{p_m}$, $D_1 = \sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m}$, $E = 2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{L_m^2}{p_m} + L^2 \right)$, $D_3 = 2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m} + D^2 \right)$.

Доказательство. Легко убедиться, что $g^{k+1/2}$ несмещенно. Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - g^k\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{p_{\eta_k}} (F_{\eta_k}(z^{k+1/2}) - F_{\eta_k}(w^k)) + F(w^k) - F(w^k) \right\|^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{p_{\eta_k}} (F_{\eta_k}(z^{k+1/2}) - F_{\eta_k}(w^k)) \right\|^2 \right] = \mathbb{E} \sum_{m=1}^M \frac{1}{p_m} \left[\|F_m(z^{k+1/2}) - F_m(w^k)\|^2 \right] \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^M \frac{L_m^2}{p_m} \mathbb{E} \left[\|z^{k+1/2} - w^k\|^2 \right] + \sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|g^{k+1/2} - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{p_{\eta_k}} (F_{\eta_k}(z^{k+1/2}) - F_{\eta_k}(w^k)) + F(w^k) - F(z^{k+1/2}) \right\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{p_{\eta_k}} (F_{\eta_k}(z^{k+1/2}) - F_{\eta_k}(w^k)) \right\|^2 \right] + 2 \mathbb{E} \left[\|F(w^k) - F(z^{k+1/2})\|^2 \right] \leq \\ &\leq 2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{L_m^2}{p_m} + L^2 \right) \mathbb{E} \left[\|w^k - z^{k+1/2}\|^2 \right] + 2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m} + D^2 \right). \end{aligned}$$

Следствие 7. Предположим, что каждый F_m ограниченно-липшицев с константами L_m и D_m (предположение 3) и F с константами L и D . Тогда экстраградиентный метод с сэмплированием по важности

• в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2}\sum_{m=1}^M \frac{L_m^2}{p_m}}; \frac{1-\tau}{4(\mu_F + \mu_h)} \right\}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\tau \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \\ & \leq \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right)^{K-1} \left(\tau \|z^0 - z^*\|^2 + \|w^0 - z^*\|^2 \right) + \frac{32\gamma}{\mu_F + \mu_h} \sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m}, \end{aligned}$$

• в монотонном случае с $\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\tau}}{2\sqrt{2L^2 + 4\sum_{m=1}^M \frac{L_m^2}{p_m}}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} [\text{Gap}(\bar{z}^K)] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} [\|z^0 - u\|^2]}{\gamma K} + \gamma \left(9 \sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m} + 2D^2 \right).$$

А.8. Локальный экстраградиентный метод

Этот метод предназначен для распределенной задачи (1)–(5). Суть метода заключается в переключении между локальными итерациями и усреднением со значением на сервере. С вероятностью τ производится локальный шаг с вероятностью $1 - \tau$ – шаг коммуникации.

Здесь $Z_{\text{avg}} = [\bar{z}^T, \dots, \bar{z}^T] \in \mathbb{R}^{Md}$ с $\bar{z} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M z_m$ (и то же для W_{avg}).

Algorithm 8. Рандомизированный локальный экстраградиентный метод

Параметры: Размер шага γ , K , вероятность p .

Инициализация: Выбрать $z^0 = w^0 \in \mathcal{L}$, $z_m^0 = z^0$ для всех m .

for $k = 0, 1, \dots$

$$\bar{Z}^k = \tau Z^k + (1 - \tau) W^k,$$

$$Z^{k+1/2} = \text{prox}_{\gamma h} \left(\bar{Z}^k - \gamma (\Phi(W^k) + \lambda(W^k - W_{\text{avg}}^k)) \right),$$

$$G(Z) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \Phi(Z), & \text{с вероятностью } \tau, \\ \frac{1}{1-\tau} \lambda(Z - Z_{\text{avg}}), & \text{с вероятностью } 1 - \tau, \end{cases}$$

$$Z^{k+1} = \text{prox}_{\gamma h} \left(\bar{Z}^k - \gamma (G(Z^{k+1/2}) - G(W^k) + \Phi(W^k) + \lambda(W^k - W_{\text{avg}}^k)) \right),$$

$$W^{k+1} = \begin{cases} Z^{k+1}, & \text{с вероятностью } 1 - \tau, \\ W^k, & \text{с вероятностью } \tau. \end{cases}$$

end for

На самом деле анализ для этого метода уже был проделан в предыдущем пункте. Действительно, здесь мы имеем два оператора: $\Phi(Z)$ и $\lambda(Z - Z_{\text{avg}})$, являющихся L и λ гладкими соответственно.

Если выбрать $\tau = L/(L + \lambda)$, то верно

Следствие 8. Рандомизированный локальный экстраградиентный метод

- в сильно монотонном случае с $\gamma \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}(L + \lambda)^{3/2}}; \frac{\sqrt{\lambda}}{4(\mu_F + \mu_h)\sqrt{L + \lambda}} \right\}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\tau \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|w^{k+1} - z^*\|^2 \right] \leq \\ & \leq \left(1 - \gamma \frac{\mu_F + \mu_h}{16} \right)^{K-1} \left(\tau \|z^0 - z^*\|^2 + \|w^0 - z^*\|^2 \right) + \frac{32\gamma}{\mu_F + \mu_h} \sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m}, \end{aligned}$$

- в монотонном случае с $\gamma \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{6}(L + \lambda)^{3/2}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E} \left[\text{Gap}(\bar{z}^K) \right] \leq \frac{8 \max_{u \in \mathcal{C}} \left[\|z^0 - u\|^2 \right]}{\gamma K} + \gamma \left(9 \sum_{m=1}^M \frac{D_m^2}{p_m} + 2D^2 \right).$$

Отсюда можно получить оценку для числа локальных шагов и числа коммуникаций:

- в сильно монотонном случае

$$\mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\lambda(\lambda + L)}}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \text{ комм. } \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{L(\lambda + L)}}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \text{ локальных шагов.}$$

- в монотонном случае

$$\mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\lambda(\lambda + L)\Omega^2}}{\varepsilon} \right) \text{ комм. } \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{L(\lambda + L)\Omega^2}}{\varepsilon} \right) \text{ локальных шагов.}$$

Отметим, что эти оценки являются достаточно хорошими при малом значении λ .

В. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В.1. Генеративно-состязательные сети

В качестве примера оптимизации минимаксного целевого функционала при различных подходах оптимизации была предложена задача оптимизации генеративно-состязательных сетей (GAN). GAN – это структура для оценки генеративных моделей с помощью состязательного процесса, в котором мы одновременно обучаем две модели: генеративную модель G , которая фиксирует распределение данных, и дискриминативную модель D , которая оценивает вероятность того, что пример пришел из обучающей выборки, а не из G . $D(G(z))$ – это вероятность (скалярная), что выход генератора G есть реальное изображение. Согласно статье Гудфеллоу [6], в этой задаче D пытается максимизировать вероятность того, что он правильно классифицирует реальные и фейковые изображения ($\lg(D(x))$), а G пытается минимизировать вероятность того, что D будет предсказывать его выходные данные как фейковые ($\lg(1 - D(G(z)))$). Из статьи функция потерь GAN есть

$$\min_{\theta_G} \max_{\theta_D} \mathbb{E}_{x \sim \mathbb{P}_{\text{data}}(x)} [\lg(D(x))] + \mathbb{E}_{z \sim \mathbb{P}_z(z)} [\lg(1 - D(z))].$$

Целью наших экспериментов не было получение наилучших результатов для генеративных сетей или подходом к формулировке задачи для GAN. В наших экспериментах мы подтверждаем работоспособность SVRG, а также методов квантизации для обучения GAN.

Данные, модель и оптимизаторы. Для проведения экспериментов было предложено использовать датасет CIFAR. Он содержит 50 000 и 10 000 изображений в обучающей и валидационной выборках соответственно, равномерно распределенных по десяти классам. Для каждого оптимизационного подхода в качестве оптимизатора использовался Adam. В ходе эксперимента был проведен анализ гиперпараметров каждого из оптимизаторов (генератора и дискриминатора) (табл. 1).

По результатам проведенного анализа сходимости (проверялись результаты работы после 100 эпох обучения) были выбраны следующие параметры: $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$ и коэффициент

Таблица 1. Набор анализируемых гиперпараметров

β_1	0.5	0.9	0.99
β_2	00.99	0.999	–
Скорость обучения	0.9×10^{-4}	1×10^{-4}	2×10^{-4}

скорости обучения = 2×10^{-4} для обоих методов оптимизации. Размер набора элементов, на котором производилась одна итерация вычисления градиента, составлял 64.

Для проверки качества выдаваемых изображений была использована метрика Inception score (см. [32]):

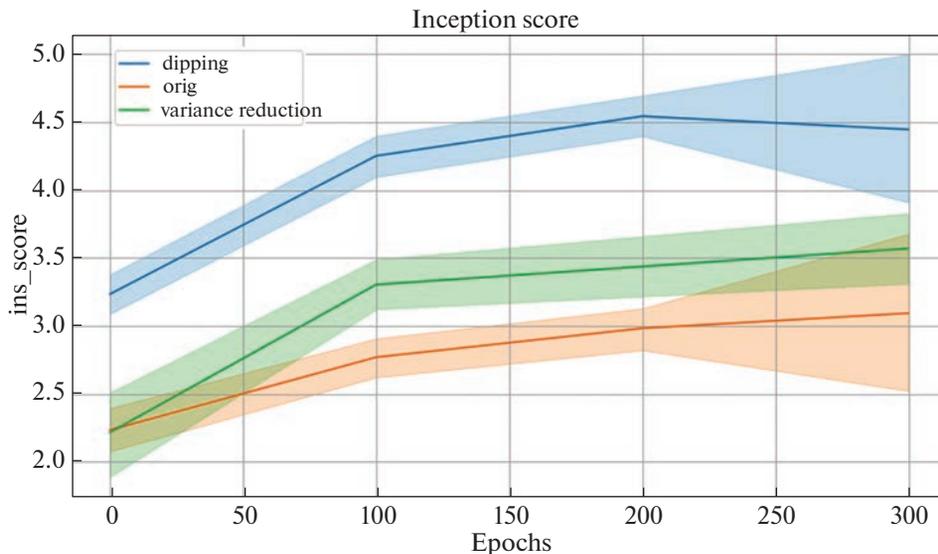
$$\text{IS}(G) = \exp(\mathbb{E}_{x \sim p_g} D_{KL}(p(y|x) || p(y))),$$

где $x \sim p_g$ означает, что изображение x сгенерировано из распределения p_g , $D_{KL}(p||q)$ – расстояние Кульбака–Лейбнера между двумя распределениями p , q .

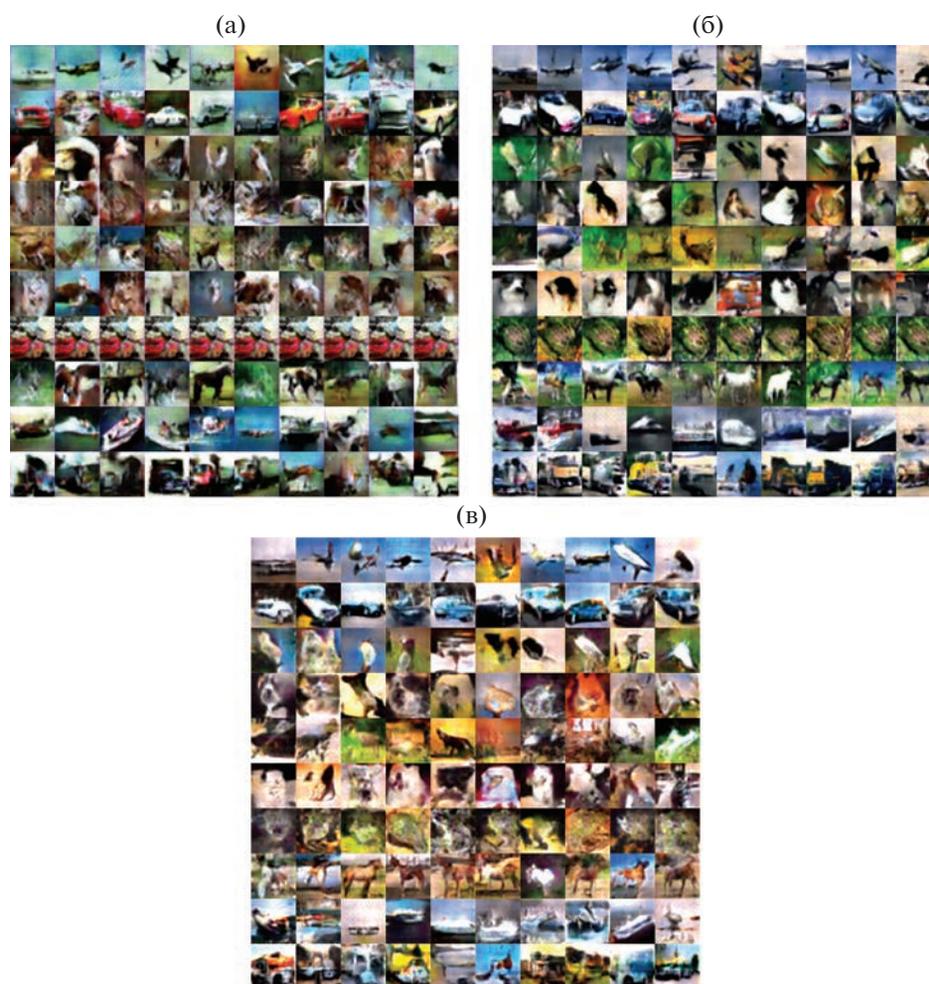
Данная метрика позволяет автоматически оценивать качество картинок, генерируемых моделью. В ходе исследования было показано, что данная метрика хорошо коррелирует с результатами оценки человека на сгенерированных изображениях CIFAR10. Данная метрика использует нейронную сеть Inception v3, предобученную на датасете ImageNet, и собирает статистику выходных данных работы сети, примененной к сгенерированным изображениям. Для экспериментов было предложено использовать архитектуру DCGan (см. [33]) с подходом Conditional (см. [34]). Особенность данной архитектуры заключается в том, что мы можем обучить модель сэмплировать изображения из определенного распределения, сэмплы из которого будут схожи с элементами из желаемого распределения обучающей выборки.

Основной целью этого эксперимента была возможность не переобучать определенные архитектуры под разные подходы оптимизации. В процессе обучения генератор и дискриминатор имели одинаковое количество шагов оптимизации.

Результаты. Посмотрите на рисунки, представленные на фиг. 1 и 2. Согласно результатам, полученным в рамках экспериментов, можно заметить, что подходы, предложенные в данной статье, позволяют достигнуть лучших результатов, по сравнению с оригинальными.



Фиг. 1. Результаты работы модели, полученные при ее оптимизации с помощью метода Adam разными способами: подход с использованием квантизации/клиппинга 70% всех градиентов модели, подход с использованием редукции дисперсии, оригинальный подход (см. [6]).



Фиг. 2. Эти изображения были сгенерированы архитектурой conditional DCGan, которая обучалась с использованием разных подходов: (а) — исходная оптимизация с использованием Adam 1, (б) — оптимизация с занулением 70% всех значений градиентов, (в) — оптимизация со стохастической редукцией дисперсии градиентного спуска.

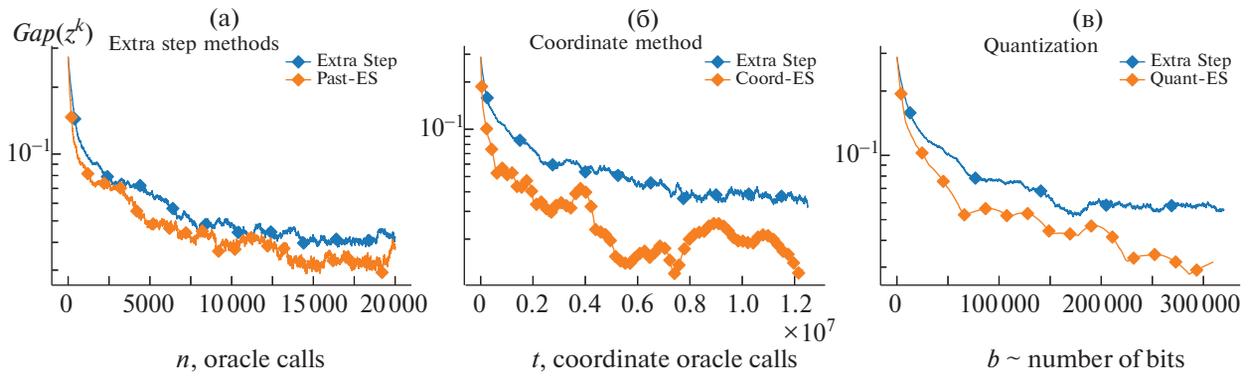
- Метод редукции дисперсии позволял оптимизировать функционал точнее, чем оригинальный способ, на протяжении всей эпохи оптимизации, однако, приближаясь к конечным итерациям каждой эпохи обучения, полный градиент достаточно сильно отличался от направления градиента, получаемого на последних итерациях, что вносило неточность при оптимизации, что привело к переобучению генератора.

- Метод с использованием квантизации/клиппинга (случайным образом обнуляется 70% от всего градиента модели, как в генераторе, так и в дискриминаторе, что соответствует оператору сжатия Rand70%), позволил предотвратить переобучение генератора и дискриминатора на ранних стадиях, что, в свою очередь, позволило достичь лучших результатов.

Подводя итоги, все вышеупомянутые подходы позволили получить результаты лучше полученных при оригинальном подходе обучения генеративных моделей и могут быть применены для оптимизации GAN, но квантизация позволяет быстро получить наилучшие результаты при сохранении вычислительных ресурсов.

В.2. Полицейский vs. Грабитель

Рассмотрим задачу Полицейский vs. Грабитель, чтобы сравнить производительность некоторых методов, представленных в нашей статье. В этой задаче мы рассматриваем квадратный город размером 200 на 200 клеток. В каждом городе есть дом и будка милиции. Грабитель выбирает



Фиг. 3. Сходимость методов с дополнительным шагом для задачи Полицейский vs. Грабитель (20): (а) – методы Extra Step и Past-ES, (б) – Extra Step и Coord-ES, (в) – Extra Step и Quant-ES.

один дом для ограбления, полицейский выбирает будку, в которой будет дежурить. Задача заключается в нахождении оптимальной смешанной стратегии для противоборствующих игроков: грабителя и полицейского в игре, где цель грабителя – атаковать выбранный дом i с максимальным благосостоянием w_i , а цель полицейского – выбрать оптимальный пост и поймать грабителя, чтобы предотвратить нанесенный им максимальный ожидаемый убыток. Мы предполагаем, что вероятность поймать вора для определенного дома i и поста j равна $\exp(-\theta d(i, j))$ для функции расстояния d , которая вводится выше. Мы можем сформулировать описанную постановку как задачу о поиске билинейной седловой точки:

$$\min_{x \in \Delta(n^2)} \max_{y \in \Delta(n^2)} f(x, y) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y^\top A^{(k)} x, \tag{П.22}$$

для x и y , которые являются векторами вероятности выбора какого-либо дома и поста соответственно, и для матриц

$$A_{ij}^{(k)} = w_i^{(k)} [1 - \exp(-\theta d(i, j))],$$

где благосостояние $w^{(k)}$ и функция расстояния d определяются следующим образом (эти выражения легко понять, если представить i как сплюсненную координату на игровом поле размера $n \times n$, $i(x, y) = xn + y$, график w представляет собой пирамиду с центром в центре этого поля и d евклидово расстояние на ней):

$$w_i = 1 - \frac{2}{n} \min \{ |i/n - n/2|, |i \bmod n - n/2| \},$$

$$w_i^{(k)} = w_i (1 + \xi^{(k)}) \quad \text{для} \quad \xi^{(k)} \sim \mathcal{U}(0, \sigma),$$

$$d(i, j) = \sqrt{(\lfloor i/n \rfloor - \lfloor j/n \rfloor)^2 + (i \bmod n - j \bmod n)^2}.$$

Для экспериментов были выбраны параметры $\theta = 0.6$, $n = 25$, $\sigma = 3$. Методы Coord-ES, Quant-ES и Past-ES используют такое же значение γ , как метод Extra Step, которое является оптимальным для последнего. Мы сравниваем метод Past по количеству обращений к оракулу F , метод с квантизацией по количеству используемых бит, координатный метод по количеству используемых координат (фиг. 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Facchinei F., Pang J.* Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer New York, 2007. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering). URL: https://books.google.ru/books?id=IX%5C_7Rce3%5C_Q0C.
2. *Nesterov Y.* Smooth minimization of non-smooth functions // Math. Program. 2005. Т. 103. № 1. С. 127–152.
3. *Nemirovski A.* Prox-method with rate of convergence $O(1/t)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems // SIAM J. Optimizat. 2004. V. 15. № 1. P. 229–251.

4. *Chambolle A., Pock T.* A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging // *J. Math. Imag. and Vis.* 2011. V. 40. № 1. P. 120–145.
5. *Esser E., Zhang X., Chan T.F.* A general framework for a class of first order primal-dual algorithms for convex optimization in imaging science // *SIAM J. Imag. Sci.* 2010. V. 3. № 4. P. 1015–1046.
6. Generative Adversarial Networks / I.J. Goodfellow [и др.]. 2014. arXiv: 1406.2661[stat.ML].
7. *Hanzely F., Richtárik P.* Federated learning of a mixture of global and local models // arXiv preprint arXiv:2002.05516. 2020.
8. Lower bounds and optimal algorithms for personalized federated learning / F. Hanzely [и др.] // arXiv preprint arXiv:2010.02372. 2020.
9. *Korpelevich G.M.* The extragradient method for finding saddle points and other problems // *Ekonomika i Matematicheskie Metody.* 1976. V. 12. № 4. P. 747–756.
10. *Juditsky A., Nemirovski A., Tauvel C.* Solving variational inequalities with stochastic mirror-prox algorithm // *Stochastic System.* 2011. V. 1. № 1. P. 17–58.
11. *Alacaoglu A., Malitsky Y.* Stochastic Variance Reduction for Variational Inequality Methods // arXiv preprint arXiv:2102.08352. 2021.
12. *Robbins H., Monro S.* A Stochastic Approximation Method // *Ann. Math. Statistic.* 1951. V. 22. № 3. P. 400–407. URL: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729586>
13. *Johnson R., Zhang T.* Accelerating stochastic gradient descent using predictive variance reduction // *Adv. Neural Informat. Processing System.* 2013. V. 26. P. 315–323.
14. QSGD: Communication-efficient SGD via gradient quantization and encoding / D. Alistarh [и др.] // *Adv. Neural Informat. Processing System.* 2017. P. 1709–1720.
15. *Hanzely F., Mishchenko K., Richtarik P.* SEGA: Variance reduction via gradient sketching // arXiv preprint arXiv:1809.03054. 2018.
16. *Gorbunov E., Hanzely F., Richtarik P.* A unified theory of SGD: Variance reduction, sampling, quantization and coordinate descent // *Internat. Conf. Artific. Intelligence and Statistic. PMLR.* 2020. P. 680–690.
17. On the convergence of single-call stochastic extra-gradient methods / Y.-G. Hsieh [и др.]. 2019. arXiv: 1908.08465 [math.OC].
18. Revisiting stochastic extragradient / K. Mishchenko [и др.] // *Internat. Conf. Artific. Intelligence and Statistic. PMLR.* 2020. P. 4573–4582.
19. *Tseng P.* A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings // *SIAM J. Control and Optimizat.* 2000. V. 38. № 2. P. 431–446. <https://doi.org/10.1137/S0363012998338806>
20. *Nesterov Y.* Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems // *Math. Program.* 2007. V. 109. № 2. P. 319–344.
21. *Palaniappan B., Bach F.* Stochastic Variance Reduction Methods for Saddle-Point Problems // *Adv. Neural Informat. Processing System. T. 29 / Под ред. D. Lee [и др.]. Curran Associates, Inc., 2016.* URL: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2016/file/1aa48fc4880bb0c9b8aPaper.pdf>.
22. Reducing noise in gan training with variance reduced extragradient / T. Chavdarova [и др.] // arXiv preprint arXiv:1904.08598. 2019.
23. *Sidford A., Tian K.* Coordinate methods for accelerating regression and faster approximate maximum flow // 2018 IEEE 59th Ann. Symp. Foundat. of Comput. Sci. (FOCS). IEEE. 2018. P. 922–933.
24. Coordinate methods for matrix games / Y. Carmon [и др.] // arXiv preprint arXiv:2009.08447. 2020.
25. Zeroth-Order Algorithms for Smooth Saddle-Point Problems / A. Sadiev [и др.] // arXiv preprint arXiv:2009.09908. 2020.
26. *Deng Y., Mahdavi M.* Local Stochastic Gradient Descent Ascent: Convergence Analysis and Communication Efficiency // *Internat. Conf. Artific. Intelligence and Statistic. PMLR.* 2021. P. 1387–1395.
27. *Beznosikov A., Samokhin V., Gasnikov A.* Distributed Saddle-Point Problems: Lower Bounds, Optimal Algorithms and Federated GANs // arXiv preprint arXiv:2010.13112. 2021.
28. *Stich S.U.* Unified optimal analysis of the (stochastic) gradient method // arXiv preprint arXiv:1907.04232. 2019.
29. *Wright S.J.* Coordinate descent algorithms // *Math. Program.* 2015. V. 151. № 1. С. 3–34.
30. *Nesterov Y.* Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems // *SIAM J. Optimizat.* 2012. V. 22. № 2. P. 341–362.
31. On Biased Compression for Distributed Learning / A. Beznosikov [и др.] arXiv preprint arXiv:2002.12410. 2020.
32. *Barratt S., Sharma R.* A note on the inception score // arXiv preprint arXiv:1801.01973. 2018.
33. *Radford A., Metz L., Chintala S.* Unsupervised Representation Learning with Deep Convolutional Generative Adversarial Networks. 2016. arXiv: 1511.06434 [cs.LG].
34. *Mirza M., Osindero S.* Conditional generative adversarial nets // arXiv preprint arXiv:1411.1784. 2014.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.653

АНАЛИЗ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ¹⁾

© 2023 г. А. И. Задорин^{1,*}

¹ 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т матем. СО РАН, Россия

*e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Поступила в редакцию 12.04.2022 г.
Переработанный вариант 24.05.2022 г.
Принята к публикации 11.08.2022 г.

Рассматривается вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами в области экспоненциального пограничного слоя. Тема исследования актуальна, так как применение к таким функциям классических полиномиальных разностных формул для производных в случае равномерной сетки приводит к неприемлемым погрешностям, если возмущающий параметр ϵ соизмерим с шагом сетки. Формула численного дифференцирования с заданным числом узлов в сеточном шаблоне строится на подынтервалах, покрывающих исходный интервал. Проведен анализ точности формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова, широко применяемой при построении разностных схем для сингулярно возмущенных задач. Для исходной функции одной переменной использовано представление в виде суммы регулярной и погранслошной составляющих на основе декомпозиции Шишкина для решения сингулярно возмущенной задачи. Ранее такая декомпозиция применялась для обоснования сходимости разностных схем. Получена оценка погрешности классических полиномиальных формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова. Оценка погрешности на сетке Бахвалова получена в общем случае, когда вычисляется производная произвольно заданного порядка, и сеточный шаблон для этой производной содержит задаваемое число узлов. Оценка погрешности зависит от порядка вычисляемой производной, числа узлов в сеточном шаблоне для производной и учитывает равномерность по параметру ϵ . Приведены результаты численных экспериментов, согласующиеся с полученными оценками погрешностей. Библ. 16. Табл. 4.

Ключевые слова: функция одной переменной, экспоненциальный пограничный слой, сетка Бахвалова, многочлен Лагранжа, формулы численного дифференцирования, оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466923020163, EDN: VMPPYV

1. ВВЕДЕНИЕ

На основе сингулярно возмущенных задач моделируются различные конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Применение классических разностных схем на равномерной сетке для численного решения таких задач приводит к существенным погрешностям, если шаг сетки соизмерим с возмущающим параметром ϵ . Для достижения сходимости разностной схемы, равномерной по параметру ϵ , известны два основных подхода: подгонка разностной схемы к погранслошной составляющей (см. [1]) и сгущение сетки в области пограничного слоя. Широко применяются сетки Бахвалова (см. [2]) и Шишкина (см. [3], [4]).

Вопрос применения формул численного дифференцирования к функциям с большими градиентами в пограничном слое значительно меньше исследован. В случае равномерной сетки применение классических разностных формул для вычисления производных приводит к погрешностям порядка $O(1)$, если малый параметр ϵ соизмерим с шагом сетки (см. [5]). Таким образом, актуальна задача построения формул численного дифференцирования, погрешность которых равномерна по малому параметру ϵ .

¹⁾ Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0016) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00650).

Остановимся на имеющихся работах по построению формул численного дифференцирования. Как и при построении разностных схем, выделяются два подхода: применение классических формул численного дифференцирования на сетках, сгущающихся в пограничном слое, и построение формул подгонки к погранслошной составляющей в случае равномерной сетки.

Рассмотрим работы, в которых применяются формулы для производных, точные на погранслошной составляющей, выделенной с точностью до множителя. В [6] на равномерной сетке построены формулы численного дифференцирования, точные на погранслошной составляющей функции. Сеточный шаблон такой формулы содержит произвольно заданное число узлов. В [7] получены оценки погрешности формулы из [6], равномерные по параметру ε , при вычислении первой и второй производных в случае экспоненциального пограничного слоя. В [8] для формул из [6], приближающих первую и вторую производные, получены оценки погрешности, равномерные по погранслошной составляющей, рассматриваемой в виде функции общего вида. При таком подходе могут учитываться различные особенности, например, наличие степенного пограничного слоя.

Остановимся на анализе публикаций, в которых классические формулы численного дифференцирования применяются на сгущающихся в пограничном слое сетках. В [9], [10] на сетке Шишкина находится решение разностной схемы и через это решение находится первая производная. Получены оценки погрешности нахождения решения и производной, равномерные по ε .

В [11] оценивается погрешность формул численного дифференцирования на классе функций, соответствующих решению краевой задачи при наличии экспоненциального пограничного слоя. Класс таких функций выделяется на основе декомпозиции Шишкина (см. [3], [12]) для решения сингулярно возмущенной задачи. На сетке Шишкина получены оценки погрешности классических разностных формул для производных, равномерные по параметру ε . Оценки получены в общем виде, когда вычисляется производная произвольно заданного порядка, и сеточный шаблон для этой производной содержит произвольно заданное число узлов.

В [13], [14] получены равномерные по параметру ε оценки погрешности разностных формул для вычисления первой и второй производных на сетке Бахвалова. Рассмотрены случаи, когда сеточный шаблон в разностных формулах для производных содержит два и три узла.

Целью настоящей работы является оценка погрешности классических формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова (см. [2]) применительно к функциям с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Класс таких функций будет задаваться на основе декомпозиции Шишкина (см. [3]) для решения сингулярно возмущенной задачи. Оценка погрешности будет проводиться в общем случае, когда на основе разностного аналога приближается производная произвольно заданного порядка.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для того чтобы функция $u(x)$ соответствовала решению сингулярно возмущенной задачи, зададим ее на основе декомпозиции Шишкина (см. [3]) для решения задачи

$$u(x) = p(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.1)$$

где

$$|p^{(j)}(x)| \leq C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \leq \frac{C_j}{\varepsilon^j} e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad 0 \leq j \leq J, \quad (2.2)$$

функции $p(x)$ и $\Phi(x)$ достаточно гладкие и в явном виде не заданы, $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, J будет даваться.

В (2.2) и далее под C и C_j будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и N , где N — число интервалов сетки. Одной постоянной C_j будем ограничивать различные величины, если это понятно по тексту.

Согласно (2.2), регулярная составляющая $p(x)$ имеет производные, ограниченные до некоторого порядка, а производные погранслошной составляющей $\Phi(x)$ могут неограниченно расти с уменьшением ε .

В соответствии с [3], [12] для заданного J можно осуществить декомпозицию (2.1) с выполнением ограничений (2.2) для решения сингулярно возмущенной задачи

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \quad (2.3)$$

где $a_1(x) \geq \alpha > 0$, $a_2(x) \geq 0$, $\varepsilon > 0$, функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – достаточно гладкие. При малых значениях ε решение задачи (2.3) имеет область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (2.1).

Декомпозиция (2.1) справедлива и для решения задачи Коши $\varepsilon u'(x) + a_1(x)u(x) = f(x)$, $u(0) = A$, где $a_1(x) \geq \alpha > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Введем обозначения. Пусть Ω^h – сетка интервала $[0, 1]$:

$$\Omega^h = \{x_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1, \quad h_n = x_n - x_{n-1}.$$

Пусть $L_{m,k}(u, x)$ – многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с k узлами интерполяции x_m, \dots, x_{m+k-1} на интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$. Пусть $K = 2(1 - \varepsilon)$, $u_n^{(j)} = u^{(j)}(x_n)$, $j \geq 0$. Будем писать $f = O(g)$, если справедлива оценка $|f| \leq C|g|$, и $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

На каждом интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$ из покрытия интервала $[0, 1]$, в случае сетки Ω^h из класса сеток Бахвалова, будем вычислять производные функции $u(x)$ на основе дифференцирования многочлена Лагранжа:

$$u^{(i)}(x) \approx L_{m,k}^{(i)}(u, x), \quad i \geq 0, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}] \quad (2.4)$$

(оценим погрешность формулы (2.4) на сетке, задаваемой ниже).

3. ЗАДАНИЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Зададим сетку Бахвалова (см. [2]) с учетом модификации из [15]. В соответствии с [15] для задания узлов сетки определим функцию $g(t)$:

$$g(t) = -\frac{k\varepsilon}{\alpha} \ln[1 - 2(1 - \varepsilon)t], \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \leq e^{-1}, \quad (3.1)$$

$$g(t) = \sigma + (2t - 1)(1 - \sigma), \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad (3.2)$$

где k соответствует (2.4), $k \geq 2$. Зададим в (3.2)

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{k\varepsilon}{\alpha} \ln \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon \leq e^{-1}. \quad (3.3)$$

При $\varepsilon > e^{-1}$ задаем $\sigma = 1/2$. При $\sigma = 1/2$ задаем сетку Ω^h равномерной.

При $\sigma < 1/2$ задаем сетку Ω^h с узлами $x_n = g(n/N)$, $n = 0, 1, \dots, N$, где $g(t)$ соответствует (3.1)–(3.3).

Учитывая (3.1), зададим узлы сетки на интервале $[0, \sigma]$:

$$x_n = -\frac{k\varepsilon}{\alpha} \ln\left[1 - 2(1 - \varepsilon)\frac{n}{N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4), получаем

$$h_n = \frac{k\varepsilon}{\alpha} \ln\left[1 + \frac{2(1 - \varepsilon)}{N - 2(1 - \varepsilon)n}\right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (3.5)$$

Несложно убедиться, что последовательность шагов h_n , $n = 1, 2, \dots, N/2$, – строго возрастающая. Из (3.5) следует

$$h_{N/2-l} = \frac{k\varepsilon}{\alpha} \ln\left[1 + \frac{2(1 - \varepsilon)}{N\varepsilon + 2(1 - \varepsilon)l}\right], \quad \frac{N}{2} - 1 \geq l \geq 0. \quad (3.6)$$

Теперь на основе (3.2) зададим узлы на интервале $[\sigma, 1]$:

$$x_n = \sigma + (2n/N - 1)(1 - \sigma), \quad \frac{N}{2} \leq n \leq N. \quad (3.7)$$

На этом интервале сетка равномерна с шагами $h_n = 2(1 - \sigma)/N$.

Несложно показать, что для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка

$$h_n \leq \frac{C_2}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \tag{3.8}$$

4. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Будем предполагать, что исходный интервал $[0, 1]$ покрыт интервалами $[x_m, x_{m+k-1}]$, $m = 0, k - 1, \dots, N - k + 1$. Оценим погрешность формулы (2.4).

Теорема 1. Пусть функция $u(x)$ имеет представление (2.1) с ограничениями (2.2) при $J = k + i$, $0 \leq i < k$, N кратно $2(k - 1)$, и узлы сетки Ω^h соответствуют (3.3), (3.4), (3.7). Тогда для некоторой постоянной C при всех $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$ и $m = 0, k - 1, \dots, N - k + 1$ в зависимости от значения m справедливы следующие оценки погрешности:

$$\varepsilon^i |u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)| \leq \frac{C}{N^{k-i}}, \quad m + k - 1 < \frac{N}{2}, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon^i |u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)| \leq \frac{C}{N^{k-i}}, \quad m + k - 1 = \frac{N}{2}, \quad 1 + \frac{K}{N\varepsilon} \leq e, \tag{4.2}$$

$$\varepsilon^i |u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)| \leq \frac{C}{N^k} \ln^k \left(1 + \frac{1}{N\varepsilon} \right) + \frac{C\varepsilon^i}{N^{k-i}}, \quad m + k - 1 = \frac{N}{2}, \quad 1 + \frac{K}{N\varepsilon} \geq e, \tag{4.3}$$

$$\varepsilon^i |u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)| \leq \frac{C}{N^{k-i}}, \quad m \geq \frac{N}{2}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Предполагаем, что в (3.3) $\sigma < 1/2$, так как при $\sigma = 1/2$ для некоторой постоянной C_0 $\varepsilon \geq C_0$ и производные функции $u(x)$ являются ε -равномерно ограниченными. Тогда применимы известные в регулярном случае оценки погрешности вычисления производных на основе многочлена Лагранжа, и эти оценки по точности не ниже, чем получаемые оценки при $\sigma < 1/2$.

По условию теоремы N кратно $2(k - 1)$, поэтому каждый интервал $[x_m, x_{m+k-1}]$ целиком попадает в погранслойную область $[0, \sigma]$ или находится вне ее.

В соответствии с [16], с. 89, справедлива формула для погрешности вычисления i -й производной функции $u(x)$:

$$u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x) = \sum_{j=0}^i \frac{i!}{(i-j)!} w_{m,k}^{(i-j)}(x) [x, \dots, x, x_m, \dots, x_{m+k-1}]_{j+1} u, \quad i \geq 0, \tag{4.5}$$

где $[x, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}]u$ – разделенная разность для функции $u(x)$ (см. [16], с. 38),

$$w_{m,k}(x) = (x - x_m)(x - x_{m+1}) \dots (x - x_{m+k-1}).$$

В случае произвольных точек исходного интервала y_1, \dots, y_p для некоторого $s \in (\min\{y_j\}, \max\{y_j\})$ справедливо представление (см. [16], с. 40):

$$[y_1, y_2, \dots, y_p]u = \frac{u^{(p-1)}(s)}{(p-1)!}. \tag{4.6}$$

Учитывая (4.6) в (4.5), при всех $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$ для некоторой постоянной C получаем

$$|u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)| \leq C \sum_{j=0}^i \max_{s \in [x_m, x_{m+k-1}]} |u^{(k+j)}(s)| |w_{m,k}^{(i-j)}(x)|, \quad i \geq 0. \tag{4.7}$$

Учитывая (2.1), погрешность $|u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)|$ оценим отдельно на составляющих $p(x)$ и $\Phi(x)$.

Учитывая (2.2), (3.8), из (4.7) для некоторой постоянной C_3 получаем

$$|p^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(p, x)| \leq \frac{C_3}{N^{k-i}}. \tag{4.8}$$

Теперь оценим погрешность на составляющей $\Phi(x)$. Рассмотрим возможные случаи для интервала $[x_m, x_{m+k-1}]$.

1. Пусть $m + k - 1 < N/2$. Тогда интервал $[x_m, x_{m+k-1}]$ не последний в пограничном слое, поэтому $m + k - 1 \leq N/2 - k + 1$. Оценим $|w_{m,k}(x)|$. Учитываем, что шаги сетки $\{h_n\}$ при $n \leq N/2$ возрастают. Следовательно, для некоторой постоянной C_1 при всех $n = m, m + 1, \dots, m + k - 1$ выполняется соотношение $|x - x_n| \leq C_1 h_{m+k-1}$. Можно показать, что при условии $m + k - 1 \leq N/2 - k + 1$ справедлива оценка

$$h_{n+1} \leq 2h_n, \quad m < n < m + k - 1.$$

Тогда на интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$ для всех шагов справедлива оценка $h_i = O^*(h_j)$. Следовательно, для некоторой постоянной C_2 $|w_{m,k}(x)| \leq C_2 h_{m+1}^k$. Аналогично,

$$|w_{m,k}^{(i-j)}(x)| \leq C_3 h_{m+1}^{k-i+j}. \tag{4.9}$$

Учитывая (2.2), (3.5) и (4.9), из (4.7) получаем

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq C_1 e^{-\alpha x_m/\varepsilon} \sum_{j=0}^i \ln^{k-i+j} \left(1 + \frac{K}{N - Km - K} \right). \tag{4.10}$$

В соответствии с (3.4)

$$e^{-\alpha x_m/\varepsilon} = \frac{(N - Km)^k}{N^k}.$$

В силу заданного ограничения $m + k - 1 \leq N/2 - k + 1$ и условия $k \geq 2$, имеем $N - Km - K > K$, поэтому значение логарифма в (4.10) между нулем и единицей. Тогда из (4.10) для некоторой постоянной C_2 получаем

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq C_2 \frac{(N - Km)^k}{N^k} \left(\frac{K}{N - Km - K} \right)^{k-i}. \tag{4.11}$$

Из оценок (4.8), (4.11) получаем (4.1).

2. Пусть $m + k - 1 = N/2$. Учитывая (3.6) и оценку

$$|w_{m,k}^{(i-j)}(x)| \leq C h_{N/2}^{k-i+j},$$

из (4.7) получаем

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq C e^{-\alpha x_m/\varepsilon} \sum_{j=0}^i \ln^{k-i+j} \left(1 + \frac{K}{N\varepsilon} \right). \tag{4.12}$$

Учитывая, что $m = N/2 - k + 1$ и (3.4), получаем

$$e^{-\alpha x_m/\varepsilon} = \left(\varepsilon + \frac{K(k-1)}{N} \right)^k. \tag{4.13}$$

Рассмотрим случай $1 + K/(N\varepsilon) \leq e$. Тогда значение логарифма в (4.12) между нулем и единицей, поэтому из (4.12), (4.13) получаем

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq C \frac{(N\varepsilon + K(k-1))^k}{N^k} \ln^{k-i} \left(1 + \frac{K}{N\varepsilon} \right). \tag{4.14}$$

Из (4.14) получаем оценку

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq \frac{C}{N^{k-i}}, \quad 1 + \frac{K}{N\varepsilon} \leq e. \tag{4.15}$$

Учитывая оценки (4.8), (4.15), получаем оценку (4.2).

Рассмотрим случай $1 + K/(N\varepsilon) \geq e$. Учитывая (4.13), из (4.12) получаем

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq C_1 \frac{(N\varepsilon + K(k-1))^k}{N^k} \ln^k \left(1 + \frac{K}{N\varepsilon} \right). \tag{4.16}$$

Из (4.16) для некоторой постоянной C_2 следует

$$\varepsilon^i |\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq \frac{C_2}{N^k} \ln^k \left(1 + \frac{K}{N\varepsilon} \right). \quad (4.17)$$

Из (4.8), (4.17) для некоторой постоянной C получаем оценку (4.3).

3. Пусть $m \geq N/2$. Оценка (4.4) следует из (4.7) с применением соотношений (2.2), (3.3), (3.8), (4.8). Теорема доказана.

Получим оценку абсолютной погрешности вне области пограничного слоя. При $m \geq N/2$ из (4.7) для некоторой постоянной C_1 имеем

$$|\Phi^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(\Phi, x)| \leq C_1 \sum_{j=0}^i \frac{1}{\varepsilon^{k+j}} \varepsilon^k e^{-\alpha(x_m - \sigma)/\varepsilon} \frac{1}{N^{k-i+j}} = \frac{C_1}{N^{k-i}} e^{-\alpha(x_m - \sigma)/\varepsilon} \sum_{j=0}^i \frac{1}{(N\varepsilon)^j}.$$

Из этого соотношения с учетом (2.1), (4.8) для некоторой постоянной C получаем оценку абсолютной погрешности вне области пограничного слоя:

$$|u^{(i)}(x) - L_{m,k}^{(i)}(u, x)| \leq \frac{C}{N^{k-i}} \left[\frac{1}{(N\varepsilon)^i} e^{-\alpha(m - N/2)/(N\varepsilon)} + 1 \right], \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}], \quad m \geq \frac{N}{2}.$$

Из этой оценки следует, что абсолютная погрешность при вычислении производной порядка i становится величиной порядка $O(1/N^{k-i})$ при $m > N/2$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Проведем сравнение точности при вычислении производных на равномерной сетке, сетках Шишкина и Бахвалова.

Зададим сетку Шишкина (см. [3]) на основе соотношений

$$\sigma = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{k\varepsilon}{\alpha} \ln N \right\}, \quad h_n = \frac{2\sigma}{N}, \quad n \leq \frac{N}{2}; \quad h_n = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad n > \frac{N}{2}, \quad (5.1)$$

где k – число узлов интерполяции многочлена Лагранжа $L_k(u, x)$. Согласно [11], в случае функции вида (2.1) и заданной сетки (5.1) для некоторой постоянной C при всех m

$$\varepsilon^i |u^{(i)}(x) - L_k^{(i)}(u, x)| \leq C \left(\frac{\ln N}{N} \right)^{k-i}, \quad i < k, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}]. \quad (5.2)$$

Для численных экспериментов зададим функцию вида (2.1):

$$u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon}, \quad x \in [0, 1], \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

где функция $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$ имеет большие градиенты при малых значениях ε .

В таблицах приведена максимальная погрешность по узлам $\tilde{x}_{n,j}$ сгущенной сетки, полученной из исходной сетки делением каждого сеточного интервала $[x_{n-1}, x_n]$ на 10 равных частей. В таблицах $e - m$ обозначает 10^{-m} .

Будем вычислять первую производную на интервалах $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ по формуле, использующей в сеточном шаблоне три узла:

$$L'_3(u, x) = u_{n-1} \frac{2x - x_n - x_{n+1}}{h_n(h_n + h_{n+1})} - u_n \frac{2x - x_{n-1} - x_{n+1}}{h_n h_{n+1}} + u_{n+1} \frac{2x - x_n - x_{n-1}}{h_{n+1}(h_n + h_{n+1})}. \quad (5.3)$$

Относительная погрешность

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \varepsilon \max_{n,j} |L'_3(u, \tilde{x}_{n,j}) - u'(\tilde{x}_{n,j})|$$

Таблица 1. Погрешность формулы (5.3) на равномерной сетке

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	2.25e-3	5.68e-4	1.42e-4	3.57e-5	8.92e-6	2.23e-6
16^{-1}	6.67e-2	2.56e-2	8.14e-3	2.30e-3	6.12e-4	1.58e-4
32^{-1}	1.26e-1	6.67e-2	2.56e-2	8.14e-3	2.30e-3	6.12e-4
64^{-1}	1.32e-1	1.26e-1	6.67e-2	2.56e-2	8.14e-3	2.30e-3
128^{-1}	1.04e-1	1.32e-1	1.26e-1	6.67e-2	2.56e-3	8.14e-3
256^{-1}	6.71e-2	1.04e-1	1.32e-1	1.26e-1	6.67e-2	2.56e-2

Таблица 2. Погрешность и порядок точности формулы (5.3) на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	2.25e-3	5.68e-4	1.42e-4	3.57e-5	8.92e-6	2.23e-6
	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
16^{-1}	1.81e-2	4.84e-3	1.25e-3	3.17e-4	7.99e-5	2.00e-5
	1.90	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
32^{-1}	1.92e-2	5.16e-3	1.33e-3	3.38e-4	8.53e-5	2.14e-5
	1.90	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
64^{-1}	1.98e-2	5.32e-3	1.38e-3	3.49e-4	8.80e-5	2.21e-5
	1.90	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
128^{-1}	2.01e-2	5.40e-3	1.40e-3	3.55e-4	8.94e-5	2.24e-5
	1.89	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
256^{-1}	2.02e-2	5.44e-3	1.41e-3	3.58e-4	9.01e-5	2.26e-5
	1.89	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00

формулы (5.3) приведена в табл. 1, 2 на равномерной сетке и на сетке Бахвалова. Результаты табл. 1 показывают неприемлемость применения равномерной сетки при $\varepsilon \leq 1/N$. В табл. 2 приведен и вычисленный порядок точности

$$M_{N,\varepsilon} = \log_2 \frac{\Delta_{N,\varepsilon}}{\Delta_{2N,\varepsilon}}$$

при вычислении первой производной на сетке Бахвалова. Полученные погрешности порядка $O(N^{-2})$ согласуются с оценками погрешности теоремы 1 при $k = 3, i = 1$.

Зададим формулу для вычисления второй производной на интервале $[x_{n-1}, x_{n+1}]$:

$$L_3''(u, x) = \frac{2u_{n-1}}{h_n(h_n + h_{n+1})} - \frac{2u_n}{h_n h_{n+1}} + \frac{2u_{n+1}}{h_{n+1}(h_n + h_{n+1})}. \quad (5.4)$$

В табл. 3, 4 приведены погрешность

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \varepsilon^2 \max_{n,j} |L_3''(u, \tilde{x}_{n,j}) - u''(\tilde{x}_{n,j})|$$

и вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ формулы (5.4) на сетках Шишкина и Бахвалова.

Данные табл. 3 для сетки Шишкина согласуются с оценкой (5.2). Результаты табл. 4 для погрешности на сетке Бахвалова согласуются с оценкой погрешности порядка $O(1/N)$, соответствующей теореме 1 при $k = 3, i = 2$. Отметим, что аналогичные результаты получены при вычислении других производных. Применение равномерной сетки при $\varepsilon \leq 1/N$ приводит к существенным погрешностям.

Таблица 3. Погрешность и порядок точности формулы (5.4) на сетке Шишкина

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	1.74e-1	8.74e-2	4.38e-2	2.19e-2	1.10e-2	5.48e-3
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
16^{-1}	3.50e-1	2.58e-1	1.68e-1	9.17e-2	4.79e-2	2.45e-2
	0.44	0.62	0.88	0.94	0.97	0.98
32^{-1}	3.50e-1	2.58e-1	1.74e-1	1.09e-1	6.52e-2	3.77e-2
	0.44	0.57	0.67	0.74	0.79	0.83
64^{-1}	3.50e-1	2.58e-1	1.74e-1	1.09e-1	6.52e-2	3.77e-2
	0.44	0.57	0.67	0.74	0.79	0.83

Таблица 4. Погрешность и порядок точности формулы (5.4) на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	1.74e-1	8.74e-2	4.38e-2	2.19e-2	1.10e-2	5.48e-3
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
16^{-1}	2.38e-1	1.30e-1	6.76e-2	3.45e-2	1.74e-2	8.75e-3
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00
32^{-1}	2.44e-1	1.34e-1	6.98e-2	3.56e-2	1.80e-2	9.04e-3
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00
64^{-1}	2.48e-1	1.36e-1	7.08e-2	3.62e-2	1.83e-2	9.18e-3
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00
128^{-1}	2.49e-1	1.37e-1	7.14e-2	3.64e-2	1.84e-2	9.25e-3
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован вопрос применимости классических формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова к функциям с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Необходимость исследования связана с тем, что применение таких формул к функциям с большими градиентами на равномерной сетке может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. Разностные формулы для производных построены на основе дифференцирования многочлена Лагранжа произвольно заданной степени на подынтервалах сетки Бахвалова, содержащих заданное число узлов и покрывающих исходный интервал. Оценки погрешности формул численного дифференцирования получены в общем случае, когда вычисляется производная произвольно заданного порядка и сеточный шаблон в формуле для этой производной содержит произвольно заданное число узлов. На всех подынтервалах, кроме последнего в пограничном слое, получена оценка погрешности порядка $O(1/N^{k-i})$ равномерно по параметру ε , где i – порядок вычисляемой производной, k – число узлов в шаблоне для производной. Только на последнем в пограничном слое подынтервале сохранилась слабая логарифмическая зависимость от параметра ε . При увеличении параметра ε полученные оценки переходят в известные оценки в регулярном случае, когда дифференцируемая функция имеет ограниченные производные. Ранее такой подход к оцениванию погрешности формул численного дифференцирования для функций с большими градиентами не применялся. Результаты численных экспериментов согласуются с полученными оценками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.

2. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–890.
3. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
4. *Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Sci. Publ., 2012.
5. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслоевой составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 221–233.
6. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Electron. Math. Rep. 2012. V. 9. P. 445–455.
7. *Zadorin A., Tikhovskaya S.* Formulas of numerical differentiation on a uniform mesh for functions with the exponential boundary layer // Internat. J. Numer. Anal. Model. 2019. V. 16. № 4. P. 590–608.
8. *Il’in V.P., Zadorin A.I.* Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1260. 042003.
9. *Kopteva N.V., Stynes M.* Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Appl. Numer. Math. 2001. V. 39. P. 47–60.
10. *Shishkin G.I.* Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations // Math. Proc. Royal Irish Acad. 2003. V. 103A. № 4. P. 169–201.
11. *Задорин А.И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. журн. вычисл. матем. 2018. Т. 21. № 3. С. 243–254.
12. *Linß T.* The Necessity of Shishkin Decompositions // Appl. Math. Lett. 2001. V. 14. P. 891–896.
13. *Zadorin N.A.* Numerical differentiation on the Bakhvalov mesh in the presence of an exponential boundary layer // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1546. 012108.
14. *Блатов И.А., Задорин Н.А.* Интерполяция на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя // Уч. зап. Казанского ун-та. Физ.-матем. науки. 2019. Т. 161. Кн. 4. С. 497–508.
15. *Roos H.G.* Layer-adapted meshes: milestones in 50 years of history // Appl. Math. arXiv:1909.08273v1, 2019.
16. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 512.643

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИВЕДЕНИИ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ
ПАРЫ ЮНИТОИДНЫХ МАТРИЦ

© 2023 г. Х. Д. Икрамов^{1,*}

¹ 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

*e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.
Переработанный вариант 06.07.2022 г.
Принята к публикации 14.10.2022 г.

Пусть A и B – эрмитовы $n \times n$ -матрицы, причем матрица A невырождена. Согласно известной теореме матричного анализа, приведение этих матриц к диагональному виду посредством одной и той же эрмитовой конгруэнции возможно в том и только том случае, если матрица $C = A^{-1}B$ имеет вещественный спектр и диагонализуема подобием. Формулируется и доказывается обобщение этого утверждения на случай одновременного приведения к диагональному виду пары юнитоидных матриц. Библ. 2.

Ключевые слова: эрмитова конгруэнция, юнитоид, коквадрат, блочно-диагональная матрица.

DOI: 10.31857/S0044466923020084, EDN: BMSMML

1. Приведение матриц к диагональному виду, о котором говорится в названии статьи, осуществляется посредством эрмитовых конгруэнций, называемых также * – конгруэнциями. Это преобразования вида

$$A \rightarrow P^*AP,$$

где P – невырожденная матрица.

Известная теорема матричного анализа утверждает следующее (см., например, [1, п. 4.5.15]).

Теорема 1. Пусть A и B – эрмитовы $n \times n$ -матрицы, причем матрица A невырождена. Приведение этих матриц к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции возможно в том и только том случае, если матрица $C = A^{-1}B$ имеет вещественный спектр и диагонализуема подобием, т.е. найдется невырожденная матрица R такая, что

$$R^{-1}CR = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Квадратная комплексная матрица A называется юнитоидной, или юнитоидом, если A может быть приведена к диагональному виду посредством эрмитовой конгруэнции. Юнитоидны все эрмитовы и, более общо, все нормальные матрицы. Но юнитоидом является и всякая матрица A , конгруэнтная некоторой нормальной матрице, независимо от того, нормальна ли сама A .

Наша цель в этой статье – обобщить теорему 1 на случай пары юнитоидов A и B . Доказательство этой теоремы существенно использует определяющее свойство эрмитовых матриц

$$(Ay, x) = (y, Ax) \quad \forall x, y \in \mathbf{C}^n,$$

а также вещественность чисел λ_i в (1). Оба этих обстоятельства отсутствуют в ситуации неэрмитовых юнитоидов, что приводит к необходимости изменения условий теоремы, основанном на следующем наблюдении: матрица S , приводящая A и B к диагональному виду, приводит в то же время к диагональному виду матрицы A^* и B^* . Поэтому утверждение, доказываемое в статье, формулируется как

Теорема 2. Пусть A и B – юнитоидные $n \times n$ -матрицы, причем A – невырожденная матрица. Тогда:

а) Если A и B могут быть приведены к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции, то матрицы $C = A^{-1}B$ и $D = A^{-1}B^*$ диагонализуемы одним и тем же подобием, т.е. найдется невырожденная матрица R такая, что

$$R^{-1}CR = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2)$$

и

$$R^{-1}DR = M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n). \quad (3)$$

б) Предположим, что не вырождены оба юнитоида A и B , причем канонические углы матрицы B попарно различны по модулю π . В этом случае из соотношений (2) и (3) следует, что A и B могут быть приведены к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции.

Доказательство теоремы 2 проводится в п. 3 после напоминания нужных сведений в п. 2. Комментарий к теореме дан в заключительном п. 4.

2. Невырожденной матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-*}A,$$

называемую коквадратом матрицы A . Жорданова форма коквадрата в значительной мере определяет каноническую форму A относительно эрмитовых конгруэнций.

Для юнитоидной матрицы A все собственные значения ее коквадрата имеют модуль 1. В частности, ее канонической форме F соответствует в качестве коквадрата диагональная унитарная матрица.

Рассмотрим противоположную ситуацию: Γ – диагональная унитарная матрица такая, что

$$\Gamma = e^{i\phi_1} I_{m_1} \oplus e^{i\phi_2} I_{m_2} \oplus \dots \oplus e^{i\phi_k} I_{m_k}, \quad (4)$$

$$\phi_j \in [0, 2\pi), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где числа ϕ_j попарно различны и $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Нужно найти все матрицы A , для которых Γ является коквадратом.

Рассуждая, как в [2], можно показать, что искомые матрицы A описываются формулой

$$A = \pm e^{i\phi_1/2} H_{m_1} \oplus \pm e^{i\phi_2/2} H_{m_2} \oplus \dots \oplus \pm e^{i\phi_k/2} H_{m_k}, \quad (5)$$

где H_{m_1}, \dots, H_{m_k} – произвольные (невырожденные) эрмитовы матрицы указанных порядков m_1, \dots, m_k .

3. Утверждение а) почти очевидно. Пусть R приводит A и B , а заодно и B^* к диагональному виду:

$$R^*AR = \Omega, \quad R^*BR = \Theta, \quad R^*B^*R = \Theta^*.$$

Тогда

$$R^{-1}(A^{-1}B)R = \Omega^{-1}\Theta, \quad R^{-1}(A^{-1}B^*)R = \Omega^{-1}\Theta^*.$$

Переходя к доказательству утверждения б), предположим, что выполнены соотношения (2) и (3). Из (2) выводим

$$R^{-1}(A^{-1}B)R = \Lambda \rightarrow BR = AR\Lambda$$

и

$$R^*BR = R^*AR\Lambda. \quad (6)$$

Аналогично из (3) находим

$$R^*B^*R = R^*AR\Lambda. \quad (7)$$

Положим $S = R^*BR$. Следствием (6) и (7) является равенство

$$S\Lambda^{-1} = S^*M^{-1},$$

или равенство

$$S^{-*}S = M^{-1}\Lambda \equiv \Gamma. \tag{8}$$

Будучи конгруэнтна B , матрица S есть юнитоид. Согласно (8), диагональная матрица $\Gamma = M^{-1}\Lambda$ – это коквадрат матрицы S . Поэтому Γ – унитарная матрица. Представив ее в форме (4), приходим к тому, что S обязана иметь вид матрицы (5). Теперь из (6) следует, что матрица $T = R^*AR$ также блочно-диагональная, причем ее блочная структура вкладывается в блочную структуру матрицы S . Так как роли обеих невырожденных матриц в рассматриваемой задаче одинаковы, то S и T должны иметь одну и ту же, возможно, более мелкую, блочно-диагональную структуру с диагональными блоками порядков n_1, \dots, n_l ($n_1 + \dots + n_l = n$). При этом для каждого $j, j = 1, \dots, l$, одноименные блоки S_{jj} и T_{jj} суть нормальные матрицы, различающиеся лишь скалярным множителем. Как следствие, S и T можно привести к диагональному виду дополнительной конгруэнцией, задаваемой унитарной матрицей U такой же блочной структуры. Для $j = 1, \dots, l$ блок U_{jj} матрицы U должен диагонализировать j -е диагональные блоки матриц S и T . Существование такой матрицы U доказывает утверждение б).

4. Дополним теорему 2 следующим замечанием. Из соотношений (2) и (3) вытекает

$$M^{-1}\Lambda = (R^{-1}DR)^{-1}(R^{-1}CR) = R^{-1}(D^{-1}C)R = R^{-1}(B^{-*}B)R.$$

Таким образом, матрицу R для этих соотношений следует искать среди матриц, диагонализирующих коквадрат $B^{-*}B$.

И, в заключение, еще одно небезынттересное наблюдение. Пусть A и B – невырожденные $n \times n$ -матрицы, причем A и B^* коммутируют:

$$AB^* = B^*A. \tag{9}$$

Тогда коммутируют также пары $(A^{-1}, B^*), (A, B^{-*})$ и (A^{-*}, B) .

Вычислим коквадраты матриц AB и BA :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{AB} &= (AB)^{-*}(AB) = A^{-*}B^{-*}AB = A^{-*}(B^{-*}A)B = \\ &= A^{-*}(AB^{-*})B = (A^{-*}A)(B^{-*}B) = \mathcal{C}_A \mathcal{C}_B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{BA} &= (BA)^{-*}(BA) = B^{-*}A^{-*}BA = B^{-*}(A^{-*}B)A = \\ &= B^{-*}(BA^{-*})A = (B^{-*}B)(A^{-*}A) = \mathcal{C}_B \mathcal{C}_A. \end{aligned}$$

Тем самым при выполнении условия (9) произведению матриц A и B соответствует в качестве коквадрата произведение коквадратов \mathcal{C}_A и \mathcal{C}_B .

В заключение автор хотел бы выразить глубокую признательность рецензенту этой статьи, указавшему на серьезную неточность, допущенную в первоначальной формулировке теоремы 2. Эта неточность устранена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
2. Икрамов Х.Д. К опыту спектральной теории для преобразований эрмитовой конгруэнции // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2019. Т. 482. С. 114–119.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.956.224

УЛУЧШЕННАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ¹⁾

© 2023 г. П. А. Крутицкий^{1,*}, И. О. Резниченко^{2,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл. 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

² 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 1, стр. 2, физический факультет, Россия

*e-mail: biem@mail.ru

**e-mail: io.reznichenko@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 05.05.2022 г.

Переработанный вариант 19.05.2022 г.

Принята к публикации 04.08.2022 г.

Выводится улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя с гладкой плотностью, заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Формула дает равномерную аппроксимацию потенциала вблизи поверхности и сохраняет свойство непрерывности потенциала при стремлении точки наблюдения из области к поверхности, что подтверждается численными тестами. Предложенная в работе квадратурная формула дает более высокую точность при вычислении потенциала вблизи поверхности, чем известные квадратурные формулы, что также подтверждается численными тестами. Кроме того, выводится квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя на поверхности. Для этой формулы проведены численные тесты, подтверждающие ее эффективность и точность. Библ. 20. Табл. 5.

Ключевые слова: потенциал простого слоя, квадратурная формула, равномерная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0044466923020114, **EDN:** BMYLDN

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод потенциалов позволяет решать краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца путем сведения их к граничным интегральным уравнениям относительно плотности потенциала. Находя плотность потенциала из интегрального уравнения, можно получить решение краевой задачи. Метод потенциалов описан в классических монографиях [1–3]. При численной реализации метода потенциалов необходимо иметь квадратурные формулы для потенциалов, позволяющие вычислять потенциалы с хорошей точностью во всей области, где решается краевая задача.

Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, используемые в инженерных расчетах, не дают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности Γ , на которой задана плотность потенциала, и даже стремятся к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, стремится к определенным точкам на поверхности Γ (см. [4], гл. 2), тогда как сам потенциал непрерывен во всем пространстве, в том числе во всех точках на поверхности Γ . Следовательно, стандартные квадратурные формулы не сохраняют важнейшее свойство потенциала, а именно, его ограниченность и непрерывность на поверхности Γ . В [5], [6] предложена квадратурная формула, которая сохраняет указанное свойство потенциала простого слоя. В настоящей работе проведено дальнейшее улучшение квадратурной формулы из [5], [6] с учетом гладкости коэффициента, появляющегося при параметризации в потенциале. Благодаря сделанным преобразованиям, канонический интеграл, возникающий в квадратурной формуле, вычисляется с более высокой точностью, чем в [5], [6]. Это позволяет усовершенствовать квадратурную формулу из [5], [6] и предложить улучшенную формулу, обеспечивающую повышенную точность вычислений.

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для гармонического потенциала простого слоя с плотностью, заданной на разомкнутых кривых, предложена в [7], [8]. Эта формула

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке И.О. Резниченко Московским центром фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Минобрнауки РФ (№ 075-15-2022-283).

может применяться при нахождении численных решений краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца вне разрезов и разомкнутых кривых на плоскости. Такие задачи изучались в [9–16].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть Γ – простая гладкая замкнутая либо ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2 , содержащая свои предельные точки (см. [17], гл. 14, § 1). Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объемно-односвязную внутреннюю область (см. [18], с. 201). Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$\begin{aligned} y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \\ u \in [0, A], \quad v \in [0, B]; \quad y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сфера, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько кусков и для каждого куска ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждого такого куска.

Введем N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, который отображается на поверхность Γ :

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1; \quad v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Тем самым прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков, и через (u_n, v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно (см. [17], гл. 14, § 1), что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ определяются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно (см. [17], гл. 14, § 1, 2), что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Заметим, что если $|\eta(y(u, v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| \in C^1([0, A] \times [0, B]). \quad (3)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0 \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (4)$$

Из условия (4) следует, что $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$, но условие (3) не следует.

Потенциал простого слоя используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений (см. [19]). Рассмотрим потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k[\mu](x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y) e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u, v)) \exp(ik|x-y(u, v)|)}{|x-y(u, v)|} |\eta(y(u, v))| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \frac{\mu(y(u, v)) \exp(ik|x-y(u, v)|)}{|x-y(u, v)|} |\eta(y(u, v))| dudv, \end{aligned} \quad (5)$$

где для простоты $k \geq 0$ и $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$. Если $k = 0$, то потенциал $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ переходит в потенциал простого слоя для уравнения Лапласа.

Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$\mu(y(u, v)) = \mu_{nm} + o(1) \tag{6}$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

В [5], [6] показано, что при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H), \quad \exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H)$$

для любого $x \notin \Gamma$. Константы в оценках функций, обозначенных как $O(h + H)$, не зависят от n, m и от расположения $x \notin \Gamma$.

Следовательно, используя (5), имеем

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|}, \tag{7}$$

Как видно из соотношения (7), для получения квадратурной формулы необходимо вычислить интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|}, \tag{8}$$

который будем называть *каноническим интегралом*.

3. КАНОНИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть точка x не принадлежит кусочку поверхности, вдоль которого изменяется точка $y = y(u, v)$ в интеграле (8). Центром этого кусочка является точка $y(u_n, v_m)$. В интеграле (8) $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$, $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u, v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m) , тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Все производные берутся в точке (u_n, v_m) . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2 \left(V + \frac{\delta U}{\beta^2} + \frac{Q}{\beta^2} \right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j(y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j(y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u(y_j)'_v.$$

Производные по u и v берутся в точке $u = u_n, v = v_m$. Можно показать (см. [17], гл. 14, § 1), что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \tag{9}$$

Согласно условию (4), $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m , поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

В силу (3) для всех возможных n, m при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть разложена в точке (u_n, v_m) по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (см. [17], гл. 10, § 5.3):

$$\begin{aligned} |\eta(y(u, v))| &= |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta''_u(u - u_n) + \eta''_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2})| = \\ &= |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta''_u U + \eta''_v V + o(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2})|. \end{aligned} \tag{11}$$

Производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m) .

Выражения для $|\eta''_u|$ и $|\eta''_v|$ можно найти с помощью формулы (9), эти выражения имеют вид

$$|\eta''_u| = \frac{(\alpha^2)'_u \beta^2 + \alpha^2 (\beta^2)'_u - 2\delta\delta'_u}{2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \delta^2}}, \quad |\eta''_v| = \frac{(\alpha^2)'_v \beta^2 + \alpha^2 (\beta^2)'_v - 2\delta\delta'_v}{2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \delta^2}},$$

где

$$\begin{aligned} (\alpha^2)'_u &= 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)''_{uu}, & (\beta^2)'_u &= 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_v (y_j)''_{uv}, & (\delta)'_u &= \sum_{j=1}^3 (y_j)''_{uu} (y_j)'_v + (y_j)'_u (y_j)''_{uv}, \\ (\alpha^2)'_v &= 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)''_{uv}, & (\beta^2)'_v &= 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_v (y_j)''_{vv}, & (\delta)'_v &= \sum_{j=1}^3 (y_j)''_{uv} (y_j)'_v + (y_j)'_u (y_j)''_{vv}. \end{aligned}$$

Выражения для $|\eta''_u|$ и $|\eta''_v|$ можно также записать в виде

$$|\eta''_u| = \frac{(\eta, \eta'_u)}{|\eta|}, \quad |\eta''_v| = \frac{(\eta, \eta'_v)}{|\eta|},$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение векторов, и

$$\begin{aligned} (\eta_1)'_u &= (y_2)_{uu}(y_3)_v + (y_2)_u(y_3)_{uv} - (y_3)_{uu}(y_2)_v - (y_3)_u(y_2)_{uv}, \\ (\eta_2)'_u &= (y_3)_{uu}(y_1)_v + (y_3)_u(y_1)_{uv} - (y_1)_{uu}(y_3)_v - (y_1)_u(y_3)_{uv}, \\ (\eta_3)'_u &= (y_1)_{uu}(y_2)_v + (y_1)_u(y_2)_{uv} - (y_2)_{uu}(y_1)_v - (y_2)_u(y_1)_{uv}, \\ (\eta_1)'_v &= (y_2)_{uv}(y_3)_v + (y_2)_u(y_3)_{vv} - (y_3)_{uv}(y_2)_v - (y_3)_u(y_2)_{vv}, \\ (\eta_2)'_v &= (y_3)_{uv}(y_1)_v + (y_3)_u(y_1)_{vv} - (y_1)_{uv}(y_3)_v - (y_1)_u(y_3)_{vv}, \\ (\eta_3)'_v &= (y_1)_{uv}(y_2)_v + (y_1)_u(y_2)_{vv} - (y_2)_{uv}(y_1)_v - (y_2)_u(y_1)_{vv}. \end{aligned}$$

Целью этого раздела является вычисление интеграла (8), который можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|} \approx \\ &\approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{|\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta''_u U + \eta''_v V}{\beta\sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (-\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}/\beta^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{|\eta(y(u_n, v_m))| - |\eta'_u Q/\beta^2 + U(|\eta'_u - |\eta'_v \delta/\beta^2) + |\eta'_v(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)|}{\beta \sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (-\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}/\beta^2} = \quad (12) \\
 &= (|\eta(y(u_n, v_m))| - |\eta'_u Q/\beta^2) \theta_{nm}(x) + \frac{|\eta'_u - |\eta'_v \delta/\beta^2}{\beta} (J_1(H) - J_1(-H)) + \\
 &\quad + \frac{|\eta'_v}{\beta} (J_2(H) - J_2(-H)) = \Theta_{nm}(x).
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\Theta_{nm}(x)$, $\theta_{nm}(x)$, $J_1(H)$ и $J_2(H)$. Функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в явном виде в [5], [6]. Интеграл $J_1(H)$ возникает после интегрирования по V с учетом неравенства (10), а также в соответствии с [20], п. 1.2.43.13, и имеет вид

$$\begin{aligned}
 J_1(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}{\beta^2}} \right| dU = \quad (13) \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \sqrt{\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0} \right| dU,
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\delta_0 = \frac{\delta}{\beta^2}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 0, \quad \varepsilon = \frac{H}{2} + \frac{Q}{\beta^2}, \quad \beta_0 = \frac{\delta H + 2P}{2\beta^2}, \quad \chi_0 = \frac{H^2}{4} + \frac{HQ + r^2}{\beta^2}.$$

Интеграл $J_2(H)$ возникает после интегрирования по V с учетом неравенства (10) и с использованием [20], п. 1.2.43.14. Интеграл $J_2(H)$ дается выражением

$$J_2(H) = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\left(\frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}{\beta^2}} dU = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0} dU. \quad (14)$$

В [5], [6] показано, что квадратный трехчлен в интегралах $J_1(H)$, $J_2(H)$ неотрицателен. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена неположителен, т.е. $\beta_0^2 - \alpha_0^2 \chi_0 \leq 0$. Поэтому положим $\chi_1^2 = \chi_0 - \beta_0^2/\alpha_0^2 \geq 0$ и преобразуем подкоренное выражение в интеграле к виду

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2.$$

Тем самым интегралы $J_1(H)$ и $J_2(H)$ принимают вид

$$\begin{aligned}
 J_1(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} \right| dU, \\
 J_2(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} dU.
 \end{aligned}$$

Теперь надо рассмотреть два случая: $\chi_1 > 0$ и $\chi_1 = 0$. Интегралы $J_1(-H)$, $J_2(-H)$ вычисляются по тем же формулам, что и интегралы $J_1(H)$, $J_2(H)$, но в параметрах ε , β_0 , χ_0 надо заменить H на $-H$.

3.1. Вычисление интеграла $J_1(H)$ при $\chi_1 > 0$

Рассмотрим случай $\chi_1 > 0$. Сделаем гиперболическую замену переменной в интеграле $J_1(H)$ по формулам

$$U = (\chi_1 \operatorname{sh} t - \beta_0/\alpha_0)/\alpha_0, \quad t = \operatorname{arcsh}(\zeta), \quad \zeta = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1,$$

и обозначим $t_{\pm} = \operatorname{arcsch}(\zeta_{\pm})$, $\zeta_{\pm} = (\pm\alpha_0 h/2 + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1$. Тогда, используя тождество $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$, находим

$$\begin{aligned} J_1(H) &= \frac{\chi_1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} \left(\chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) \frac{1}{\alpha_0} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t = \\ &= \frac{\chi_1^2}{\alpha_0^2} \int_{t_-}^{t_+} \left(t - \frac{\beta_0}{\alpha_0 \chi_1} \right) \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t = \\ &= \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} \int_{t_-}^{t_+} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh}^2 t - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H), \end{aligned}$$

где интеграл

$$I(H) = \frac{\chi_1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t$$

вычислен явно в [5], [6]. Обозначив $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta_0 \beta_0/\alpha_0^2$, $\delta_1 = \delta_0 \chi_1/\alpha_0$ и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} J_1(H) &= \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} \int_{t_-}^{t_+} \ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t| d \operatorname{sh}^2 t - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H) = \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} (\ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t|) \operatorname{sh}^2 t \Big|_{t_-}^{t_+} - \\ &- \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} J_{11} - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H) = \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} \left(\ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \zeta + \chi_1 \sqrt{\zeta^2 + 1}| \right) \zeta^2 \Big|_{\zeta_-}^{\zeta_+} - \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} J_{11} - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H), \end{aligned}$$

где

$$J_{11} = \int_{t_-}^{t_+} \frac{(\delta_1 \operatorname{ch} t + \chi_1 \operatorname{sh} t) \operatorname{sh}^2 t}{\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t} dt.$$

В интеграле J_{11} сделаем замену переменной $z = \exp(t) > 0$, тогда находим

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} t &= \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad t = \ln z, \quad dt = \frac{dz}{z}, \\ z_{\pm} &= \exp(t_{\pm}) = \operatorname{sh} t_{\pm} + \operatorname{ch} t_{\pm} = \operatorname{sh} t_{\pm} + \sqrt{\operatorname{sh}^2 t_{\pm} + 1} = \zeta_{\pm} + \sqrt{\zeta_{\pm}^2 + 1}, \\ J_{11} &= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(z^2 - 1)}{2z} \frac{(z^2 - 1)(\delta_1(z^2 + 1) + \chi_1(z^2 - 1))}{4\varepsilon_1 z^2 + 2z(z^2 - 1)\delta_1 + 2z(z^2 + 1)\chi_1} \frac{dz}{z} = \\ &= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(z^2 - 1)}{2z} \frac{(\delta_1 + \chi_1)z^4 - 2\chi_1 z^2 + \chi_1 - \delta_1}{2z^2((\delta_1 + \chi_1)z^2 + 2\varepsilon_1 z + \chi_1 - \delta_1)} dz = \\ &= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(\delta_1 + \chi_1)z^6 - (3\chi_1 + \delta_1)z^4 + (3\chi_1 - \delta_1)z^2 - \chi_1 + \delta_1}{4z^3((\delta_1 + \chi_1)z^2 + 2\varepsilon_1 z + \chi_1 - \delta_1)} dz = \\ &= \frac{\delta_+}{4} J_{12} - \frac{3\chi_1 + \delta_1}{4} J_{13} + \frac{3\chi_1 - \delta_1}{4} J_{14} - \frac{\delta_-}{4} J_{15}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\delta_{\pm} = \chi_1 \pm \delta_1 = \chi_1(1 \pm \delta_0/\alpha_0)$, и введены обозначения

$$J_{12} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{z^3 dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-}, \quad J_{13} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{z dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-},$$

$$J_{14} = \int_z^{z_+} \frac{dz}{z(\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-)}, \quad J_{15} = \int_z^{z_+} \frac{dz}{z^3(\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-)}.$$

Необходимо пояснить, что если $\delta_+ = 0$, то в формуле (15) отсутствует слагаемое $(\delta_+/4)J_{12}$, а если $\delta_- = 0$, то в формуле (15) отсутствует слагаемое $(\delta_-/4)J_{15}$. Заметим также, что δ_+ и δ_- не могут обращаться в нуль одновременно. Действительно, если $\delta_+ = \delta_- = 0$, то $\chi_1 = 0$, а в данном разделе рассматривается случай $\chi_1 > 0$. Вычислим интегралы $J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}$ при разных значениях параметров. Рассмотрим также вспомогательный интеграл

$$J_0 = \int_z^{z_+} \frac{dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-}.$$

I. Пусть $\delta_+ \neq 0$.

Используя [20], п. 1.2.8.13, вычислим интеграл J_0 . Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- > 0$, то

$$J_0 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}} \ln \left| \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}}{\delta_+ z + \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}} \right| \Bigg|_z^{z_+}.$$

Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- < 0$, то

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta_+ \delta_- - \varepsilon_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1}{\sqrt{\delta_+ \delta_- - \varepsilon_1^2}} \Bigg|_z^{z_+}.$$

Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- = 0$, то

$$J_0 = -\frac{1}{\delta_+ z + \varepsilon_1} \Bigg|_z^{z_+}.$$

Интеграл J_{12} вычисляется, согласно [20], п. 1.2.8.21, и имеет вид

$$J_{12} = \left(\frac{\delta_+ z^2 - 4\varepsilon_1 z}{2\delta_+^2} + \frac{4\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}{2\delta_+^3} \ln \left| \delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_- \right| \right) \Bigg|_z^{z_+} - \frac{\varepsilon_1(4\varepsilon_1^2 - 3\delta_+ \delta_-)}{\delta_+^3} J_0.$$

Интеграл J_{13} вычисляется, согласно [20], пп. 1.2.8.19 и 1.2.4.17, и имеет вид

$$J_{13} = \frac{1}{2\delta_+} \ln \left| \delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_- \right| \Bigg|_z^{z_+} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_+} J_0.$$

Для интеграла J_{14} надо рассмотреть несколько случаев. Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- \neq 0$ и $\delta_- \neq 0$, то в соответствии с [20], п. 1.2.8.25 получаем

$$J_{14} = \frac{1}{2\delta_-} \ln \left| \frac{z^2}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-} \right| \Bigg|_z^{z_+} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_-} J_0.$$

Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- = 0$ и $\delta_- \neq 0$, то, используя [20], п. 1.2.5.12 и учитывая, что $\varepsilon_1^2 = \delta_+ \delta_- \neq 0$, находим

$$J_{14} = -\frac{\delta_+}{\varepsilon_1^2} \ln \left| \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1}{\delta_+ z} \right| \Bigg|_z^{z_+} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_-} J_0.$$

Если $\delta_- = 0$ и $\varepsilon_1 \neq 0$, то, используя [20], п. 1.2.5.10, имеем

$$J_{14} = \frac{1}{\delta_+} \left(-\frac{\delta_+}{2\varepsilon_1 z} + \frac{\delta_+^2}{4\varepsilon_1^2} \ln \left| \frac{z + 2\varepsilon_1/\delta_+}{z} \right| \right) \Bigg|_z^{z_+}.$$

Если $\delta_- = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, то

$$J_{14} = \int_z^{z_+} \frac{dz}{\delta_+ z^3} = -\frac{1}{2\delta_+ z^2} \Big|_z^{z_+}.$$

Интеграл J_{15} находится в соответствии с [20], п. 1.2.8.27 и дается выражением

$$J_{15} = \left(\frac{4\varepsilon_1 z - \delta_-}{2\delta_-^2 z^2} + \frac{4\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}{2\delta_-^3} \ln \left| \frac{z^2}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-} \right| \right) \Big|_z^{z_+} + \frac{2\varepsilon_1(3\delta_+ \delta_- - 4\varepsilon_1^2)}{2\delta_-^3} J_0, \quad \delta_- \neq 0.$$

Как отмечено выше, если $\delta_- = 0$, то слагаемое $(\delta_-/4)J_{15}$ в формуле (15) отсутствует, поэтому интеграл J_{15} в этом случае вычислять не нужно.

Замечание. Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- = 0$ и $\delta_- \neq 0$, то при вычислении интеграла J_{11} линейная комбинация интегралов J_0 равна нулю.

II. Пусть $\delta_+ = 0$.

Как указано выше, в этом случае в формуле (15) отсутствует слагаемое с интегралом J_{12} , поэтому интеграл J_{12} вычислять не нужно. Кроме того, $\delta_- \neq 0$ если $\delta_+ = 0$, поэтому надо рассмотреть два случая: $\varepsilon_1 \neq 0$ и $\varepsilon_1 = 0$.

Если $\delta_+ = 0$ и $\varepsilon_1 \neq 0$, то

$$J_0 = \frac{1}{2\varepsilon_1} \ln |2\varepsilon_1 z + \delta_-| \Big|_z^{z_+}, \quad J_{13} = \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(z - \frac{\delta_-}{2\varepsilon_1} \ln \left| z + \frac{\delta_-}{2\varepsilon_1} \right| \right) \Big|_z^{z_+},$$

и, согласно пп. 1.2.5.9 и 1.2.5.11 в [20],

$$J_{14} = \frac{1}{\delta_-} \ln \left| \frac{z}{z + \delta_-/(2\varepsilon_1)} \right| \Big|_z^{z_+}, \quad J_{15} = \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\frac{4\varepsilon_1^2}{\delta_-^2} \frac{1}{z} - \frac{2\varepsilon_1}{\delta_-} \frac{1}{2z^2} - \frac{8\varepsilon_1^3}{\delta_-^3} \ln \left| \frac{z + \delta_-/(2\varepsilon_1)}{z} \right| \right) \Big|_z^{z_+}.$$

Если $\delta_+ = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, то

$$J_0 = \frac{z}{\delta_-} \Big|_z^{z_+}, \quad J_{13} = \frac{z^2}{2\delta_-} \Big|_z^{z_+}, \quad J_{14} = \frac{\ln z}{\delta_-} \Big|_z^{z_+}, \quad J_{15} = -\frac{1}{2\delta_-} \frac{1}{z^2} \Big|_z^{z_+}.$$

Здесь использовался тот факт, что $z_{\pm} > 0$.

3.2. Вычисление интеграла $J_1(H)$ при $\chi_1 = 0$

Поскольку $\alpha_0 > 0$, подкоренное выражение в $J_1(H)$ принимает вид

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = \alpha_0^2 \left(U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \right)^2,$$

следовательно,

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \alpha_0 \left| U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \right| \right| dU.$$

1. Если $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-h/2, h/2)$, то

$$\begin{aligned} J_1(H) &= \int_{-h/2}^{-\beta_0/\alpha_0^2} U \ln \left| (\delta_0 - \alpha_0)U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU + \int_{-\beta_0/\alpha_0^2}^{h/2} U \ln \left| (\delta_0 + \alpha_0)U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU = \\ &= J_{16} \left(-\frac{h}{2}, -\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) + J_{16} \left(-\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right), \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \int_{U_1}^{U_2} U \ln |\kappa_1 U + \kappa_2| dU.$$

2. Если $-\beta_0/\alpha_0^2 \in [h/2, +\infty)$, то

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| (\delta_0 - \alpha_0)U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU = J_{16} \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right).$$

3. Если $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-\infty, -h/2]$, то

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{h/2} \ln \left| (\delta_0 + \alpha_0)U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU = J_{16} \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right).$$

Вычислим интеграл $J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2)$, согласно [20], п. 1.6.5.5:

1. При $\kappa_1 \neq 0$

$$J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \left(\frac{1}{2} \left(U^2 - \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} \right) \ln |\kappa_1 U + \kappa_2| - \frac{1}{2} \left(\frac{U^2}{2} - \frac{\kappa_2 U}{\kappa_1} \right) \right) \Big|_{U_1}^{U_2}.$$

2. При $\kappa_1 = 0$

$$J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{(U_2^2 - U_1^2)}{2} \ln |\kappa_2|.$$

3.3. Вычисление интеграла $J_2(H)$

I. Пусть $\chi_1 > 0$.

Интеграл J_2 вычисляется, согласно [20], п. 1.2.41.8, и имеет вид

$$\begin{aligned} J_2(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} dU = \frac{1}{\alpha_0} \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} d(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0) = \\ &= \frac{1}{2\alpha_0} (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0) \left((\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2 \right)^{1/2} \Big|_{U=-h/2}^{U=h/2} + \\ &+ \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0} \ln \left| (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0) + \left((\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2 \right)^{1/2} \right| \Big|_{U=-h/2}^{U=h/2}. \end{aligned}$$

II. Пусть $\chi_1 = 0$.

Введем обозначения $t = \alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0$, $t_{\pm} = \alpha_0(\pm h/2) + \beta_0/\alpha_0$. Поскольку $\alpha_0 > 0$ и, очевидно, $t_+ > t_-$, получаем

$$J_2(H) = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2} dU = \frac{1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} |t| dt, \quad J_2(H) = \begin{cases} (t_+^2 - t_-^2)/(2\alpha_0), & 0 \leq t_- < t_+, \\ (t_+^2 + t_-^2)/(2\alpha_0), & t_- < 0 < t_+, \\ -(t_+^2 - t_-^2)/(2\alpha_0), & t_- < t_+ \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы.

Теорема. Пусть Γ – простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2 , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2 , содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1)

со свойствами (3), (4), и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. Тогда для потенциала простого слоя (5) при $x \notin \Gamma$ имеет место квадратурная формула

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \Theta_{nm}(x), \quad k \geq 0, \quad (17)$$

где интеграл $\Theta_{nm}(x)$, определенный в (12), вычислен в разд. 3 в явном виде.

Как следует из приведенных ниже численных тестов, остаточный член в (17) можно оценить как $O(H^2)$ равномерно по $x \notin \Gamma$, т.е. формула (17) дает равномерную аппроксимацию и обеспечивает равномерную сходимость к потенциалу простого слоя для точек, расположенных вне Γ .

Если $k = 0$, то потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал простого слоя для уравнения Лапласа, соответственно, квадратурная формула (17) при $k = 0$ принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала простого слоя.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ТЕСТЫ

Тестирование квадратурных формул для потенциалов простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями

$$y_1(u, v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u, v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (18)$$

причем $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u, v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u, 0))| = |\eta(y(u, \pi))| = 0$ для всех $u \in [0, 2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала простого слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всем пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближенное значение потенциала простого слоя вычислялось по квадратурной формуле (17) в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 \pm \Delta R$. Тем самым вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии ΔR от нее. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках либо относительных погрешностей (когда абсолютная погрешность делится на модуль точного значения потенциала в данной точке), и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей. Найденные погрешности сравниваются с погрешностями, полученными для стандартной и улучшенной квадратурных формул из [5], [6].

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной либо относительной погрешности

$$\begin{aligned} x_j^{ql} &= R y_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3, \\ u_q &= \frac{2\pi}{2N} q, \quad q = 0, 1, 2; \quad v_l = \frac{\pi}{2M} l, \quad l = 0, \dots, 2M, \end{aligned} \quad (19)$$

где $y_j(u, v)$ определяется формулами (18), R – радиус вспомогательной сферы. Таким образом, эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены не по всей сфере, а находятся вблизи нулевого меридиана.

Вычисления проводились для различных значений M и N . Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N = M = 25$, то $h \approx 0.25$, $H \approx 0.13$; если $N = M = 50$, то $h \approx 0.126$, $H \approx 0.063$; если $N = M = 100$, то $h \approx 0.063$, $H \approx 0.031$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен $1 - \Delta R$, для внешних сфер он равен $1 + \Delta R$. В верхней строке указаны значения M , N . Первое число в ячейках таблиц – максимальная погрешность для стандартной квадратурной формулы из [5], [6] на данной вспомогательной сфере, второе число после точки с запятой – максималь-

Таблица 1. Максимальная относительная погрешность квадратурных формул в тесте 1

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
Внутренние сферы			
0.1	4.0E-3; 4.0E-3; 0.0019	9.0E-4; 9.7E-4; 0.00044	2.2E-4; 2.4E-4; 0.00011
0.01	0.21; 0.040; 0.0035	0.042; 0.014; 0.00076	7.1E-3; 4.2E-3; 0.00015
0.001	2.5; 0.065; 0.0042	0.60; 0.038; 0.0011	0.14; 0.017; 0.00026
0.0001	25; 0.069; 0.0043	6.3; 0.045; 0.0012	1.56; 0.027; 0.0003
Внешние сферы			
0.1	4.9E-3; 5.8E-3; 0.0015	9.9E-4; 1.4E-3; 0.00035	2.4E-4; 3.4E-4; 8.6E-5
0.01	0.21; 0.048; 0.003	0.043; 0.016; 0.00073	7.2E-3; 4.3E-3; 0.00014
0.001	2.5; 0.075; 0.0035	0.60; 0.046; 0.00045	0.15; 0.019; 0.00026
0.0001	25; 0.070; 0.0043	6.3; 0.047; 0.0011	1.6; 0.031; 0.00021

Таблица 2. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
Внутренние сферы			
0.1	3.4E-3; 2.7E-3; 0.0024	1.1E-4; 6.4E-4; 5.7E-4	2.8E-7; 1.6E-4; 1.4E-4
0.01	0.21; 4.7E-3; 0.0044	0.042; 1.0E-3; 9.7E-4	7.1E-3; 2.2E-4; 2.0E-4
0.001	2.5; 5.5E-3; 0.0051	0.60; 1.4E-3; 0.0013	0.14; 3.4E-4; 3.1E-4
0.0001	25; 5.6E-3; 0.0052	6.2; 1.5E-3; 0.0014	1.6; 3.7E-4; 3.5E-4
Внешние сферы			
0.1	4.1E-3; 3.9E-4; 0.00066	1.6E-4; 8.5E-5; 1.4E-4	6.9E-7; 2.1E-5; 3.4E-5
0.01	0.21; 1.7E-3; 0.002	0.042; 4.2E-4; 5.1E-4	7.1E-3; 6.8E-5; 8.9E-5
0.001	2.5; 4.7E-3; 0.0044	0.60; 5.5E-4; 4.7E-4	0.14; 1.8E-4; 2.1E-4
0.0001	25; 5.5E-3; 0.0052	6.2; 1.4E-3; 0.0013	1.6; 2.8E-4; 2.6E-4

ная погрешность на данной сфере для улучшенной квадратурной формулы из [5], [6], а третье число – максимальная погрешность для квадратурной формулы (17).

Тест 1 для квадратурной формулы в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = 4\pi$, тогда гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 4\pi & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{4\pi}{|x|} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

В табл. 1 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

Тест 2 для квадратурной формулы в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = \cos u \sin v$, при этом гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ и φ – зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. Методика вычислений в этом тесте аналогична таковой в тесте 1. Отличие состоит лишь в том, что в формулах (19) теперь $q = 0, \dots, 2N$, т.е. точки распределены по всей сфере. В табл. 2 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 3. Максимальная относительная погрешность квадратурных формул в тесте 3

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
Внутренние сферы			
0.1	4.3E-3; 4.8E-3; 0.0029	9.7E-4; 1.2E-3; 6.7E-4	2.4E-4; 2.9E-4; 1.7E-4
0.01	0.24; 0.047; 0.0069	0.050; 0.017; 0.0017	8.4E-3; 4.9E-3; 3.8E-4
0.001	2.9; 0.077; 0.008	0.72; 0.045; 0.0022	0.17; 0.021; 5.7E-4
0.0001	30; 0.082; 0.0081	7.4; 0.053; 0.0023	1.9; 0.032; 6.1E-4
Внешние сферы			
0.1	5.4E-3; 6.9E-3; 0.0027	1.1E-3; 1.7E-3; 5.6E-4	2.7E-4; 4.1E-4; 1.4E-4
0.01	0.25; 0.057; 0.0063	0.051; 0.018; 0.0015	8.6E-3; 5.1E-3; 3.4E-4
0.001	2.9; 0.089; 0.0075	0.72; 0.054; 0.0017	0.17; 0.023; 5.2E-4
0.0001	30; 0.083; 0.0081	7.4; 0.056; 0.0022	1.9; 0.037; 5.4E-4

Таблица 4. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
Внутренние сферы			
0.1	3.9E-3; 4.4E-3; 0.0013	8.6E-4; 1.1E-3; 3.1E-4	2.1E-4; 2.7E-4; 7.8E-5
0.01	0.097; 0.040; 0.0023	0.019; 0.014; 5.2E-4	2.8E-3; 4.2E-3; 1.1E-4
0.001	1.2; 0.065; 0.0032	0.30; 0.038; 8.0E-4	0.071; 0.017; 1.9E-4
0.0001	13; 0.069; 0.0033	3.1; 0.045; 8.9E-4	0.78; 0.027; 2.3E-4
Внешние сферы			
0.1	3.9E-3; 5.4E-3; 7.0E-4	8.8E-4; 1.3E-3; 1.5E-4	2.1E-4; 3.2E-4; 3.8E-5
0.01	0.098; 0.048; 0.0018	0.019; 0.015; 4.8E-4	2.9E-3; 4.3E-3; 1.0E-4
0.001	1.2; 0.074; 0.0028	0.30; 0.046; 5.6E-4	0.071; 0.019; 1.7E-4
0.0001	13; 0.070; 0.0033	3.1; 0.047; 8.5E-4	0.78; 0.031; 1.9E-4

Тест 3 для квадратурной формулы в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = k$. Тогда потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} e^{ik} \frac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{при } |x| < 1, \\ \sin k \frac{e^{ik|x|}}{|x|} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где $k = 1$. Методика вычислений в тесте 3 аналогична таковой в тесте 1. В табл. 3 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

Тест 4 для квадратурной формулы в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = k^3 \cos v$. При этом потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} (ik - 1)e^{ik} \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{при } |x| < 1, \\ (k \cos k - \sin k) \frac{(ik|x| - 1)e^{ik|x|}}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат, $k = 1$. Методика вычислений в этом тесте такая же, как и в тесте 2. В табл. 4 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Выводы. Как указано выше, первое число в ячейках таблиц – погрешность стандартной квадратурной формулы, второе число – погрешность улучшенной квадратурной формулы из [5], [6], третье число – погрешность квадратурной формулы (17). Из таблиц видно, что квадратурная формула (17) дает второй порядок (по H) равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала с погрешностью $O(H^2)$. Погрешность $O(H^2)$ не зависит от расстояния до Γ и справедлива даже на очень малых расстояниях. Улучшенная квадратурная формула из [5], [6] дает первый порядок (по H) равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала с погрешностью $O(H)$. Тем самым формула (17) превосходит результат, полученный в [5], [6]. Обе эти формулы сохраняют свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через поверхность Γ , что также следует из приведенных численных результатов. Из таблиц вытекает, что стандартная квадратурная формула (см. [5], [6]) не дает равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и не обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала простого слоя, поскольку расходится вблизи Γ .

Отметим, что в тесте 2 формула (17) не дает существенного повышения точности по сравнению с улучшенной формулой из [5], [6]. Это объясняется тем, что максимальная погрешность формулы из [5], [6] достигается вблизи полюсов сферы, а в тесте 2 плотность потенциала обращается в нуль на полюсах, за счет чего погрешность формулы из [5], [6] уменьшается. Высокая погрешность формулы из [5], [6] вблизи полюсов сферы вызвана тем, что длина нормали обнуляется на полюсах, но меняется вблизи полюсов наиболее быстро, а формула из [5], [6] не учитывает производные длины нормали. В формуле (17) длина нормали учитывается более точно, чем в формуле из [5], [6], в частности, в (17) учтены производные длины нормали, поэтому в остальных тестах, кроме теста 2, формула (17) показывает более высокую точность.

6. ПРЯМОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

Используя полученные результаты, можно построить квадратурную формулу для прямого значения потенциала простого слоя, когда точка x лежит на поверхности Γ в одном из узлов. Пусть $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$, и $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ – один из узлов на поверхности Γ . Если $(n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})$ (т.е. $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \neq y(u_n, v_m)$), то интеграл (8) можно считать приближенно равным функции $\Theta_{nm}(x)$, которая найдена в разд. 3 в явном виде. Остается приближенно вычислить интеграл (8), когда $(n, m) = (\hat{n}, \hat{m})$ (т.е. $y(u, v)$ принадлежит маленькому кусочку поверхности с центром в точке $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$). В этом случае, применяя формулу Тейлора с центром в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$, находим

$$\begin{aligned} |y(u, v) - x|^2 &\approx \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u (u - u_{\hat{n}}) + (y_j)'_v (v - v_{\hat{m}}))^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 [((y_j)'_u)^2 (u - u_{\hat{n}})^2 + ((y_j)'_v)^2 (v - v_{\hat{m}})^2 + 2(y_j)'_u (y_j)'_v (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}})] = \\ &= \alpha^2 (u - u_{\hat{n}})^2 + \beta^2 (v - v_{\hat{m}})^2 + 2\delta (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}) = \rho^2 (\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(u - u_{\hat{n}})^2 + (v - v_{\hat{m}})^2}$, $\cos \phi = (u - u_{\hat{n}})/\rho$, $\sin \phi = (v - v_{\hat{m}})/\rho$, формулы для α^2 , β^2 , δ даны в разд. 3, и в них все производные $(y_j)'_u$ и $(y_j)'_v$ берутся в точке $u = u_{\hat{n}}$, $v = v_{\hat{m}}$. Рассмотрим канонический интеграл

$$\begin{aligned} &\int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|} \approx |\eta(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))| \times \\ &\times \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 (u - u_{\hat{n}})^2 + \beta^2 (v - v_{\hat{m}})^2 + 2\delta (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}})}} = |\eta(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))| \mathcal{F}_{\hat{n}, \hat{m}}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\mathcal{F}_{\hat{n}, \hat{m}}$. Интеграл $\mathcal{F}_{\hat{n}, \hat{m}}$ вычислен в [5], [6] и дается выражением

$$\mathcal{F}_{\hat{n}, \hat{m}} = \frac{h}{\beta} \ln \left| z + \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2} \right| \Big|_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} - \frac{H}{\alpha} \ln \left| z + \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2} \right| \Big|_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}.$$

Таблица 5. Максимальная погрешность квадратурной формулы (20) по тестам 1–4

Номер теста	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
1	0.0087; 0.0014	0.0049; 0.00035	0.0026; 8.8E–5
2	0.0011; 0.00099	0.0003; 0.00026	7.8E–5; 6.7E–5
3	0.010; 0.0019	0.0058; 4.9E–4	0.0031; 1.2E–4
4	0.0089; 0.0012	0.0049; 3.1E–4	0.0026; 8.0E–5

Из приведенных рассуждений вытекает, что если точка x лежит на поверхности Γ в узле $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$, то квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} |\eta(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))| \mathcal{J}_{\hat{n}, \hat{m}} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \exp(ik|y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) - y(u_n, v_m)|) \Theta_{nm}(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

При выводе формулы (20) используются соотношение (11) и предположение, что во всех узловых точках вектор нормали η имеет положительную длину, т.е. $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m . Данные условия выполняются, если выполнены условия (3), (4). Квадратурная формула (20) может использоваться для численного решения граничных интегральных уравнений, возникающих при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

Сходимость формулы (20) проверена на тестах 1–4 из разд. 5, полученные результаты приведены в табл. 5, где указана максимальная погрешность вычислений в узловых точках единичной сферы для каждого теста. В таблице по тестам 1 и 3 приводится максимальная относительная погрешность, а по тестам 2 и 4 – максимальная абсолютная погрешность. Для сравнения в табл. 5 приводятся результаты по квадратурной формуле, построенной в [5], [6]. Первое число в табл. 5 – максимальная погрешность квадратурной формулы из [5], [6], а второе число – максимальная погрешность квадратурной формулы (20). Из табл. 5 следует, что квадратурная формула (20) сходится и аппроксимирует прямое значение потенциала простого слоя с погрешностью $O(H^2)$. Кроме того, квадратурная формула (20) имеет второй порядок сходимости по H , тогда как квадратурная формула из [5], [6] дает сходимость первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1951. 659 с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала. М.: ГИТТЛ, 1953. 798 с.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
5. Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.
6. Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трехмерном случае // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2019. № 112. 26 с.
7. Krutitskii P.A., Kwak D.Y., Hyon Y.K. Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // J. Engineer. Math. 2007. V. 59. P. 25–60.
8. Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
9. Krutitskii P.A. The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1998. V. 17. № 2. P. 361–378.
10. Krutitskii P.A. The skew derivative problem in the exterior of open curves in a plane // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1997. V. 16. № 3. P. 739–747.
11. Krutitskii P.A. The Dirichlet problem for the dissipative Helmholtz equation in a plane domain bounded by closed and open curves // Hiroshima Math. J. 1998. V. 28. № 1. P. 149–168.

12. *Krutitskii P.A.* The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a domain, bounded by closed and open curves // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. № 2. P. 209–216.
13. *Krutitskii P.A.* On the electric current from electrodes in a magnetized semiconductor film // IMA J. Appl. Math. 1998. V. 60. P. 285–297.
14. *Krutitskii P.A.* The Neumann problem on wave propagation in a 2-D external domain with cuts // J. Math. Kyoto Univ. 1998. V. 38. № 3. P. 439–452.
15. *Krutitskii P.A.* Wave propagation in a 2-D external domain with cuts // Appl. Anal. 1996. V. 62. № 3–4. P. 297–309.
16. *Krutitskii P.A.* The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits // Quarterly of App. Math. 2009. V. 67. № 1. P. 73–92.
17. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.
18. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Физматлит, 1973.
19. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
20. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 519.624.2

**СИНГУЛЯРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФАЗОВЫХ
ТРАЕКТОРИЙ НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ: КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА,
АНАЛИЗ И РАСЧЕТЫ**

© 2023 г. Н. Б. Колюхова^{1,*}, С. В. Курочкин^{1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: nadja@ccas.ru

**e-mail: kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022 г.
Переработанный вариант 24.06.2022 г.
Принята к публикации 14.10.2022 г.

Изучается сингулярная начальная задача для нелинейного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, определенного на полубесконечном интервале и вырождающегося по начальным данным для фазовой переменной. Задача возникает в динамике вязкой несжимаемой жидкости как вспомогательная при изучении автомодельных решений уравнений пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления (плоскопараллельное ламинарное течение в слое смещения). Она представляет и самостоятельный математический интерес. С применением полученных ранее результатов по сингулярным нелинейным задачам Коши и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова даются корректная постановка и полный математический анализ указанной сингулярной начальной задачи. Формулируются ограничения на “параметр автомодельности” для глобального существования решений, приводятся двусторонние оценки решений и результаты расчетов фазовых траекторий решений для различных значений указанного параметра. Библ. 14. Фиг. 4.

Ключевые слова: двумерные уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления, уравнение для функции тока, автомодельные решения, нелинейное ОДУ второго порядка для фазовых траекторий с вырождением по начальным данным, сингулярная начальная задача, ограничения на параметр автомодельности для глобального существования решений, двусторонние оценки решений, результаты расчетов.

DOI: 10.31857/S0044466923020096, **EDN:** BNBCUI

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа дополняет [1]. В [1] даются математически корректная постановка и исследование “начально-краевой” задачи (НКЗ) для нелинейного автономного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка, определенного на всей вещественной оси. Задача приближенно описывает автомодельные режимы течений вязкой несжимаемой жидкости в слое смещения (частный случай – задача о плоской “полуструе”). Сопутствующая сингулярная нелинейная краевая задача (КрЗ), определенная на неположительной вещественной полуоси, представляет самостоятельный математический и физический интерес (она охватывает задачи о “затопленной струе”, о “пристеночной струе” и др.). При этом в [1] даются развитие и обоснование нового подхода, отличного от применявшегося ранее специалистами по механике жидкости и газа (см. [2–4] и цитированную там литературу). Для обоснованной математической постановки указанных задач, их детального анализа и численного решения в [1] применяются результаты по сингулярным нелинейным задачам Коши (ЗК), гладким устойчивым начальным многообразиям (УНМ) решений и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова, а также асимптотические методы; приводятся результаты численных экспериментов и обсуждается их физическая интерпретация.

Необходимые предварительные сведения из [1] об исходной задаче приведены здесь в разд. 1, постановка и исследование сопутствующей нелинейной сингулярной задачи для фазовых траекторий решений этой задачи даются в разд. 2.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИСХОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для постановки и изучения сингулярной нелинейной начальной задачи, указанной в аннотации, требуется предварительно привести постановку задачи из [1] и формулировку некоторых для нее основных результатов.

В [2], [3] основная задача, рассматриваемая далее в [1], сформулирована в виде

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' - [(m-1)/m](\Phi')^2 = 0, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (1.1)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi'(\tau) = 0, \quad (1.2)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\Phi(\tau)/\tau^m) = b, \quad (1.4)$$

где постоянные $m > 0$ (параметр автомодельности) и $b > 0$ – задаваемые величины. Эта задача ошибочно трактуется в [2], [3] как трехточечная краевая, на чем здесь еще остановимся далее (см. также [1]).

Согласно утверждениям в [2], [3] нелинейное ОДУ (1.1) получено из двумерного уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления, а вся задача (1.1)–(1.4) описывает автомодельный режим ламинарного течения в слое смешения, который возникает при взаимодействии двух неограниченных потоков, верхний из которых движется, а нижний покоится.

Однако исходная постановка задачи в [2–4] не приводится и, в частности, не уточняется характер движения потока в верхнем слое. По-видимому, впервые эта постановка приведена в [1]. Для полноты изложения коротко опишем ее здесь.

1.1. Математическое описание исходной физической модели на основе двумерных уравнений пограничного слоя

Рассматривается математическая модель течения в слое смешения, возникающего в результате взаимодействия двух неограниченных слоев вязкой несжимаемой жидкости, верхний из которых движется (со степенной зависимостью горизонтальной составляющей скорости течения от высоты), а нижний покоится. Для описания модели используются двумерные уравнения пограничного слоя для установившегося плоскопараллельного ламинарного течения с нулевым градиентом давления:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

(см., например, [5, гл. IX] и [6, гл. I]). Здесь (1.5) – уравнение Прандтля, а (1.6) – уравнение неразрывности (несжимаемости); ось x направлена вдоль потока и совпадает со свободной линией тока, u и v – компоненты скорости течения вдоль и поперек потока соответственно, $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости (в безразмерных переменных $\nu = 1$; см. [6, с. 14] и подробнее [1]).

Учитывая физическую интерпретацию модели и определение свободной линии тока (а также способ построения ниже автомодельных решений), получаем, что для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны выполняться следующие условия $\forall x > 0$:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad (1.7)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (1.8)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} [u(x, y)/y^{m-1}] = U_0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) = 0, \quad (1.9)$$

где m и U_0 – задаваемые величины, $m > 0$ – числовой параметр, $U_0 > 0$ – размерная величина, так что первое из условий в (1.9) задает поведение $u(x, y)$ в верхнем слое:

$$u(x, y) \sim U_0 y^{m-1}, \quad x > 0, \quad y \gg 1. \quad (1.10)$$

Как уже отмечено в [1], в задаче (1.5)–(1.9) рассматриваются значения $x > 0$ и никакие условия при $x = 0$ не задаются, так как при изучении установившихся автомодельных режимов течений, не зависящих от “предыстории”, задание произвольного профиля скоростей в некотором “начальном” сечении потока становится невозможным (подробнее об этом см. [7, с. 518]).

Для упрощения задачи (1.5)–(1.9) вводится, как обычно, функция тока $\psi(x, y)$, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности (1.6). Тогда, учитывая, что ось x совпадает со свободной линией тока, получаем соотношения

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y), \quad v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y), \quad \psi(x, 0) = 0 \quad \forall x > 0.$$

Для $\psi(x, y)$ получаем сингулярную задачу в бесконечной правой полуплоскости:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \forall x > 0, \quad (1.12)$$

$$\psi(x, 0) = 0 \quad \forall x > 0, \quad (1.13)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} / y^{m-1} \right) = U_0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \forall x > 0. \quad (1.14)$$

Отметим еще раз, что описанная выше постановка исходной задачи для компонент скорости течения (или, как следствие из нее, для функции тока) впервые приведена в [1] (в [2–4] отсутствуют как постановка исходной задачи, так и ссылки на таковую в литературе).

1.2. Переход к сингулярной нелинейной задаче для автомодельных функций

В классе автомодельных функций, введенных в [2], [3], решения (1.11) представляются в виде

$$\psi(x, y) = \omega^{-1/2} x^{v\omega} \Phi(\tau), \quad (1.15)$$

$$\tau = \omega^{1/2} y/x^{1/(m+1)}, \quad \omega > 0, \quad m > 0, \quad v\omega = m/(m+1). \quad (1.16)$$

Для определения $\Phi(\tau)$ получается нелинейное ОДУ (1.1). Далее при описании автомодельного режима течения в слое смешения, возникающем при взаимодействии двух потоков, верхний из которых движется, а нижний покоится, ОДУ (1.1) дополняется условиями (1.2)–(1.4), смысл которых в [2], [3] не поясняется (условие (1.4) там записано в виде $\Phi(\tau) = b\tau^m + \dots$, $b > 0$, $m > 0$).

Более аккуратно: будем искать решения задачи (1.11)–(1.14) в классе автомодельных функций (1.15), где автомодельная переменная τ в (1.16) зависит от параметра m , причем справедливы соотношения (штрих означает производную по τ)

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = x^{(m-1)/(m+1)} \Phi'(\tau), \quad (1.17)$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \sqrt{\frac{v}{m(m+1)}} x^{-1/(m+1)} [\tau \Phi'(\tau) - m\Phi(\tau)]. \quad (1.18)$$

Для функции $\Phi(\tau)$ получаем нелинейную сингулярную задачу с параметром $m > 0$:

- 1) из уравнения (1.11) и формул (1.15), (1.16) следует автономное нелинейное ОДУ (1.1) третьего порядка;
- 2) из требования (1.12) и соотношения (1.17) вытекает предельное условие (1.2);

3) из (1.13) и (1.16) следует выполнение условия в нуле (1.3) (ось x совпадает со свободной линией тока, а $\tau = 0$ при $y = 0$);

4) наконец, из требований (1.14) и формул (1.17), (1.18) вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\Phi'(\tau)/\tau^{m-1}] = U_0/[m/(v(m+1))]^{(m-1)/2}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\tau\Phi'(\tau) - m\Phi(\tau)] = 0,$$

откуда получаем предельное равенство (1.4) и соотношения

$$b = (U_0/m)/[m/(v(m+1))]^{(m-1)/2}, \quad U_0 = U_0(m, b, v) = mb\{m/[v(m+1)]\}^{(m-1)/2}. \quad (1.19)$$

Окончательно получаем (по крайней мере, формально) сингулярную нелинейную задачу (1.1)–(1.4) с параметрами $m > 0$ и $b > 0$. Из соотношений (1.19) следует, что задание величины b в условии (1.4) эквивалентно заданию U_0 в формуле (1.10), которая описывает y -зависимость горизонтальной составляющей скорости верхнего потока при больших y и влечет качественно различный характер ее поведения при $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$.

Как уже подтверждено в [1], оправданием предположений (1.9), (1.10) для профиля скорости потока в верхнем слое в приведенной физической модели является то обстоятельство, что для фиксированных значений m : $1/2 < m < \infty$, и $b > 0$ задача (1.1)–(1.4) однозначно разрешима.

Для дальнейшего опишем некоторые семейства частных регулярных и сингулярных решений ОДУ (1.1), которые получаются методами понижения порядка этого ОДУ и не являются решениями задачи (1.1)–(1.4): наряду с очевидными решениями $\Phi(\tau) \equiv \text{const} \forall m \in \mathbb{R}$, ОДУ (1.1) имеет, в частности, следующие семейства решений:

1) для каждого $m : (m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$, существует однопараметрическое семейство сингулярных решений

$$\Phi_{\text{sing}, m}^{(1)}(\tau - \tau_p) = \frac{6m}{(m+1)(\tau - \tau_p)}, \quad \tau_p \in \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

с особенностью типа полюса в конечной точке $\tau = \tau_p$; при этом для $m = 1/2$ существует двухпараметрическое семейство сингулярных решений

$$\Phi_{\text{sing}, 1/2}^{(2)}(\tau - \tau_p, a) = a \coth(a(\tau - \tau_p)/2), \quad a, \tau_p \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

которые переходят в решения (1.20) при $a = 0$;

2) для $m \in \{1/2; 1; 2; \infty\}$ существуют двухпараметрические семейства решений $\Phi_m(\tau - \tau_s, a)$ ($a, \tau_s \in \mathbb{R}$), определенных глобально – на всей вещественной оси:

$$\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a) = a \tanh(a(\tau - \tau_s)/2), \quad (1.22)$$

$$\Phi_1(\tau - \tau_s, a) = a(\tau - \tau_s), \quad \Phi_2(\tau - \tau_s, a) = a(\tau - \tau_s)^2, \quad (1.23)$$

$$\Phi_\infty(\tau - \tau_s, a) = a[\exp(a(\tau - \tau_s)) - 1]. \quad (1.24)$$

В (1.20)–(1.24) произвольные величины τ_p и τ_s – параметры сдвига, a – отличное от нуля произвольное число.

1.3. Уточнение постановки сингулярной нелинейной задачи для автомоделных функций

В [2], [3] задача (1.1)–(1.4) в исходном виде не изучается и, в частности, физический смысл условий (1.2)–(1.4) не поясняется. Для ее изучения используются методы понижения порядка ОДУ (1.1), инвариантного относительно двух групп преобразований подобия. В результате в фазовом пространстве новых “нефизических” переменных возникает двумерная нелинейная динамическая система с особенностями на так называемой сфере Пуанкаре (понятие сферы Пуанкаре, а также принципы анализа заданных на ней нелинейных динамических систем второго порядка, правые части которых – многочлены, см., например, [8, гл. VI]). Проведен довольно сложный качественный анализ поведения всех траекторий решений на этой сфере с отбором нужных, и описана непрямая процедура возвращения к решениям исходной задачи в физических переменных. Никакие расчеты для этой задачи не осуществлялись (вообще говоря, непонятно, что и как можно посчитать в исходных физических переменных при таком сложном подходе этих работ), приведены только качественные иллюстрации поведения траекторий решений на сфере Пуанкаре для некоторых значений параметра m .

Математически другой подход осуществлен в [1], при котором задача (1.1)–(1.4) изучается в исходном виде с применением некоторых результатов классического труда Ляпунова [9], а также публикаций [10–12], а именно, результатов по сингулярным нелинейным ЗК, гладким УНМ решений и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова для автономных систем нелинейных ОДУ.

Обратимся к подходу [1], где прежде всего замечено, что нелинейная сингулярная задача (1.1)–(1.4), определенная на всей вещественной оси, нуждается в более строгой математической постановке и вытекающей из нее более точной трактовке. В частности, условие (1.2) более точно означает стремление решения при $\tau \rightarrow -\infty$ к стационарной точке ОДУ (1.1). В фазовом пространстве \mathbb{R}^3 переменных (Φ, Φ', Φ'') ОДУ (1.1) имеет бесконечное множество стационарных точек (положений равновесия):

$$(\Phi, \Phi', \Phi'')_s(a) = (-a, 0, 0), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Учитывая понятие допустимых предельных условий на бесконечности для систем нелинейных автономных ОДУ (см. [10–12]), условие (1.2) следует заменить на более точное предельное условие с неизвестным параметром $a > 0$:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \exp(-\varepsilon\tau) \{\Phi(\tau) + a, \Phi'(\tau), \Phi''(\tau)\} = \{0, 0, 0\} \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < a. \tag{1.26}$$

Это условие отвечает экспоненциальному стремлению решений ОДУ (1.1) при $\tau \rightarrow -\infty$ к неподвижной точке (1.25) типа псевдо-гиперболического седла (подробнее см. [1]).

Условие (1.26) порождает локально сингулярную нелинейную ЗК (1.1), (1.26), которая при фиксированных значениях $a > 0$ и $m \neq 0$ обладает однопараметрическим семейством решений. Эти решения представимы однопараметрическим экспоненциальным рядом Ляпунова, а именно, справедливо

Утверждение 1. При любых заданных $a > 0$ и $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК (1.1), (1.26) имеет однопараметрическое семейство решений $\Phi_m(\tau, a, d)$. Эти решения представимы экспоненциальным рядом Ляпунова

$$\Phi_m(\tau, a, d) = -a + d \exp(a\tau) + \sum_{l=2}^{\infty} h_l d^l \exp(la\tau), \quad \tau \leq \tilde{\tau}, \quad \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, \tag{1.27}$$

где d – параметр, $|d \exp(a\tilde{\tau})|$ мало, а коэффициенты h_l не зависят от d ($l \geq 1, h_1 \doteq 1$):

$$h_l = \left[\sum_{k=1}^{l-1} k \left(\frac{(m-1)(l-k)}{m} - k \right) h_k h_{l-k} \right] / [la^2(l-1)], \quad l = 2, 3, \dots; \tag{1.28}$$

в частности, из (1.28) следует, что $h_2 = -1/(4am), h_3 = (m+4)/(72a^2m^2), \dots$

В предельном случае $m \rightarrow \infty$ сингулярная нелинейная ЗК (1.1), (1.26) имеет двухпараметрическое семейство точных решений $\Phi_\infty(\tau, a, d)$, существующих глобально на всей вещественной оси:

$$\Phi_\infty(\tau, a, d) = -a + d \exp(a\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{1.29}$$

где a и d – параметры, $a > 0, d \in \mathbb{R}$.

Заметим здесь, что для приведенных в п. 1.2 некоторых частных решений справедливы утверждения: при любых заданных $a > 0$ функции $\Phi_{\text{sing},1/2}^{(2)}(\tau - \tau_p, a), \Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a), \Phi_\infty(\tau - \tau_s, a)$ являются решениями сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.26); они представимы рядами Ляпунова (1.27), (1.28) с соответствующими значениями параметра d :

$$d_{\text{sing},1/2}(a, \tau_p) = -2a \exp(-a\tau_p), \quad d_{1/2}(a, \tau_s) = 2a \exp(-a\tau_s), \quad d_\infty(a, \tau_s) = a \exp(-a\tau_s).$$

Принимая во внимание результаты [10–12], получаем также следующее

Утверждение 2. При любых заданных $a > 0$ и $m \neq 0$ в окрестности стационарной точки (1.25) в фазовом пространстве \mathbb{R}^3 переменных (Φ, Φ', Φ'') значения решений сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.26) образуют инвариантное относительно τ одномерное аналитическое УНМ $M_-^{(1)}(a, m)$, которое задается двумя нелинейными соотношениями:

$$M_-^{(1)}(a, m): \quad \Phi + a = \rho_1(\Phi'', a, m), \quad \Phi' = \rho_2(\Phi'', a, m). \tag{1.30}$$

Здесь $\{\rho_1(y), \rho_2(y)\}$ – решение сингулярной нелинейной задачи типа Ляпунова:

$$\frac{d\rho_1}{dy} \left[ay + \frac{m-1}{m} \rho_2^2 - \rho_1 y \right] = \rho_2, \quad \frac{d\rho_2}{dy} \left[ay + \frac{m-1}{m} \rho_2^2 - \rho_1 y \right] = y, \quad |y| < \Delta, \quad \Delta > 0, \quad (1.31)$$

$$\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0. \quad (1.32)$$

Решение $\{\rho_1(y, a, m), \rho_2(y, a, m)\}$ этой задачи (с вырождением в нуле по начальным данным) существует, единственно и голоморфно в точке $y = 0$:

$$\rho_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k, \quad \rho_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k, \quad |y| < \Delta_0, \quad \Delta_0 > 0, \quad (1.33)$$

$$b_1 = 1/a^2, \quad c_1 = 1/a, \quad (1.34)$$

$$c_k = \left[\sum_{l=1}^{k-1} \left(l c_l b_{k-l} - \frac{m-1}{m} \sum_{s=1}^{k-l} l c_s c_{k-l-s+1} \right) \right] / (ak), \quad (1.35)$$

$$b_k = \left[c_k + \sum_{l=1}^{k-1} \left(l b_l b_{k-l} - \frac{m-1}{m} \sum_{s=1}^{k-l} l b_s c_{k-l-s+1} \right) \right] / (ak), \quad k = 2, 3, \dots; \quad (1.36)$$

в частности, из (1.34)–(1.36) следует, что $c_2 = 1/(2ma^4)$, $b_2 = 3/(4ma^5)$, ...

В предельном случае $m \rightarrow \infty$ задача (1.31), (1.32) имеет точное решение

$$\rho_1(y, a, \infty) = y/a^2, \quad \rho_2(y, a, \infty) = y/a, \quad (1.37)$$

так что, в силу (1.30), одномерное УНМ $M_{-1}^{(1)}(a, \infty)$ становится линейным, существует глобально на \mathbb{R}^3 и порождается значениями решений (1.29).

Таким образом, значения решений, построенных в утверждении 1 и представимых однопараметрическим экспоненциальным рядом Ляпунова, порождают в окрестности стационарной точки $(-a, 0, 0)$ фазового пространства \mathbb{R}^3 переменных (Φ, Φ', Φ'') инвариантное относительно τ одномерное нелинейное УНМ; это УНМ задается двумя нелинейными соотношениями (1.30), связывающими переменные Φ , Φ' и Φ'' . Тогда в конечной точке $\tau = -T$, $T \gg 1$, получаются два нелинейных условия для значений $\Phi(-T)$, $\Phi'(-T)$ и $\Phi''(-T)$. Таким образом, для достаточно больших конечных значений $|\tau|$, $\tau < 0$, предельное условие (1.26) эквивалентно двум нелинейным соотношениям, определяющим устойчивую сепаратрису седла, так что задача (1.1), (1.26), (1.3) – двухточечная краевая.

В итоге получаем, что на интервале $-\infty < \tau \leq 0$ определена сингулярная нелинейная КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) (а на отрезке $[-T, 0]$ – эквивалентная ей регулярная двухточечная КрЗ) с положительными параметрами a и m . Исследование вспомогательной КрЗ (1.1), (1.26), (1.3), определенной на \mathbb{R}_- , проведено в [1, разд. 3]: показано, что при фиксированных $a > 0$ и $m \geq 1/3$ решение $\Phi_m(\tau, a)$ этой задачи существует и единственно, и получены его двусторонние оценки, причем при заданном $m \geq 1/2$ решение неограниченно продолжается вправо, а при $m: 1/3 \leq m < 1/2$, оно сингулярно – имеет особенность типа полюса на \mathbb{R}_+ . При $m: m \in \{1/3, 1/2, \infty\}$, КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) имеет точные решения, представляющие самостоятельный физический интерес.

Заметим здесь, что точное решение $\Phi_{1/3}(\tau, a)$ КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) задается сложной неявной формулой, которая в данной работе не приводится (см. [1]).

1.4. Формулировки основных теорем из [1] для сингулярной нелинейной КрЗ

Теорема 1. При любых заданных $m \geq 1/2$ и $a > 0$ сингулярная нелинейная КрЗ (1.1), (1.26), (1.3), определенная на \mathbb{R}_- , имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a)$; оно есть строго возрастающая выпуклая функция, принадлежащая семейству (1.27), (1.28) при некотором $d = d_m(a) > 0$, причем справедливы двусторонние оценки

$$a[\exp(a\tau) - 1] \leq \Phi_m(\tau, a) \leq a \tanh(a\tau/2), \quad \tau \in \mathbb{R}_-, \quad a \leq d_m(a) \leq 2a. \quad (1.38)$$

Теорема 2. Для решений сингулярной нелинейной КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) при $m: 0 < m \leq 1/2$, следующие утверждения справедливы:

1) для любой фиксированной пары значений $\{m, a\}: 1/3 \leq m \leq 1/2, a > 0$, КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a)$; оно есть строго возрастающая функция, принадлежащая семейству (1.27), (1.28) при некотором $d = d_m(a) > 0$, и справедливы двусторонние оценки

$$a \tanh(a\tau/2) \leq \Phi_m(\tau, a) \leq \Phi_{1/3}(\tau, a), \quad \tau \in \mathbb{R}_-, \quad 2a \leq d_m(a) \leq 2a\sqrt{3} \exp(\pi\sqrt{3}/6); \quad (1.39)$$

2) при $m: 1/3 \leq m < 1/2$, решение $\Phi_m(\tau, a)$ имеет точку перегиба $\tau = \tau_{in} \in \mathbb{R}_-$, определяемую соотношением

$$\Phi_m(\tau_{in}, a)\Phi'_m(\tau_{in}, a) = \frac{2m-1}{m} \int_{-\infty}^{\tau_{in}} [\Phi'_m(s, a)]^2 ds, \quad \tau_{in} \in \mathbb{R}_-$$

и не существует глобально на \mathbb{R} – имеет полюс первого порядка в точке $\tau = \tau_p(a, m) > 0$, где $\tau_p(a, 1/3) = 2\pi\sqrt{3}/(3a)$ и $\tau_p(a, m) > \tau_p(a, 1/3) \forall m: 1/3 < m < 1/2$;

3) при любых $m: 0 < m < 1/3$, и $a > 0$ КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) решений не имеет.

Здесь значения $d_{1/3}(a) = 2a\sqrt{3} \exp(\pi\sqrt{3}/6)$ и $\tau_p(a, 1/3) = 2\pi\sqrt{3}/(3a)$, наряду с неявной формулой для функции $\Phi_{1/3}(\tau, a)$, получены в [1].

1.5. Основной результат для сингулярной нелинейной НКЗ

Для всей исходной задачи (1.1)–(1.4) значение параметра a не является произвольным: $a = a(b)$ находится из требования (1.4), если такое поведение решений КрЗ (1.1), (1.26), (1.3), продолженных вправо, справедливо (из [1] следует, что это имеет место при $m: 1/2 < m < \infty$). В результате, при фиксированном значении параметра $m > 0$, задача (1.1)–(1.4) разбивается на две – сингулярную двухточечную КрЗ с параметром, заданную на неположительной вещественной полуоси, и ЗК на положительной полуоси, дающую продолжение решения КрЗ. В [1, разд. 4] формулируются окончательные ограничения на параметр автомодельности $m: 1/2 < m < \infty$, гарантирующие существование и единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), которую по понятным причинам называем НКЗ. (Напомним еще раз, что в [2], [3] задача (1.1)–(1.4) ошибочно трактуется как трехточечная краевая.) Даются двусторонние оценки решения и исследуются его свойства для различных значений параметра автомодельности. При этом аналитическая функция $\Phi_{1/2}(\tau, a)$ является для НКЗ (1.1)–(1.4) верхним решением на \mathbb{R}_- и нижним решением на \mathbb{R}_+ , а функция $\Phi_\infty(\tau, a)$ – наоборот. Предложены численные методы и приведены результаты расчетов. Кроме того, наряду с численным моделированием функции тока (как функции автомодельной переменной), впервые приводятся некоторые результаты расчетов траекторий частиц в плоскости потока.

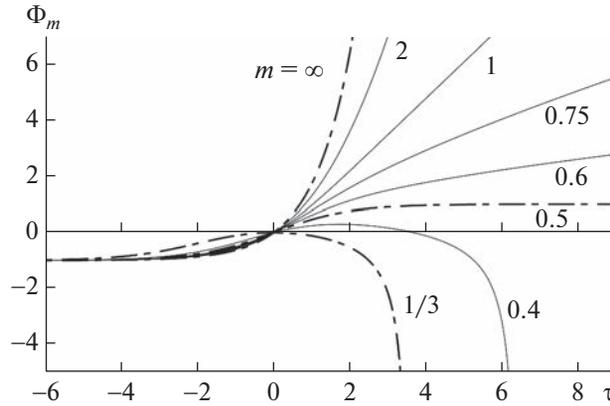
При этом важным является следующее замечание о применении масштабных преобразований при решении сингулярной нелинейной НКЗ. Пусть сингулярная нелинейная НКЗ (1.1), (1.26), (1.3), (1.4) однозначно разрешима при заданных $m > 0$ и $b > 0$, и пусть $\Phi_m(\tau, a)$ – ее решение, где $a = a(b)$. Чтобы найти это решение, достаточно решить указанную НКЗ при $a = 1$. Действительно:

1) решаем сопутствующую сингулярную нелинейную КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) при $a = 1$ (см. методы вычислений в [1]) и находим $d = d_m(1) > 0$ и соответствующее решение $\Phi_m(\tau, 1)$ (здесь и далее $d = d_m(a)$ – параметр ряда Ляпунова (1.27), (1.28));

2) продолжая решение $\Phi_m(\tau, 1)$ для $\tau > 0$ как решение ЗК с найденными начальными данными в точке $\tau = 0$, получаем значение $b = b_m(1) > 0$;

3) значение $a = a(b) > 0$ для заданного $b > 0$ в (1.4) находим с помощью масштабных преобразований

$$b_m(a) = b_m(1)a^{m+1} > 0, \quad a = a(b) = [b/b_m(1)]^{1/(m+1)} > 0; \quad (1.40)$$



Фиг. 1

4) искомое решение $\Phi_m(\tau, a)$ и значение параметра $d = d_m(a) > 0$, где $a = a(b)$ определено в (1.40), окончательно получаем с помощью преобразований

$$\Phi_m(\tau, a) = a\Phi_m(a\tau, 1), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad d_m(a) = ad_m(1) > 0. \tag{1.41}$$

Значения $b_m(1)$ и $d_m(1)$, вообще говоря, не могут быть определены методами локального анализа и находятся численно (см. для этих величин [1, табл. 2, 3]). (В справедливости соотношений (1.40), (1.41) нетрудно убедиться непосредственно.)

Теорема 3. При любых заданных $b > 0$ и $m: 1/2 < m < \infty$, сингулярная нелинейная НКЗ (1.1)–(1.4), определенная на всей вещественной оси, имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a, b)$, где $a = a(b) > 0$, и следующие утверждения справедливы:

(i) $\Phi_m(\tau, a, b)$ – выпуклая на \mathbb{R}_- монотонно возрастающая на \mathbb{R} функция, принадлежащая семейству (1.27), (1.28) для некоторого $d = d_m(a, b) > 0$ и удовлетворяющая ограничениям

$$a[\exp(a\tau) - 1] \leq \Phi_m(\tau, a, b) \leq a \tanh(a\tau/2), \quad -\infty < \tau \leq 0,$$

$$a \tanh(a\tau/2) < \Phi_m(\tau, a, b) < a[\exp(a\tau) - 1], \quad \tau > 0;$$

(ii) решение $\Phi_m(\tau, a, b)$ может быть получено следующим образом: фиксируем $a = 1$ и определяем решение $\Phi_m(\tau, 1)$ КрЗ (1.1), (1.26), (1.3), которое в силу теоремы 1 существует, единственно и принадлежит семейству (1.27), (1.28) при некотором $d = d_m(1)$; продолженное вправо, это решение удовлетворяет предельному соотношению $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\Phi_m(\tau, 1)/\tau^m] = b_m(1) > 0$; для окончательного нахождения искомого решения $\Phi_m(\tau, a, b)$ при $\tau \in \mathbb{R}$ используем соотношения (1.40), (1.41).

На фиг. 1 для наглядности представлены графики из [1] решений НКЗ (1.1)–(1.4) при $a = 1$ и разных значениях параметра m .

Асимптотическое поведение решения $\Phi_m(\tau, a, b)$ при больших $\tau > 0$ подробно исследовано в [1], на чем останавливаться не будем.

2. КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА, ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ НАЧАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ РЕШЕНИЙ ОДУ (1.1)

Как показано, в частности, в [2], [3], порядок ОДУ (1.1) понижается, если взять искомую функцию Φ в качестве независимой переменной и ввести новую искомую функцию $f(\Phi)$, которая вдоль траектории $\Phi(\tau)$ ОДУ (1.1) задается в виде

$$f(\Phi(\tau)) = \frac{d\Phi}{d\tau}(\tau). \tag{2.1}$$

Для $f(\Phi)$ получаем неавтономное ОДУ второго порядка (здесь и далее точка означает производную по Φ):

$$f\ddot{\Phi} + \dot{f}^2 + \Phi\dot{f} - [(m-1)/m]f = 0. \tag{2.2}$$

В [3] сингулярная задача для ОДУ (2.2), соответствующая исходной задаче (1.1)–(1.4), сформулирована следующим образом (в обозначениях данной работы):

$$f\ddot{\Phi} + \dot{f}^2 + \Phi\dot{f} - [(m-1)/m]f = 0, \quad -a < \Phi < \infty, \tag{2.3}$$

$$f = a(\Phi + a) - \frac{1}{4m}(\Phi + a)^2 + O((\Phi + a)^3), \quad \Phi \rightarrow -a + 0, \tag{2.4}$$

$$f = mb^{1/m}\Phi^{(m-1)/m} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m+1}b^{2/m}\Phi^{-2/m} + O(\Phi^{-1-3/m}), \quad \Phi \rightarrow \infty, \tag{2.5}$$

где $a > 0, m > 0$.

При этом в [3] предельные условия (2.4), (2.5) рассматриваются как граничные, и задача (2.3)–(2.5) трактуется как двухточечная сингулярная КрЗ. В [2] в разложении (2.5) присутствует еще одно слагаемое, являющееся экспоненциально убывающей функцией с произвольным постоянным множителем (как будет видно из дальнейшего исследования, это слагаемое действительно должно присутствовать). Однако в [3] это слагаемое опущено (его присутствие с произвольной постоянной не согласуется с пониманием задачи (2.3)–(2.5) как двухточечной краевой).

В действительности же, как показано далее, задача (2.3), (2.4) является сингулярной начальной. Ее корректная постановка дана ниже. Эта задача имеет единственное решение для каждого $m \neq 0$, а выражение (2.5) дает главный член асимптотического представления решения при $m > 1/2$ и больших $\Phi > 0$.

2.1. Постановка сингулярной начальной задачи для нелинейного ОДУ, вырождающегося по фазовой переменной

Рассмотрим ОДУ (2.2) с точки зрения данной работы. Заметим, что соотношение (2.1) и равенство

$$\dot{f}(\Phi(\tau)) = \Phi''(\tau)/\Phi'(\tau) \tag{2.6}$$

выполняются вдоль траектории ОДУ (1.1).

Пусть $\Phi(\tau)$ – решение сингулярной нелинейной ЗК на бесконечности (1.1), (1.26). Принимая во внимание формулы (2.1)–(2.6), условие (1.26) при $\tau \rightarrow -\infty$, утверждение 1 и разложение (1.27), получаем предельные условия для решений ОДУ (2.2) при $\Phi \rightarrow -a + 0$: $\lim_{\Phi \rightarrow -a+0} f(\Phi) = 0$, $\lim_{\Phi \rightarrow -a+0} \dot{f}(\Phi) = a$.

В результате получаем сингулярную нелинейную ЗК:

$$(f\ddot{\Phi} + \Phi\dot{f}) = [(2m-1)/m]f, \quad \Phi > -a, \tag{2.7}$$

$$\lim_{\Phi \rightarrow -a+0} f(\Phi) = 0, \quad \lim_{\Phi \rightarrow -a+0} \dot{f}(\Phi) = a, \tag{2.8}$$

где ОДУ (2.7) совпадает с (2.2), но представлено в более удобном виде.

Пусть теперь $\Phi(\tau)$ – решение сингулярной нелинейной НКЗ (1.1)–(1.4) для заданных $b > 0, a = a(b) > 0$ и $m: 1/2 < m < \infty$ (в соответствии с теоремой 3). Тогда решение $f(\Phi)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) должно удовлетворять предельному условию

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} [f(\Phi)/\Phi^{(m-1)/m}] = mb^{1/m}, \quad b > 0, \quad 1/2 < m < \infty. \tag{2.9}$$

Прежде всего рассмотрим сингулярную нелинейную ЗК (2.7), (2.8) при $m \neq 0$. Для ее решений, в частности, выполнено соотношение

$$f(\Phi)\dot{f}(\Phi) + \Phi f(\Phi) = [(2m-1)/m] \int_{-a}^{\Phi} f(s) ds. \tag{2.10}$$

Отсюда нетрудно проверить, что справедливо

Следствие 1. При $m = \infty$ и $m = 1/2$ существуют точные решения $f_m(\Phi, a)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8):

$$f_\infty(\Phi, a) = a(\Phi + a), \tag{2.11}$$

$$f_{1/2}(\Phi, a) = (a^2 - \Phi^2)/2. \tag{2.12}$$

(Эти решения, естественно, не удовлетворяют условию (2.9).) Для исходной сингулярной ЗК (1.1), (1.26) функция (2.11) соответствует точному решению $\Phi_\infty(\tau - \tau_s, a)$, определенному формулой (1.24); при $a^2 > \Phi^2$ функция (2.12) соответствует точному решению $\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a)$, определенному в (1.22), а при $a^2 < \Phi^2$ – точному решению $\Phi_{\text{sing},1/2}^{(2)}(\tau - \tau_p, a)$, определенному в (1.21).

Замечание 1. ОДУ (2.7) инвариантно относительно замены переменных

$$f_{\text{new}} = f/a^2, \quad \Phi_{\text{new}} = \Phi/a.$$

Тогда в задаче (2.7), (2.8) достаточно положить $a = 1$, так как справедливо соотношение

$$f(\Phi, a) = a^2 f(\Phi/a, 1). \tag{2.13}$$

В дальнейшем, оставляя a в формулах, в численных примерах полагаем $a = 1$.

2.2. Вспомогательная сингулярная ЗК для нелинейного ОДУ с регулярной особенностью в нуле и разрешимость исходной вырожденной задачи

Из сингулярной нелинейной задачи (2.7), (2.8) следует, что ОДУ (2.7) вырождается по фазовой переменной при $\Phi \rightarrow -a + 0$. Чтобы исследовать это вырождение, положим

$$f(\Phi) = A(\Phi + a)^\alpha [1 + o(1)], \quad \dot{f}(\Phi) = \alpha A(\Phi + a)^{\alpha-1} [1 + o(1)], \tag{2.14}$$

$$\ddot{f} = \alpha(\alpha - 1)A(\Phi + a)^{\alpha-2} [1 + o(1)], \quad \Phi \rightarrow -a + 0, \tag{2.15}$$

где $\alpha > 0$.

Подстановка (2.14), (2.15) в (2.7) дает (в главном при $\Phi \rightarrow -a$)

$$\alpha(\alpha - 1)A^2(\Phi + a)^{2\alpha-2} + \alpha^2 A^2(\Phi + a)^{2\alpha-2} + \alpha A(\Phi + a)^\alpha - a\alpha A(\Phi + a)^{\alpha-1} - [(m - 1)/m]A(\Phi + a)^\alpha + \dots = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому соотношению при $\Phi \rightarrow -a$, приравняем нулю сумму слагаемых с наименьшими степенями. Тогда получим соотношения

$$2\alpha - 2 = \alpha - 1, \quad A^2 + A(-a) = 0,$$

откуда

$$\alpha = 1, \quad A = a. \tag{2.16}$$

Далее, учитывая формулы (2.13)–(2.16), осуществим замену переменных:

$$t = \Phi/a + 1, \quad t > 0, \quad f(\Phi) = \tilde{f}(t) = a^2 t [1 + \chi(t)], \tag{2.17}$$

где $\lim_{t \rightarrow +0} \chi(t) = 0$. Из (2.17), в частности, следуют формулы (здесь и далее штрих означает дифференцирование по t):

$$\dot{f}(\Phi) = \tilde{f}'(t)/a = a[1 + \chi(t) + t\chi'(t)], \quad \ddot{f}(\Phi) = \tilde{f}''(t)/a^2 = 2\chi'(t) + t\chi''(t). \tag{2.18}$$

Используя (2.7), (2.8) и (2.17), (2.18), получаем сингулярную нелинейную ЗК для ОДУ относительно новой искомой функции $\chi(t)$; это ОДУ имеет регулярную особенность в точке $t = 0$ (классификацию особых точек для систем линейных и нелинейных ОДУ см. в [13], [14]):

$$t^2\chi'' + 3t\chi' + \chi = G(t, \chi, t\chi') + \eta(t, m), \quad t > 0, \tag{2.19}$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \chi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} [t\chi'(t)] = 0; \tag{2.20}$$

$$G(t, \chi, t\chi') = t\chi'[(1 + \chi)^{-1} - 1] - t\chi'(1 + \chi)^{-1}[t + t\chi'] \tag{2.21}$$

$$\eta(t, m) = -t/m, \quad m \neq 0. \tag{2.22}$$

Заметим, что функция $G(t, \chi, t\chi')$ голоморфна в точке $(t, \chi, t\chi') = (0, 0, 0)$, и что из (2.21), (2.22) следуют равенства

$$G(t, 0, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \chi}(t, 0, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial G}{\partial (t\chi')}(0, 0, 0) = 0, \quad \eta(0, m) = 0.$$

Для собственных значений λ линейного ОДУ

$$t^2\chi'' + 3t\chi' + \chi = 0, \quad t > 0, \tag{2.23}$$

имеем $\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = -1$. Тогда сингулярная линейная ЗК (2.23), (2.20) имеет только тривиальное решение, а из результатов по сингулярным ЗК для нелинейных ОДУ (см., в частности, [15, теорема 5] и библиографию там) вытекает следующее

Утверждение 3. Для любого $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК (2.19)–(2.22) имеет единственное решение $\chi^{(m)}(t)$; оно является голоморфной функцией в точке $t = 0$:

$$\chi^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(m)} t^k, \quad |t| \leq t_0, \quad t_0 > 0, \tag{2.24}$$

где подстановка (2.24) в (2.19) дает

$$\chi_1^{(m)} = -1/(4m), \quad \chi_k^{(m)} = (k + 1)^{-2} \times \left\{ -\chi_{k-1}^{(m)}[1 + m(k - 1)]/m - \sum_{l=1}^{k-1} [l(k + 3) + 1]\chi_l^{(m)}\chi_{k-l}^{(m)} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots; \tag{2.25}$$

для $m = \infty$ и $m = 1/2$ справедливо

$$\chi^{(\infty)}(t) \equiv 0, \quad \chi^{(1/2)}(t) = -t/2. \tag{2.26}$$

Кроме того, при $m > 0$ справедливы соотношения

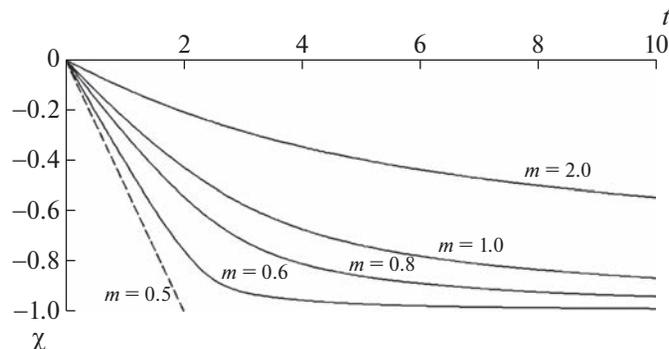
$$\chi^{(m)}(0) = 0, \quad [\chi^{(m)}]'(0) = -1/(4m) < 0, \quad [\chi^{(m)}]''(0) = (2m - 1)/(36m^2),$$

откуда

$$[\chi^{(m)}]''(0) > 0, \quad 1/2 < m < \infty; \quad [\chi^{(1/2)}]''(0) = 0; \quad [\chi^{(m)}]''(0) < 0, \quad 0 < m < 1/2.$$

Следствие 2. Для любого $m > 1/2$ решение $\chi^{(m)}(t)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.19)–(2.22) существует глобально на \mathbb{R}_+ и удовлетворяет неравенству $\chi^{(m)}(t) > -1 \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Графики к следствию 2 приведены на фиг. 2.



Фиг. 2

Более того, как несложно проверить, для любого $m \neq 0$ нелинейное ОДУ (2.19) не имеет сингулярных решений с особенностями типа полюса в конечных точках $t > 0$.

Учитывая утверждение 3, следствие 2, соотношения (2.17) и тот факт, что для любого конечного $\Phi > -a$ решения нелинейного ОДУ (2.7) не имеют особенностей типа полюса, окончательно получаем, что справедлива

Теорема 4. Для любых $a > 0$ и $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК (2.7), (2.8) имеет единственное решение $f_m(\Phi, a)$; оно является голоморфной функцией в точке $\Phi = -a$:

$$f_m(\Phi, a) = a(\Phi + a) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(m)} (\Phi + a)^k / a^k \right], \tag{2.27}$$

где коэффициенты $\chi_k^{(m)}$ ($k \geq 1$) определены рекуррентными соотношениями (2.25); при $m = \infty$ и $m = 1/2$ сингулярная нелинейная ЗК (2.7), (2.8) имеет точные решения

$$f_{\infty}(\Phi, a) = a(\Phi + a), \quad f_{1/2}(\Phi, a) = (a^2 - \Phi^2)/2 = a(\Phi + a)[1 - (\Phi + a)/(2a)].$$

Более того, при $m: 1/2 < m < \infty$, решение $f_m(\Phi, a)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) существует глобально и является положительной функцией на интервале $(-a, \infty)$.

Из (2.27), (2.25) при $\Phi + a \rightarrow 0$, в частности, получаем

$$f_m(\Phi, a) = a(\Phi + a) \left[1 - \frac{\Phi + a}{4am} + \frac{(2m - 1)(\Phi + a)^2}{72a^2m^2} \right] + O((\Phi + a)^4). \tag{2.28}$$

Замечание 2. В [2], [3] приводятся два первых слагаемых в разложении вида (2.28) (см. здесь формулу (2.4)), но характер представления не обсуждается. Точное утверждение следует из приведенных выше рассуждений, а члены сходящегося ряда (2.27) находятся формальной подстановкой этого ряда в (2.7).

2.3. Асимптотическое поведение на бесконечности решений исходной сингулярной задачи для различных значений $m > 0$

Изучение глобального поведения решений сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) для различных значений параметра $m > 0$ представляет довольно сложную задачу.

Чтобы прояснить качественное поведение решений ОДУ (2.7) при больших Φ , положим

$$f(\Phi) = B\Phi^{\beta}[1 + o(1)], \quad \Phi \rightarrow \infty. \tag{2.29}$$

Подставляя (2.29) в (2.7) и удерживая главные члены, получаем

$$B^2\beta(\beta - 1)\Phi^{2\beta-2} + B^2\beta^2\Phi^{2\beta-2} + B\beta\Phi^{\beta} - [(m - 1)/m]B\Phi^{\beta} + \dots = 0. \tag{2.30}$$

Приравнявая нулю сумму слагаемых в (2.30), быстрее всего растущих при больших Φ , получаем два случая:

Случай I. Наибольшая степень в (2.30) равна β . Тогда

$$\beta = (m - 1)/m, \quad m > 0, \tag{2.31}$$

и параметр B ($B \neq 0$) является свободным; действительно, в этом случае имеем

$$2\beta - 2 = -2/m < (m - 1)/m = \beta.$$

Случай II. Две наибольших степени в (2.30) совпадают: $2\beta - 2 = \beta$; тогда

$$\beta = 2, \quad B = -(m + 1)/(6m) < 0, \quad m > 0. \tag{2.32}$$

Дадим более строгое доказательство существования семейств решений с помощью замены зависимой переменной в (2.7):

$$f(\Phi) = B\Phi^{\beta}[1 + Z(\Phi)]; \tag{2.33}$$

здесь функция $Z(\Phi)$ должна удовлетворять условиям $\lim_{\Phi \rightarrow \infty} Z(\Phi) = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \dot{Z}(\Phi) = 0$.

Получаем для $Z(\Phi)$ сингулярную ЗК на бесконечности:

$$\ddot{Z} + [4\beta/\Phi + \Phi^{1-\beta}/B]\dot{Z} + [(2\beta^2 - \beta)/\Phi^2]Z + (\Phi^{1-\beta}/B)[(1 + Z)^{-1} - 1]\dot{Z} + (1 + Z)^{-1}\dot{Z}^2 + (2\beta^2 - \beta)/\Phi^2 + [\beta - (m - 1)/m]/(B\Phi^\beta) = 0, \quad \Phi \gg 1, \tag{2.34}$$

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} Z(\Phi) = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \dot{Z}(\Phi) = 0. \tag{2.35}$$

Замечание 3. В случае II сингулярная нелинейная ЗК на бесконечности (2.34), (2.35) всегда имеет тривиальное решение $Z \equiv 0$; то же верно в случае I при $m = 1$, когда $\beta = 0$, и при $m = 2$, когда $\beta = 1/2$ ($B \neq 0$ произвольно). Тогда представление (2.33) дает точные решения $f_{I,m}$ и $f_{I,m}$ ОДУ (2.7), которые не являются решениями сингулярной ЗК (2.7), (2.8):

$$f_{I,m} = -\Phi^2(m + 1)/(6m), \quad m \neq 0, \tag{2.36}$$

$$f_{I,1} \equiv B, \quad f_{I,2} = B\sqrt{\Phi}. \tag{2.37}$$

Для исходного ОДУ (1.1) функция (2.36) соответствует точному сингулярному решению $\Phi_{\text{sing},m}^{(1)}(\tau - \tau_p, a)$, определенному формулой (1.20), а функции (2.37) дают точные решения $\Phi_1(\tau - \tau_s, a)$ и $\Phi_2(\tau - \tau_s, a)$, определенные формулами (1.23).

Замечания для случая I. При $m > 0$ и $\beta = (m - 1)/m$ имеем

$$1 - \beta = 1/m, \quad 2\beta^2 - \beta = (m - 1)(m - 2)/m^2. \tag{2.38}$$

Осуществим в (2.34), (2.35) замену независимой переменной:

$$x = \Phi^{(m+1)/m}, \quad \Phi = x^{m/(m+1)}. \tag{2.39}$$

Тогда, обозначая $\tilde{Z}(x) = Z(\Phi(x))$ и учитывая равенства (2.38), из (2.34), (2.35) получаем для $\tilde{Z}(x)$ сингулярную нелинейную ЗК на бесконечности, зависящую от $B \neq 0$ и $m > 0$ как от параметров (штрих означает дифференцирование по x):

$$\begin{aligned} \tilde{Z}'' + \tilde{Z}' \left[\frac{m}{B(m+1)} + \frac{4m-3}{x(m+1)} \right] + \tilde{Z} \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2 x^2} + \\ + \frac{m}{B(m+1)} [(1 + \tilde{Z})^{-1} - 1]\tilde{Z}' + (1 + \tilde{Z})^{-1}\tilde{Z}'^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2 x^2} = 0, \quad x \gg 1, \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{Z}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{Z}'(x) = 0. \tag{2.41}$$

Согласно [14], нелинейное ОДУ (2.40) имеет иррегулярную особенность ранга 1 при $x \rightarrow \infty$, и верно следующее

Утверждение 4. Для любых $B \neq 0$ и $m > 0$ сингулярная нелинейная ЗК (2.40), (2.41) имеет частное решение $\theta(x) = \theta(x, m, B)$, которое при больших x представимо формальным рядом

$$\theta(x, m, B) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k/x^k, \tag{2.42}$$

где коэффициенты разложения находятся формальной подстановкой ряда (2.42) в ОДУ (2.40):

$$\theta_1 = B(m - 1)(m - 2)/[m(m + 1)], \tag{2.43}$$

$$\theta_{k-1} = \frac{B(m+1)}{m(k-1)} \left[-\frac{4m-3}{m+1}(k-2) + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2} \right] \theta_{k-2} + F_{k-1}(\theta_1, \dots, \theta_{k-2}, m, B), \quad k = 3, 4, \dots; \tag{2.44}$$

здесь F_{k-1} получаются из величин $\theta_1, \dots, \theta_{k-2}$ с помощью только операций типа сложения и умножения; при этом для частного решения $\theta(x) = \theta(x, m, B)$ ЗК на бесконечности (2.40), (2.41) ряд (2.42)–(2.44) является асимптотическим разложением при больших x .

После подстановки разности $w(x) = \tilde{Z}(x) - \theta(x)$ в (2.40), (2.41) получается сингулярная нелинейная ЗК на бесконечности для $w(x)$:

$$w'' + w' \left[\frac{m}{B(m+1)} + \frac{4m-3}{(m+1)x} \right] + w \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2 x^2} + \frac{m}{B(m+1)} \{ (w' + \theta'(x))(1+w+\theta(x))^{-1} - 1 \} - \theta'(x) \{ (1+\theta(x))^{-1} - 1 \} + (w' + \theta'(x))^2 (1+w+\theta(x))^{-1} - (\theta'(x))^2 (1+\theta(x))^{-1} = 0, \tag{2.45}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} w'(x) = 0. \tag{2.46}$$

Оставляя только главные члены в ОДУ (2.45) для $w(x)$ с коэффициентами, стремящимися к нулю не быстрее, чем $1/x$ при $x \rightarrow \infty$, получаем линейное ОДУ:

$$\tilde{w}'' + \tilde{w}' \left[\frac{m}{B(m+1)} + \frac{3m^2 + 4m - 5}{x(m+1)^2} \right] = 0. \tag{2.47}$$

При $B > 0$ имеем представление $\tilde{w}(x) = Px^{-a_2} \exp(-a_1 x)$ для однопараметрического семейства решений ОДУ (2.47), стремящихся к нулю при $x \rightarrow \infty$, где P – произвольная постоянная,

$$a_1 = m/[B(m+1)] > 0, \quad a_2 = (3m^2 + 4m - 5)/(m+1)^2. \tag{2.48}$$

Тогда из [9, разд. 23] следует

Утверждение 5. Для любых $m > 0$ и $B > 0$ сингулярная нелинейная ЗК (2.45), (2.46) с данными на бесконечности имеет однопараметрическое семейство решений $w(x) = w(x, B, m, P)$; эти решения представляются экспоненциальным параметрическим рядом Ляпунова

$$w(x, B, m, P) = Px^{-a_2} \exp(-a_1 x) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(x) P^k x^{-ka_2} \exp(-ka_1 x),$$

где a_1 и a_2 определены в (2.48), P – параметр, а функции $C_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) имеют при больших $x > 0$ порядок роста не выше степенного.

Суммируя приведенные утверждения и принимая во внимания замены переменных, получаем следующее

Утверждение 6. Для любого $m > 0$ нелинейное ОДУ (2.7) имеет двухпараметрическое семейство решений $f_m(\Phi, B, D)$, которое при больших положительных Φ представимо в виде

$$f_m(\Phi, B, D) = B\Phi^{(m-1)/m} \{ 1 + \theta(\Phi^{(m+1)/m}, m, B) + D\Phi^{\kappa_1} \times \exp([-m/(B(m+1))]\Phi^{(m+1)/m}) [1 + o(1)] \}, \quad \Phi \rightarrow \infty, \tag{2.49}$$

где B и D – параметры, $B > 0$, $\kappa_1 = -(3m^2 + 4m - 5)/[m(m+1)]$, а $\theta(x, m, B)$ определено в утверждении 4.

Замечания для случая II. В этом случае точное решение при $m > 0$ $f = -\Phi^2(m+1)/(6m)$ не соответствует никакому глобальному решению, а ЗК на бесконечности (2.34), (2.35) принимает вид (см. замечание 3)

$$\Phi^2 \ddot{Z} + [2(m+4)/(m+1)]\Phi \dot{Z} + 6Z - [6m/(m+1)][(1+Z)^{-1} - 1]\Phi \dot{Z} + (1+Z)^{-1}(\Phi \dot{Z})^2 = 0, \quad \Phi \gg 1, \quad \lim_{\Phi \rightarrow \infty} Z(\Phi) = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \dot{Z}(\Phi) = 0.$$

2.4. Основной результат для случая $m: 1/2 < m < \infty$

В указанном случае решение сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) существует глобально и положительно на $(-a, \infty)$ (см. теорему 4). Следовательно, представление (2.49) имеет место для больших Φ и некоторых значений $B > 0$ и D .

Далее, пусть $\Phi(\tau)$ – решение сингулярной нелинейной НКЗ (1.1)–(1.4) для некоторых $b > 0$ и $m: 1/2 < m < \infty$ (см. теорему 3). Тогда решение $f(\Phi)$ сингулярной начальной задачи (2.7), (2.8) должно удовлетворять условию (2.9), т.е. в (2.49) имеем $B = mb^{1/m}$.

Теорема 5. Пусть функция $f_m(\Phi) = f_m(\Phi(\tau))$ при заданном $m: 1/2 < m < \infty$, является решением сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) вдоль траектории $\Phi(\tau) = \Phi(\tau, b)$, отвечающей решению сингулярной НКЗ (1.1)–(1.4) для фиксированного $b > 0$. Тогда

(i) $f_m(\Phi)$ удовлетворяет ограничениям

$$\begin{aligned} (a^2 - \Phi^2)/2 < f_m(\Phi) < a(\Phi + a), \quad -a \leq \Phi \leq a, \\ 0 < f_m(\Phi) < a(\Phi + a), \quad \Phi > a; \end{aligned}$$

(ii) для конечных Φ представление решения $f_m(\Phi)$ дается теоремой 4;

(iii) при больших положительных Φ для решения $f_m(\Phi)$ справедливо представление (2.49), где $B = mb^{1/m}$, a D – параметр.

Учитывая соотношения

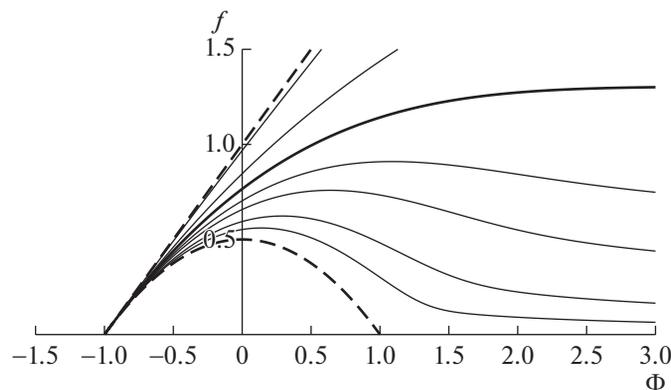
$$x^{-1}\Phi^{(m-1)/m} = \Phi^{-2/m}, \quad x^{-2}\Phi^{(m-1)/m} = \Phi^{-3/m-1}, \dots$$

и формулы (2.42)–(2.44), из теоремы 5 приближенно получаем

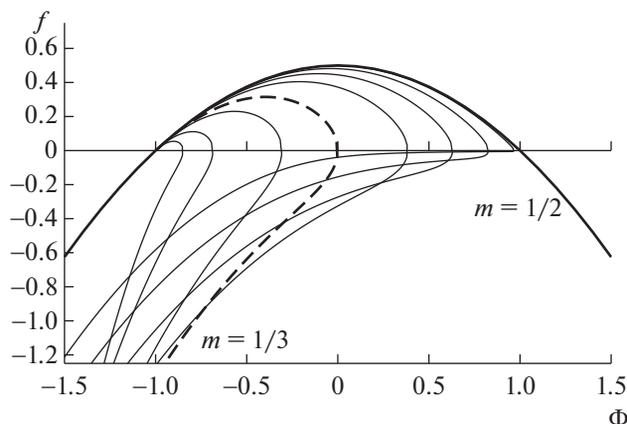
$$\begin{aligned} f_m(\Phi) = mb^{1/m}\Phi^{(m-1)/m} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m+1}b^{2/m}\Phi^{-2/m} + O(\Phi^{-1-3/m}) + \\ + D\Phi^{\kappa_2} \exp\left(-\frac{b^{-1/m}}{m+1}\Phi^{(m+1)/m}\right)[1 + o(1)], \quad \Phi \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{2.50}$$

где $\kappa_2 = -(2m^2 + 4m - 4)/[m(m+1)]$, $D = \text{const}$ (ср. с укороченной формулой (2.5), в которой опущено экспоненциально убывающее слагаемое, хотя в [2] оно присутствует, см. там формулу (1.10), и совпадает с формулой (2.50)).

На фиг. 3 представлены графики решений сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) в предположениях теоремы 5.



Фиг. 3. Снизу вверх: $m = 0.5$ (штриховая линия); 0.55, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.5, 7.0 (сплошные линии); ∞ (штриховая линия).



Фиг. 4. Справа налево: $m = 1/2, 255/512, 31/64, 11/24, 5/12, 1/3, 1/4, 1/8, 1/16$.

2.5. Замечания к случаю $m: 0 < m < 1/2$

В этом случае решение $f_m(\Phi)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) может менять знак в некоторой конечной точке $\Phi = \Phi_{zero}$. Тогда в окрестности этой точки будет

$$ff' = (f^2)/2 \sim \text{const}, \quad f \sim \pm \sqrt{C_z |\Phi_{zero} - \Phi|},$$

где C_z — константа. Следовательно, $\Phi = \Phi_{zero}$ является точкой ветвления, и решение становится многозначной функцией.

Графики решений $f_m(\Phi)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) для этого случая представлены на фиг. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что анализ сингулярных задач для нелинейных ОДУ, возникающих в моделях естественных наук, связан с большими трудностями, что вызывает особый интерес к тем задачам, которые допускают достаточно полный их математический и численный анализ. Подход к конкретной задаче гидродинамики, описанный в [1] и дополненный в настоящей работе, может представлять интерес и для других задач. Отметим еще раз, что в [2–4], в отличие от [1] и данной работы, никакие расчеты не приводятся (как уже отмечалось, вообще говоря, непонятно, что и как можно посчитать в исходных физических переменных при таком сложном подходе этих работ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конюхова Н.Б., Курочкин С.В. Сингулярные нелинейные задачи для автомодельных решений уравнений пограничного слоя с нулевым градиентом давления: анализ и численное решение// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 10. С. 1619–1645.
2. Диесперов В.Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения// Прикл. матем. и механ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403–414.
3. Диесперов В.Н. Поведение автомодельных решений уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления// Сообщ. по прикл. матем. ВЦ АН СССР. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
4. Диесперов В.Н. Об одной задаче в теории слоев смешения// Прикл. матем. и механ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 1008–1020.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
8. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
10. *Конюхова Н.Б.* О стационарной задаче Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка// Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 8. С. 1384—1395.
11. *Конюхова Н.Б.* Об устойчивых многообразиях Ляпунова для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1358—1379.
12. *Конюхова Н.Б.* Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи// Сообщ. по прикл. матем. ВЦ РАН. М.: ВЦ РАН, 1996.
13. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
14. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
15. *Конюхова Н.Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 3. С. 629—645.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 519.62

**A CLASS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS
WITH DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE IN THE CRITICAL CASE¹⁾**

© 2023 г. Shitao Liu¹, M. Ni^{1,2,*}

¹*School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241, PR China*

²*Shanghai Key Laboratory of Pure Mathematics and Mathematical Practice, Shanghai 200003, PR China*

**e-mail: xiaovikdo@163.com*

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.

Переработанный вариант 29.11.2021 г.

Принята к публикации 14.07.2022 г.

Внутренний переходный слой для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью в критическом случае. Рассматривается система сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывной правой частью в критическом случае. Решение в данном случае характеризуется наличием внутреннего переходного слоя на заданном отрезке. Доказано существование такого решения с внутренним переходным слоем и построено его равномерное асимптотическое разложение произвольного порядка. Приведен пример использования данного метода.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.

DOI: 10.31857/S0044466923020126, **EDN:** BNGACK

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.958

**К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ОСОБЫХ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

© 2023 г. Н. С. Габбасов^{1,*}¹ 423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия

*e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.

Переработанный вариант 21.07.2022 г.

Принята к публикации 04.08.2022 г.

Исследовано линейное интегродифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложены и обоснованы специальные обобщенные варианты методов моментов и подобластей. Установлена оптимальность по порядку точности построенных методов. Библ. 13.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466923020072, EDN: BNJEMQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена приближенному решению линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds = y(t), \quad (1.1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, q}$, и $p \in Z^+$ являются фиксированными; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости” точечного характера, а x — искомая функция. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1.1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, возникает важный вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность этой задачи. При рассмотрении этого вопроса вполне естественно учитывать то, что при $p = 0$ ИДУ (1.1) представляет собой линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Последнее встречается в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1] и библиографию в ней; [2, с. 121–129]), теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций типа D или V . Под D (соответственно, V) понимается пространство обобщенных функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака”, (соответственно, “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114].

ИДУ (1.1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нетера для такого уравнения в классах гладких и обобщенных функций типа D . В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ (1.1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов

их приближенного решения в пространствах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием. Первые результаты в этом направлении получены в работе [8], где предложен и обоснован прямой проекционный метод, основанный на применении стандартных полиномов.

В настоящей работе разработаны специальные обобщенные варианты методов моментов и подобластей, хорошо приспособленные к приближенному решению ИДУ (1.1) в некотором пространстве X типа D обобщенных функций. Дано их теоретическое обоснование в смысле [9, гл. 1, § 1–5] и установлено, что построенные методы оптимальны по порядку точности на некотором классе F , порожденном классом H'_0 , среди всех “полиномиальных” проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве X .

2. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной тах-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя [10], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t = 0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \left\{ y \in C\{m; 0\} \mid y^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\},$$

где $p \in \mathbb{Z}^+$ таково, что $p < m$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2.1)$$

в которой $T: Y \rightarrow C$ – “характеристический” оператор класса Y , определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) t^i / i! \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t). \quad (2.2)$$

Лемма 2.1 (см. [8]). *i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (2.3)$$

причем $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$ ($i = \overline{p, m-1}$).

ii) Пространство Y по норме (2.1) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций и наделим его специальной нормой

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)| \quad (z \in C^{(p)}), \quad (2.4)$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2.2 (см. [8]). *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (2.4) полно и нормально вложено в пространство C .*

Следствие 1. Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (2.4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d \|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где

$$\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C.$$

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \left\{ z \in C^{(p)} \mid z^{(i)}(-1) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{[i]}(t), \tag{2.5}$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in R$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{[i]}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{[i]}, y) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{[i]}(t)y(t)dt \equiv (-1)^i y^{[i]}(0) \quad (y \in Y, i = \overline{0, m-p-1}). \tag{2.6}$$

Ясно, что векторное пространство X банахово относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \tag{2.7}$$

3. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ (ОМП)

Пусть задано ИДУ (1.1). Ради сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &\equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \\ V &\equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$p \in N \cup \{0\}, \quad m \in N, \quad p < m; \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\},$$

ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, \quad K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{[i]}(t, 0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \tag{3.2}$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Приближенное решение ИДУ (3.1) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n} \delta^{[i]}(t), \tag{3.3}$$

$$g_n(t) \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, \quad n = 2, 3, \dots, \tag{3.4}$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s)ds.$$

Неизвестные коэффициенты $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{0, n+m-p-1}$, найдем, согласно ОМП, из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p)$ -го порядка:

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (T\rho_n)(t)dt = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \rho_n^{[i]}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \tag{3.5}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $\{\tau_k\}_0^n \subset I$ – система узлов Чебышёва II рода с присоединенными концами промежутка I .

Прежде чем перейти к обоснованию предложенного метода (3.3)–(3.5), следуя [11], примем следующие полезные при оформлении результатов соглашения. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in N$ ($n \geq n_0$) СЛАУ (3.5) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (3.1) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1)”. Во-вторых, для погрешности приближенного решения введем специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка такой величины определяет скорость сходимости приближенных решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (3.1).

Для вычислительного алгоритма (3.1)–(3.5) справедлива

Теорема 1. *Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 в [8]), а функции $h \equiv T_t K$ (по t), $f_i \equiv T \psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$, и Ty принадлежат классу Дини-Липшица, то метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1) и при этом*

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-p-1} E_{n-1}(f_i) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n \right\}, \tag{3.6}$$

где $E_l(f)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ алгебраическими полиномами степени не выше l , а через $E_l^t(\cdot)$ обозначен функционал $E_l(\cdot)$, примененный по переменной t .

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (3.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y \left(x \in X \equiv D_{-1}^{(p)} \{m; 0\}, y \in Y \equiv C \{m, p; 0\} \right), \tag{3.7}$$

в котором оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (3.3)–(3.5) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n+m-p)$ -мерное подпространство элементов вида (3.3), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\text{span}\{t^i\}_p^{n+m-1}$. Далее введем линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p} : Y \rightarrow Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p}(y; t) \equiv (UP_n Ty)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}, \tag{3.8}$$

где

$$P_n : C \rightarrow \Pi_{n-1} \equiv \text{span}\{t^i\}_0^{n-1}$$

представляет собой оператор метода подобластей (см., например, [12]) по системе узлов $\{\tau_k\}_0^n$.

Покажем теперь, что система (3.3)–(3.5) равносильна линейному уравнению

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n Kx_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n). \tag{3.9}$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ – решение уравнения (3.9), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n \tau_n^* = 0$ ($\tau_n^* \equiv Kx_n^* - y$). В силу равенств (3.3), (3.4) и (3.8) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + P_n T \tau_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1} (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \equiv 0. \tag{3.10}$$

На основании (2.3) с учетом того, что $P_n^2 = P_n$, очевидна эквивалентность тождества (3.10) системе

$$(P_n(z_n^* + T \tau_n^*))(t) \equiv 0, \quad (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}. \tag{3.11}$$

Далее, согласно структуре уравнения (3.7) и равенствам (3.3), (3.4) имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (\tau_n^*)^{\{i\}}(0), \quad i = \overline{p, m-1}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y$$

и

$$T \rho_n^* = T(Vx_n^* + \tau_n^*) = z_n^* + T \tau_n^*.$$

Поэтому в силу определения полиномиального оператора P_n (см. [12]) тождество в системе (3.11) означает, что

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (z_n^* + T\tau_n^*)(t)dt = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (T\rho_n^*)(t)dt = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Следовательно, система (3.11) принимает вид

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (T\rho_n^*)(t)dt = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Итак, СЛАУ (3.5) имеет решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p-1}$, т.е. решение уравнения (3.9) является решением системы (3.3)–(3.5).

Для получения обратного утверждения достаточно провести только что изложенные рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимости решений уравнений (3.9). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n , которое устанавливает

Лемма 3.1. *Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leq d_1 E_{n-1}(Ty) \ln n \quad (n = 2, 3, \dots) \tag{3.12}$$

(здесь и далее $d_i, i = \overline{1, 10}$, – некоторые константы, значения которых не зависят от натурального числа n).

Справедливость леммы 3.1 легко следует из представления (2.3), определений (3.8), (2.1) и оценки (см., например, [12]) $\|f - P_n f\|_C \leq d_1 E_{n-1}(f) \ln n, f \in C$.

Покажем теперь близость операторов A и A_n на подпространстве X_n . Используя уравнения (3.1) и (3.9) и оценку (3.12), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y \leq d_1 E_{n-1}(TKx_n) \ln n. \tag{3.13}$$

На основании (3.1), (2.5) и (2.6) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n} \psi_i(t).$$

А тогда

$$TKx_n = \int_{-1}^1 h(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n} f_i(t). \tag{3.14}$$

Теперь с целью полиномиального приближения функции $TKx_n \in C$ построим следующий элемент:

$$(Q_{n-1}x_n)(t) \equiv \int_{-1}^1 h_{n-1}^t(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n} f_{n-1}^i(t), \tag{3.15}$$

где h_{n-1}^t и f_{n-1}^i – полиномы степени $n - 1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t, s)$ (по t) и $f_i(t)$ соответственно. По структуре (3.15) ясно, что $Q_{n-1}x_n \in \Pi_{n-1}$.

На основании выражений (3.14) и (3.15), леммы 2.2 и определения (2.7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\begin{aligned}
 E_{n-1}(TKx_n) &\leq \|TKx_n - Q_{n-1}x_n\|_C \equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - h_{n-1}^t)(t, s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n}(f_i - f_{n-1}^i)(t) \right| \leq \\
 &\leq 2 \|g_n\|_C E_{n-1}^t(h) + \sum_i |c_{i+n}| E_{n-1}(f_i) \leq 2 \|g_n\|_{(p)} E_{n-1}^t(h) + \|x_n\|_X \sum_i E_{n-1}(f_i) \leq 2 \|x_n\|_X E_{n-1}^t(h) + \\
 &\quad + 2 \|x_n\|_X \sum_i E_{n-1}(f_i) = 2 \left(E_{n-1}^t(h) + \sum_i E_{n-1}(f_i) \right) \|x_n\|.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.13) и (3.16) следует искомая оценка близости операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq d_2 \left(E_{n-1}^t(h) + \sum_i E_{n-1}(f_i) \right) \ln n. \tag{3.17}$$

На основании оценок (3.17) и (3.12) из теоремы 7 (см. [9, гл. 1, § 4]) вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (3.6). Требуемое доказано.

Замечание 1. Если функции h (по t), f_i и Tu принадлежат пространству $H_\alpha^r(S)$, то в условиях теоремы 1 верна оценка

$$\Delta x_n^* = O(n^{-r-\alpha} \ln n), \quad r + 1 \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in (0, 1],$$

где

$$H_\alpha^r(S) \equiv \{f \in C^{(r)}(I) \mid \omega(f^{(r)}; \Delta) \leq S \Delta^\alpha, S \equiv \text{const} > 0\},$$

а $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ , $0 < \Delta \leq 2$.

Для приложений может оказаться полезной

Теорема 2. Пусть ИДУ (3.1) имеет решение x^* вида (2.5) при данной правой части $y \in Y$ и аппроксимирующий оператор $A_n \equiv \Gamma_n A$ непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* = A_n^{-1} \Gamma_n y$ представляется в виде $\Delta x_n^* = O\{E_{n-1}(TUx^*) \ln n\}$.

Доказательство. Поскольку $A_n \equiv \Gamma_n A$, то в силу теоремы 6 (см. [9, гл. 1, § 3]) и структуры приближенного уравнения (3.9) имеем

$$\Delta x_n^* = O\{\|\Gamma_n\| \|x^* - x_n\|_X\}, \tag{3.18}$$

где

$$x_n \in X_n \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \text{span}\{\delta^{[i]}(t)\}_0^{m-p-1}$$

есть пока произвольный элемент. Выберем его исходя из минимальности правой части неравенства (3.18). Именно, пусть $x_n \in X_n$ таков, что

$$\|x^* - x_n\|_X \equiv \inf_{u_n \in X_n} \|x^* - u_n\|_X \equiv E_{n+m-p-1}^\delta(x^*). \tag{3.19}$$

В силу следствия из теоремы 1.5.14 (см. [5, гл. 1, § 5]) ясно, что наилучшее приближение (3.19) обобщенной функции $x^* \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ элементами из X_n просто выражается через наилучшее равномерное приближение:

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x^*) = E_{n-1}(TUx^*). \tag{3.20}$$

Тогда из соотношений (3.18), (3.19) и (3.20), с учетом $\|\Gamma_n\|_{Y \rightarrow Y} = \|P_n\|_{C \rightarrow C} \leq d_3 \ln n$, следует требуемая оценка погрешности Δx_n^* .

4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ (ОММ)

Приближенное решение задачи (3.1), (3.2) построим в виде агрегата (3.3), (3.4). Набор $\{c_{j0}\}_{j=0}^{n+m-p-1}$ неизвестных параметров найдем, согласно ОММ, из СЛАУ

$$\int_{-1}^1 \eta(t)(T\rho_n)(t)T_j(t)dt = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \rho_n^{[i]}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \tag{4.1}$$

где $\{T_j\}$ – полная ортонормированная на I по весу $\eta(t) \equiv (1-t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышёва I рода.

Обоснование вычислительного алгоритма (3.1)–(3.4), (4.1) дается в следующем утверждении.

Теорема 3. Если $\text{Ker } A = \{0\}$ в X , а функции $h \equiv T_r K$ (по t), $f_i \equiv T_r \psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$, и Ty удовлетворяют на I условию Дини-Липшица, то метод (3.3), (3.4), (4.1) обоснованно применим к уравнению (3.1), причем

$$\Delta x_n^* \leq d_4 \left[E_{n-1}'(h) + \sum_{i=0}^{m-p-1} E_{n-1}(f_i) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n.$$

Доказательство данной теоремы проводится повторением рассуждений, изложенных при доказательстве теоремы 1, с учетом того, что в случае ОММ система (3.3), (3.4), (4.1) эквивалентна следующему линейному операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv F_n A x_n = F_n y \quad (x_n \in X_n, F_n y \in Y_n), \tag{4.2}$$

где подпространства $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ введены в разд. 3, а $F_n : Y \rightarrow Y_n$ – обобщенный оператор Фурье, построенный согласно правилу (3.8), в котором роль оператора P_n играет оператор Фурье $\Phi_n : C \rightarrow \Pi_{n-1}$ по системе $\{T_j\}$ (см., например, [13, гл. 4, § 3]). В силу (2.3), (3.8), (2.1) и теоремы 2 (см. [13, гл. 4, § 7]) правые части уравнений (3.7) и (4.2) близки в том смысле, что $\|y - F_n y\|_Y \leq d_5 E_{n-1}(Ty) \ln n$.

Замечание 2. В случае предложенного ОММ для решения ИДУ (3.1) справедлива теорема, содержание которой идентично содержанию теоремы 2.

5. К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУ

Предварительно приведем необходимые определения и постановку задачи. Пусть X и Y – банаховы пространства, а X_n и Y_n – их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in N$, причем $N \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n , отображающих Y на Y_n . Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{5.1}$$

и

$$\lambda_n A x_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n, \quad n \in N, \tag{5.2}$$

соответственно. Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ – решения уравнений (5.1) и (5.2) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ – класс коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (5.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [9, гл. 2, § 1], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \tag{5.3}$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F} (f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовем *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнения (5.1) на классе F .

Определение 1 (см. [9, гл. 2, § 1]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X, Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0: Y \rightarrow Y_n^0, \lambda_n^0 \in \Lambda_n$, при которых выполняется условие

$$V_N(F) \succ\prec V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0) \quad (N \rightarrow \infty), \tag{5.4}$$

где символ $\succ\prec$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (5.1), (5.2) при $X_n = X_n^0, Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* на классе F среди всех прямых проекционных методов λ_n ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнений (5.1).

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) ИДУ вида (3.1) при K (по t), $\psi_i(t) \equiv K_s^{[i]}(t, 0), i = 0, m - p - 1, y \in YH_\omega^r \equiv \{g \in Y \equiv C\{m, p; 0\} | Tg \in H_\omega^r\}$, где $H_\omega^r \equiv \{f \in C^{(r)} | \omega(f^{(r)}; \Delta) \leq \omega(\Delta)\}$, $\omega(\Delta)$ – некоторый заданный модуль непрерывности; в частности, $H_\omega^r = H_\alpha^r(S)$ при $\omega(\Delta) = S\Delta^\alpha, S \equiv \text{const} > 0, 0 < \alpha \leq 1, r + 1 \in N$. Тогда в силу теоремы 2 (см. [8]) имеем

$$X^* \equiv \{x^* \in X | Ax^* = y; K, \psi_i, y \in YH_\omega^r\} = XH_\omega^{r*},$$

где

$$XH_\omega^r \equiv \{x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\} | Tux \in H_\omega^r\}, \quad \omega^* \equiv e^* \omega, \quad 1 \leq e^* \equiv \text{const}.$$

Пусть

$$X_n^0 \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \text{span}\{\delta^{[i]}(t)\}_0^{m-p-1}, \quad Y_n^0 \equiv \text{span}\{t^i\}_p^{n+m-1},$$

а $\Lambda_n^{(2)} \equiv \{\lambda_n\}$ – семейство всех линейных проекционных ($\lambda_n^2 = \lambda_n$) операторов $\lambda_n: Y \rightarrow Y_n^0$, удовлетворяющих условию $\|\lambda_n\| n^{-r} \omega(n^{-1}) = o(1), n \rightarrow \infty$.

Иными словами, рассмотрим оптимизацию полиномиальных проекционных методов решения ИДУ (3.1) в пространстве $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщенных функций.

Теорема 4. Пусть $F = YH_\omega^r$ и $\Lambda_n = \Lambda_n^{(2)}$. Тогда

$$V_N(F) \succ\prec N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N, \quad N = n + m - p, \tag{5.5}$$

и предложенные ОМП и ОММ оптимальны по порядку точности на классе F среди всех прямых проекционных методов $\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)}$ решения ИДУ (3.1) в пространстве $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$.

Доказательство. Предварительно получим нижнюю оценку для $V_N(F)$. В этой связи отметим, что при $K(t, s) \equiv 0$ ИДУ (3.1) не принадлежит исследуемому нами классу однозначно разрешимых в $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ уравнений. Поэтому способ, предложенный в [9, гл. 4, §§ 2, 3] при оптимизации прямых проекционных методов решения интегральных уравнений II рода, здесь неприменим. Мы предлагаем несколько иной путь, позволяющий найти требуемую нижнюю оценку. Именно, рассмотрим уравнения (3.1) и (5.2) при $K = K^*$ из примера 1 (см. [8]). Нетрудно проверить, что в этом случае $A_n \equiv \lambda_n A$ ($\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)}$) является сужением оператора A на подпространство $X_n^0: A_n x_n \equiv \lambda_n A x_n = A x_n, x_n \in X_n^0$. Следовательно, в силу формулы (23) из (см. [8]) приближенное уравнение (5.2) при $K = K^*$ имеет единственное решение вида

$$x_n^*(t) = (JT\lambda_n y)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i (\lambda_n y - KJT\lambda_n y)^{[i+p]}(0) \delta^{[i]}(t). \tag{5.6}$$

ИДУ (3.1) при $K = K^*$ принадлежит классу однозначно разрешимых в $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ уравнений. Поэтому с учетом (5.3), формулы (23) из [8], (5.6), (2.7), (3.8) и соответствующих результатов работы [5, гл. 1, § 5, с. 27–31] имеем

$$\begin{aligned}
 V_N(F) &\geq \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)}} \sup_{x^* \in XH_{\omega}^r} \|x^* - x_n^*\|_X = \inf_{\lambda_n} \sup_{y \in YH_{\omega}^r} \left\{ \|JT(y - \lambda_n y)\|_{(p)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^{m-p-1} \left| (y - KJT y)^{\{i+p\}}(0) - (\lambda_n y - KJT \lambda_n y)^{\{i+p\}}(0) \right| \right\} \geq \\
 &\geq \inf_{\lambda_n} \sup_y \|J(Ty - T\lambda_n y)\|_{(p)} \equiv \inf_{\lambda_n} \sup_y \|Ty - T\lambda_n y\|_C = \inf_{q_n \in Q_n^{(2)}} \sup_{Ty \in H_{\omega}^r} \|Ty - q_n Ty\|_C,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

где

$$Q_n^{(2)} \equiv \{q_n\} \equiv \{q_n | q_n : C \rightarrow \Pi_{n-1}, q_n^2 = q_n, \|q_n\| n^{-r} \omega(n^{-1}) = o(1), n \rightarrow \infty\}.$$

На основании рассуждений, приведенных при доказательстве лемм 1.5.1 и 1.5.2 (см. [5, гл. 1, § 5]), ясно, что $\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)}$ эквивалентно $q_n \in Q_n^{(2)}$. Далее, известно (см. [9, гл. 4, § 3]), что

$$\inf_{q_n \in Q_n^{(2)}} \sup_{f \in H_{\omega}^r} \|f - q_n f\|_C \geq d_6 n^{-r} \omega(n^{-1}) \ln n,$$

откуда и из (5.7) находим нижнюю оценку

$$V_N(F) \geq d_7 N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N. \tag{5.8}$$

С другой стороны, согласно результатам разд. 3 и 4, каждый из предложенных методов (ОМП, ОММ) порождает свой проекционный оператор $\lambda_n^0 : Y \rightarrow Y_n^0$, причем $(\lambda_n^0)^2 = \lambda_n^0$ и $\|\lambda_n^0\| \asymp \ln n$, т.е. $\lambda_n^0 \in \Lambda_n^{(2)}$. Здесь $\lambda_n^0 = \Gamma_n$ в случае ОМП, а для ОММ $\lambda_n^0 = F_n$. Следовательно, благодаря теореме 2 и теореме Джексона (см., например, [13, гл. 3, § 2]) последовательно находим, что

$$\begin{aligned}
 V_N(F) &\leq V(F; \lambda_n^0; X_n^0; Y_n^0) = \sup_{x^* \in XH_{\omega}^r} \|x^* - x_n^0\|_X \leq \\
 &\leq d_8 \{E_{n-1}(TUx^*) \ln n\} \leq d_9 n^{-r} \omega(n^{-1}) \ln n \leq d_{10} N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N, \quad \lambda_n^0 A x_n^0 \equiv \lambda_n^0 y.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Тогда из (5.4), (5.8) и (5.9) следует утверждение теоремы 4 с оценкой (5.5). Требуемое доказано.

Следствие 2. Если $F = YH_{\alpha}^r(S)$, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, \dots$, то справедливо соотношение

$$V_N(F) \asymp SN^{-r-\alpha} \ln N, \quad N = n + m - p,$$

и ОМП, ОММ оптимальны по порядку на классе F среди всех полиномиальных проекционных методов решения ИДУ (3.1) в пространстве $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 3. На основании определения нормы в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 4. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 3, а именно, из них вытекает простое следствие: если исходные данные h, f_i и Ty уравнения (3.1) принадлежат классу H_{α}^r , $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$, то в условиях теорем 1 и 3 соответственно справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$.

Замечание 5. Поскольку $C\{m; 0; 0\} \equiv C\{m; 0\}$ и $D_{-1}^{(0)}\{m; 0\} \equiv D\{m; 0\}$, при $p = 0$ исследуемое ИДУ (3.1) преобразуется в интегральное уравнение III рода с оператором $A : D\{m; 0\} \rightarrow C\{m; 0\}$, а предложенный метод (3.3)–(3.5) – в специальный для уравнения III рода вариант ОМП. Следовательно, теорема 1 содержит в себе соответствующие результаты (см. [5, гл. 4, § 1]) по обоснованию специального варианта ОМП для решения уравнений III рода в классе $D\{m; 0\}$ обобщенных функций.

Замечание 6. Суть предыдущего замечания 5 остается в силе и в случае прямого проекционного метода (3.3), (3.4), (4.1).

Замечание 7. Так как в условиях теорем 1 и 3 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_1,$$

то ясно (см. [9, гл. 1, § 5]), что предложенные в данной работе прямые методы для ИДУ (3.1) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (3.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленными являются также СЛАУ (3.5) и (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // *SIAM J. Math. Anal.* 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // *Дифференц. ур-ния.* 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // *Изв. вузов. Математика.* 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 2003. 142 с.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Дифференц. ур-ния.* 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
10. *Пресдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // *Матем. исследования.* 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
11. *Габбасов Н.С.* К численному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 10. С. 1721–1733.
12. *Нагих В.В.* Оценка нормы некоторого полиномиального оператора в пространстве непрерывных функций // *Методы вычислений.* Л.: 1976. Вып. 10. С. 99–102.
13. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.953

**ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-
ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА
С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ¹⁾**

© 2023 г. А. В. Заборский^{1,*}, А. В. Нестеров^{2,**}

¹ 249035 Обнинск, Калужская обл., пр-т Маркса, 14А, ООО НПП “Радико”, Россия

² 11799 Москва, Стремянный пер., 36, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Россия

*e-mail: alexander.zaborskiy@mail.ru

**e-mail: andrenerov@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.06.2022 г.
Переработанный вариант 06.06.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Строятся формальные асимптотические разложения решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малыми диффузией и нелинейностью в критическом случае. При наложении ряда условий на данные задачи асимптотическое разложение решения построено в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими от различных растянутых переменных. Получены задачи для определения всех членов асимптотического разложения. Показано, что главный член асимптотики решений определяется как решения задач Коши для параболического уравнения типа Бюргерса, при определенных условиях – для уравнения типа Бюргерса–Кортевега–де Вриза. Приведены оценки остаточных членов по невязке. Библи. 12.

Ключевые слова: дифференциально-операторные уравнения, уравнения переноса, задача Коши, сингулярные возмущения, критический случай, асимптотические разложения, параболические уравнения, уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза.

DOI: 10.31857/S0044466923020151, **EDN:** VOIMPV

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением серии работ [1], [2], в которых изучались построения асимптотических разложений (АР) решений задач Коши для сингулярно возмущенных дифференциально-операторных уравнений переноса в т.н. критическом случае [3]. В работе [1] построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР, АР) по малому параметру ε решения задачи Коши со специальными начальными условиями для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малой нелинейностью, в критическом случае $\varepsilon^2(U(x, t, p)_t + D(p)U(x, t, p)_x) = L_p U(x, t, p) + \varepsilon^2 F(p, U)$ (линейный оператор L_p , действующий по переменной p , имеет однократное нулевое собственное значение [3]), в [2] построено АР решения аналогичного уравнения со многими пространственными переменными и другой степенью малого параметра при нелинейном слагаемом в правой части уравнения

$$\varepsilon^2 \left(U_t + \sum_{i=1}^N D_i(p) U_{x_i} \right) = L_p U + \varepsilon F(p, U).$$

Особенности подобных задач подробно описаны в работах [1], [2], в частности, в работе [2] указаны прикладные области, в которых такие задачи могут возникать. Это могут быть теория переноса нейтронов [4–6], кинетика [7], теория коагуляции [8] и другие.

¹⁾Работа выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему “Разработка методологии и программной платформы для построения цифровых двойников, интеллектуального анализа и прогнозирования сложных экономических систем”, номер проекта FSSW-2020-0008.

В настоящей работе полученные ранее результаты распространяются на случай аналогичных уравнений с диффузионными слагаемыми в правой части.

Основная цель данной работы – построение ФАР для решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений переноса в критическом случае с малыми нелинейностью и диффузией, и определение влияния диффузионных процессов на АР решения. Рассмотрено построение ФАР решений задачи Коши для уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) &= L_p U + \varepsilon^{k_1} F(U, p) + \varepsilon^{k_2} B U_{xx}, \\ U(x, 0, p) &= \omega(x/\varepsilon, p),\end{aligned}$$

где $U(x, t, p)$ – решение, $\{x, t, p\} \in H = \{|x| < \infty, t > 0, p \in P\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, показатели k_1, k_2 – натуральные числа. Линейный оператор L_p действует по переменной $p \in P$ на функции $f(x, t, p) \in A$, принадлежащие по p функциональному пространству L , соответствующему оператору L_p , со скалярным произведением (f_1, f_2) и бесконечно дифференцируемых по переменным $x, t : A = L \otimes C_{|x| < \infty, t > 0}^\infty$, причем $L_p f \in A \forall f \in A$. Множество P может иметь разный вид, например, для интегрального оператора L_p оно может иметь вид $P = [p_1, p_2]$. Функция $D(p) \in L, D(p) \neq \text{const}, F(p, U) \in C_U^\infty \otimes L$. B может быть либо функцией $B(p)$, либо линейным оператором B_p , действующим по переменной p . Оператор L_p имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует собственная функция $h_0(p)$. Через $h_0^*(p)$ обозначим собственную функцию сопряженного оператора L_p^* , соответствующую $\lambda_0^* = 0$. Ниже аргумент p может опускаться для краткости записи. Начальные условия, так же как и в работах [1], [2], имеют специальный вид для того, чтобы исследовать поведение решения в наиболее интересных областях больших градиентов.

АР решения задачи существенно зависит от показателей k_1, k_2 . Ниже в работе подробно рассмотрено построение АР решения задачи при значениях $k_1 = 2, k_2 = 4$. Особенности АР решения при других k_1, k_2 приведены в разд. 7.

Алгоритмы построения АР подробно описаны в работах [1], [2], поэтому здесь оставлен лишь необходимый минимум технических выкладок.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения в случае $k_1 = 2, k_2 = 4$

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_p U + \varepsilon^2 F(p, U) + \varepsilon^4 B(p)U_{xx}, \quad (1)$$

$$U(x, 0, p) = w(x\varepsilon^{-1}, p), \quad (2)$$

где функция $B(p) \in L, B(p) > B_0 > 0$, что обеспечивает параболичность уравнения (1) по переменным (x, t) при всех значениях переменной p . Задача (1), (2) отличается от задачи, изученной в [1], наличием в правой части слагаемого со второй производной по пространственной переменной x . Потребуем выполнения следующих условий на данные задачи (1), (2).

Условие 1. Функция $w(z, p)$, стоящая в правой части начального условия, и все ее производные по переменной x удовлетворяют неравенствам $|w^{(k)}(z, p)| \leq C e^{-\beta z^2}$, $k = 0, 1, \dots, C > 0, \beta > 0$, где постоянные $C > 0, \beta > 0$ могут зависеть от k -порядка производных.

Замечание 1. Такой вид начальных условий выбран для того, чтобы исследовать поведение решения в области больших градиентов.

Условие 2. Собственные значения оператора $L_p : \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ однократны, отвечающие им собственные функции ортогональны, нормированы, образуют полную систему функций.

Условие 3. Все собственные значения λ линейного оператора L_p , кроме $\lambda_0 = 0$, имеют отрицательные вещественные части, удовлетворяющие неравенствам $\text{Re } \lambda \leq -k, k > 0$.

Условие 4. Скалярное произведение (h_0, h_0^*) отлично от нуля: $(h_0, h_0^*) \neq 0$.

Замечание 2. При этом можно выбрать эти функции так, чтобы $(h_0, h_0^*) = 1$, что и полагается ниже.

Условие 5. Функция $w(\xi, p)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$w(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)h_k(p),$$

который можно почленно дифференцировать по ξ необходимое количество раз. Потребуем, чтобы в этом случае коэффициенты ряда $w_i(\xi)$ вместе со своими производными удовлетворяли неравенствам $|w_i(\xi)| \leq C \exp(-\beta|\xi|^2)$, где C и β – константы.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФАР РЕШЕНИЯ

Алгоритм построения ФАР решения начальной задачи (1), (2) подробно описан в работах [1], [2], поэтому здесь оставлен минимум выкладок. В соответствии с алгоритмом А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова построения погранслоиных разложений (см. [3]) ФАР решения с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$, где N – произвольное натуральное число, в этой задаче ищется в виде суммы функции “всплеска” S , сосредоточенной в окрестности некоторой линии $\{l : \zeta = 0\}$ (“псевдохарактеристике” уравнения (1)), пограничной функции Π , сосредоточенной в ε -окрестности границы $t = 0$ и остаточного члена R

$$U(x, t, p) = S(\zeta, t, p) + \Pi(\xi, \tau, p) + R = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta, t, p) + \pi_i(\xi, \tau, p)) + R, \tag{3}$$

где $\zeta = (x - Vt)/\varepsilon$ – переменная, с помощью которой описывается функция всплеска $S(\zeta, t, p)$, $V = (D(p)h_0(p), h_0^*(p))$; $\xi = x/\varepsilon$ и $\tau = t/\varepsilon^2$ – растянутые переменные, с помощью которых описывается пограничная функция $\Pi(\xi, \tau, p)$.

Следуя [3], представим функцию $F(p, U)$ в виде суммы:

$$F(p, U) = SF + \Pi F + RF, \tag{4}$$

где

$$SF = F(p, S), \tag{5}$$

$$\Pi F = F(p, S + \Pi) - F(p, S), \tag{6}$$

$$RF = F(p, S + \Pi + R) - F(p, S + \Pi). \tag{7}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ВСПЛЕСКА S

Функция всплеска $S(\zeta, t, p)$ ищется в виде разложения по степеням параметра ε

$$S(\zeta, t, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k(\zeta, t, p) \tag{8}$$

и должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon^2(S_t + DS_x) = L_p S + \varepsilon^2 SF + \varepsilon^4 B(p)S_{xx}. \tag{9}$$

Перейдя в уравнении (9) от переменных (x, t, p) к переменным (ζ, t, p) , получаем

$$L_p S = \varepsilon^2 S_t + \varepsilon \Psi S_\zeta - \varepsilon^2 SF - \varepsilon^2 B(p)S_{\zeta\zeta}, \tag{10}$$

где

$$\Psi(p) = D(p) - V = D(p) - (D(p)h_0(p), h_0^*(p)). \tag{11}$$

Подставив разложение (8) в (5), получаем

$$SF = F\left(p, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k\right) = F(p, s_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (F'(p, s_0)s_k + Sf_k), \tag{12}$$

где через Sf_k обозначены слагаемые, зависящие от $s_j, j < k$, штрих означает производную $F(x, y)$ по второму аргументу.

Подставив (8) и (12) в уравнение (10), стандартным способом [3] получаем систему уравнений для членов разложения s_i

$$\varepsilon^0: L_p s_0 = 0, \tag{13}$$

$$\varepsilon^1: L_p s_1 = \Psi s_{0,\zeta}, \tag{14}$$

$$\varepsilon^2: L_p s_2 = \Psi s_{1,\zeta} + s_{0,t} - F(p, s_0) - B(p) s_{0,\zeta\zeta}, \tag{15}$$

...

$$\varepsilon^k: L_p s_k = \Psi s_{k-1,\zeta} + s_{k-2,t} - F'(p, s_0) s_{k-2} - B(p) s_{k-2,\zeta\zeta} - SF_{k-2}. \tag{16}$$

...

Решение уравнения (13) имеет вид

$$s_0 = \varphi_0(\zeta, t) h_0(p), \tag{17}$$

где φ_0 – пока неизвестная функция.

Для разрешимости уравнения (14) (и последующих) должно выполняться условие ортогональности правой части к собственной функции h_0^* сопряженного к L_p оператора L_p^* , соответствующей его нулевому собственному значению [3].

Условие разрешимости уравнения (14) $(\Psi s_{0,\zeta}, h_0^*) = 0$ выполняется, поэтому функция s_1 может быть представлена в виде

$$s_1 = \varphi_1(\zeta, t) h_0(p) + G \Psi s_{0,\zeta}, \tag{18}$$

где G – псевдообратный к L_p оператор.

Замечание 3. Назовем оператор G псевдообратным к оператору L_p , если решение уравнения $L_p U = F$ при условии $(F, h_0^*) = 0$ может быть записано в виде $U = GF + Ch_0$, где C не зависит от p .

Подставляя (17) и (18) в условие разрешимости уравнения (15)

$$(\Psi s_{1,\zeta} + s_{0,t} - F(p, s_0) - B(p) s_{0,\zeta\zeta}, h_0^*) = 0,$$

получаем уравнение для определения функции φ_0 :

$$\varphi_{0,t} + M \varphi_{0,\zeta\zeta} + F_{\text{eff}}(\varphi_0) = 0, \tag{19}$$

где

$$M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*) - (B(p) h_0, h_0^*), F_{\text{eff}}(\varphi_0) = (F(p, \varphi_0 h_0), h_0^*). \tag{20}$$

Замечание 4. Легко показать, что $M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*)$ определяется однозначно, хотя псевдообратный оператор G определяется неоднозначно.

При выполнении условий разрешимости соответствующих уравнений функции $s_k, k = 2, 3, \dots$, имеют вид

$$s_k = \varphi_k(\zeta, t) h_0(p) + G (\Psi s_{k-1,\zeta} + s_{k-2,t} - F'(p, s_0) s_{k-2} - B(p) s_{k-2,\zeta\zeta} - SF_{k-2}). \tag{21}$$

Действуя аналогично, выбрав номер k , записывая условие разрешимости уравнения для номера $k + 2$, получаем уравнение для определения функции φ_k :

$$\varphi_{k,t} + M \varphi_{k,\zeta\zeta} - (F'(p, \varphi_0 h_0) h_0, h_0^*) \varphi_k = \Phi_k, \tag{22}$$

где Φ_k выражаются через уже найденные $\varphi_j, j < k$. Отметим, что уравнение (22), в отличие от уравнения (19), линейное.

Таким образом, получены выражения для нахождения s_k и уравнения для определения входящих в эти выражения функций φ_k .

Наложим следующее

Условие 6: $M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*) - (B(p)h_0, h_0^*) < 0$.

При выполнении условия 6 уравнения (19), (22) будут параболическими.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ П

Ввиду вполне определенного вида зависимости функций $s_k(\zeta, t, p)$ от переменной p функция S , вообще говоря, ни в каком приближении не может удовлетворять начальным условиям (2). Для удовлетворения этих условий строится пограничная функция $\Pi(\xi, \tau, p)$ (см. [3]), $\xi = x/\varepsilon$, $\tau = t/\varepsilon^2$, которая удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2(\Pi_t + D(p)\Pi_x) = L_p\Pi + \varepsilon^2\Pi F + \varepsilon^4 B(p)\Pi_{xx}, \tag{23}$$

условию

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi = 0, \tag{24}$$

а также совместно с функцией S удовлетворяет начальным условиям (2)

$$S(\xi, 0, p) + \Pi(\xi, 0, p) = w(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)h_k(p) \tag{25}$$

(последнее равенство записано с учетом условия 5).

Функция Π ищется стандартно (см. [3])

$$\Pi(\xi, \tau, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\xi, \tau, p). \tag{26}$$

Перейдя от переменных (x, t, p) к (ξ, τ, p) , представим уравнение (23) в виде

$$\Pi_\tau = L_p\Pi - \varepsilon D(p)\Pi_\xi + \varepsilon^2\Pi F + \varepsilon^2 B(p)\Pi_{\xi\xi}. \tag{27}$$

Подставив разложения (8) и (26) в (6), переходя к переменным (ξ, τ, p) , разложим ΠF в ряд по степеням малого параметра:

$$\Pi F = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi F_k. \tag{28}$$

Подставив (26) и (28) в уравнение (27), стандартным способом (см. [3]) получаем систему уравнений для членов разложения p_i

$$\varepsilon^0: \pi_{0,\tau} = L_p\pi_0, \tag{29}$$

$$\varepsilon^i: \pi_{i,\tau} = L_p\pi_i + \tilde{P}_{i-1}, \tag{30}$$

где $\tilde{P}_1 = -D_i(p)\pi_0$, $\tilde{P}_i = -D_i(p)\pi_{i-1,\xi} + \Pi F_{i-2} + B(p)\pi_{i-2,\xi\xi}$, $i \geq 2$.

Учитывая условия 2, 3 и (24), выпишем π_0 :

$$\pi_0(\xi, \tau, p) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}(\xi)h_k(p)e^{\lambda_k\tau}, \tag{31}$$

где суммирование ведется по номерам, отвечающим ненулевым собственным значениям линейного оператора L_p (т.е. всем, кроме $\lambda_0 = 0$).

Из (25), (32), (31) и условий 2–4, получаем

$$\varphi_0(\xi, 0) = w_0(\xi), \tag{32}$$

$$C_{0k}(\xi) = w_k(\xi), \quad k > 0. \tag{33}$$

Таким образом, получено начальное условие (32) для уравнения (19), определяющего функцию φ_0 и определена функция π_0 формулами (31), (33).

Построение функций $\pi_k(\xi, \tau, p)$, $k \geq 1$, почти дословно повторяет соответствующие построения в работах [1], [2].

Функция π_1 удовлетворяет уравнению

$$\pi_{1,\tau} = L_p \pi_1 + \Pi F_1, \quad (34)$$

где ΠF_1 выражается через $\pi_0(\xi, \tau, p)$ и удовлетворяет оценке $|\Pi F_1| < C e^{-\kappa\tau}$, $\kappa > 0$. Решение уравнения (34) имеет вид

$$\pi_1(\xi, \tau, p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}(\xi, \tau) h_k(p). \quad (35)$$

Умножая скалярно (36) на h_i , получаем уравнения для определения $C_{1,i}$:

$$(C_{1,i})'_\tau = \lambda_i C_{1,i} + (\Pi F_1, h_i). \quad (36)$$

Из условия $C_{10} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ получаем $C_{10}(\xi, \tau)$ в явном виде (см. [3])

$$C_{10}(\xi, 0) = - \int_{\tau}^{\infty} (\Pi F_1, h_0) ds. \quad (37)$$

Из (25) получаем

$$s_1(\xi, 0, p) + \pi_1(\xi, 0, p) = 0. \quad (38)$$

Подставив (18) (в виде $s_1 = \varphi_1 h_0 + N_1$, где $N_1 = G\Psi_{s_0, \xi}$) и (35) в (38), получаем

$$\varphi_1 h_0 + N_1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}(\xi, 0) h_k = 0. \quad (39)$$

Умножив скалярно (39) на h_0 , получаем

$$\varphi_1(\xi, 0) = -(C_{10}(\xi, 0) + (N_1, h_0)), \quad (40)$$

умножая (39) на h_j , $j \geq 1$, получаем

$$C_{1j}(\xi, 0) = -(N_1, h_j). \quad (41)$$

Таким образом, получены начальные условия (32), (40) для функций φ_i и определены функции π_i (35), (36), (37), (41).

5. ОЦЕНКИ ЧЛЕНОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Справедливы теоремы об оценках членов разложений.

Теорема 1. При выполнении условий 1, 6 для любого натурального N существуют постоянные $T_1 > 0$, $\kappa > 0$, $C \geq 0$ такие, что на $[0, T_1]$ все $\varphi_i(\zeta, t)$ для $i \leq N$ существуют, единственны и удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_i(\zeta, t)| < C e^{-\kappa|\zeta|^2} \quad (42)$$

вместе с частными производными до второго порядка.

Замечание 5. Из оценок (42) следуют оценки

$$|s_i(\zeta, t, p)| < C e^{-\kappa|\zeta|^2}. \quad (43)$$

Теорема 2. При выполнении условий 2, 3 для любого натурального N , для любого $T > 0$ все $\pi_i(\xi, \tau, p)$, $i \leq N$, на $[0, T]$ существуют, единственны и имеют оценку

$$|\pi_i(\xi, \tau, p)| < C e^{-\kappa(\tau+|\xi|^2)}, \quad (44)$$

где $C > 0$, $\kappa > 0$ – постоянные.

Доказательства этих теорем практически дословно повторяют доказательства соответствующих теорем из работ [1], [2], [9] и здесь не приводятся. Отметим лишь, что доказательство теоре-

мы 1 основано на методе последовательных приближений с использованием оценок фундаментального решения параболического уравнения (см. [10]).

Замечание 6. Постоянные $T_1 > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$ в оценках (42)–(44) могут зависеть от числа N .

6. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА R

Будем считать выполненным

Условие 7. Пусть решение задачи (1), (2) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T_2]$, где $T_2 > 0$ – положительная величина, не зависящая от ε .

Оценка остаточного члена производится по невязке.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1–7.

Тогда на отрезке $[0, T]$, где $T = \min(T_1, T_2)$, решение задачи (1), (2) существует и для любого натурального N представимо в виде

$$\begin{aligned} U(x, t) &= S_N(\zeta, t, p) + \Pi_N(\xi, \tau, p) + R = \\ &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta, t, p) + \pi_i(\xi, \tau, p)) + R = U_N + R, \end{aligned} \tag{45}$$

где S_N, Π_N есть частичные суммы рядов (8) и (26) (ФАР), остаточный член R удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2 (R_t + D(p)R_x) = L_p R + \varepsilon R F + r, \quad |x| < \infty, \quad t > 0, \quad R(x, 0, p) = 0, \tag{46}$$

где r – известная функция, удовлетворяющая оценке $|r| < C\varepsilon^{N+1} e^{-\kappa|\zeta|^2}$.

Доказательство теоремы 3. Существование самой величины R следует из условия 7 и теорем 1, 2. Уравнение и начальные условия (46) для функции R , а также оценка функции непосредственно вытекают из алгоритма построения ФАР, а также оценок (43), (44).

7. ОБОБЩЕНИЯ, ИТОГИ

При $k_1 = 2, k_2 = 4$ ФАР решения задачи (1), (2) при выполнении условий 1–5 имеет вид (45). Главный член асимптотики равен $s_0(\zeta, t, p) = \varphi_0(\zeta, t)h_0(p)$, где $\varphi_0(\zeta, t)$ есть решение параболического уравнения (19) типа “реакция–диффузия”

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + F_{\text{eff}}(\varphi_0) = 0.$$

При иных значениях k_1, k_2 ФАР решения задачи может иметь иной вид.

При $k_1 = 1, k_2 = 4$ ФАР решения задачи

$$\varepsilon^2 (U_t + D(p)U_x) = L_p U + \varepsilon F(p, U) + \varepsilon^4 B(p)U_{xx}, \quad U(x, 0, p) = w(x\varepsilon^{-1}, p) \tag{47}$$

при выполнении условий 1–5 и наложении дополнительного условия $(F(p, U), h_0^*) = 0$, имеет вид, аналогичный (45). Алгоритм построения ФАР решения задачи (47) почти дословно повторяет изложенный выше (с небольшими изменениями) и здесь не приводится. Основное отличие от рассмотренного выше случая состоит в том, что $\varphi_0(\zeta, t)$, определяющая главный член разложения, есть решение задачи Коши для иного параболического уравнения

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{\text{eff}}(\varphi_0))_\zeta = 0, \tag{48}$$

где

$$M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*), \quad F_{\text{eff}}(\varphi_0) = -(\Psi G F(p, \varphi_0 h_0) h_0, h_0^*).$$

Уравнение (48) может быть названо обобщенным уравнением Бюргерса. При квадратичной по U функции $F(p, U)$ функция $F_{\text{eff}}(\varphi_0) = k\varphi_0^2$, $k = \text{const}$, и уравнение (48) становится уравнением Бюргерса

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + k\varphi_0\varphi_{0,\zeta} = 0.$$

При $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ ФАР решения задачи

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_p U + \varepsilon F(p, U) + \varepsilon^3 B_p U_{xx}, \quad U(x, 0, p) = w(x\varepsilon^{-1}, p), \quad (49)$$

где B_p – линейный оператор, действующий по переменной p , при выполнении условий 1–5 и наложении дополнительных условий $(F(p, U), h_0^*) = 0$, $B_p h_0 = 0$ имеет вид, аналогичный (45). В этом случае функция $\varphi_0(\zeta, t)$, определяющая главный член разложения, есть решение задачи Коши для уравнения

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{\text{eff}}(\varphi_0))_{\zeta} + Q\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0, \quad (50)$$

где

$$M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*), \quad F_{\text{eff}}(\varphi_0) = -(\Psi G F(\varphi_0 h_0, p) h_0, h_0^*), \quad Q = (\Psi G B_p h_0, h_0^*).$$

Уравнение (50) может быть названо обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де-Вриза. При квадратичной по U функции $F(p, U)$ функция $F_{\text{eff}}(\varphi_0) = k\varphi_0^2$, $k = \text{const}$, и уравнение (50) становится уравнением Бюргерса–Кортевега–де Вриза

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + k\varphi_0\varphi_{0,\zeta} + Q\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0.$$

В области $t > t_0$, где $t_0 > 0$ – любое положительное число, не зависящее от ε , решение задачи во всех случаях имеет вид $s_0(\zeta, t, p) = \varphi_0(\zeta, t)h_0(p) + O(\varepsilon)$. Соответственно, в этой области поведение решения определяется первым слагаемым (главным членом АР), в котором $\varphi_0(\zeta, t)$ определяется уравнениями (19), либо (48), либо (50), что определяется показателями k_1 , k_2 . Во всех случаях в уравнениях появляется слагаемое со второй производной $M\varphi_{0,\zeta\zeta}$, порожденное малым параметром при операторе переноса в сочетании с оператором L_p , имеющим нулевое собственное значение: $\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) - L_p U$. Этим сочетанием объясняется то, что во всех случаях малая нелинейность в исходных уравнениях дает существенную нелинейность в уравнениях, которыми описывается главный член АР решений. С физической точки зрения такое сочетание соответствует тому, что процессы “перемешивания” по переменной p происходят существенно быстрее, чем процессы переноса по пространству, по прошествии малого времени решение уравнений переноса с достаточной точностью будет описываться или параболическими уравнениями (19), (48), или уравнением типа Бюргерса–Кортевега–де-Вриза (50).

Уравнениям (19), (48), (50) посвящена обширная литература. Хорошо известно (см., например, [11], [12]), что уравнения (19), (48), (50) могут иметь решения вида “бегущая волна”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построены ФАР решений задачи Коши для сингулярно возмущенных дифференциально-операторных уравнений переноса с диффузионными слагаемыми. Получены задачи для определения всех членов разложения решения по малому параметру.
2. Условие однократности нулевого собственного значения оператора L_p является существенным.
3. Согласование масштабов малости параметра в уравнении (1) и начальных условиях (2) существенно.
4. Алгоритм построения может быть обобщен на уравнения с переменными коэффициентами, а так же на уравнения с многими пространственными переменными.
5. Знание структуры решения в дальней зоне позволяет строить подходящие разностные схемы и выбирать адаптивные сетки, что актуально для задач большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заборский А.В., Нестеров А.В. Асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного нелинейного уравнения // Вестник МИФИ. 2015. Т. 4. № 4. С. 333–338.

2. *Заборский А.В., Нестеров А.В., Нечаев Д.Ю.* Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 12. С. 137–145.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 106 с.
4. *Тупчиев В.А., Чепурко А.Н.* Асимптотика решения спектральной задачи переноса нейтронов в слое // *Дифференц. ур-ния.* 1996. Т. 32. № 6. С. 847–850.
5. *Латышев В.Н.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной спектральной задачи, возникающей в теории переноса. Обнинск: ОИАТЭ, 1987. 26 с.
6. *Крючков Э.Ф.* Теория переноса нейтронов. М.: МИФИ, 2007.
7. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
8. *Галкин В.А.* Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
9. *Нестеров А.В.* Об асимптотике решения системы уравнений диффузия-сорбция при малых коэффициентах диффузии // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1989. Т. 29. № 9. С. 1318–1330.
10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 624.
12. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера // *Функц. анализ и его приложения.* 1991. Т. 25. Вып. 1. С. 21.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.95

**ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ
РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ.
II. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА¹⁾**

© 2023 г. М. О. Корпусов^{1,*}, Е. А. Овсянников^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
Переработанный вариант 04.07.2022 г.
Принята к публикации 04.07.2022 г.

В статье рассматриваются объемный и поверхностный потенциалы, возникающие в задачах Коши для нелинейных уравнений из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, и изучаются их свойства. Для объемного потенциала выводится некоторая оценка. На ее основе доказываются одна априорная оценка типа Шаудера и оценки типа Шаудера для потенциалов с весом. Библ. 5.

Ключевые слова: объемный потенциал, поверхностный потенциал, априорные оценки типа Шаудера.

DOI: 10.31857/S0044466923020102, **EDN:** VOJQOG

1. ОБЪЕМНЫЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Стоит отметить, что настоящая статья является логическим продолжением работы [1], в ней продолжают исследования, начатые ранее в [1].

Рассмотрим следующие объемный и поверхностный потенциалы:

$$U(x, t) = U[\rho](x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (1.1)$$

$$V_k(x, t) = V_k[\mu](x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t^k} \mu(y) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (1.2)$$

где

$$G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad (1.3)$$

здесь фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, t)$ определено равенством (5.6) в работе [1]. Справедлива следующая

Теорема 1. Если $\rho(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то

$$U(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

¹⁾Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

и справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^k U[\rho_1](x, t)}{\partial t^k} - \frac{\partial^k U[\rho_2](x, t)}{\partial t^k} \right|_{2+\alpha} \leq T d_k(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_\alpha$$

для любых $\rho_j(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $j = 1, 2$, где $d_k = d_k(T) > 0$ при $k = 0, 1, 2$ является монотонно неубывающей, ограниченной на компактах.

Доказательство.

Шаг 1: $U(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Пусть $\rho(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$. Объемный потенциал $U(x, t)$ можно представить в следующем виде:

$$U(x, t) = \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau, \quad H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy. \tag{1.4}$$

Докажем, что функция $H(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. Действительно, пусть

$$(x^j, t^j, \tau^j) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\},$$

причем пусть $R_1 > 0$ настолько велико, что

$$x^j \in O(0, R_1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & |H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2)| \leq |H_1(x^1, t^1, \tau^1)| + |H_1(x^2, t^2, \tau^2)| + \\ & + |H_2(x^1, t^1, \tau^1)| + |H_2(x^2, t^2, \tau^2)| + |H_3(x^1, t^1, \tau^1) - H_3(x^2, t^2, \tau^2)|, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$H_1(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy,$$

$$H_2(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{O(x^j, r_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy,$$

$$H_3(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{O(x^j, R_\delta) \setminus O(x^j, r_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное фиксированное. Тогда найдется такое достаточно большое R_δ , $R_\delta \geq R_0 > 0$, и достаточно малое r_δ , $R_0 \geq r_\delta > 0$, и тогда, в силу оценок (6.7) и (6.9) работы [1], будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & |H_1(x^j, t^j, \tau^j)| \leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| (1 + R_1^2)^{\beta_1/2} M_1(T, \varepsilon, R_0) \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_\delta)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x^j - y|)}{|x^j - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy \leq M_2(T, \varepsilon, R_0, R_1) \int_{R_\delta}^{+\infty} \rho \exp(-(1 - \varepsilon)\rho) d\rho < \frac{\delta}{3}, \\ & |H_2(x^j, t^j, \tau^j)| \leq (1 + R_1^2)^{\beta_1/2} \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| M_3(T, \varepsilon, R_0) \times \\ & \times \int_{O(x^j, r_\delta)} \frac{1}{|x^j - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy \leq M_4(T, \varepsilon, R_0, R_1) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \frac{r_\delta^2}{2} < \frac{\delta}{3}. \end{aligned}$$

На этом моменте мы зафиксируем R_δ и r_δ . Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & |H_3(x^1, t^1, \tau^1) - H_3(x^2, t^2, \tau^2)| \leq \\ & \leq \int_{O(0, R_\delta) \setminus O(0, r_\delta)} \left| \frac{(1 + |x^1|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |z + x^1|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(z, t^1 - \tau^1) - \frac{(1 + |x^2|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |z + x^2|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(z, t^2 - \tau^2) \right| dz < \frac{\delta}{3} \end{aligned} \tag{1.6}$$

при условии, что

$$|(x^1, t^1, \tau^1) - (x^2, t^2, \tau^2)| < \eta(\delta) \tag{1.7}$$

при достаточно малом $\eta(\delta) > 0$. Таким образом, в силу (1.5), (1.6) для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta(\delta) > 0$, что при выполнении неравенства (1.7) будет следовать неравенство

$$|H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2)| < \delta.$$

Таким образом, $H(x, t, \tau) \in C(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. Докажем теперь, что $H(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. Действительно, из (1.3) и (1.4) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$|H(x, t, \tau)| \leq \left(\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \right) (I_1 + I_2), \tag{1.8}$$

$$I_1 = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{|\mathcal{E}(x - y, t - \tau)|}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \quad I_2 = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{O(x, R_0)} \frac{|\mathcal{E}(x - y, t - \tau)|}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy.$$

В силу оценки (6.9), см. [1], фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ для I_1 справедлива следующая цепочка соотношений:

$$I_1 = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} B_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy =$$

$$= B_0 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|z|)}{|z|} \frac{1}{(1 + |x - z|^2)^{\beta_2/2}} dz \leq M_5(T, R_0, \varepsilon) \frac{1}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \leq M_5(T, R_0, \varepsilon),$$

где мы воспользовались оценкой (10.20) из [1] и тем, что по условию $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$. Для того, чтобы оценить интеграл I_2 , заметим, что при $\beta_1 \geq 0$ справедлива следующая оценка:

$$(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \leq 2^{\beta_1/4} (1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}. \tag{1.9}$$

С учетом неравенства (1.9) настоящей статьи и оценки (6.7) работы [1] для интеграла I_2 справедлива оценка

$$I_2 \leq M_6(T, R_0, \varepsilon) \int_{O(x, R_0)} \frac{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2}}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy \leq M_7(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \tag{1.10}$$

Таким образом, из (1.8)–(1.10) вытекает, что

$$\sup_{(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} |H(x, t, \tau)| < +\infty.$$

Итак,

$$H(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Но тогда из (1.4) получаем, что

$$U(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Шаг 2: $U_{x_j}(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Докажем, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.11}$$

Сначала докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \tag{1.12}$$

Действительно, пусть $x \in O(0, R_0)$. Справедливы следующие равенства:

$$H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau) \rho(y, \tau) dy + \int_{O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = J_1 + J_2. \tag{1.13}$$

Заметим, что в силу явного вида (1.3) функции $G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t)$, а также в силу оценок (6.7) из [1] фундаментального решения и леммы 4.1 из [2] можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_j} \int_{O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \tag{1.14}$$

Рассмотрим теперь интеграл J_1 . Заметим, что если $|y| \geq 2R_0$, то имеет место цепочка неравенств

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq 2R_0 - R_0 = R_0 > 0.$$

Пусть $x_h = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_3)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{J_1(x_h, y, t - \tau) - J_1(x, y, t - \tau)}{h} - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, NR_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy + \\ &+ \int_{O(0, NR_0) \setminus O(0, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy = J_{31} + J_{32}, \end{aligned}$$

где $x^* \in |x, x_h|$. Пусть $\delta > 0$ – произвольное фиксированное. Несложно заметить, что при достаточно большом $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|J_{31}| < \frac{\delta}{2}. \tag{1.15}$$

Фиксируем это $N \in \mathbb{N}$. Тогда при достаточно малом $|h| > 0$ справедлива оценка

$$|J_{32}| < \frac{\delta}{2}. \tag{1.16}$$

Таким образом, из (1.15) и (1.16) вытекает, что

$$J_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

и поэтому справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \tag{1.17}$$

Из (1.13), (1.14) и (1.17) получаем поточечное равенство (1.12). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения на первом шаге. Причем необходимо воспользоваться оценками (6.7) и (6.10) фундаментального решения из статьи [1], а также оценкой (10.20) из [1] одного интеграла. В частности, справедлива следующая оценка:

$$\sup_{(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right| < +\infty. \tag{1.18}$$

Следовательно, мы доказали, что справедливо выражение (1.11). Докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau. \tag{1.19}$$

Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
 J_4 &= \frac{U(x_h, t) - U(x, t)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau = \int_0^t \left[\frac{H(x_h, t, \tau) - H(x, t, \tau)}{h} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right] d\tau = \\
 &= \int_0^t \left[\frac{\partial H(x^*, t, \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right] d\tau \quad \text{при } x^* \in |x, x_h|.
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

В силу (1.11) приходим к выводу о том, что

$$J_4 \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad \text{для каждого } t \in [0, T].$$

Таким образом, справедливо поточечное равенство (1.19), из которого с учетом (1.11) и (1.18) приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.21}$$

Шаг 3: $U_t(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Докажем, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Сначала докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy. \tag{1.22}$$

Пусть $x \in O(0, R_0)$ при $R_0 > 0$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy + \int_{O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = P_1(x, t, \tau) + P_2(x, t, \tau).$$

Рассуждая точно так же, как при доказательстве леммы 4.1 из [2], несложно доказать, что

$$\frac{\partial P_2(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy.$$

При $|y| \geq 2R_0$ и $|x| < R_0$ справедливо неравенство

$$|x - y| \geq R_0.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{P_1(x, t + h, \tau) - P_1(x, t, \tau)}{h} - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy, \quad t^* \in |t, t + h|, \\
 H_1 &= \int_{O(x, NR_0) \setminus O(x, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy + \\
 &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, NR_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy = H_{11} + H_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

Для любого $\eta > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |H_{12}| &\leq M_{11}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, NR_0)} \frac{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2} \exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2} |x - y|} dy \leq \\ &\leq M_{12}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, NR_0)} \frac{(1 + |z|^2)^{\beta_1/2} \exp(-(1 - \varepsilon)|z|)}{|z|} dz < \frac{\eta}{3}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством (1.9), а также оценкой (6.9) из [1]. Фиксируем это $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\eta > 0$ найдется такое $\mu = \mu(\eta) > 0$, что при $|h| < \eta$ справедлива цепочка неравенств

$$|H_{11}| \leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \int_{O(x, NR_0) \setminus O(x, \delta)} \left| \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right| dy < \frac{\eta}{3}, \tag{1.24}$$

где мы воспользовались явным видом (1.3) функции $G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)$ и свойством гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$. Таким образом, из (1.23), (1.24) с учетом (1.23) приходим к выводу о том, что справедливо поточечное равенство (1.22).

Рассуждая точно так же, как на шаге 1, с учетом оценок (6.7) и (6.9) статьи [1], а также оценки интеграла (10. 20) из [1] мы можем доказать, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \tag{1.25}$$

причем справедлива оценка

$$\sup_{(x,t,\tau) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right| < +\infty. \tag{1.26}$$

Теперь мы докажем, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.27}$$

Докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau. \tag{1.28}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U(t + h, x) - U(t, x)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = \frac{1}{h} \int_0^{t+h} H(x, t + h, \tau) d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} H(x, t + h, \tau) d\tau + \int_0^t \left[\frac{H(x, t + h, \tau) - H(x, t, \tau)}{h} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau = U_{11} + U_{12}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Для интеграла U_{11} справедливо равенство

$$U_{11} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [H(x, t + h, \tau) - H(x, t, \tau)] d\tau + H(x, t, t) = U_{111} + U_{112}.$$

Ранее на шаге 1 было доказано, что $H(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, t])$ для любого $t \in [0, T]$. Поэтому имеет место предельное свойство

$$U_{111} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Заметим, что из явного вида (5.6), см. [1], вытекает, что

$$U_{112} = H(x, t, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, 0) \rho(y, t) dy = 0.$$

В силу (1.25) имеют место следующие соотношения:

$$U_{12} = \int_0^t \left[\frac{\partial H(x, t^*, \tau)}{\partial t} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \tag{1.30}$$

где $t^* \in |t, t + h|$. Таким образом, из (1.29), (1.30) вытекает поточечное равенство (1.28). Осталось воспользоваться свойством гладкости (1.25) и оценкой (1.26) и получить, что справедлива формула (1.27).

Шаг 4: $U_{x_j}(x, t) = U_{t x_j}(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Из поточечного равенства (1.21), рассуждая точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} &= \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau, \\ \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} &\in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \end{aligned} \tag{1.31}$$

причем справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial t}.$$

Из поточечного равенства (1.27), рассуждая точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau. \tag{1.32}$$

Теперь, рассуждая точно так же, как на шагах 1–3, с учетом оценок (6.7) и (6.10) статьи [1] можно доказать, что в силу поточечных равенств (1.31) и (1.32) имеем

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j}, \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

и поэтому в силу известного результата математического анализа производные коммутируют

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.33}$$

Шаг 5: $U_{tt}(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Используя доказанное на шаге 3 поточечное равенство (1.27), точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau. \tag{1.34}$$

Поскольку по условию $\rho(x, t) \in C([0, T]; C_b(\mathbb{R}^3))$ и с учетом оценок (6.7) и (6.9) статьи [1] из поточечного равенства (1.34) точно так же, как на шаге 1, можно доказать, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Шаг 6: $U_{x_j x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Поскольку $\rho(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то с учетом (3.1) и (4.8) справедливо поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} &= \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \end{aligned} \tag{1.35}$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_4 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y = L_{41} + L_{42} + L_{43} + L_{44} + L_{45}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Точно так же, как на шаге 1, можно доказать, что

$$L_1(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.37}$$

Точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что

$$L_2(x, t, \tau), L_3(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.38}$$

Заметим, что в силу оценок (3.28) и (3.29) при $x \neq y$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}|}{|x - y|} &\leq 3\beta_1, \quad \beta_1 \in [0, 1], \\ \frac{|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}|}{|x - y|} &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Кроме того, в силу оценок (6.8), (6.11) статьи [1] для функции

$$|x - y| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k}$$

справедливы следующие оценки при любом $R_0 > 0$:

$$|x - y| \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k} \right| \leq \frac{A_4(T, R_0, \varepsilon)}{|x - y|^2} \quad \text{при} \quad |x - y| \leq R_0,$$

$$|x - y| \left| \frac{\partial^{2\mathcal{C}} \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k} \right| \leq B_4(T, R_0, \varepsilon) \exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|) \quad \text{при} \quad |x - y| > R_0.$$

Кроме того, в силу свойства гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ имеем

$$|x| \frac{\partial^{2\mathcal{C}} \mathcal{E}(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} \in C^{(m+n)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times [0, +\infty)) \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.40}$$

Поэтому точно так же, как на шаге 1, для функции $L_{41}(x, t, \tau)$ с учетом (1.39), (1.40), а также оценки (10.47), [1] одного интеграла, можно доказать, что

$$L_{41}(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.41}$$

Рассмотрим интегралы L_{43} и L_{44} . Для любого $\delta > 0$ выберем достаточно большим $R_\delta > R_0$ и достаточно малым $0 < r_\delta < R_0$ таким образом, что будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |L_{43}| &\leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} M_{13}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} dy \leq \\ &\leq M_{14}(T, R_0, \varepsilon) \int_{R_\delta}^{+\infty} \rho \exp(-(1 - \varepsilon)\rho) d\rho < \frac{\delta}{4}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned} |L_{44}| &\leq \left[\frac{\rho(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2 - \beta_1}} \right]_\alpha \int_{O(x, r_\delta)} |x - y|^\alpha \left| \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \right| dy \leq \\ &\leq M_{15}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha \int_{O(x, r_\delta)} \frac{1}{|x - y|^{3 - \alpha}} dy \leq M_{16}(T, R_0, \varepsilon) r_\delta^\alpha < \frac{\delta}{4}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

На этом шаге зафиксируем эти $R_\delta > R_0 > 0$ и $0 < r_\delta < R_0$. Тогда несложно доказать, что интегралы $L_{42}(x, t, \tau), L_{45}(x, t, \tau) \in C(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. Тем самым, с учетом оценок (1.42) и (1.43) нетрудно доказать (см. шаг 1), что

$$L_{42}(x, t, \tau) + L_{43}(x, t, \tau) + L_{44}(x, t, \tau) + L_{45}(x, t, \tau) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.44}$$

Заметим теперь, что функция L_4 не зависит от выбора чисел $R_\delta > r_\delta > 0$. Поэтому возьмем в качестве этих чисел следующие:

$$R_\delta = 2R_0, \quad r_\delta = \frac{R_0}{2}, \quad R_0 > 0;$$

$$\begin{aligned} |L_{42}| &\leq M_{17}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)| \left[\int_{O(x, 2R_0) \setminus O(x, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} dy + \int_{O(x, R_0) \setminus O(x, R_0/2)} \frac{1}{|x - y|^\beta} dy \right] \leq \\ &\leq M_{18}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)|_b, \end{aligned}$$

$$|L_{45}| \leq M_{19}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)|.$$

Таким образом, соотношение (1.44) доказано. Следовательно, из (1.41)–(1.44), а также из (1.37), (1.38) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.45}$$

Поскольку (1.45) справедливо для всех $j, k \in \{1, 2, 3\}$, то в силу известной теоремы математического анализа справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_k \partial x_j}. \tag{1.46}$$

В силу результата шага 2 справедливо поточечное равенство (1.19)

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau.$$

В силу (1.11) и (1.45) точно так же, как на шаге 2 (см. цепочку равенств (1.20)), получим следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_k \partial x_j} d\tau,$$

из которого в силу (1.45), как и на предыдущих шагах, приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

и, кроме того, в силу (1.46) справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Шаг 7: $U_{tx, x_k}(x, t) = U_{x, tx_k}(x, t) = U_{x, x_k t}(x, t) \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Прежде всего заметим, что справедливо поточечное равенство (1.22)

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Заметим, что поскольку $\rho(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то в силу равенства (4.9) приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &= \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \tag{1.47}$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Точно так же, как на шаге 6, используя представление (1.47), можно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &\in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \\ \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &= \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned} \tag{1.49}$$

На основании результата 4 шага справедливо равенство (1.33), из которого вытекает следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k}.$$

Теперь наша задача доказать, что

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

С этой целью воспользуемся равенствами (1.35) и (1.36). Точно так же, как на шаге 3, можно получить следующие поточечные равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} &= \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned}$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y. \end{aligned}$$

Поскольку для фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ справедлива лемма 6.1 из [1], то можно доказать следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \tag{1.50}$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\ & + \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Из сравнения равенств (1.47) и (1.48) с равенствами (1.50) и (1.51) приходим к следующим поточечным равенствам:

$$\frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.52}$$

В силу результатов, полученных на шаге 6, справедливы следующие выражения:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} d\tau, \quad \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x, t, t)}{\partial x_j \partial x_k} + \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau, \tag{1.53}$$

причем

$$\frac{\partial^2 H(x, t, t)}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Таким образом, из (1.53) с учетом (1.52) и (1.49) справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Кроме того, в силу (1.33) справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k}.$$

Шаг 8: $U_{x,tt}(x, t) = U_{tx,t}(x, t) = U_{tx_j}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Точно так же, как на шаге 2, используя равенство (1.34), с учетом оценок (6.7) и (6.10) статьи [1] можно получить поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned}$$

С одной стороны, используя оценки (6.7) и (6.10) статьи [1], можно доказать в точности так же, как на шагах 4 и 5, поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned} \tag{1.54}$$

С другой стороны, в силу результата леммы 6.1 из [1] можно доказать поточечное равенство

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau,$$

из которого и из (1.54) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу результата шага 4 справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t}. \tag{1.55}$$

Таким образом, из (1.54), (1.55) вытекают поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.56}$$

Шаг 9: $U_{x_j x_k t t}(x, t) = U_{x_j t x_k t}(x, t) = U_{x_j t x_k} = U_{tx_j x_k t}(x, t) = U_{tx_j x_k}(x, t) = U_{tx_j x_k}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Из формулы (1.34), используя оценки (6.7)–(6.11) статьи [1], точно так же, как на шаге 7, можно доказать поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} &= - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy = \\ &= \left[\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} &+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\ &(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \cos(n_y, e_j) dS_y, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy = [\beta_1 (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} &+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\ &(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \quad (1.61) \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_k \partial t^2} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0, \end{aligned}$$

причем из (1.58) и (1.59) получаем, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \tag{1.62}$$

а из (1.60) и (1.61) вытекает, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.63}$$

Далее уже стандартным образом из (1.57), (1.62) и (1.63) получаем, что

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Теперь из поточечного равенства (1.35) точно так же, как на шаге 7, с учетом оценок (6.7)–(6.11) из [1] фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$ можно аналогично шагу 5 доказать следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau,$$

где для первого слагаемого справедливы формулы (1.58) и (1.59), а для второго слагаемого имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = \left[\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\ & (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ & + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Используя результат леммы 6.1 из [1], можно доказать, что правые части равенств (1.60) и (1.64), (1.61) и (1.65) совпадают. Поэтому сразу же получаем то, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.66}$$

Теперь заметим, что в силу равенств (1.56) справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t \partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t}, \\ \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} &= \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Таким образом, из (1.66), (1.67) получаем, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t \partial t} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t \partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Итак, из результатов шагов 1–9 вытекает промежуточная

Лемма 1.1. Если $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то потенциал $U(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+\alpha)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Шаг 10: $U(x,t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Из теоремы 8 для каждого $t \in [0, T]$ и $\alpha \in (0, 1)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} U(x,t) &\in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3), \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} &= \int \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \tag{1.68}$$

В силу результата леммы 1.1 справедливо следующее равенство:

$$U(x, t_2) - U(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} dt \quad \text{для всех } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \tag{1.69}$$

Из (1.69) получаем неравенство

$$|U(x, t_2) - U(x, t_1)|_{2+\alpha} \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} dt \quad \text{для всех } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \tag{1.70}$$

причем из (3.76) справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} \leq b_1(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha,$$

из которой и из (1.70) получаем неравенство

$$|U(x, t_2) - U(x, t_1)|_{2+\alpha} \leq b_1(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t_2 - t_1| \rightarrow +0 \quad \text{при } |t_2 - t_1| \rightarrow +0.$$

Следовательно,

$$U(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 11: $U(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Заметим, что справедливо равенство (1.34), которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = W(x,t) + U_2(x,t), \tag{1.71}$$

$$W(x,t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy, \tag{1.72}$$

$$U_2(x,t) = \int \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau.$$

Заметим, что фактически точно так же, как это было сделано на шагах 1–10, можно доказать, что

$$W(x, t) \in C_b^{(2+\alpha)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.73}$$

В силу результата теоремы 9 имеет место оценка следующего вида:

$$\sup_{t \in [0, T]} |W(x, t)|_{2+\alpha} \leq b_2 \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha, \tag{1.74}$$

а в силу результата теоремы 8 справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} |U_2(x, t)|_{2+\alpha} \leq b_3(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha. \tag{1.75}$$

Из оценок (1.74) и (1.75), а также леммы 1.1 с учетом (1.71) получаем, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \tag{1.76}$$

Наконец, из результата леммы 1.1 вытекает равенство

$$\frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau$$

для всех $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, из которого с учетом (1.68) и (1.76) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{2+\alpha} d\tau \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} |t_2 - t_1| \leq \\ &\leq b_4(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t_2 - t_1| \rightarrow +0 \end{aligned}$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$. Следовательно,

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Докажем, что

$$\frac{dU(x, t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, \tag{1.77}$$

где символом dU/dt мы обозначили сильную производную по времени в смысле банахова пространства $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} = \left| \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \left| \frac{U_{x_j}(x, t+h) - U_{x_j}(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{U_{x_j x_k}(x, t+h) - U_{x_j x_k}(x, t)}{h} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial U(x, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 U(x, t^{**})}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^3 U(x, t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial U(x, s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha = \\ &= \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial U(x, s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \end{aligned} \tag{1.78}$$

$$+ \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_{\alpha} = I_1 + I_2 + I_3,$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, которые справедливы в силу результата леммы 1.1. В силу этой же леммы справедливы предельные свойства

$$I_1 \rightarrow 0, \quad I_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0. \tag{1.79}$$

Заметим, что в силу результата леммы 1.1 и теоремы 8 справедливо равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \int_{|s, t|} \frac{\partial^4 U(x, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial \tau^2} d\tau, \tag{1.80}$$

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}, \quad \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для любого} \quad t \in [0, T]. \tag{1.81}$$

Поэтому из (1.80) с учетом (1.81) вытекает оценка

$$\left| \frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_{\alpha} \leq \int_{|s, t|} \left| \frac{\partial^4 U(x, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial \tau^2} \right|_{\alpha} d\tau \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_{\alpha} |t - s| \leq b_5(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_{\alpha} |t - s|,$$

из которой вытекает, что

$$I_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0. \tag{1.82}$$

Таким образом, из (1.78) с учетом (1.79) и (1.82) приходим к выводу о том, что

$$\left| \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0.$$

Следовательно, доказано (1.77), и поэтому вместе с результатом шага 10 приходим к выводу, что

$$U(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Шаг 12: $U(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Заметим, что справедливо равенство (1.71). При этом в силу оценки (3.77) и соотношения (1.73) имеют место следующие соотношения:

$$W(x, t) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1), \tag{1.83}$$

$$|W(x, t_2) - W(x, t_1)|_{2+\alpha} \leq b_2(T) |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_{\alpha} \rightarrow +0$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$, и поэтому

$$W(x, t) \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Теперь рассмотрим потенциал $U_2(x, t)$, определенный равенством (1.72). Точно так же, как при доказательстве равенства (1.71) на шаге 5, используя результат леммы 5.1 [1], можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^3} \rho(y, \tau) dy d\tau.$$

Теперь, используя оценки (6.7)–(6.11) из [1], можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \in C_b^{(2+0)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \tag{1.84}$$

На самом деле можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \in C_b^{(2+1)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \tag{1.85}$$

но для наших целей вполне достаточно соотношения (1.84). Кроме того, в силу результата теоремы 8 имеет место соотношение

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \tag{1.86}$$

Итак, с учетом (1.83)–(1.86) получаем из равенства (1.71) выражение

$$\frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} = W(x, t_2) - W(x, t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} dt, \tag{1.87}$$

причем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} &\leq |W(x, t_2) - W(x, t_1)|_{2+\alpha} + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} dt, \\ \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &\leq b_3(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Таким образом, из (1.87), (1.88) вытекает оценка

$$\left| \frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} \leq b_4(T) \left(|\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha + \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t_2 - t_1| \right) \rightarrow +0$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$ для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при } \alpha \in (0, 1).$$

Учитывая, что на предыдущем шаге нами было доказано, что

$$\frac{dU(x, t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t},$$

то теперь наша задача доказать, что в смысле банахова пространства $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}.$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{U_t(x, t+h) - U_t(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} = \left| \frac{U_t(x, t+h) - U_t(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \left| \frac{U_{x_j}(x, t+h) - U_{x_j}(x, t)}{h} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{U_{x_j x_k}(x, t+h) - U_{x_j x_k}(x, t)}{h} - \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ &= \left| \frac{\partial^2 U(x, t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^3 U(x, t^{**})}{\partial t \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^4 U(x, t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ &= \left| \frac{\partial^2 U(x, t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^3 U(x, t^{**})}{\partial x_j \partial t^2} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^4 U(x, t^{***})}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} - \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ &= J_1 + J_2 + J_3, \quad t^*, t^{**}, t^{***} \in [t, t+h], \end{aligned}$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, поскольку в силу леммы 1.1 имеем $U(x, t) \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Далее, рассуждая точно так же, как на шаге 11, в силу (1.85), (1.86) и (1.88) можно доказать, что

$$J_1, J_2, J_3 \rightarrow +0 \quad \text{при } |h| \rightarrow +0.$$

Таким образом, в силу результатов шагов 10–12 справедливо основное утверждение настоящей теоремы

$$U(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Теорема доказана полностью.

Справедлива следующая

Теорема 2. Если $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем

$$V_k(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)),$$

где потенциал $V_k(x, t)$ определен равенством (1.2).

Доказательство. Утверждение фактически доказано при доказательстве теоремы 1.

Введем следующие потенциалы:

$$U_0(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau, \tag{1.89}$$

$$V_{00}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu_0(y) dy,$$

$$V_{01}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \mu_1(y) dy, \tag{1.90}$$

где

$$\rho_0(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3)), \tag{1.91}$$

$$\mu_0(x) \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \tag{1.92}$$

$$\mu_0(x) \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$$

при $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$. Заметим, что потенциалы (1.89), (1.90) связаны с потенциалами (1.1) и (1.2) следующим образом:

$$U_0(x, t) = \frac{U(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \rho(x, t) = (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \rho_0(x, t), \tag{1.93}$$

$$V_{00}(x, t) = \frac{V_0(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \mu_0(x),$$

$$V_{01}(x, t) = \frac{V_1(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} \mu_1(x). \tag{1.94}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Если выполнены соотношения (1.91), (1.92), то при $\alpha \in (0, 1)$ и $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ справедливы соотношения

$$U_0(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap C_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

$$V_{00}(x, t), V_{01}(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap C_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Доказательство. Теорема является следствием равенств (1.93), (1.94) и теорем 1, 2.

Справедлива следующая

Лемма 1.2. Если $u_0(x), u_1(x) \in C_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, то справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial V_{00}[\Delta u_1 - u_1]}{\partial t}(x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} [\Delta u_1(y) - u_1(y)] dy = u_1(x), \tag{1.95}$$

$$V_{01}[\Delta u_0 - u_0](x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} [\Delta u_0(y) - u_0(y)] dy = u_0(x), \quad (1.96)$$

$$U_{00}(x, 0) = \frac{\partial U_{00}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (1.97)$$

$$V_{00}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V_{01}}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{для каждого } x \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Равенства (1.95) и (1.96) являются следствиями теоремы 2 и доказаны, например, в работе [3]. Равенства (1.97) являются следствиями леммы I.5.1.

Наконец, справедлива следующая

Теорема 4. Если $\rho_0(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\mu_0(x), \mu_1(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t) = \rho_0(x, t), \quad (1.98)$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t) = \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t) = 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T],$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x, t) = \Delta_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_j^2}. \quad (1.99)$$

Доказательство. Пусть $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ – скобки двойственности между пространством основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ и пространством обобщенных функций $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между пространством основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3)$ и пространством обобщенных функций $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^3)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle\langle U_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle, \quad \langle\langle V_{00}(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \delta(t)\mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle, \\ \langle\langle V_{01}(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}'(x, t) * \delta(t)\mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle \quad \text{для любой } \phi(x, t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T)). \end{aligned}$$

Используя известные результаты теории обобщенных функций, можно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \delta(x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle\langle \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \delta(t)\mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \delta(x, t) * \delta(t)\mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle\langle \delta(t)\mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle\mu_0(x), \phi(x, 0)\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \delta(x, t) * \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle\langle \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = -\langle\mu_1(x), \phi'(x, 0)\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.101)$$

для любой функции $\phi(x, t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. В силу результатов теорем 1 и 3 из равенств (1.100), (1.101) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} [\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t) - \rho_0(x, t)] \phi(x, t) dx dt &= 0, \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t) \phi(x, t) dx dt &= 0, \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t) \phi(x, t) dx dt = 0 \end{aligned}$$

для любых $\phi(x, t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к равенствам (1.98), (1.99).

Пусть

$$L(x, t) = U_0[\rho_0](x, t) + V_{00}[\Delta_x u_1(x) - u_1(x)](x, t) + V_{01}[\Delta_x u_0(x) - u_0(x)](x, t).$$

Справедлива следующая основная

Теорема 5. Если $\rho_0(x, t) \in C([0, T]; C^\alpha((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3))$, при $\alpha \in (0, 1)$ и

$$\Delta_x u_0(x) - u_0(x) \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \tag{1.102}$$

$$\Delta_x u_1(x) - u_1(x) \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3) \tag{1.103}$$

при $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то справедливо соотношение

$$L(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap C_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}^{\beta_1}[L](x, t) = \rho_0(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T],$$

$$L(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial L(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Доказательство основано на теоремах 2, 4 и лемме 1.2.

Замечание 1. Заметим, что мы имеем следующие достаточные условия на функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ такие, чтобы были выполнены соотношения (1.102), (1.103):

$$u_0(x) \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$$

при $\beta_2 \geq 0, \beta_3 \geq 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. Действительно, пусть, например, $u_0(x) \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3)$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \Delta u_0(x) &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) - u_0(x) \Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} - \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j} \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) - \\ &\quad - (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} - 2 \sum_{j=1}^3 (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} = \\ &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) + (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} - \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial[(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)]}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} + 2 \sum_{j=1}^3 (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\left(\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}\right)^2}{(1 + |x|^2)^{\beta_2}} \in C^\alpha(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТИПА ШАУДЕРА

Если $u(x, t) \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, то справедлива следующая третья формула Грина (см. формулу (9.1) теоремы 3 статьи [1]):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \iint_{0, \mathbb{R}^3}^t \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}^{\beta_1}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) [\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} [\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] \right] d\xi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из результатов шагов 10–12 теоремы 1 для объемного потенциала и теоремы 2 для поверхностных потенциалов из равенства (2.1) вытекает следующая априорная оценка типа Шаудера:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[\left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right|_{2+\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u'(x, t) \right|_{2+\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u''(x, t) \right|_{2+\alpha} \right] \leq \\ \leq a(T) \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \mathcal{W}_{x, t}[u](x, t) \right|_{\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} [\Delta_x u_0(x) - u_0(x)] \right|_{\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} [\Delta_x u_1(x) - u_1(x)] \right|_{\alpha} \right],$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$.

3. ОЦЕНКИ ТИПА ШАУДЕРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ВЕСОМ

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [2] (см. также работу [4]). Рассмотрим следующий потенциал с весом:

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j \partial x_i} &= \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{ij} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_i x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy + \\ &+ \beta_1 x_i (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_j} f(y) dy + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_i} f(y) dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Прежде всего нам нужно получить вспомогательные оценки. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} F(x_1 - y, t) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} F(x_2 - y, t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left[(1 + |x_s|^2)^{\beta_1/2} F(x_s - y, t) \right] ds = \\ &= \{x_s = sx_1 + (1 - s)x_2\} = \int_0^1 \sum_{j=1}^3 \beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} x_{sj} (x_{1j} - x_{2j}) F(x_s - y, t) ds + \\ &+ \int_0^1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F(x_s - y, t)}{\partial x_{sj}} (x_{1j} - x_{2j}) ds = K_1 + K_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что справедлива оценка

$$(1 + |x_s|^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} (1 + |x_s - y|^2)^{1/2} (1 + |y|^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Для оценки K_1 нужно рассмотреть два случая: $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Пусть $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда справедлива оценка

$$|K_1| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 |F(x_s - y, t)| ds, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Пусть теперь $\beta_1 > 1$. С учетом (3.3) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s|^2)^{(\beta_1-1)/2} |F(x_s - y, t)| ds \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |F(x_s - y, t)| ds, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned}$$

Для K_2 с учетом (3.3) справедлива следующая оценка:

$$|K_2| \leq 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} |D_x F(x_s - y, t)| ds. \tag{3.5}$$

Таким образом, из (3.2) и (3.4), (3.5) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} & |(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} F(x_1 - y, t) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} F(x_2 - y, t)| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 ds |F(x_s - y, t)| \times \\ & \times \begin{cases} 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, & \text{если } \beta_1 > 1; \\ 1, & \text{если } \beta_1 \in [0, 1]; \end{cases} \\ & + 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} |D_x F(x_s - y, t)| ds, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $x_s = sx_1 + (1 - s)x_2, s \in [0, 1]$.

Заметим, что имеет место

Теорема 6. Если $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$, и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то

$$|u_4(x, t)|_\alpha \leq D(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

где $D = D(T) > 0$ – монотонно неубывающая функция, ограниченная на компактах.

Доказательство.

Шаг 1: Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ такие точки, что

$$\rho := |x_1 - x_2| < 1, \quad x_0 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad R_0 > 1.$$

Тогда очевидно, что

$$x_1, x_2 \in \overline{O(x_0, \rho)} \subset O(x_0, R_0).$$

Заметим, что для потенциала

$$u_4(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1],$$

в силу (4.11), в котором положим $z = x_0$ и $R = 2R_0$, справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} u_4(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) dy + \\ &+ \int_{O(x_0, 2R_0)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(y) - f(x)] dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad x \in O(x_0, 2R_0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Введем обозначение

$$F_2(x, y, t) := (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j}. \tag{3.8}$$

С учетом представления (3.7) и обозначения (3.8) справедливо следующее равенство (см. лемму 4.4 в работе [2]):

$$u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t) = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \tag{3.9}$$

$$I_0 := \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} [F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)] f(y) dy, \quad (3.10)$$

$$I_1 := (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \left[\frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \right] \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad (3.11)$$

$$I_2 := \left[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \right] \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y,$$

$$I_3 := \int_{O(x_0, \rho)} F_2(x_2, y, t) (f(x_2) - f(y)) dy, \quad (3.12)$$

$$I_4 := \int_{O(x_0, \rho)} F_2(x_1, y, t) (f(y) - f(x_1)) dy, \quad (3.13)$$

$$I_5 := (f(x_2) - f(x_1)) \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} F_2(x_2, y, t) dy, \quad (3.14)$$

$$I_6 := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} (F_2(x_2, y, t) - F_2(x_1, y, t)) (f(x_1) - f(y)) dy. \quad (3.15)$$

Шаг 2: I_0 . Заметим, что при $|y - x_0| \geq 2R_0$ справедливы неравенства

$$|x_s - y| \geq |y - x_0| - |x_s - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| = \frac{1}{2}|y - x_0| \geq R_0 > 0, \quad (3.16)$$

$$|x_s - y| \leq |x_s - x_0| + |y - x_0| \leq \frac{1}{2}|y - x_0| + |y - x_0| = \frac{3}{2}|y - x_0|. \quad (3.17)$$

Рассмотрим сначала случай $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда с учетом (3.6) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)| &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| ds + \\ &+ 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} \left| D_x \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| ds \leq \\ &\leq D_1(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \int_0^1 \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |x_s - y|}{|x_s - y|} ds + \\ &+ D_2(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |x_s - y|}{|x_s - y|} ds \leq \\ &\leq D_3(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \frac{\exp(-(1 - \varepsilon))(1/2) |y - x_0|}{|y - x_0|} + \\ &+ D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $x_s = sx_1 + (1 - s)x_2$ и мы воспользовались оценками (6.11), (10.20) статьи [1]. Теперь получим оценку, аналогичную (3.18) в случае $\beta_1 > 1$. Из тех же соображений вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)| &\leq D_5(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \times \\ &\times (1 + |y - x_0|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|} + D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \times \\ &\times (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Поэтому из (3.18) и (3.10) получаем при $\beta_1 \in [0, 1]$ следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 |I_0| &\leq D_3(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| |f(x)|_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)(1/2)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dy + \\
 &+ D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| f(x)(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \right|_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2} \times \\
 &\times \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dy \leq D_6(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1].
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.10) получаем при $\beta_1 > 1$ следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 |I_0| &\leq D_5(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| f(x)(1+|x|^2)^{(\beta_1-1)/2} \right|_0 \times \\
 &\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{(\beta_1-1)/2} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)(1/2)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dy + \\
 &+ D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| f(x)(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \right|_0 \times \\
 &\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dy \leq D_7(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Таким образом, из (3.20) и (3.21) вытекает единообразная оценка

$$|I_0| \leq D_8(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| \tag{3.22}$$

Шаг 3: I_1 . Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} = \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial x_{sk} \partial x_j} [x_{1k} - x_{2k}] ds,$$

из которого при $|y - x_0| = 2R_0$ с учетом неравенств (3.16) и (3.17) вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \right| &\leq 3|x_1 - x_2| \int_0^1 \left| D_x \frac{\partial \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_j} \right| ds \leq \\
 &\leq D_9(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \int_0^1 \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|x_s - y|)}{|x_s - y|} ds \leq \\
 &\leq D_{10}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

С учетом (3.23) из (3.11) получаем искомую оценку

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq \left| (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right|_0 D_{10}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \times \\
 &\times \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dS_y \leq D_{11}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Шаг 4: I_2 . Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq D_{12}(T, R_0, \varepsilon) \left[(1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dS_y \leq \\
 &\leq D_{13}(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leq D_{14}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

поскольку по условию $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$.

Шаг 5: I_3 и I_4 . Получим оценку на интеграл I_3 , поскольку оценка для интеграла I_4 получается заменой $x_2 \leftrightarrow x_1$. Выражение (3.12) для интеграла I_3 можно переписать в следующем виде:

$$I_3 = \int_{O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) \right] dy + \\ + \int_{O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right] dy =: I_{31} + I_{32}.$$

Заметим, что если $|y - x_0| \leq \rho$, то

$$|y - x_2| \leq |y - x_0| + |x_2 - x_0| \leq \rho + \frac{\rho}{2} = \frac{3\rho}{2}. \quad (3.26)$$

Поэтому для I_{31} справедлива следующая оценка:

$$|I_{31}| \leq D_{15}(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_{\alpha} \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|^{3-\alpha}} dy \leq D_{16}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (3.27)$$

Заметим, что в силу (3.6) справедливы следующие оценки:

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |y - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1], \quad (3.28)$$

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq \\ \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2|, \quad \beta_1 > 1, \quad (3.29)$$

где мы воспользовались следующими соотношениями:

$$|x_s - y| = |sy + (1-s)x_2 - y| = (1-s)|y - x_2| \leq |y - x_2|, \quad s \in [0, 1].$$

Сначала получим оценку для I_{32} при $\beta_1 \in [0, 1]$. Действительно, с учетом (3.26) и (3.28) справедливы следующие неравенства:

$$|I_{32}| \leq D_{17}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|} dy \leq D_{18}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (3.30)$$

Теперь получим оценку для I_{32} при $\beta_1 > 1$. Действительно, с учетом (3.26) и (3.29) справедливы следующие неравенства:

$$|I_{32}| \leq D_{19}(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \times \\ \times \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{(1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|y - x_2|^2} dy \leq D_{20}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \quad (3.31)$$

Таким образом, из (3.27), (3.30) и (3.31) вытекает следующая оценка:

$$|I_3| \leq D_{21}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (3.32)$$

В точности таким же образом для I_4 (см. формулу (3.13)) получаем следующую оценку:

$$|I_4| \leq D_{21}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (3.33)$$

Шаг 6: I_5 . Выражение (3.14) можно переписать в следующем виде:

$$I_5 = \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) \right] \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy + \\ + \left[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right] f(x_1) \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy : I_{51} + I_{52}. \quad (3.34)$$

Прежде всего рассмотрим интеграл

$$J := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy.$$

Для J справедливо равенство

$$J = \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dy - \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dy := J_1 + J_2. \quad (3.35)$$

Заметим, что при $|y - x_0| = 2R_0$ справедливы неравенства

$$|y - x_2| \geq |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq |y - x_0| - \frac{1}{4}|y - x_0| = \frac{3}{4}|y - x_0|. \quad (3.36)$$

В силу (3.36) получаем следующую оценку для J_1 :

$$|J_1| \leq D_{22}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)(3/4)|y-x_0|)}{|y-x_0|} dS_y \leq D_{23}(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (3.37)$$

С учетом (3.36) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|J_2| \leq D_{24}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y-x_2|^2} dS_y \leq D_{25}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y-x_0|^2} dS_y = D_{26}(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (3.38)$$

Таким образом, из (3.35) с учетом (3.37) и (3.38) вытекает оценка

$$|J| \leq D_{27}(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (3.39)$$

Теперь мы получим оценку для I_{51} , определенного равенством (3.34). Действительно, с учетом оценки (3.39) справедлива следующая оценка:

$$|I_{51}| \leq D_{27}(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leq D_{28}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \quad (3.40)$$

Для оценки I_{52} , определенного равенством (3.34), необходимо опять отдельно рассмотреть случаи $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Справедливы следующие оценки:

$$\left| (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1], \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \left| (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| 2^{(\beta_1-1)/2} (1+|x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \int_0^1 (1+|x_s - x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \\ &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| 2^{(\beta_1-1)/2} (1+|x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1+|x_1 - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Пусть сначала $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда с учетом (3.41) и (3.39) получаем оценку

$$|I_{52}| \leq D_{29}(T, R_0, \varepsilon) |f(x)|_0 |x_1 - x_2| \leq D_{30}(T, R_0, \varepsilon) |\mu(x)|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (3.43)$$

Пусть теперь $\beta_1 > 1$. Тогда с учетом (3.42) и (3.39) получаем оценку

$$|I_{52}| \leq D_{31}(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \leq D_{32}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \quad (3.44)$$

Таким образом, из (3.34), (3.40), (3.43) и (3.44) вытекает искомая оценка

$$|I_5| \leq D_{33}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \quad (3.45)$$

Шаг 7: I_6 . Интеграл I_6 , определенный равенством (3.15), можно представить в следующем виде:

$$I_6 = I_{61} + I_{62} + I_{63}, \quad (3.46)$$

$$I_{61} := \left[(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(x_1) - f(y)] dy,$$

$$I_{62} := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right] \left[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) \right] dy, \quad (3.47)$$

$$I_{63} := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right] \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy. \quad (3.48)$$

Заметим, что $|y - x_0| \geq \rho$ и справедливы неравенства

$$|x_1 - y| \leq |y - x_0| + |x_1 - x_0| \leq |y - x_0| + \frac{\rho}{2} \leq \frac{3}{2}|y - x_0|, \quad (3.49)$$

$$|x_2 - y| \geq |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq \frac{1}{2}|y - x_0|. \quad (3.50)$$

Для того чтобы оценить интеграл I_{61} , нужно рассмотреть опять два случая: $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Рассмотрим сначала случай $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда с учетом (3.49) и (3.50) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |I_{61}| &\leq D_{34}(T, R_0, \varepsilon) |x_2 - x_1| [f(x)]_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|x_1 - y|^\alpha}{|x_2 - y|^3} dy \leq D_{35}(T, R_0, \varepsilon) |x_2 - x_1| [f(x)]_\alpha \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{3-\alpha}} dy \leq D_{36}(T, R_0, \varepsilon) |\mu(x)|_\alpha |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Теперь рассмотрим случай $\beta_1 > 1$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} I_{61} &: \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(x_1) dy - \\ &- \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy := I_{611} + I_{612}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Сначала получим оценку для интеграла I_{611} . С этой целью заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |x_2 - x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \leq \\ &\leq 3\beta_1 2^{\beta_1-1} |x_1 - x_2| (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Таким образом, из (3.52) с учетом (3.53) и (3.50) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{611}| &\leq D_{37}(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq D_{37}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Теперь получим оценку для интеграла I_{612} . С этой целью заметим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq \\ &\leq 3\beta_1 2^{\beta_1-1} (1 + (1/2 + 2R_0)^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Таким образом, из (3.52) с учетом (3.50) и (3.55) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{612}| &\leq D_{38}(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\ &\leq D_{39}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Таким образом, из (3.51), (3.52), (3.54) и (3.56) приходим к оценке

$$|I_{61}| \leq D_{40}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2| \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_1 \in [0, 1]; \\ 1 + |\ln |x_1 - x_2||, & \text{если } \beta_1 > 1. \end{cases} \quad (3.57)$$

Для того чтобы оценить интегралы I_{62} и I_{63} , определенные равенствами (3.47) и (3.48), нам нужно сделать предварительные оценки. Справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} = \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial x_{sk} \partial y_i \partial y_j} [x_{2k} - x_{1k}] ds,$$

из которого при $2R_0 \geq |y - x_0| \geq \rho$ вытекает стандартным образом следующая оценка:

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leq D_{41}(T, R_0, \varepsilon) \frac{1}{|y - x_0|^4} |x_1 - x_2|. \quad (3.58)$$

Из (3.47) с учетом (3.58) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} |I_{62}| &\leq D_{42}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left[\frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|y - x_1|^\alpha}{|y - x_0|^4} dy \leq \\ &\leq D_{43}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| |\mu|_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{4-\alpha}} dy \leq D_{44}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где мы воспользовались неравенством

$$|y - x_1| \leq \frac{3}{2} |y - x_0|.$$

Для того чтобы оценить интеграл I_{63} , нужно опять рассмотреть два случая: $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. В случае $\beta_1 \in [0, 1]$ из (3.48) и (3.59) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |I_{63}| &\leq D_{45}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|y - x_1|}{|y - x_0|^4} dy \leq D_{46}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq D_{47}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Рассмотрим теперь случай $\beta_1 > 1$. Поскольку

$$|x_1 - y| \leq |x_1 - x_0| + |y - x_0| \leq \frac{1}{2} + 2R_0,$$

то справедлива оценка

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/1} \left(1 + (1/2 + 2R_0)^2\right)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - y|. \quad (3.61)$$

Из (3.48) с учетом (3.58) и (3.61) получим оценку

$$\begin{aligned} |I_{63}| &\leq D_{48}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\ &\leq D_{49}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Таким образом, из (3.46), (3.57), (3.59), (3.60) и (3.62) получаем оценку

$$|I_6| \leq D_{50}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha (|x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||] + |x_1 - x_2|^\alpha). \quad (3.63)$$

Итак, из (3.9) с учетом (3.22), (3.24), (3.25), (3.32), (3.33), (3.45) и (3.63) получаем оценку

$$|u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t)| \leq D_{51}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3.64)$$

при $|x_1 - x_2| < 1$.

Шаг 8: $|u_4|_0$. Теперь наша задача оценить $-|u_4|_0$. В силу равенства (4.8) справедливо следующее выражение для произвольного $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} u_4(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, \delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ & + \int_{O(x, \delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{E}(x-y, t) [(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x)] dy + \\ & + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(x, \delta)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y = J_2 + J_{11} + J_{12} + J_{13}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Оценим интеграл J_2 . Сначала предположим, что $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда выполнено неравенство

$$|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}| \leq 3\beta_1 |x-y|. \quad (3.66)$$

Если же $\beta_1 > 1$, то справедливо неравенство

$$|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}| \leq 3\beta_1 |x-y| 2^{(\beta_1-1)/2} (1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \quad (3.67)$$

С учетом оценок (3.66) и (3.67) мы приходим к следующей цепочке соотношений:

$$\begin{aligned} |J_2| = & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy \right| \leq \int_{O(x, R_0)} \frac{D_{52}(T, R_0, \varepsilon)}{|x-y|^2} |f(y)| dy + \\ & + D_{53}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) |f(y)| dy \leq D_{54}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad \beta_1 \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} |J_2| = & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy \right| \leq \\ & \leq D_{55}(T, R_0, \varepsilon) \int_{O(x, R_0)} \frac{(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|x-y|^2} (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |f(y)| dy + \\ & + D_{56}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) (1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \times \\ & \times (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |f(y)| dy \leq D_{57}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad \beta_1 > 1, \end{aligned} \quad (3.69)$$

поскольку по условию $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$.

Справедливы следующие оценки:

$$|J_{11}| \leq D_{58}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1+1)/2}} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} dy \leq D_{59}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad (3.70)$$

$$|J_{12}| \leq D_{60}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha \int_{O(x, R_0)} \frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}} dy \leq D_{61}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad |J_{13}| \leq D_{62}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0. \quad (3.71)$$

Из (3.65) с учетом оценок (3.70), (3.71) приходим к оценке

$$|J_1| \leq D_{63}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha. \quad (3.72)$$

Таким образом, из (3.68), (3.69) и (3.72) вытекает следующая оценка:

$$|u_4|_0 \leq D_{64}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T]. \quad (3.73)$$

Шаг 9: Заметим, что если $|x_1 - x_2| \geq 1$, то в силу (3.73) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t)|_0 &\leq 2|u_4(x, t)|_0 \leq 2|u_4(x, t)|_0 |x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ &\leq D_{65}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| \geq 1. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Таким образом, из (3.64), (3.74) мы получаем искомую оценку

$$|u_4(x, t)|_\alpha \leq D(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha, \quad \mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1).$$

Справедлива следующая

Лемма 3.1. Если $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |u_1(x, t)|_\alpha &\leq a(T) |\mu|_0 \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T], \\ |u_2(x, t)|_\alpha &\leq a(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T], \\ |u_3(x, t)|_\alpha &\leq a(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Доказательство. Аналогичное утверждение доказано в [5].

Несложно доказывается следующая

Лемма 3.2. Пусть $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ и $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$|u(x, t)|_0 \leq d_1(T) |\mu|_0, \quad \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right|_0 \leq d_2(T) |\mu|_0, \quad j = 1, 2, 3,$$

для всех $t \in [0, T]$, где

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy.$$

Из результатов теоремы 6 и лемм 3.1, 3.2 вытекает следующая основная

Теорема 7. Для любой функции $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ справедлива оценка типа Шаудера

$$\begin{aligned} |u(x, t)|_{2+\alpha} &\leq d(T) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T], \\ u(x, t) &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \tag{3.75}$$

а функция $d = d(T) > 0$ является монотонно неубывающей и ограниченной на компактах.

Отметим, что в силу свойств гладкости фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$, определенного равенством (5.6) [1], справедлива

Теорема 8. Для любой функции $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ справедлива оценка типа Шаудера

$$\begin{aligned} |u_k(x, t)|_{2+\alpha} &\leq d_k(T) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ u_k(x, t) &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t^k} \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \tag{3.76}$$

а функция $d_k = d_k(T) > 0$ является монотонно неубывающей и ограниченной на компактах.

Наконец, рассмотрим следующий потенциал с весом

$$h(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \mu(y) dy.$$

Для него справедлива следующая

Теорема 9. Для любой функции $\mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ справедлива оценка типа Шаудера

$$|h(x)|_{2+\alpha} \leq d|\mu|_\alpha, \quad d > 0.$$

4. ГЛАДКОСТЬ ВЕСОВОГО ПОТЕНЦИАЛА

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [2].

Пусть $\eta(s) \in C_b^{(1)}[0, +\infty)$ – функция следующего вида:

$$0 \leq \eta(s) \leq 1, \quad 0 \leq \eta'(s) \leq 2,$$

причем

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq s \leq 1; \\ 1, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad \eta_\varepsilon := \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right).$$

Теперь определим следующие функции:

$$\begin{aligned} u(x, t) := & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ & + \int_{O(z, R)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{E}(x-y, t) [(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x)] dy + \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad O(x, 2\varepsilon) \subset O(z, R),$$

$$w(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t) f(y) dy, \quad v(x, t) := \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_j} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} f(y) dy, \quad (4.2)$$

$$v_\varepsilon(x, t) := - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} f(y) dy, \quad (4.3)$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x, t)}{\partial x_i} &= (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial x_j} \right) f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \int_{O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) \left[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\
 &\quad + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z,R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \eta_\varepsilon \cos(n_y, e_i) dy.
 \end{aligned}$$

Пусть $0 < 2\varepsilon < R$. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i} &= K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \\
 K_1 &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left([1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) \left[(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy, \\
 K_2 &:= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left([1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy, \\
 K_3 &:= \int_{O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left([1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) \left[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy, \\
 K_4 &:= (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z,R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} [1 - \eta_\varepsilon] \cos(n_y, e_i) dy.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку $2\varepsilon < R$, то сразу же имеем

$$K_2 = K_4 = 0. \tag{4.5}$$

Теперь нужно рассмотреть интегралы K_1 и K_3 отдельно при $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Несложно доказать (см., например, [2] и [5]), что оба интеграла стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Итак, из (4.4), (4.5) вытекает, что

$$\sup_{x \in O(0,R)} \left| u(x,t) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i} \right| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \tag{4.6}$$

для любого $R > 0$. При этом из (4.2) и (4.3) вытекает, что

$$\sup_{x \in O(0,R)} \left| v_\varepsilon(x,t) - \frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j} \right| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \tag{4.7}$$

для любого $R > 0$. Из (4.6) и (4.7) вытекает, что

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = u(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \tag{4.8}$$

где $w(x,t)$ определена равенством (4.2), а $u(x,t)$ – равенством (4.1). Заметим, что в силу оценок (6.7)–(6.12) из [1] и свойств гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения $\mathcal{E}(x,t)$ справедливо следующее равенство:

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 w_k(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = u_k(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \tag{4.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 w_k(x,t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{k\mathcal{C}} \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial t^k} f(y) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
 u_k(x,t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{2+k\mathcal{C}} \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} \left((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2} \right) f(y) dy +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\
& + \int_{O(z, R)} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} \mathcal{E}(x-y, t) \left[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\
& + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial^{1+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial t^k} \cos(n_y, e_j) dS_y, \\
f(x) & = \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Заметим, что представление (4.1) удобно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
u(x, t) & = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) dy + \\
& + \int_{O(z, R)} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(y) - f(x)] dy + \\
& + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad x \in O(z, R),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

а представление (4.10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_k(x, t) & = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} f(y) dy + \\
& + \int_{O(z, R)} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} [f(y) - f(x)] dy + \\
& + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial^{1+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial t^k} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad x \in O(z, R), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
2. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. С. 464.
3. Корпусов М.О., Яблочкин Д.К. Теория потенциала и оценка Шаудера в гёльдеровских пространствах для 3 + 1–мерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 8. С. 1289–1314.
4. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. С. 288.
5. Korpusov M.O., Matveeva A.K. On critical exponents for weak solutions to the Cauchy problem for one nonlinear equation with gradient nonlinearity // MMAS. 2022. V. 46. № 2. P. 1574–1630.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 533.6.011

КОЭФФИЦИЕНТ АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА
В ПРОДОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КУЭТТА:
ОТ РЕЖИМА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
ДО СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО© 2023 г. А. А. Абрамов¹, В. Ю. Александров¹, А. В. Бутковский^{1,*}¹ 140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ЦАГИ, Россия

*e-mail: albutkov@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.
Переработанный вариант 26.07.2022 г.
Принята к публикации 10.10.2022 г.

Рассмотрено течение Куэтта газа для цилиндрической геометрии ограничивающих поверхностей, движущихся в продольном направлении относительно их оси симметрии. Для одноатомного газа исследована связь (аналогия Рейнольдса) между напряжением трения и потоком энергии, передаваемым обтекаемой поверхностью. В случае течения сплошной среды и в случае свободномолекулярного течения в явном виде получены простые аналитические выражения для коэффициента аналогии Рейнольдса, зависящие только от числа Эккерта и не зависящие от отношения радиусов цилиндров. Для различных значений числа Кнудсена с помощью метода прямого статистического моделирования (DSMC) изучен переходный режим течения. Показано, что в этом случае коэффициент аналогии Рейнольдса при фиксированных значениях отношения радиусов и числа Кнудсена зависит от относительной скорости и температур поверхностей главным образом через число Эккерта. Найдено соотношение между погонными потоками энергии, передаваемой цилиндрическим поверхностям. Библ. 17. Фиг. 7.

Ключевые слова: аналогия Рейнольдса, продольное цилиндрическое течение Куэтта, число Эккерта, число Кнудсена, прямое статистическое моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466923020023, EDN: BRDVJQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Для плоского течения Куэтта, описываемого в рамках уравнений Навье–Стокса, связь между напряжением трения и потоком энергии, передаваемых пластине (аналогия Рейнольдса) хорошо известна при любом соотношении температур пластин [1], [2]. В случае одинаковых температур пластин этот результат означает, что потоки энергии, передаваемые пластинам, равны друг другу и равны половине произведения напряжения сдвига и относительной скорости пластин [1–3]. В настоящее время с развитием нанотехнологий возрастает интерес к передаче тепла в микроканалах [4–7]. В этой связи представляют интерес и исследования аналогии Рейнольдса для течений разреженного газа. Аналогия Рейнольдса при сверхзвуковом обтекании пластины потоком разреженного газа рассматривалась в [8], [9], а при обтекании затупленного тела в [10]. Аналогия Рейнольдса для течения Рэлея разреженного газа исследовалась в [11]. Плоское течение Куэтта разреженного газа рассматривалось в работе [12], в которой численно (с точностью до статистической флуктуации) показано, что единственными параметрами подобия для коэффициента аналогии Рейнольдса во всех рассмотренных случаях являются числа Эккерта Ec и Кнудсена Kn . В данной работе анализируются различные режимы течения продольного цилиндрического течения Куэтта. Целью статьи является исследование свойств аналогии Рейнольдса и свойств отношений величин погонных потоков энергий, передаваемых граничным поверхностям.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается установившееся течение Куэтта разреженного одноатомного газа между двумя соосными цилиндрами. Внутренний цилиндр радиуса r_1 и температуры T_1 находится в по-

кое. Внешний цилиндр радиуса r_2 и температуры T_2 движется со скоростью u_{rel} параллельной оси z . Средняя плотность газа и средняя числовая плотность газа равны соответственно ρ_{av} и n_{av} .

Для рассматриваемой конфигурации течение газа описывается уравнением Больцмана для функции распределения молекул по скоростям f , записанным в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = J(f, f'), \quad (1)$$

где r – расстояние от оси z , φ – азимутальная координата, а z -ось цилиндрической системы координат совпадает с общей осью цилиндров. Считаем, что молекулы отражаются от поверхностей диффузно с температурой, равной температуре поверхности:

$$f = f_1 = n_1 (2\pi R_{gas} T_1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_1} \right], \quad v_r > 0, \quad r = r_1, \quad (2)$$

$$f = f_2 = n_2 (2\pi R_{gas} T_2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{rel})^2}{2R_{gas} T_2} \right], \quad v_r < 0, \quad r = r_2. \quad (3)$$

Здесь $J(f, f')$ – интеграл столкновений молекул [13]; $v_r, v_\varphi,$ и v_z – компоненты скоростей молекул в цилиндрической системе координат; R_{gas} – газовая постоянная, параметры функции распределения n_1 и n_2 находятся из условий баланса между падающими и отраженными молекулами. Используется молекулярная модель “твердые сферы”. Для этой модели средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = (\sqrt{2} n_{av} \sigma_{sp})^{-1}$, где σ_{sp} – сечение столкновения. Изучается поведение напряжения трения и потока энергии $P_{zr}(r), E(r)$:

$$P_{zr}(r) = \int m v_z v_r f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \quad E(r) = \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v},$$

где $d\mathbf{v} = dv_r dv_\varphi dv_z$, m – масса молекулы.

3. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Напряжения сдвига $P_{zn1}(r), P_{zn2}(r)$ и потоки энергии, передаваемые цилиндрам E_1, E_2 равны:

$$P_{zn1} = -P_{zr}(r_1), \quad P_{zn2} = P_{zr}(r_2), \quad (4)$$

$$E_1 = -E(r_1), \quad E_2 = \int v_r \frac{m[v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{rel})^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}. \quad (5)$$

Величина потока энергии зависит от выбора системы координат. Здесь и далее под “потоком энергии, передаваемым цилиндру”, как и в [14], понимается поток энергии в системе координат, связанной с цилиндром. Это значение совпадает со скоростью изменения внутренней энергии цилиндра на единицу площади, если другая сторона поверхности цилиндра термически изолирована.

Взяв моменты в уравнении Больцмана, можно получить уравнения баланса для продольного импульса и энергии:

$$\frac{d}{dr} (r P_{rz}(r)) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dr} (r E) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (6), находим с учетом (4), что напряжение сдвига на внешнем цилиндре пропорционально напряжению сдвига на внутреннем цилиндре:

$$P_{zn2} = -P_{zn1}/\beta, \quad (8)$$

где $\beta = r_2/r_1$.

Используя условие непроницаемости, легко убедиться, что

$$\int_{V_r} \frac{m[v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = \int_{V_r} \frac{m[v_r^2 + v_\phi^2 + (v_z - u_{rel})^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} + u_{rel} \int m v_r v_z f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} - m u_2^2 \int_{V_r} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = E_2 + P_{nz2} u_{rel}.$$

Интегрируя (7), находим, что

$$\int_{V_r} \frac{m[v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = \beta \int_{V_r} \frac{m(v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}.$$

Таким образом, с учетом (5) получаем

$$E_2 = -\frac{E_1}{\beta} + \frac{P_{zn1}}{\beta} u_{rel}. \tag{9}$$

Далее исследуется коэффициент аналогии Рейнольдса для внутреннего цилиндра, определяемый по формуле:

$$R = \frac{E_1}{P_{zn1} u_{rel}}.$$

Используя соотношения (8) и (9), можно легко выразить через R аналогичный коэффициент аналогии Рейнольдса для внешнего цилиндра.

4. РЕЖИМ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНЫЙ РЕЖИМ

В режиме сплошной среды ($Kn \rightarrow 0$) краевая задача для уравнения Больцмана (1)–(3) сводится к краевой задаче для уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{dp}{dr} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{du}{dr} \right) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r k \frac{dT}{dr} + r \mu \frac{du}{dr} \right) = 0 \tag{12}$$

с граничными условиями прилипания на цилиндрах

$$u(r_1) = 0; \quad u(r_2) = u_{rel}. \tag{13}$$

Здесь u , p и T – скорость, давление и температура газа соответственно; μ – коэффициент динамической вязкости, k – коэффициент теплопроводности.

Коэффициент аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта получен в [1], [2]. После несложных преобразований соответствующее соотношение из [1], [2] принимает вид

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec}.$$

Здесь $Pr = \mu c_p / k$ – число Прандтля; c_p – теплоемкость при постоянном давлении. Для одноатомного газа $c_p = 5R/2$, $Pr = 0.661$; $Ec = u_{rel}^2 / [c_p (T_1 - T_2)]$ – число Эккерта.

Результаты [1], [2] легко обобщаются на случай продольного цилиндрического течения Куэтта. Действительно, из (12), (13) следует, что

$$k \frac{dT}{dr} + \mu u \frac{du}{dr} = \frac{r_1 E_1}{r}. \tag{14}$$

Так как число Прандтля постоянно, из (14) следует, что

$$k \frac{dT}{dr} + \mu u \frac{du}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{c_p T}{Pr} + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{r_1 E_1}{r}. \tag{15}$$

Интегрируя (15) по радиусу от r_1 до r_2 , получаем

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{\text{Pr } u_{\text{rel}}^2}{2} = \text{Pr } r_1 E_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu(T(r))r}.$$

Принимая во внимание, что

$$u_{\text{rel}} = r_1 P_{\text{znl}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu(T(r))r},$$

находим

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{\text{Pr } u_{\text{rel}}^2}{2} = \frac{\text{Pr } u_{\text{rel}} E_1}{P_{\text{znl}}}.$$

В результате получаем, что:

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Pr } E_c}. \quad (16)$$

Свободномолекулярное продольное цилиндрическое течение Куэтта изучалось в [15]. Из результатов [15], для коэффициента аналогии Рейнольдса следует формула:

$$R = \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{E_c}, \quad (17)$$

где κ – показатель адиабаты. Для одноатомного газа $\kappa = 5/3$.

Таким образом, для продольного цилиндрического течения Куэтта коэффициент аналогии Рейнольдса, как в режиме сплошной среды, так и в свободномолекулярном режиме, не зависит от величины отношения радиусов цилиндров β и совпадает с соответствующим значением коэффициента аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта.

5. ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ

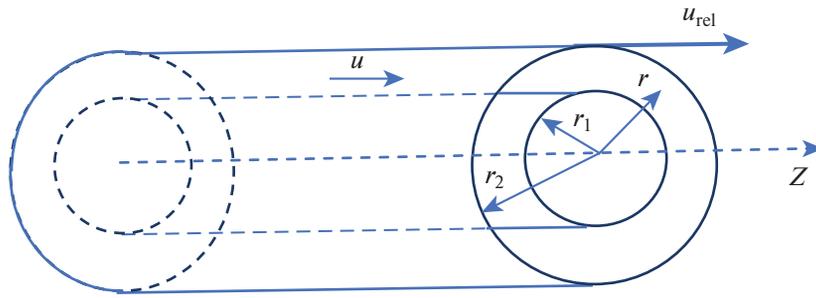
Из анализа размерностей следует, что коэффициент аналогии Рейнольдса зависит не более чем от трех безразмерных переменных:

$$t = \frac{T_1}{T_2}, \quad U = \frac{u_{\text{rel}}}{c}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{L}, \quad \text{где } c = \sqrt{2R_{\text{gas}} T_2}, \quad L = r_2 - r_1.$$

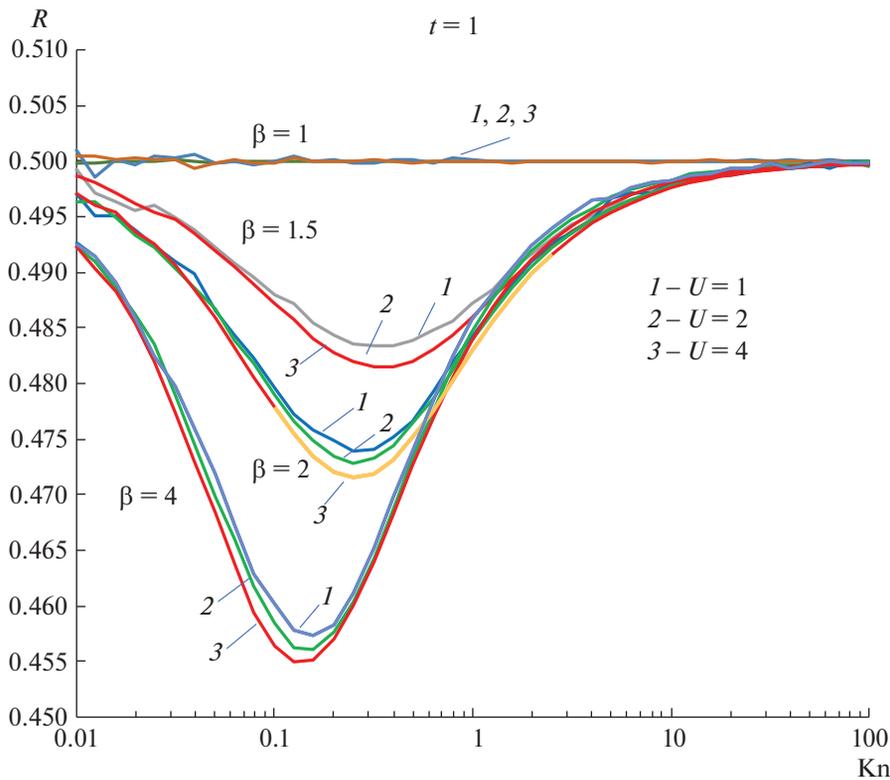
Как показано в разд. 4, в режиме сплошной среды и свободномолекулярном режиме T_1 , T_2 и u_{rel} влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса только через число Эккерта. В [12] численно показано, что это же свойство справедливо (с точностью до статистических флуктуаций) и во всех рассмотренных в [12] случаях переходного режима плоского течения Куэтта. Выясним, в какой мере обладает этим свойством продольное цилиндрическое течение Куэтта.

Для этого численно методом прямого статистического моделирования [14] решим задачу Куэтта (1)–(3) при разных значениях T_1 , T_2 , u_{rel} , но при одних и тех же числах Эккерта. Мы используем схему Берда [14], [16]. Пространство между цилиндрическими поверхностями разбивается на ячейки. Размер ячеек варьируется от $\lambda t / (6U)$ для $U > 1$, $t < 1$, до $\lambda/6$ при $U \leq 1$, $t \geq 1$. Число моделирующих молекул в ячейке варьируется от 100 до 1000. Шаг по времени варьируется от $\lambda t / (6Uc)$ для $U > 1$, $t < 1$ до $\lambda / (6c)$ при $U \leq 1$, $t \geq 1$. Количество отражений молекул от внутреннего цилиндра составляет 64000000. Погрешность вычислений в основном менее 1%. Расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7, 3.5 ГГц. Время расчета зависит от местного числа Кнудсена вблизи внешнего цилиндра и обычно варьируется от получаса до суток.

Рассмотрим вначале важный случай равных температур, т.е. $T_1 = T_2$. Как видно из (16) и (17), в свободномолекулярном пределе, также как и в навье-стоксовом $R = 1/2$, при любом β . Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена в диапазоне от 0.01 до 100 для $t = 1$ и различных U и β приведены на фиг. 2. Аналогия Рейнольдса близка к 1/2 для всех рассмотренных β , но, в отличие от плоского случая ($\beta = 1$), она не равна 1/2. По мере увеличения β значение R уменьшается.



Фиг. 1. Схема продольного цилиндрического течения Куэтта.

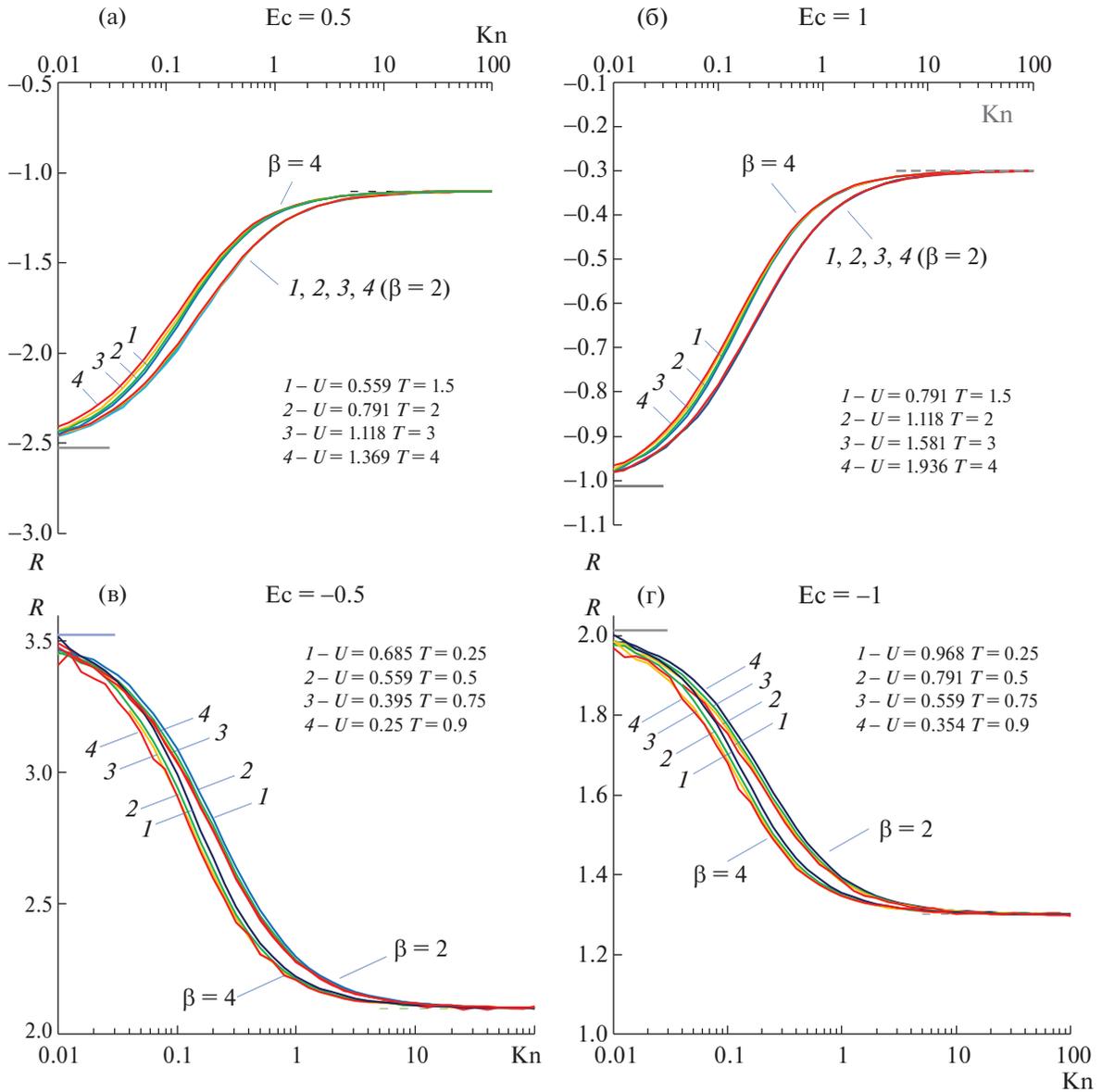


Фиг. 2. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена в случае одинаковых температур цилиндрических поверхностей для различных значений скорости U и отношения радиусов β .

Зависимости R от Kn показаны на фиг. 3, 4 для различных значений U и t . Величины R для одноатомного газа описываемого уравнениями Навье–Стокса показаны отрезками сплошной линии. Штриховые отрезки соответствуют значениям R для свободномолекулярного течения. Коэффициент аналогии Рейнольдса R может быть положительным при всех Kn , отрицательным при всех Kn , или даже, как функция Kn , может менять знак при некоторых значениях Kn (см. фиг. 4). Последнее обусловлено эффектом перемены знака потока энергии в течении Куэтта разреженного газа [17].

Из фиг. 2–4 видно, что во всех рассмотренных случаях относительная скорость и температуры поверхностей влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса в основном через число Эккерта. Поэтому естественно сделать предположение, что коэффициент аналогии Рейнольдса является функцией, главным образом, трех независимых параметров (β , Kn , Ec), а не четырех (β , Kn , t , U).

Исходя из результатов расчетов, представленных на фиг. 2, 4, можно заключить, что отношение радиусов цилиндров, число Эккерта и число Кнудсена являются основными независимыми



Фиг. 3. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена при различных температурах и скоростях для $|Ec| = 0.5$ и $|Ec| = 1$.

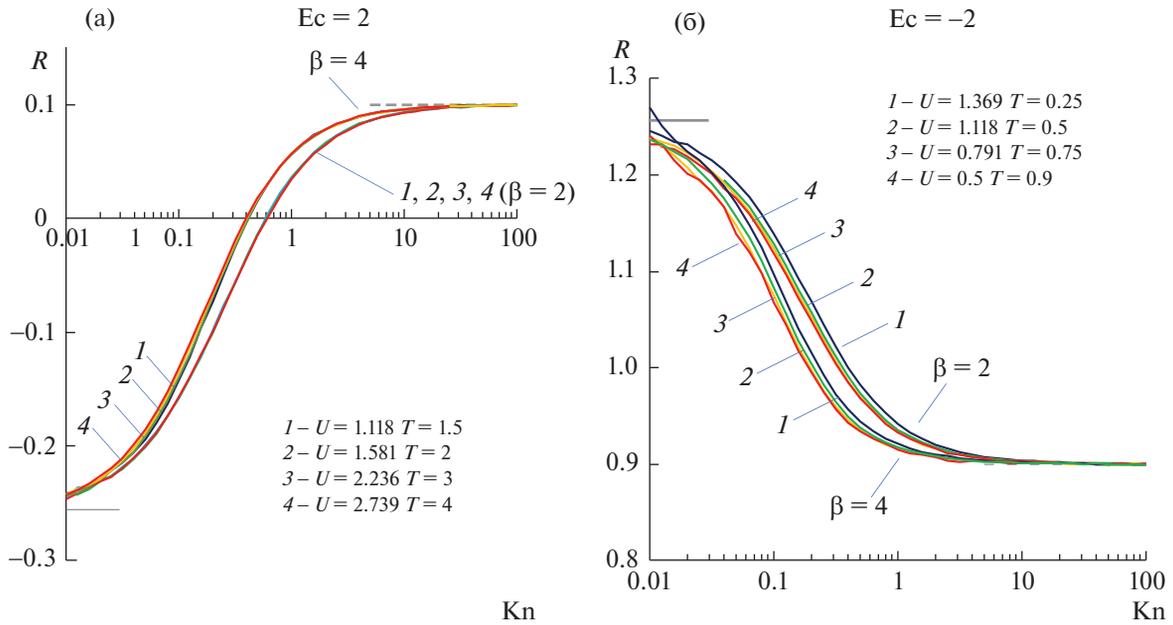
параметрами подбора для коэффициента аналогии Рейнольдса в продольной цилиндрической задаче Куэтта.

Из данных на фиг. 3, 4 видно, что для всех рассмотренных параметров коэффициент аналогии Рейнольдса находится между его свободномолекулярным и его навье-стоксовым значением:

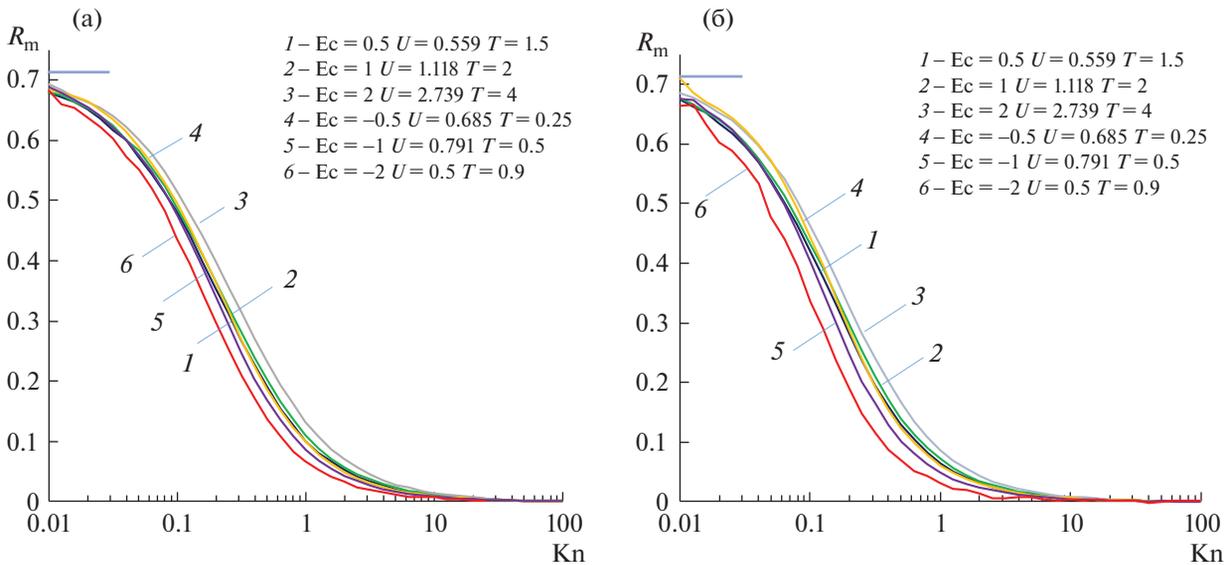
$$\min \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec} \right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} \right) \right] < R < \max \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec} \right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} \right) \right].$$

Результаты, представленные на фиг. 2–4, позволяют модифицировать коэффициент аналогии Рейнольдса R путем его нормализации, введя величину

$$R_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{E_1}{P_{zn} u_{rel}} \right) Ec.$$



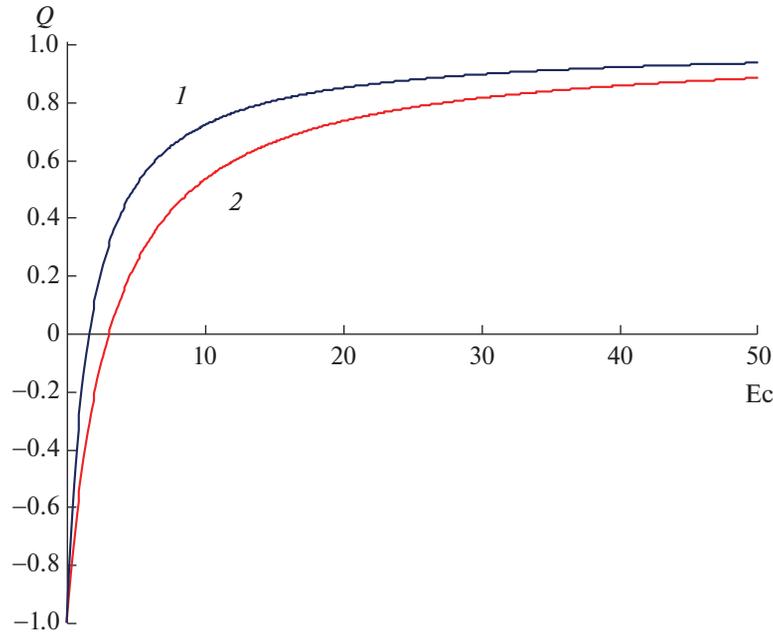
Фиг. 4. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена при различных температурах и скоростях для $|Ec| = 2$.



Фиг. 5. Зависимость модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса R_m от числа Кнудсена при различных значениях числа Эккерта и различных отношениях радиусов: а – для $\beta = 2$; б – для $\beta = 4$.

В дальнейшем R_m будем называть *модифицированным коэффициентом* аналогии Рейнольдса. Зависимости R_m от Kn показаны на фиг. 5 для различных значений Ec и β .

Как видно из фиг. 5, модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса зависит в основном от величин β и Kn для всех рассмотренных чисел Эккерта. Естественно предположить, что отношение радиусов и число Кнудсена являются основными параметрами подобия для мо-



Фиг. 6. Зависимость отношения величин погонных потоков энергий, передаваемых цилиндрическим поверхностям, от числа Эккерта $Ec > 0$ для свободномолекулярного течения (1) и течения сплошной среды (2).

дифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса для продольной цилиндрической задачи Куэтта. В силу вышесказанного, для всех рассмотренных значений U , t и Kn

$$\frac{E_t}{p_{zm} U_r} \approx \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn, \beta)}{Ec}. \quad (18)$$

Таким образом, введение модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса позволяет разделить влияние числа Эккерта и числа Кнудсена на коэффициент аналогии Рейнольдса при заданном отношении радиусов цилиндров.

Из (18) получаем еще одно свойство коэффициента аналогии Рейнольдса для течения Куэтта:

$$R(Ec, Kn, \beta) + R(-Ec, Kn, \beta) \approx 1. \quad (19)$$

6. ОТНОШЕНИЕ ПОГОННЫХ ПОТОКОВ ЭНЕРГИЙ

Отношение значений погонных потоков энергий, передаваемых поверхностям, дается выражением $Q = E_2 \beta / E_1$. Погонный поток энергии – это количество энергии, подводимой к поверхности цилиндра в единицу времени на единицу длины в продольном направлении.

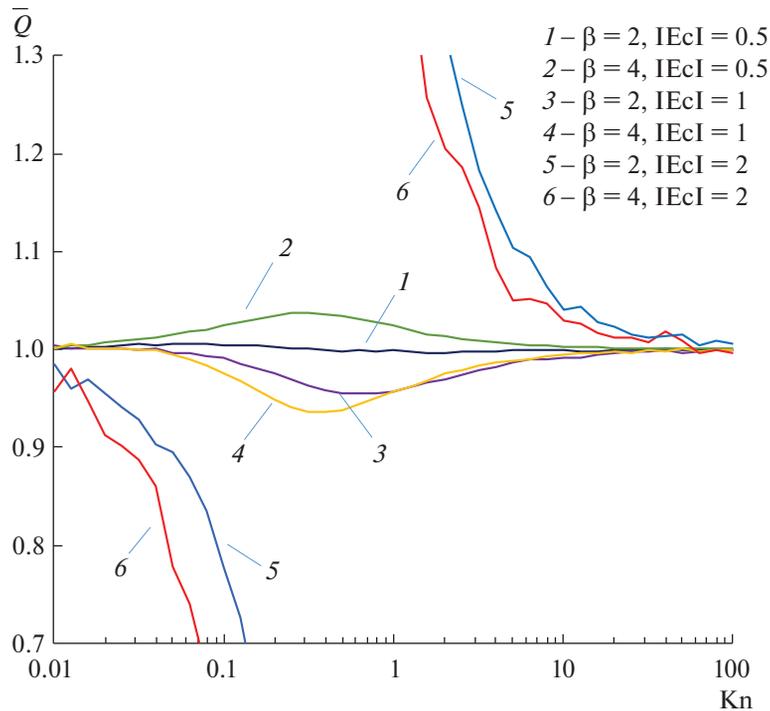
Легко убедиться, что в свободномолекулярном режиме

$$Q(Ec) = -1 + \frac{2Ec}{1 + \kappa^{-1} + Ec}, \quad (20)$$

а в режиме сплошной среды имеем

$$Q(Ec) = -1 + \frac{2Ec}{2Pr^{-1} + Ec}. \quad (21)$$

Таким образом, отношение погонных потоков энергий, передаваемых поверхностям, как в режиме сплошной среды, так и в свободномолекулярном режиме продольного цилиндрического течения Куэтта зависит только от числа Эккерта (Pr и κ фиксированы) и совпадает с отношением потоков энергии, передаваемых пластинам в соответствующей плоской задаче Куэтта. По мере увеличения числа $Ec \geq 0$, отношения (20) и (21) монотонно изменяются от -1 ($Ec=0$ (случай неподвижных цилиндров)) до 1 ($Ec \rightarrow \infty$ (случай равных температур)), см. фиг. 6.



Фиг. 7. Зависимость произведения отношений погонных потоков энергий для двух течений с одинаковыми по модулю, но различными по знаку числами Эккерта от числа Кнудсена Kn.

Из (9) следует, что

$$Q(Ec, Kn, \beta) = \frac{1 - R(Ec, Kn, \beta)}{R(Ec, Kn, \beta)}.$$

Принимая во внимание (19), находим, что

$$Q(-Ec, Kn, \beta) \approx \frac{R(Ec, Kn, \beta)}{1 - R(Ec, Kn, \beta)}.$$

Отсюда за исключением случаев $R \ll 1$ и $R \approx 1$ получаем

$$Q(Ec, Kn, \beta)Q(-Ec, Kn, \beta) \approx 1. \tag{22}$$

Для режима сплошной среды и свободномолекулярного режима, соотношения (18), (19), (22) выполняются точно ($R \neq 1$ и $R \neq 0$). Для переходного режима при $\beta = 1$ и любых Kn они выполняются точно в случае, если u_{rel} одно и то же ($R \neq 1$ и $R \neq 0$), а также в случае $T_1 = T_2$. Функция $\bar{Q}(|Ec|, Kn, \beta) = Q(Ec, Kn, \beta)Q(-Ec, Kn, \beta)$ для различных значений Ec и β изображена на фиг. 7. Как видно из приведенных данных, соотношение (22) выполняется с точностью до 4% для $|Ec| = 0.5$ и до 6% для $|Ec| = 1$. Однако, для $|Ec| = 2$, соотношение (22) нарушается для чисел Кнудсена, соответствующих переходному режиму, потому что в этом случае мы имеем $R \ll 1$ или $R \approx 1$, см. фиг. 4.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено продольное цилиндрическое течение Куэтта одноатомного газа. Исследована связь между потоком энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, и напряжением трения на ней (аналогия Рейнольдса). Для режима сплошной среды и свободномолекулярного режима аналитически показано, что коэффициент аналогии Рейнольдса не зависит от отношения радиусов цилиндров, а зависит только от числа Эккерта. Таким образом, коэффициент аналогии Рейнольдса для продольного цилиндрического течения Куэтта совпадает в этих случаях с коэффициентом аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта [1], [2], [12]. Методом DSMC по-

казано, что в переходном режиме, в отличие от случая сплошной среды и свободномолекулярного течения, отношение радиусов влияет на коэффициент аналогии Рейнольдса. Обнаружено, что во всех рассмотренных случаях коэффициент аналогии Рейнольдса для одноатомного газа зависит от относительных скоростей и температур поверхностей, главным образом, через число Эккерта. Для разделения влияния числа Эккерта и числа Кнудсена на коэффициент аналогии Рейнольдса введен модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса. Для всех рассмотренных чисел Эккерта модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса зависит, главным образом, от числа Кнудсена и от отношения радиусов. На основе полученных численных результатов предложена приближенная формула для коэффициента аналогии Рейнольдса, в которую входят число Эккерта и модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса. Отношение погонных потоков энергий, передаваемых граничным поверхностям, выражается через коэффициент аналогии Рейнольдса и имеет те же параметры подобия, что и коэффициент аналогии Рейнольдса. Используя свойства коэффициента аналогии Рейнольдса, показано, что произведение отношений погонных потоков энергий, переданных граничным поверхностям, для двух разных течений Куэтта с одинаковыми по модулю, но различными по знаку числами Эккерта приблизительно, а в некоторых случаях, точно равно единице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liepmann H.W., Roshko A.* Elements of Gasdynamics. New York: Willey, 1957. Перевод Липман Г.В., Рожко А. Элементы газовой динамики. М.: Иностран. лит., 1960.
2. *Illingworth C.R.* Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid // Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1950. V. 46. P. 469.
3. *Perlmutter M.* Analysis of Couette flow and heat transfer between parallel plates enclosing rarefied gas by Monte Carlo // Proc. of 5th Internat. Symposium on Rarefied Gas Dynamics, edited by C. L. Brundin. New York: Academic Press, 1967. V. 1. P. 455.
4. *Sharipov F., Kalempa D.* Oscillatory Couette flow at arbitrary oscillation frequency over the whole range of the Knudsen number // Microfluid Nanofluid. 2008. V. 4. P. 363.
5. *Roy S., Chakraborty S.* Near-wall effects in micro scale Couette flow and heat transfer in the Maxwell-slip regimes // Microfluid and Nanofluid. 2007. V. 3. P. 437.
6. *Zahid W.A., Yin Y., Zhu K.Q.* Couette–Poiseuille flow of a gas in long microchannels // Microfluidics and Nanofluidics. 2007. V. 3. P. 55.
7. *Deng Z., Chen Y., Shao C.* Gas flow through rough microchannels in the transition flow regime / Phys. Rev. E. 2016. V. 93. P. 013128-1.
8. *Chen X.X., Wang Z.H., Yu Y.L.* “Nonlinear Shear and Heat Transfer in Hypersonic Rarefied Flows Past Flat Plates // AIAA Journal. 2015. V. 53. P. 413.
9. *Abramov A.A., Butkovskii A.V.* Reynolds analogy for the fluid flow past a flat plate at different regimes // Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 017101-1.
10. *Chen X.X., Wang Z.H., Yu Y.L.* General Reynolds analogy for blunt-nosed bodies in hypersonic flows // AIAA J. 2015. V. 53. P. 2410.
11. *Abramov A., Butkovskii A.* Extended Reynolds analogy for the rarefied Rayleigh problem: Similarity parameters // 31st Internat. Symposium on Rarefied Gas Dynamics, AIP Conf. Proc. 2019. V. 2132. 180013-1.
12. *Abramov A.A., Butkovskii A.V.* The extended Reynolds analogy for the Couette problem: Similarity parameters // Internat. J. Heat Mass Transf. 2018. V. 117. P. 313.
13. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1969.
14. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics. Oxford, Clarendon Press, 1976. Перевод: Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.
15. *Abramov A.A., Alexandrov V.Yu., Butkovskii A.V.* The longitudinal cylindrical Couette problem for rarefied gas: Energy fluxes maximums // Internat. J. Heat Mass Transf. 2017. V. 111. P. 608.
16. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics and Direct Simulation of Gas Flows. Oxford, Oxford University Press, 1994.
17. *Abramov A.A., Butkovskii A.V.* The sign change effect of the energy flux and other effects in the transitional regime for the Couette problem // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1501. P. 123.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

**MEMORY RESPONSE ON THERMOELASTIC BEHAVIOUR
WITH TEMPERATURE DEPENDENT MATERIAL MODULI
UNDER MECHANICAL STRIP LOAD¹⁾**

© 2023 г. Aktar Seikh¹, Soumen Shaw^{2,*}, Smita Pal (Sarkar)¹

¹*Department of Mathematics, Indian Institute of Engineering Science and Technology, Shibpur, Howrah-711103*

²*Department of Mathematics Dinabandhu Andrews College, Kolkata, Kolkata-700084*

**e-mail: shaw soumen@rediffmail.com*

Поступила в редакцию 15.04.2020 г.
Переработанный вариант 15.04.2020 г.
Принята к публикации 10.08.2022 г.

Отклик памяти на термоупругое поведение материала с зависящими от температуры свойствами при механической нагрузке полосы. Работа посвящена исследованию реакции термической памяти материала на поля напряжений и температур в анизотропной среде. Материальные модули среды зависят от температуры, поэтому классический закон теплопроводности заменяется обобщенной теорией теплопроводности, зависящей от памяти материала. Аналитическое решение такой задачи получено с помощью интегральных преобразований. Вариации функций поля в пространственно-временной системе координат представлены графически для различных эмпирических констант.

Ключевые слова: переменные модули материала, производная, зависящая от памяти, гиперболическая термоупругость.

DOI: 10.31857/S0044466923020035, **EDN:** BREOGK

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.642

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА¹⁾

© 2023 г. П. Н. Вабищевич^{1,2,*}

¹ 115191 Москва, Б.Тулльская ул., 52, ИБРАЭ РАН, Россия

² 355017 Ставрополь, ул. Пушкина, 1, СКФУ,
Северо-Кавказский центр математических исследований, Россия

*e-mail: vabishchevich@gmail.com

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.
Переработанный вариант 14.06.2022 г.
Принята к публикации 14.06.2022 г.

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка с памятью в конечномерном банаховом пространстве с производной по времени интегрального члена типа Вольтера и разностным ядром. Принципиальные трудности приближенного решения таких задач порождены нелокальностью по времени, когда решение на текущий момент зависит от всей предыстории. Используется трансформация интегродифференциального уравнения первого порядка к системе эволюционных локальных уравнений при аппроксимации разностного ядра суммой экспонент. Для слабосвязанной системы локальных уравнений с дополнительными обыкновенными дифференциальными уравнениями получены оценки устойчивости решения по начальным данным и правой части для решения с привлечением понятия логарифмической нормы. Аналогичные оценки установлены для приближенного решения при использовании двухслойных аппроксимаций по времени. Библ. 22.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, системы эволюционных уравнений первого порядка, устойчивость по начальным данным и правой части, логарифмическая норма, двухслойные разностные схемы.

DOI: 10.31857/S004446692302014X, EDN: BRJQJC

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при численном моделировании нестационарных процессов все более часто привлекаются нелокальные математические модели. Примером выступают эволюционные интегродифференциальные уравнения [1], [2], для которых решение на текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса. В подобных моделях с памятью подынтегральное выражение включает само решение или производную решения по времени. В литературе (см., например, [3]) активно обсуждаются задачи для эволюционных уравнений с дробной производной по времени, которые характеризуются, в частности, интегральным ядром типа Абеля.

При приближенном решении краевых задач для уравнений с памятью мы используем обычные конечноэлементные или конечнообъемные аппроксимации по пространству и приходим к задаче Коши для операторных уравнений с памятью в соответствующем конечномерном пространстве. При аппроксимации по времени естественно ориентироваться [4] на использование тех или иных квадратур для интегрального члена и стандартных аппроксимаций производной по времени (неявная схема Эйлера и схема Кранка–Николсон).

При численном решении начально-краевых задач Коши для параболических уравнений обычно используются двухслойные схемы. Устойчивость приближенного решения наиболее просто исследуется в соответствующих гильбертовых пространствах, условия устойчивости формулируются в виде операторных неравенств [5]. Исследование устойчивости в банаховых пространствах чаще всего ограничивается равномерной нормой и проводится на основе разностно-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в Северо-Кавказском центре математических исследований в рамках соглашения № 075-02-2022-892 с Минобрнауки РФ.

го принципа максимума [6]. Подобное рассмотрение некоторых нестационарных процессов с памятью на дифференциальном уровне выполнено, например, в работе [7]. Более широкие возможности предоставляются использованием понятия логарифмической нормы [8]. На этой основе можно получить [9] принцип максимума и соответствующие оценки устойчивости для параболических задач в конечномерных пространствах L_1, L_2, L_∞ .

Вычислительные сложности приближенного решения задач с памятью порождены необходимостью работать с решением на все предшествующие моменты времени. Принципиальное уменьшение вычислительной работы обеспечивается переходом от нелокальной задачи к локальной за счет специальных аппроксимаций разностного ядра [10]. В частности, при аппроксимации ядра суммой экспонент мы имеем систему слабосвязанных эволюционных уравнений. Такой подход использовался нами [11] для задачи Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка. Нелокальные модели теплопередачи рассмотрены в работе [12]. Оценки устойчивости для дифференциальной и разностных задач получены в гильбертовых пространствах.

В настоящей работе рассмотрена задача Коши для эволюционного интегродифференциального уравнения Вольтера первого порядка в вещественном конечномерном банаховом пространстве. Аппроксимация разностного ядра суммой экспонент обеспечивает трансформацию нелокального уравнения с памятью к локальной системе уравнений. На основе понятия логарифмической нормы получены априорные оценки для решения задачи Коши, обеспечивающие устойчивость решения по начальным данным и правой части. Предложены и исследованы на устойчивость двухслойные разностные схемы для системы уравнений, которые удобны для практического использования.

1. ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка с производной по времени интегрального члена в вещественном конечномерном банаховом пространстве V . Функция $u(t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению первого порядка с разностным ядром

$$\frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-s)u(s)ds + Au = f(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

и начальному условию

$$u(0) = u^0. \quad (1.2)$$

Чтобы не отягощать текст работы несущественными техническими деталями, предполагаем, что линейный оператор $A : V \rightarrow V$ является стационарным (не зависящим от t). Простым примером уравнения (1.1) является система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, когда A есть квадратная матрица.

К подобным задачам мы приходим после дискретизации по пространству при рассмотрении распределенных моделей динамических процессов с памятью. Ключевая особенность задачи состоит в интегральном члене в уравнении (1.1). Подобные нелокальные математические модели возникают при учете эффектов памяти при теплопередаче [13], [14]. Рассматриваемый случай производной по времени интеграла от решения напрямую связан с учетом эффектов памяти для теплоемкости (внутренней энергии) [15], [16].

Для эволюционных уравнений первого порядка оценки устойчивости решения задачи Коши по начальным данным и правой части в банаховых пространствах могут быть получены с привлечением понятия логарифмической нормы, которое введено В.М. Лозинским [17]. Ее использование при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается в [8], [18].

Логарифмическая норма оператора (матрицы) A есть число

$$\mu(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \delta A\| - 1}{\delta},$$

где I – единичный оператор, а $\|\cdot\|$ – норма в V . Мы рассматриваем уравнение (1.1) при

$$\mu(-A) \leq 0. \quad (1.3)$$

Это свойство оператора A является естественным при рассмотрении дискретных аналогов краевых задач для параболических уравнений второго порядка.

Для интегродифференциального уравнения (1.1) можно выделить два предельных случая. Первый из них связан с ядром $k(t) = \kappa\delta(t)$, где $\kappa = \text{const} > 0$, а $\delta(t)$ есть δ -функция. Уравнение (1.1) принимает вид

$$(1 + \kappa) \frac{du}{dt} + Au = f(t),$$

т.е. становится локальным. Второй случай соответствует постоянному ядру, когда $k(t) = \kappa > 0$. При этом мы снова имеем локальное уравнение:

$$\frac{du}{dt} + (A + \kappa I)u = f(t).$$

При рассмотрении нелокальных эволюционных уравнений первого порядка с памятью ядро $k(t)$, обычно, (см., например, [19]) считается положительно-определенным. Мы наложим, для простоты, ограничения

$$k(t) \geq 0, \quad \frac{dk}{dt}(t) \leq 0, \quad \frac{d^2k}{dt^2}(t) \geq 0, \quad t > 0,$$

которые [20] обеспечивают положительную определенность ядра $k(t)$. В этих условиях мы имеем следующие оценки для ядра и его производной:

$$0 \leq k(t) \leq k(0) = m, \quad 0 \leq -k'(t) \leq -k'(0) = M. \quad (1.4)$$

При предположениях (1.3), (1.4) установим априорную оценку решения задачи Коши (1.1), (1.2). Эта оценка устойчивости решения по начальным данным и правой части будет для нас ориентиром при построении и исследовании вычислительных алгоритмов приближенного решения рассматриваемой задачи (1.1), (1.2). Наше исследование базируется на следующем утверждении.

Лемма 1. *Для решения задачи Коши*

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + Dw &= \varphi(t), \quad t > 0, \\ w(0) &= w^0 \end{aligned}$$

имеет место оценка

$$\|w(t)\| \leq \exp(\mu(-D)t) \|w^0\| + \int_0^t \exp(\mu(-D)(t-s)) \|\varphi(s)\| ds. \quad (1.5)$$

Доказательство леммы 1 можно найти, например, в [21]. Нам понадобится также следующий вариант леммы Гронуолла-Белмана [22], Теорема 1.3.2, с. 13.

Лемма 2. *Пусть $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неотрицательные непрерывные функции и имеет место неравенство*

$$g(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_0^t g(s) ds, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Тогда

$$g(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_0^t \varphi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\theta) d\theta\right) ds. \quad (1.7)$$

Теорема 1. *Пусть для логарифмической нормы оператора A имеет место неравенство (1.3), а для ядра $k(t)$ – неравенства (1.4). Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{\pi M}{2}} t \exp\left(\frac{M}{2} t^2\right)\right) \left(\|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds\right), \quad t > 0. \quad (1.8)$$

Доказательство. Для интегрального члена в уравнении (1.1) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_0^t k(t-s)u(s)ds = k(0)u(t) + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds.$$

Это дает возможность записать (1.1) в виде

$$\frac{du}{dt} + (A + mI)u = -\int_0^t k'(t-s)u(s)ds + f(t). \tag{1.9}$$

Для применения леммы 1 положим

$$D = A + mI, \quad \varphi(t) = -\int_0^t k'(t-s)u(s)ds + f(t).$$

С учетом наших предположений (1.3), (1.4) получим

$$\mu(-A - mI) = -m + \mu(-A) \leq -m < 0, \quad \|\varphi(t)\| \leq M \int_0^t \|u(s)\| ds + \|f(t)\|.$$

Применяя лемму 1, для решения задачи (1.2), (1.9) имеем

$$\|u(t)\| \leq \|u^0\| + \int_0^t \|\varphi(s)\| ds \leq \|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds + M \int_0^t \int_0^s \|u(\theta)\| d\theta ds.$$

С учетом

$$\int_0^s \|u(\theta)\| d\theta ds \leq \int_0^t \int_0^t \|u(\theta)\| d\theta ds = t \int_0^t \|u(s)\| ds$$

получим

$$\|u(t)\| \leq \|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds + Mt \int_0^t \|u(s)\| ds.$$

Мы имеем неравенство (1.6), в котором в условиях леммы 2 имеем

$$g(t) = \|u(t)\|, \quad \varphi(t) = \|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, \quad \psi(t) = Mt.$$

С учетом этого

$$\exp\left(\int_s^t \psi(\theta)d\theta\right) = \exp\left(\frac{M}{2}(t^2 - s^2)\right).$$

Функция $\varphi(t)$ является неубывающей и поэтому

$$\int_0^t \varphi(s) \exp\left(\frac{M}{2}(t^2 - s^2)\right) ds \leq \varphi(t) \exp\left(\frac{M}{2}t^2\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{M}{2}s^2\right) ds \leq \sqrt{\frac{\pi}{2M}} \varphi(t) \exp\left(\frac{M}{2}t^2\right).$$

Неравенство (1.7) из леммы 2 приводит к оценке (1.8), что и завершает доказательство теоремы.

2. СИСТЕМА ЛОКАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

При приближенном решении нелокальной задачи (1.1), (1.2) наибольший интерес представляют вычислительные алгоритмы, которые базируются на переходе к локальным задачам. Мы используем трансформацию к локальной системе эволюционных уравнений за счет введения

вспомогательных величин [11], [12]. Такой подход применяется в случае, когда ядро $k(t)$ является суммой экспонент (ряд Прони):

$$k(t) = \sum_{i=1}^l a_i \exp(-b_i t), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Коэффициенты $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, m$, предполагаются положительными:

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.2)$$

При ограничениях (2.2) для постоянных m и M в (1.4) имеем

$$m = \sum_{i=1}^l a_i, \quad M = \sum_{i=1}^l a_i b_i.$$

Для учета эффектов памяти введем функции

$$u_i(t) = \int_0^t \exp(-b_i(t-s))u(s)ds, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

С учетом этого перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{du}{dt} + \sum_{i=1}^l a_i \frac{du_i}{dt} + Au = f(t). \quad (2.3)$$

Для $u_i(t), i = 1, 2, \dots, l$, имеем уравнения

$$\frac{du_i}{dt} + b_i u_i - u = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.4), из (2.3) получим

$$\frac{du}{dt} + \sum_{i=1}^l a_i u + Au - \sum_{i=1}^l a_i b_i u_i = f(t). \quad (2.5)$$

Для системы уравнений (2.4), (2.5) привлекаются начальные условия

$$u(0) = u^0, \quad u_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.6)$$

Аналогом теоремы 1 выступает

Теорема 2. Пусть для логарифмической нормы оператора A имеет место неравенство (1.3), а для ядра $k(t)$ – представление (2.1), (2.2). Тогда для решения задачи (2.4)–(2.6) имеют место оценки (1.8) и

$$\|u_i(t)\| \leq \int_0^t \|u(s)\| ds, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad t > 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Оценки (2.7) следуют из леммы 1 при рассмотрении задачи Коши для уравнений (2.4) с учетом того, что $D = b_i I, b_i > 0, \mu(-b_i I) < 0, i = 1, 2, \dots, l$, и $\varphi(t) = u(t), w^0 = 0$. В условиях леммы 1 для уравнения (2.5) имеем

$$D = A + \sum_{i=1}^l a_i I = A + mI, \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^l a_i b_i u_i(t) + f(t).$$

С учетом (2.7) имеем

$$\mu(-D) < 0, \quad \|\varphi(t)\| \leq M \int_0^t \|u(s)\| ds + \|f(t)\|.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПО ВРЕМЕНИ

Для приближенного решения задачи Коши (2.4)–(2.6) будем использовать двухслойные схемы. Без ограничения общности будем считать, что сетка по времени равномерная и пусть y^n – есть приближенное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $n = 0, 1, \dots$, а τ – шаг сетки. При ориентации на безусловно устойчивые схемы в банаховых пространствах в классе двухслойных схем мы выбираем чисто неявную схему (неявную аппроксимацию Эйлера).

Для уравнений (2.4), (2.5) имеем

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + b_i y_i^{n+1} - y^{n+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \tag{3.1}$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sum_{i=1}^l a_i y^{n+1} + Ay^{n+1} - \sum_{i=1}^l a_i b_i y_i^{n+1} = f^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{3.2}$$

Начальные условия (2.6) дают

$$y^0 = u^0, \quad y_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \tag{3.3}$$

Доказательство устойчивости мы начнем с дискретного аналога оценки (2.7) для вспомогательных величин. Имеем

$$(1 + b_i \tau) y_i^{n+1} = y_i^n + \tau y^{n+1},$$

так что

$$\|y_i^{n+1}\| \leq \|y_i^n\| + \tau \|y^{n+1}\|, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad n = 0, 1, \dots$$

С учетом начальных условий (3.3) из этих послойных оценок следует

$$\|y_i^{n+1}\| \leq \tau \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\|, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad n = 0, 1, \dots \tag{3.4}$$

Из (3.2) получим

$$(I + m\tau I + \tau A)y^{n+1} = y^n + \tau f^{n+1} + \tau \sum_{i=1}^l a_i b_i y_i^{n+1}.$$

С учетом (3.4) имеем

$$\|(I + m\tau I + \tau A)y^{n+1}\| \leq \|y^n\| + \tau \|f^{n+1}\| + \tau^2 M \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\|. \tag{3.5}$$

Для логарифмической нормы имеют место оценки

$$\|Dy\| \geq -\mu(D)\|y\|, \quad \|Dy\| \geq -\mu(-D)\|y\|.$$

При выполнении (1.3) для левой части неравенства (3.5) имеем

$$\|(I + m\tau I + \tau A)y^{n+1}\| \geq (1 + m\tau - \tau\mu(-A))\|y^{n+1}\| \geq \|y^{n+1}\|.$$

Тем самым приходим к неравенству

$$\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\| + \tau^2 M \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\| + \tau \|f^{n+1}\|.$$

Из этого неравенства следует

$$\|y^{n+1}\| \leq \|u^0\| + \tau \sum_{k=0}^n \|f^{k+1}\| + \tau^2 M \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \|y^{j+1}\|.$$

Принимая во внимание

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \|y^{j+1}\| \leq (n+1) \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\|,$$

получим неравенство

$$\|y^{n+1}\| \leq \|u^0\| + \tau \sum_{k=0}^n \|f^{k+1}\| + \tau M t^{n+1} \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\|.$$

Дальнейшее рассмотрение проводится по схеме доказательства леммы 4 (см. [6], гл. III, § 1).

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\|y^{n+1}\| \leq r^{n+1} + c\tau \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\|, \quad (3.6)$$

где

$$c = M t^{n+1}, \quad r^{k+1} = \|u^0\| + \tau \sum_{k=0}^n \|f^{k+1}\|.$$

Положим

$$s^{n+1} = \tau \sum_{k=0}^n \|y^{k+1}\|,$$

тогда

$$s^{n+1} = s^n + \tau \|y^{n+1}\|.$$

Принимая во внимание (3.6), это дает

$$(1 - c\tau)s^{n+1} \leq s^n + \tau r^{n+1}. \quad (3.7)$$

Для положительности коэффициента при s^{n+1} мы накладываем необременительные ограничения на шаг по времени. При $0 < c\tau \leq 2$ имеет место неравенство

$$(1 - c\tau) > \exp(-2c\tau).$$

Для $0 < t < T$ приходим к условию на шаг по времени

$$\tau \leq \tau_0 = \frac{2}{MT}. \quad (3.8)$$

При $\varrho = \exp(2c\tau)$ от (3.7) перейдем к неравенству

$$s^{n+1} \leq \varrho s^n + \tau \varrho r^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad s^0 = 0. \quad (3.9)$$

С учетом $r^k \leq r^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, из (3.9) имеем

$$s^{n+1} \leq \tau \varrho \sum_{k=0}^n \varrho^k r^{n+1} = \tau \varrho \frac{\varrho^{n+1} - 1}{\varrho - 1} r^{n+1} \leq \frac{\varrho}{c} (\varrho^{n+1} - 1) r^{n+1}.$$

Принимая во внимание (3.6), получим

$$\|y^{n+1}\| \leq r^{n+1} + c s^{n+1} \leq \varrho^{n+2} r^{n+1}.$$

С учетом введенных обозначений это дает

$$\|y^{n+1}\| \leq \exp(2M t^{n+1} (t^{n+1} + \tau)) \left(\|u^0\| + \tau \sum_{k=0}^n \|f^{k+1}\| \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.10)$$

Эту оценку мы рассматриваем как дискретный аналог оценки (1.8) для решения исходной задачи (1.1)–(1.4). Итогом нашего рассмотрения является

Теорема 3. *Двухслойная разностная схема (2.2), (3.1)–(3.3) является безусловно устойчивой при (1.3) и (3.8). Для приближенного решения задачи имеют место априорные оценки (3.4), (3.10).*

Вычислительная реализация схемы (3.1)–(3.3) может быть проведена следующим образом. Из уравнений (3.1) на новом слое по времени мы имеем

$$y_i^{n+1} = \frac{\tau}{1 + b_i \tau} y^{n+1} + \frac{1}{1 + b_i \tau} y_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (3.11)$$

Подстановка в (3.2) дает уравнение для y^{n+1} :

$$(dI + \tau A)y^{n+1} = \chi^n, \quad (3.12)$$

в котором

$$d = 1 + \tau \sum_{i=1}^l \frac{a_i}{1 + b_i \tau}, \quad \chi^n = y^n + \tau f^{n+1} + \tau \sum_{i=1}^l \frac{a_i b_i}{1 + b_i \tau} y_i^n.$$

После решения задачи (3.12) для y^{n+1} вспомогательные величины y_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots$, рассчитываются согласно (3.11). Тем самым увеличение вычислительной сложности численного решения задачи с памятью не является принципиальным по сравнению с задачей без эффектов памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O.* Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge: Springer, 1990.
2. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. Basel: Springer, 1993.
3. *Kochubei A.N.* General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes // Integral Equations and Operator Theory. 2011. V. 71. № 4. P. 583–600.
4. *Chen C., Shih T.* Finite Element Methods for Integrodifferential Equations. Singapore: World Scientific, 1998.
5. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, 2001.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
7. *Luchko Y., Yamamoto Y.* The general fractional derivative and related fractional differential equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 2115. P. 1–20.
8. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД, 2021.
9. *Вабищевич П.Н.* Монотонные схемы для задач конвекции-диффузии с конвективным переносом в различной форме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 1. С. 95–107.
10. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia: Springer, 1985.
11. *Vabishchevich P.N.* Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels // Applied Numerical Mathematics. 2022. V. 174. P. 177–190.
12. *Vabishchevich P.N.* Numerical solution of the heat conduction problem with memory // Computers and Mathematics with Applications. 2022. № 2022.05.020 P. 1–7.
13. *Joseph D.D., Preziosi L.* Heat waves // Reviews of Modern Physics. 1989. V. 61. № 1. P. 1–41.
14. *Straughan B.* Heat Waves. Berlin: Springer, 2011.
15. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. V. 31. № 2. P. 113–126.
16. *Nunziato J.W.* On heat conduction in materials with memory // Quarterly of Applied Mathematics. 1971. V. 29. № 2. P. 187–204.
17. *Лозинский С.М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 52–90.
18. *Dekker K., Verwer J.G.* Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations. Amsterdam: North-Holland, 1984.
19. *McLean W., Thomee V., Wahlbin L.B.* Discretization with variable time steps of an evolution equation with a positive-type memory term // J. of Computational and Applied Mathematics. 1996. V. 69. № 1. P. 49–69.
20. *Halany A.* On the asymptotic behavior of the solutions of an integro-differential equation // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1965. V. 10. № 2. P. 319–324.
21. *Söderlind G.* The logarithmic norm. History and modern theory // BIT Numerical Mathematics. 2006. V. 46. № 3. P. 631–652.
22. *Pachpatte B.G.* Inequalities for differential and integral equations. San Diego: Academic Press, 1998.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**

УДК 519.634

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА
В РЕЖИМЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**
© 2023 г. Ф. Г. Черемисин^{1,*}¹ 119991 Москва, Вавилова 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: felix.tcher@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.
 Переработанный вариант 15.08.2022 г.
 Принята к публикации 12.10.2022 г.

Представлен метод решения уравнения Больцмана, позволяющий рассчитывать течения газа в режиме сплошной среды, который описывается уравнениями Навье–Стокса. Продвижение в область течений сплошной среды достигнуто применением консервативного проекционного метода вычисления интеграла столкновений Больцмана, сохраняющего главный член асимптотики Энскога–Чепмена. Описана оптимизация данного метода, позволившая значительно сократить объем вычислений. Приводятся примеры продольного дозвукового обтекания плоской пластины при числах Кнудсена $Kn = (0.01, 0.001, 0.0001)$. Библ. 21. Фиг. 11.

Ключевые слова: решение уравнения Больцмана, консервативный проекционный метод, режим сплошной среды.

DOI: 10.31857/S0044466923020060, EDN: BRNODP

ВВЕДЕНИЕ

В кинетической теории газов выделяются два асимптотических режима течения: свободномолекулярный режим при $Kn \rightarrow \infty$ и режим сплошной среды, описываемый уравнениями Навье–Стокса при $Kn \rightarrow 0$. Между этими предельными режимами лежит переходный режим течения, в котором необходимо решать уравнение Больцмана [1–3]. На практике границы перечисленных режимов определяются сильными неравенствами $Kn \gg 1$ и $Kn \ll 1$ соответственно. Более точные границы зависят от других параметров и особенностей течения, а также от требуемой точности расчета. По оценкам [4], для обеспечения 2% точности, граница перехода от уравнения Больцмана к решению уравнений Навье–Стокса лежит между значениями $Kn = 0.01$ и $Kn = 0.001$.

Для течений, которые можно отнести к режиму сплошной среды, имеются области, где уравнения Навье–Стокса не применимы. У поверхности обтекаемого тела образуется слой Кнудсена толщиной в длину свободного пробега молекул, в котором функция распределения испытывает разрыв в пространстве скоростей, вызванный рассеянием молекул поверхностью. По мере удаления от поверхности, разрыв сглаживается, и функция распределения молекул приближается к локально-максвелловской функции. Слой Кнудсена и примыкающая к нему область течения относятся к переходному режиму и требуют решения уравнения Больцмана.

При расчете течений на основе уравнений Навье–Стокса, слой Кнудсена учитывается заданием граничных условий скольжения, получаемых из приближенного анализа функции распределения у поверхности [2], [3]. Такой подход применялся до появления численных методов решения кинетических уравнений [5]. Современным методом является сращивание решений уравнения Больцмана вблизи границы с решением уравнений Навье–Стокса во внешней области течения [6–10]. Методика сращивания основана на использовании функции распределения Энскога–Чепмена

$$f(\xi, \mathbf{x}, t) = f_M \left[1 + \frac{p_{ij}}{p} \frac{m}{2kT} c_i c_j - \frac{4q_i}{5p} \frac{m}{2kT} c_i \left(\frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT} \right) \right], \quad (0.1)$$

где

$$f_M(\xi, \mathbf{x}, t) = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m c^2}{2kT} \right), \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad p_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (0.2)$$

Здесь $c_i = \xi_i - u_i$, \mathbf{u} – средняя скорость газа, μ и λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, n – концентрация газа, m – масса молекулы, T – температура, k – постоянная Больцмана. Корректность выбора границы срачивания решений можно оценить по величине производных в (0.2), которые должны быть порядка Kn , однако это возможно только после решения задачи с уже выбранной границей. Сложной проблемой срачивания решений является необходимость обеспечить непрерывность потоков массы, импульса и энергии через границу областей [6], [9].

В настоящей работе изучается возможность решения уравнения Больцмана при $\text{Kn} \ll 1$ во всей области течения, без срачивания с уравнениями Навье–Стокса. Трудность решения уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена хорошо известна и определяется двумя причинами. Первая связана с большой в масштабе длины свободного пробега молекул областью решения в физическом пространстве, что резко увеличивает объем вычислений. Вторая причина более существенна и состоит в необходимости высокой точности вычисления интеграла столкновений, достаточной чтобы выделить вклад от второго приближения (в терминах работы [1]) в асимптотическом разложении (0.1). Этот вклад пропорционален производным от температуры и скорости газа и имеет первый порядок по числу Кнудсена. Добиться такой точности при вычислении многомерного интеграла за счет измельчения скоростной сетки и увеличения мощности кубатурной сетки практически невозможно.

Преодолеть указанную трудность позволяет представленный в [11], [12] вариант проекционного метода вычисления интеграла столкновений Больцмана, который дает точное нулевое значение интеграла от функции f_M – главного члена асимптотического разложения. Метод широко использовался для моделирования дозвуковых и сверхзвуковых течений простого газа и газовых смесей [13]. В [14] было найдено улучшение, позволившее более чем на порядок ускорить вычисление интеграла столкновений за счет уменьшения необходимой мощности кубатурной сетки. В [15] эта оптимизация была проверена на расчете течения при числе Маха $M = 0.001$, которое требует высокой точности вычислений.

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Уравнение Больцмана решается на равномерной сетке из N_0 узлов $\xi_\gamma \in \Sigma_0$, которые являются центрами кубов с ребром h в области Ω с объемом V в пространстве скоростей, и на произвольной пространственной сетке

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \xi_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial \mathbf{x}} = I_\gamma. \quad (1.1)$$

На шаге по времени τ используется симметричный метод расщепления [16], имеющий второй порядок точности по времени

$$f_\gamma(x, t + \tau) = \Lambda_{\tau/2}(\Theta_\tau(\Lambda_{\tau/2}(f_\gamma(x, t))), \quad (1.2)$$

где Λ_τ – решение на шаге τ уравнения адвекции, Θ_τ – решение уравнения релаксации. Интеграл столкновений I_γ вычисляется проекционным методом, который обеспечивает точное выполнение законов сохранения вещества, импульса и энергии, а также условие

$$I_\gamma[f_{M,\gamma}] = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $f_{M,\gamma}$ – максвелловская функция распределения, заданная в узлах ξ_γ . Дадим краткое описание метода и опишем его оптимизацию, позволившую значительно сократить объем вычислений. В непрерывном скоростном пространстве интеграл столкновений в узле ξ_γ запишем в виде

$$I(\xi_\gamma) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} d\xi \int_{\Omega} d\xi_* \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{b_n^2/2} \Phi_1(f' f'_* - f f_*) g d\sigma. \quad (1.4)$$

Здесь $f \equiv f(\xi, \mathbf{x}, t)$, $f' \equiv f(\xi', \mathbf{x}, t)$, $f_* \equiv f(\xi_*, \mathbf{x}, t)$, $f'_* \equiv f(\xi'_*, \mathbf{x}, t)$, ξ' и ξ'_* – скорости после столкновений молекул со скоростями ξ и ξ_* , $g = |\xi - \xi_*|$, b_m – максимальное значение прицельного параметра b , $\sigma = b^2/2$, $\Phi_1 = \delta(\xi' - \xi_\gamma) + \delta(\xi'_* - \xi_\gamma) - \delta(\xi - \xi_\gamma) - \delta(\xi_* - \xi_\gamma)$, $\delta(\xi - \xi_c)$ – трехмерная дельта-функция.

Вычисление 8-мерного интеграла (1.4) осуществляется на равномерной кубатурной сетке Σ_v из N_v узлов. Каждый узел сетки включает значения непрерывных переменных σ_v , φ_v и сеточные узлы $\xi_{\alpha_v} \in \Sigma_0$, $\xi_{\beta_v} \in \Sigma_0$. В общем случае скорости после столкновения $\xi'_{\alpha_v} \notin \Sigma_0$, $\xi'_{\beta_v} \notin \Sigma_0$. При вычислении интеграла столкновений они заменяются двумя парами ближайших симметрично расположенных сеточных узлов ξ_{λ_v} , $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и ξ_{μ_v} , $\xi_{\mu_v-s_v}$, где s_v – вектор единичного сдвига по сетке Σ_0 . Из закона сохранения импульса при столкновении следует $\xi_{\alpha_v} + \xi_{\beta_v} = \xi'_{\alpha_v} + \xi'_{\beta_v} = \mathbf{k}h$, где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – целочисленный вектор. Пусть $\xi'_{\alpha_v} = \mathbf{k}_1h + \Delta\mathbf{h}$, $\Delta\mathbf{h} = (\Delta h_x, \Delta h_y, \Delta h_z)$, тогда $\xi'_{\beta_v} = \mathbf{k}_2h - \Delta\mathbf{h}$, что доказывает симметричное расположение скоростей ξ'_{α_v} и ξ'_{β_v} относительно узлов $\xi_{\lambda_v} = \mathbf{k}_1h$ и $\xi_{\mu_v} = \mathbf{k}_2h$, а также относительно узлов $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и $\xi_{\mu_v-s_v}$. Для перехода в (1.4) к сумме по узлам скоростной сетки заменяем соответствующие δ -функции, входящие в Φ_1 разложениями

$$\begin{aligned} \delta(\xi'_{\alpha_v} - \xi_\gamma) &= (1 - r_v)\delta(\xi_{\lambda_v} - \xi_\gamma) + r_v\delta(\xi_{\lambda_v+s_v} - \xi_\gamma), \\ \delta(\xi'_{\beta_v} - \xi_\gamma) &= (1 - r_v)\delta(\xi_{\mu_v} - \xi_\gamma) + r_v\delta(\xi_{\mu_v-s_v} - \xi_\gamma). \end{aligned}$$

Узлы ξ_{λ_v} , $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и ξ_{μ_v} , $\xi_{\mu_v-s_v}$ выбираются так, чтобы выполнялось одно из неравенств $E_1 \leq E_0 < E_2$, или $E_2 \leq E_0 < E_1$, где $E_0 = (\xi_{\alpha_v})^2 + (\xi_{\beta_v})^2$, $E_1 = (\xi_{\lambda_v})^2 + (\xi_{\mu_v})^2$, $E_2 = (\xi_{\lambda_v+s_v})^2 + (\xi_{\mu_v-s_v})^2$. Коэффициент r_v находится из условия сохранения энергии $E_0 = (1 - r_v)E_1 + r_vE_2$, откуда следует $0 \leq r_v < 1$. Сохранение массы обеспечивается приведенным условием на r_v , а сохранение импульса следует из симметричного расположения пар узлов ξ_{λ_v} , $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и ξ_{μ_v} , $\xi_{\mu_v-s_v}$ относительно скоростей ξ'_{α_v} и ξ'_{β_v} соответственно. Выбор сеточных узлов $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и $\xi_{\mu_v-s_v}$ не однозначен и может осуществляться на основе различных критериев. В данной работе использовался критерий их близости по энергии к не сеточным значениям, ξ'_{α_v} и ξ'_{β_v} : выбирались узлы с наименьшей по величине разностью энергий $\Delta E_2 = |E_2 - E_0|$, противоположной по знаку разности $\Delta E_1 = |E_1 - E_0|$. Получаем явное выражение для интегральной суммы

$$I_\gamma = B \sum_{v=1}^{N_v} [-(\delta_{\gamma,\alpha_v} + \delta_{\gamma,\beta_v}) + (1 - r_v)(\delta_{\gamma,\lambda_v} + \delta_{\gamma,\mu_v}) + r_v(\delta_{\gamma,\lambda_v+s_v} + \delta_{\gamma,\mu_v-s_v})] \Delta v, \quad (1.5)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $\Delta v = (f_{\alpha_v} f_{\beta_v} - f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v}) g_v$, $B = N_0 V \pi b_m^2 / (4N_v)$.

В [11], [12] представлены два основных варианта консервативного проекционного метода вычислений интеграла столкновений: “Проекционно-Интерполяционный Метод” (ПИМ) и “Симметричный Проекционный Метод” (СПМ). В ПИМ произведение $f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v}$ находится интерполяцией по сеточным значениям функции распределения. Для $\text{Kn} \ll 1$ в [17] была предложена интерполяция, точная для максвелловской сеточной функции $f_{M,\gamma}$

$$f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v} = (f_{\lambda_v} f_{\mu_v})^{(1-r_v)} (f_{\lambda_v+s_v} f_{\mu_v-s_v})^{r_v}. \quad (1.6)$$

Для функции $f_{M,\gamma}$ получаем $\Delta v = 0$, откуда следует свойство (1.3). Доказано [18], что при интерполяции (1.6) дискретная форма интеграла столкновений (1.5) обладает свойством не возрастания H -функции

$$\sum_{\gamma} I_\gamma \ln f_\gamma \leq 0.$$

Для произвольной функции погрешность формулы (1.6) в зависимости от шага сетки имеет оценку $O(h)$, а для функции вида $f_\gamma = f_{M,\gamma} + \text{Kn} \cdot f_\gamma^{(1)}$, $\text{Kn} \ll 1$, погрешность составит $\text{Kn} \cdot O(h)$, что важно для течений при малых числах Кнудсена.

Однако ПИМ имеет существенный недостаток, связанный с необходимостью обеспечить неотрицательность решения. Ниже рассмотрим способ решения данной проблемы.

Применение формулы (1.5) на стадии релаксации в схеме (1.2) должно исключить отрицательные решения, которые могут возникнуть из-за конечной величины шага по времени τ . Для этого оператор релаксации $\Theta_\tau(f)$ построен как решение интегрального уравнения по схеме непрерывного счета. На шаге τ решается уравнение

$$f_\gamma^{t+\tau} = f_\gamma^t + \int_t^{t+\tau} I_\gamma(t) dt. \quad (1.7)$$

Интервал τ делится на N_ν равных частей $\tau_\nu = \tau/N_\nu$ и осуществляется решение уравнения (1.7) по неявной схеме

$$f_\gamma^{t+j\tau_\nu} = f_\gamma^{t+(j-1)\tau_\nu} + \tau \cdot \Delta I_\gamma^{t+j\tau_\nu}. \quad (1.8)$$

Здесь $f_\gamma^{t+j\tau_\nu}$ – промежуточное решение после j шагов, $j = 1, \dots, N_\nu$, $\Delta I_\gamma^{t+j\tau_\nu}$ – вклад в сумму (1.5) от j -го узла кубатурной формулы. Схема (1.8) используется для контроля неотрицательности получаемого решения: вклад в интеграл на шаге ν отвергается, если решение в одном из узлов сетки становится отрицательным. Относительное число таких исключений не должно превышать заданного критерия, типичное значение которого $\epsilon_{\text{tol}} = 0.5 \times 10^{-4}$, однако, желательно добиваться его нулевого значения. Исключение части вкладов искажает интеграл столкновений и может привести к нестабильности счета.

Определим условие неотрицательности решения при заданном шаге τ . Начальное и конечное значения промежуточного решения обозначим индексами j и $j+1$, соответственно, индекс ν опускаем. Каждый вклад совершается в 6 узлов $\xi_\gamma \in \Sigma_0$ при индексе γ , принимающем значения $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \lambda+s, \mu-s$. Запишем эти вклады подробно

$$f_\alpha^{j+1} = f_\alpha^j - \tau B \Delta^j, \quad f_\beta^{j+1} = f_\beta^j - \tau B \Delta^j, \quad (1.9)$$

$$f_\lambda^{j+1} = f_\lambda^j + (1-r)B\tau\Delta^j, \quad f_\mu^{j+1} = f_\mu^j + (1-r)B\tau\Delta^j, \quad (1.10)$$

$$f_{\lambda+s}^{j+1} = f_{\lambda+s}^j + rB\tau\Delta^j, \quad f_{\mu-s}^{j+1} = f_{\mu-s}^j + rB\tau\Delta^j, \quad (1.11)$$

$$\Delta^j = [f_\alpha^j f_\beta^j - (f_\lambda^j f_\mu^j)^{1-r} (f_{\lambda+s}^j f_{\mu-s}^j)^r] g. \quad (1.12)$$

Из (1.9), используя значение $B = N_0 V \pi b_m^2 / (4N_\nu)$, получаем искомое условие необходимой мощности кубатурной сетки N_ν для функций f_α^{j+1} и f_β^{j+1}

$$N_\nu / \tau \geq N_0 V \pi b_m^2 g_{\max} f_{\max} / 4. \quad (1.13)$$

Здесь g_{\max} – максимальное значение относительной скорости при столкновении, равное диаметру области Ω пространства скоростей, f_{\max} – максимальное значение сеточной функции f_γ^j . Перейдем к оценке функций из (1.10) и (1.11). Эти формулы отличаются множителем перед вкладом Δ^j , поэтому достаточно рассмотреть первую формулу из (1.10). Получаем цепочку неравенств и искомое условие в ее конце

$$\begin{aligned} f_\lambda^j - (1-r)\tau B g_{\max} (f_\lambda^j f_\mu^j)^{1-r} (f_{\lambda+s}^j f_{\mu-s}^j)^r &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1-r)\tau N_0 V \pi b_m^2 g_{\max} (f_{\mu-s}^j)^r (f_\mu^j)^{1-r} (f_{\lambda+s}^j / f_\lambda^j)^r / 4N_\nu &\leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau N_0 V \pi b_m^2 g_{\max} f_{\max} \chi^j / (4N_\nu) &\leq 1 \Rightarrow N_\nu / \tau \geq N_0 V \pi b_m^2 g_{\max} f_{\max} \chi^j / 4. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Условие (1.14) отличается от (1.13) множителем $\chi^j = (1-r)(f_{\lambda+s}^j / f_\lambda^j)^r$, в который входит отношение функций в соседних узлах сетки. Несмотря на близость узлов, этот множитель может быть большим на границе газ-поверхность и на периферии области Ω , где значения функции распределения близки к нулю и подвержены случайным флуктуациям. Указанные флуктуации делают невозможным выбор числа узлов N_ν кубатурной сетки, гарантирующего неотрицательность ре-

шения. Для обеспечения приемлемого значения коэффициента ϵ_{tol} необходимо многократное увеличение мощности кубатурной сетки.

Чтобы распространить условие (1.13) на все узлы сетки и ускорить вычисления, в [14] предложен способ пересчета вкладов, для которых решение становится отрицательным. Для пересчета используется СПМ, в котором условие (1.3) выполняется с точностью $O(h)$. Он менее точен для слабо возмущенных течений, но успешно применялся для сверхзвуковых течений с ударными волнами. Дадим краткий вывод дискретной формы интеграла столкновений в СПМ с учетом перехода к интегрированию по $\sigma = b^2/2$.

Разделим интеграл (1.4) на две части. Первую, которая содержит ff_* и дает вклад от “прямых” столкновений, и вторую, включающую $f'f'_*$ и описывающую “обратные” столкновения. Для первой части используем ту же функцию $\Phi_1(\xi_\gamma)$, что при выводе (1.5). Во второй части заменим выражение под интегралом на следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi_\gamma) = & g_v \{ [\delta(\xi_{\alpha_v} - \xi_\gamma) + \delta(\xi_{\beta_v} - \xi_\gamma)] [(1 - r_v^*) f_{\lambda_v} f_{\mu_v} + r_v^* f_{\lambda_v+s_v} f_{\mu_v-s_v}] + \\ & + [\delta(\xi_{\lambda_v} - \xi_\gamma) + \delta(\xi_{\mu_v} - \xi_\gamma)] (1 - r_v^*) f_{\lambda_v} f_{\mu_v} + [\delta(\xi_{\lambda_v+s_v} - \xi_\gamma) + \delta(\xi_{\mu_v-s_v} - \xi_\gamma)] r_v^* f_{\lambda_v+s_v} f_{\mu_v-s_v} \}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь вклад “обратных” столкновений из точек $\xi'_{\alpha_v}, \xi'_{\beta_v}$ заменяется вкладами “обратных” столкновений из узлов $\xi_{\lambda_v}, \xi_{\mu_v}$ с весом $1 - r_v^*$, и из узлов $\xi_{\lambda_v+s_v}, \xi_{\mu_v-s_v}$ с весом r_v^* . Коэффициент r_v^* определяется из равенства энергии $(1 - r_v^*) E_{1,v} \Delta_{1,v} + r_v^* E_{2,v} \Delta_{2,v} = [(1 - r_v^*) \Delta_{1,v} + r_v^* \Delta_{2,v}] E_{0,v}$, где $\Delta_{1,v} = f_{\lambda_v} f_{\mu_v} g_v, \Delta_{2,v} = f_{\lambda_v+s_v} f_{\mu_v-s_v} g_v$.

Получаем $r_v^* = r_v \Delta_{1,v} / [r_v \Delta_{1,v} + (1 - r_v) \Delta_{2,v}]$.

Пусть $\Delta_{0,v} = f_{\alpha_v} f_{\beta_v} g_v$. Интеграл (1.4) в дискретной форме примет вид

$$\begin{aligned} I_\gamma^{(s)} = & B \sum_{v=1}^{N_v} \{ (\delta_{\alpha_v,\gamma} + \delta_{\beta_v,\gamma}) [(1 - r_v^*) \Delta_{1,v} + r_v^* \Delta_{2,v} - \Delta_{0,v}] + \\ & + (\delta_{\lambda_v,\gamma} + \delta_{\mu_v,\gamma}) [(1 - r_v) \Delta_{0,v} - (1 - r_v^*) \Delta_{1,v}] + (\delta_{\lambda_v+s_v,\gamma} + \delta_{\mu_v-s_v,\gamma}) (r_v \Delta_{0,v} - r_v^* \Delta_{2,v}) \}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Погрешность аппроксимации (1.15) имеет порядок $O(h)$ и не уменьшается при близости решения к $f_{M,\gamma}$.

Подробно вклады в сеточные узлы выражаются формулами (индекс v опускаем)

$$f_\alpha^{j+1} = f_\alpha^j - \tau B [\Delta_0^j + (1 - r^*) \Delta_1^j + r^* \Delta_2^j], \quad f_\beta^{j+1} = f_\beta^j - \tau B [\Delta_0^j + (1 - r^*) \Delta_1^j + r^* \Delta_2^j], \tag{1.17}$$

$$f_\lambda^{j+1} = f_\lambda^j + \tau B [(1 - r) \Delta_0^j - (1 - r^*) \Delta_1^j], \quad f_\mu^{j+1} = f_\mu^j + \tau B [(1 - r) \Delta_0^j - (1 - r^*) \Delta_1^j], \tag{1.18}$$

$$f_{\lambda+s}^{j+1} = f_{\lambda+s}^j + \tau B [r \Delta_0^j - r^* \Delta_2^j], \quad f_{\mu-s}^{j+1} = f_{\mu-s}^j + \tau B [r \Delta_0^j - r^* \Delta_2^j], \tag{1.19}$$

$$\Delta_0^j = f_\alpha^j f_\beta^j g, \quad \Delta_1^j = f_\lambda^j f_\mu^j g, \quad \Delta_2^j = f_{\lambda+s}^j f_{\mu-s}^j g. \tag{1.20}$$

Анализ этих формул показывает неотрицательность решения для всех сеточных узлов при выполнении условия (1.13).

Предлагается следующий алгоритм вычислений (1.8) в цикле по $j = 1, \dots, N_v$.

1. На шаге j проводятся вычисления по формулам (1.9)–(1.12);
2. Проверяется неотрицательность полученных значений во всех узлах;
3. Если хотя бы одно из полученных значений отрицательное, то производится пересчет по формулам (1.17)–(1.20).
4. Если хотя бы одно из вновь полученных значений отрицательное, то вклад исключается, и счетчик исключенных вкладов увеличивается на единицу.
5. По окончании цикла вычисляется коэффициент ϵ_{tol} , на основе которого делается вывод о достаточности числа узлов N_v кубатурной сетки.

Заметим, что пересчет не приводит к замедлению основного цикла, так как число исключений на шаге 2 при выполнении условия (1.13) обычно не превышает долей процента. Асимптотическое свойство (1.3) сохраняется для тех вкладов, где функция распределения близка к макс-

велловской. Пересчет выпавших вкладов позволяет значительно сократить необходимое число узлов кубатурной сетки, чем достигается значительное ускорение вычисления интеграла столкновений.

При вычислении суммы (1.5) применяется равномерная кубатурная сетка Коробова [19], которая имеет оценку сходимости по числу узлов N_v кубатурной сетки $O\left(\frac{\alpha \ln N_v}{N_v^\alpha}\right)$, где $\alpha \geq 1$ и зависит от гладкости интегрируемой функции. На каждом новом шаге по времени используется новая интеграционная сетка, которая получается из основной сетки периодическим сдвигом на случайный 8-мерный вектор: $\Sigma_v^{t+\tau} = \{\Sigma_v^t + R_8^{t+\tau}\}$. Фигурные скобки обозначают периодический сдвиг сетки, а верхние индексы отмечают момент времени. Получается новая кубатурная сетка с теми же свойствами, что и основная. Эта сетка используется во всех узлах физического пространства, чем достигается лучшая гладкость решения по пространству. Одинаковая кубатурная сетка позволяет значительно уменьшить объем вычислений, так как наиболее затратные вычисления (скорости после столкновения, коэффициент r_s , сеточные узлы) находятся до входа в цикл (1.9)–(1.12) вычисления вкладов в интегралы столкновений по узлам кубатурной и пространственной сеток. Вклады в узлы пространственной сетки вычисляются параллельно на имеющемся числе процессов.

2. ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В РЕЖИМЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим продольное обтекание плоской пластины при числе Маха $M = 0.5$ и числах Кнудсена $\text{Kn} = (0.01, 0.001, 0.0001)$. Первый случай близок к границе перехода в режим сплошной среды, в третьем и четвертом основное течение происходит заведомо в режиме сплошной среды.

Течение происходит в плоскости x, y . Пластина занимает отрезок $0 \leq x \leq L$ оси x . Поток газа с плотностью n_0 , температурой T_0 и скоростью u_0 натекает слева вдоль оси x , которая является линией симметрии течения. Задача решается в области $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $0 \leq y \leq y_{\max}$ методом установления: в момент времени $t = 0$ пластина помещается в невозмущенный поток газа. На внешних границах области ставится условие невозмущенного потока с массовой скоростью $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0, 0)$, соответствующей заданному числу Маха

$$f_M(\xi_\gamma, \mathbf{x}_\Gamma, t) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\xi_\gamma - \mathbf{u}_0)}{2k T_0} \right). \quad (2.1)$$

На пластине ставится условие диффузного отражения в форме (2.1) с температурой стенки, равной температуре набегающего потока, но при нулевом значении \mathbf{u}_0 и при замене плотности n_0 на плотность отраженного потока n_w , которая определяется из условия непроницаемости пластины.

В уравнении Больцмана перейдем к безразмерным параметрам, переменным и функциям. Плотность и температуру газа будем относить к значениям n_0 и T_0 в невозмущенном потоке. В качестве характерных масштабов берем скорость $v_0 = \sqrt{kT_0/m}$, длину свободного пробега молекул $\lambda = 1/(\sqrt{2}\pi n_0 d^2)$ и характерное время $\tau_0 = \lambda/v_0$. В этих масштабах безразмерная скорость потока для $M = 0.5$ равна $u_0 = 0.645$. Выберем молекулярную модель газа из твердых сфер диаметра $d = b_m$. Определим безразмерную функцию распределения $\tilde{f} = (n_0^{-1} v_T^{-3}) f$ и безразмерный интеграл столкновений $\tilde{I} = n_0^{-1} \lambda v_T^{-4} I$. При сохранении для безразмерных величин прежних обозначений уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \xi_{x,\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial x} + \xi_{y,\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} I_\gamma. \quad (2.2)$$

Интеграл столкновений и искомое решение являются четными функциями по компоненте скорости ξ_z , что позволяет вдвое уменьшить число узлов N_0 скоростной сетки Σ_0 и решать уравнение (2.2) только для положительных значений ξ_z . При вычислении интеграла столкновений по формулам (1.5) и (1.16) значения функции распределения для $\xi_z < 0$ берутся из зеркально отраженных узлов $\xi_z > 0$.

С учетом множителя перед интегралом и симметрии по ξ_z , коэффициент B в формулах предыдущей главы изменится на $\tilde{B} = h^3 N_0^2 / (2\sqrt{2}N_v)$, где произведена замена $V = h^3 N_0$.

Область решения в физическом пространстве покрывается прямоугольной неравномерной сеткой. По оси y сетка растягивается с шагом $h_{y,k+1} = h_{y,k}(1 + d_y)$ начиная с $y = 0$. Аналогичное растяжение шага сетки применяется в двух направлениях по оси x начиная от передней кромки пластины, и в двух направлениях по оси x начиная от задней кромки. Коэффициенты растяжения d_y, d_x выбирались в диапазоне от 0.05 до 0.13. Коэффициенты d_x отличаются у передней и задней кромок пластины, а также в зависимости от направлений изменения шага: внутрь пластины или от нее. Сетка строится так, чтобы шаги y пластины по оси y и шаги по оси x около передней и задней кромок пластины были существенно меньше длины свободного пробега. В других областях течения шаги сетки достигают нескольких длин свободного пробега для $\text{Kn} = 0.01$, десятков длин свободного пробега для $\text{Kn} = 0.001$ и сотен длин свободного пробега для $\text{Kn} = 0.0001$. Скоростная сетка Σ_0 строится в области $\Omega/2$, которая является полусферой радиуса u_R с центром в u_0 , следующим образом. Сначала создается равномерная сетка в прямоугольной области $-u_R + u_0 \leq \xi_x \leq u_R + u_0, -u_R \leq \xi_y \leq u_R, 0 \leq \xi_z \leq u_R$. Затем в эту область вписывается полусфера и оставляются только узлы – центры ячеек, которые лежат внутри полусферы. Объем области $\Omega/2$ равен $V/2 = N_0 h^3$, где N_0 – число узлов внутри полусферы. Аналогично строится кубатурная сетка Σ_v в пространстве скоростей ξ, ξ_* , но исходная область является гиперкубом, включающим также отрицательные значения ξ_z , а $\Omega \times \Omega$ есть 6-мерная сфера радиуса u_R с центром u_0 .

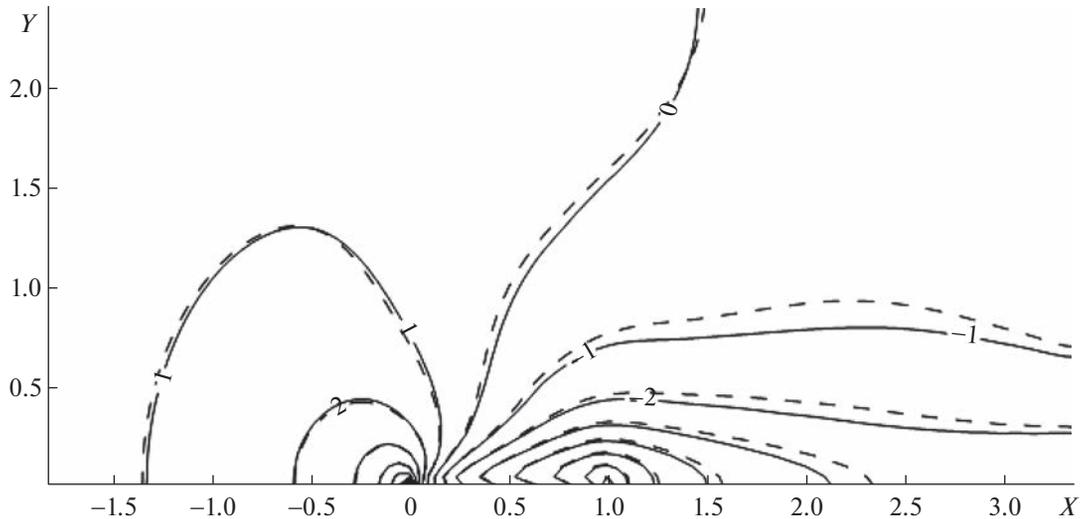
При расчетах было взято $u_R = 5.6v_0 = 4v_T$, где v_T – тепловая скорость. При таком размере области решения в скоростном пространстве функция распределения набегающего потока на границе области $f_M(u_R) < 10^{-7} f_M(u_0)$, а отраженная от пластины функция $f_W(u_R) < 10^{-5} f_W(0)$. Скоростная сетка состояла из $N_0 = 3604$ узлов, которые остаются в полусфере, вписанной в полу-куб из $24 \times 24 \times 12$ узлов, или из $N_0 = 7164$ узлов, остающихся из $30 \times 30 \times 15$ узлов в полу-кубе. Кубатурная сетка, в зависимости от шага τ и числа узлов N_0 , насчитывала от $N_v = 25000$ до $N_v = 75000$ узлов. Во всех расчетах обеспечивалось условие $\epsilon_{\text{tot}} = 0$.

Решение уравнения адвекции в методе расщепления (1.2) осуществлялось по схеме второго порядка точности типа предиктор-корректор [20], которая ранее использовалась в работах [6–9]. С учетом симметричного расщепления на два этапа, шаг по времени τ выбирался из условия $\tau = 0.9h_y/u_R$, где h_y – минимальный шаг пространственной сетки, равный первому шагу по оси y около пластины.

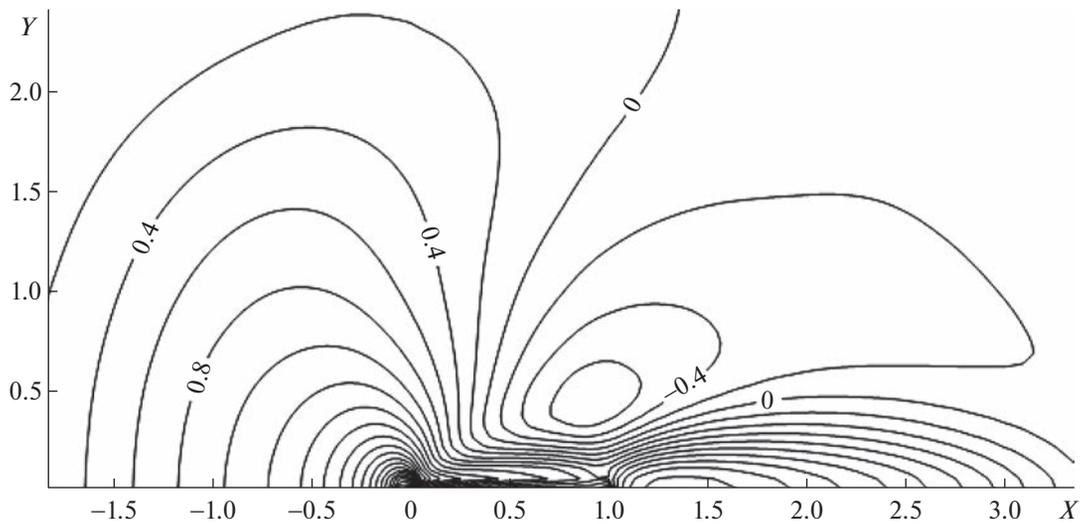
В качестве иллюстраций приводятся поля плотности, температуры и нормальной к пластине компоненты скорости газа $v(x, y)/u_0$, а также графики скорости скольжения на пластине $u_w(x) = u(x, 0)/u_0$ и трения $F_w(x) = P_{xy}(x, 0)/J_p$. Для нормировки использованы скорость потока газа u_0 и характерный поток импульса $J_p = u_0^2/2$. Величины $u(x, 0), P_{xy}(x, 0)$ вычисляются как соответствующие суммы от граничной функции $f_i^{(w)}(\xi_\gamma)$, определенной на прилежащих к пластине гранях ячеек. Функция $f_i^{(w)}(\xi_\gamma)$ состоит из двух частей: функции в центре ячейки $f_{i,1}(\xi_\gamma)$ для $\xi_{\gamma,y} < 0$, и отраженной от пластины функции $f_{M,i}(\xi_\gamma)$ при $\xi_{\gamma,y} > 0$:

$$\begin{aligned} f_{M,i}(\xi_\gamma) &= (j_i^{(\text{in})}/j_i^{(\text{out})})(2\pi)^{-3/2} \exp(-\xi_\gamma^2/2), \\ j_i^{(\text{in})} &= \sum_{\gamma} \xi_{\gamma,y} f_{i,1}(\xi_\gamma), \quad \xi_{\gamma,y} < 0, \\ j_i^{(\text{out})} &= \sum_{\gamma} \xi_{\gamma,y} f_{M,i}(\xi_\gamma), \quad \xi_{\gamma,y} > 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Все расстояния на фигурах отнесены к длине пластины. Передняя кромка пластины находится в точке $x = 0, y = 0$, задняя кромка в точке $x = 1, y = 0$. На графиках полей плотности и температуры приведены значения $n^* = 100(n(x, y) - 1)$ и $T^* = 100 \cdot (T(x, y) - 1)$.



Фиг. 1

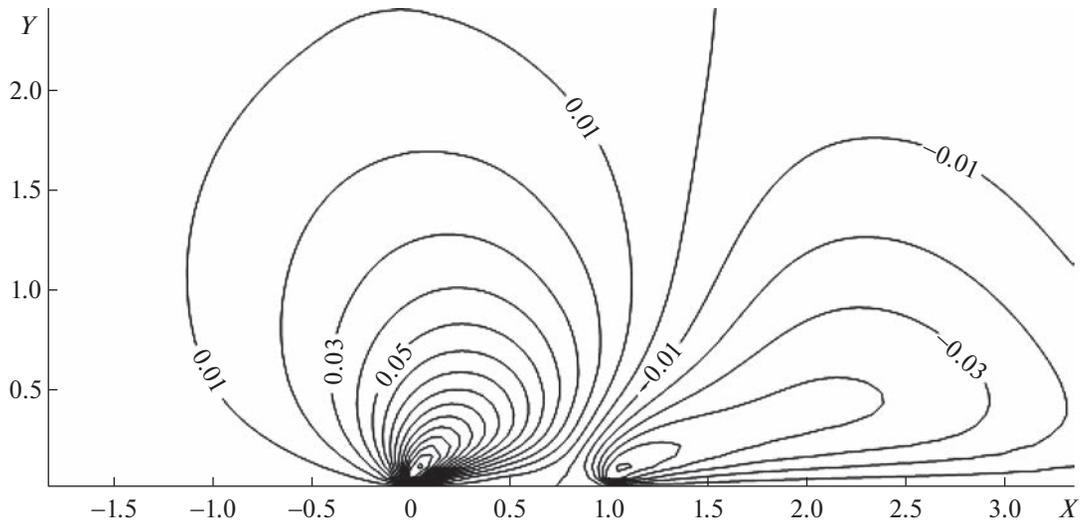


Фиг. 2

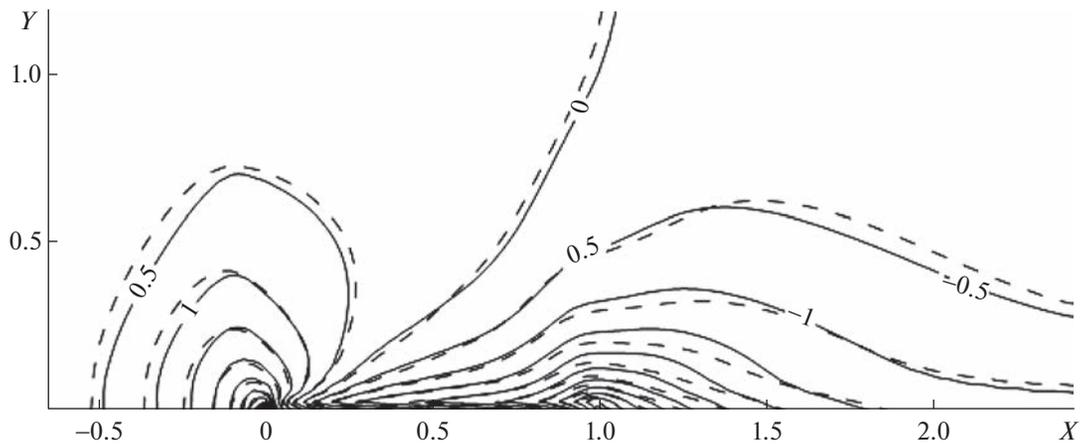
Для случая $Kn = 0.01$ было проведено два расчета при разных скоростных сетках. Число узлов пространственной сетки равнялось $k_x k_y = 166 \times 61$, минимальные шаги сетки $h_{x,0} = 0.333$, $h_{y,0} = 0.2$. На фиг. 1 представлены поля плотности, полученные на скоростной сетке из $N_0 = 7164$ узлов (сплошные линии) и на сетке из $N_0 = 3604$ (штриховые линии). Поля плотности на разных сетках отличаются незначительно. Такой же результат дает сравнение полей температуры и поперечной скорости. Графики скорости скольжения и трения практически совпадают. Можно сделать вывод, что сетка из $N_0 = 3604$ скоростных узлов является достаточной. На фиг. 2 изображено поле температуры. Интересной особенностью является образование области с небольшим, порядка 0.5%, понижением температуры.

На фиг. 3 показано поле поперечной скорости. У передней кромки поток газа отклоняется вверх, а у задней кромки и на довольно большом расстоянии за ней возникает возвратный поток к оси течения.

Расчеты для $Kn = 0.001$ осуществлялись на двух разных скоростных и пространственных сетках. Первый расчет при $N_0 = 3604$, $h_{x,0} = 0.333$, $h_{y,0} = 0.2$, $k_x k_y = 250 \times 80$, второй — при



Фиг. 3



Фиг. 4

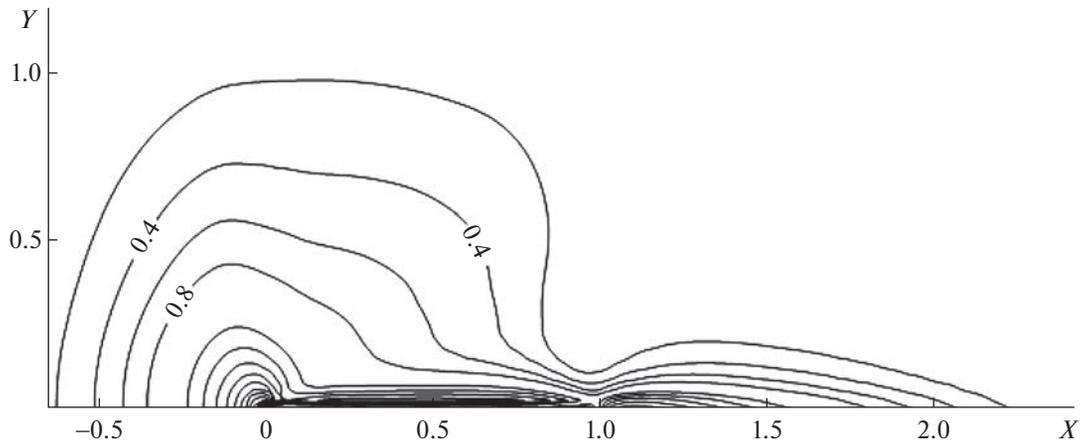
$N_0 = 7164$, $h_{x,0} = 0.5$, $h_{y,0} = 0.333$, $k_x k_y = 222 \times 68$. На фиг. 4 показано сравнение полей плотности по первому расчету (сплошные линии) и по второму (штриховые линии).

На фиг. 5 и 6 показаны, соответственно, поля температуры и поперечной скорости, рассчитанные по первому набору параметров.

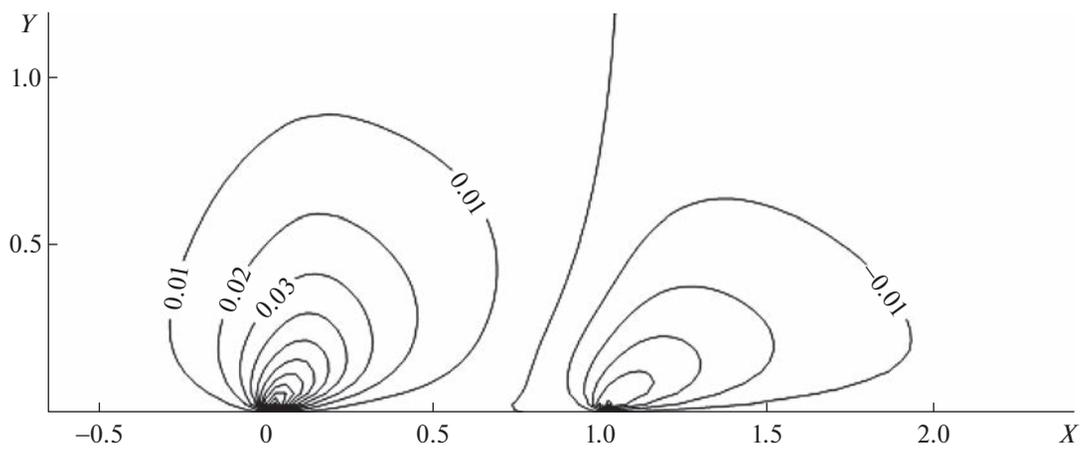
Области пониженной температуры не наблюдается. Потoki газа от пластины у передней кромки и к линии симметрии у задней кромки менее интенсивны и разделены областью с нулевой поперечной скоростью.

Наиболее трудоемким является расчет для $Kn = 0.0001$. Были выбраны следующие параметры счета: $N_0 = 3604$, $h_{x,0} = 0.5$, $h_{y,0} = 0.333$, $k_x k_y = 300 \times 112$. Шаг по времени $\tau = 0.06$, число узлов кубатурной сетки было равно $N_v \approx 25000$ в первом расчете и $N_v \approx 50000$ во втором. Результаты расчетов полностью совпали. Поля плотности, температуры, поперечной скорости представлены на фиг. 7–9 соответственно. Основное изменение плотности и поперечной скорости происходит вблизи поверхности пластины. На фиг. 7 и 9 показана именно эта область течения. Газ прогревается в значительно большей области, что видно на фиг. 8, где показана вся расчетная область.

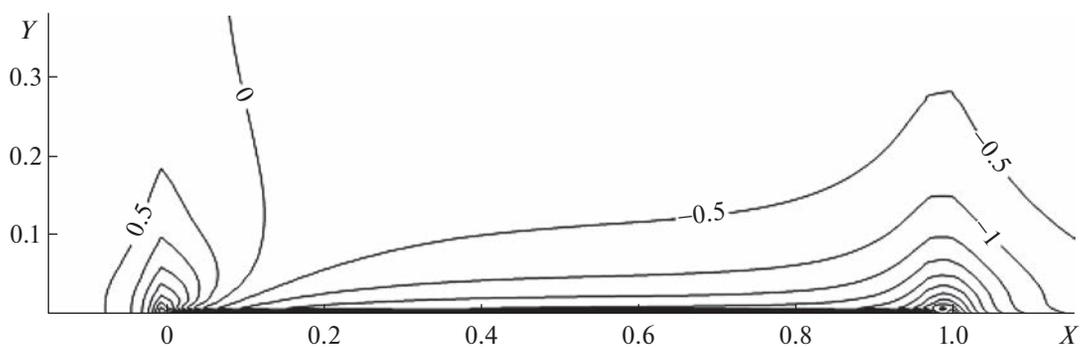
На фиг. 10 и 11 для разных чисел Кнудсена представлены распределения по длине пластины скорости скольжения U_w и силы трения F_w соответственно. Сплошной линией показаны данные



Фиг. 5

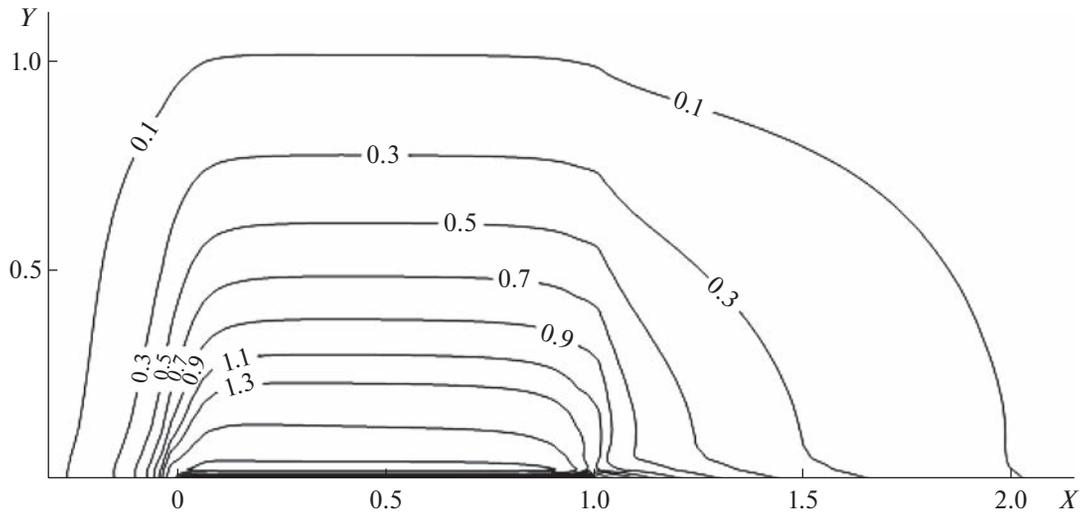


Фиг. 6

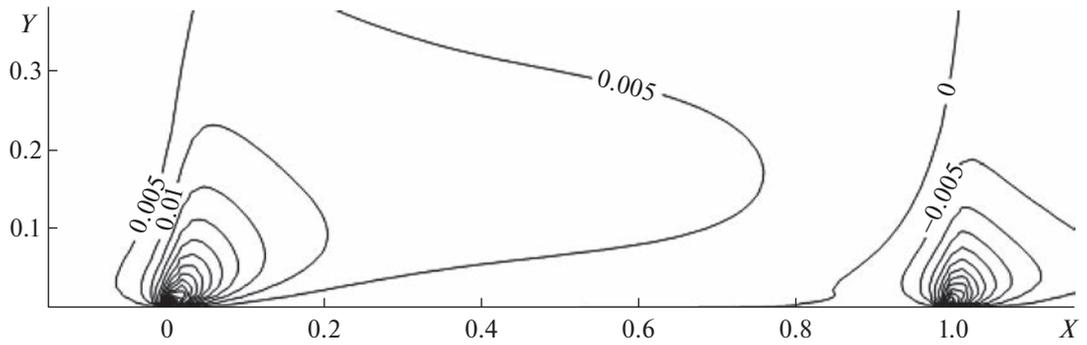


Фиг. 7

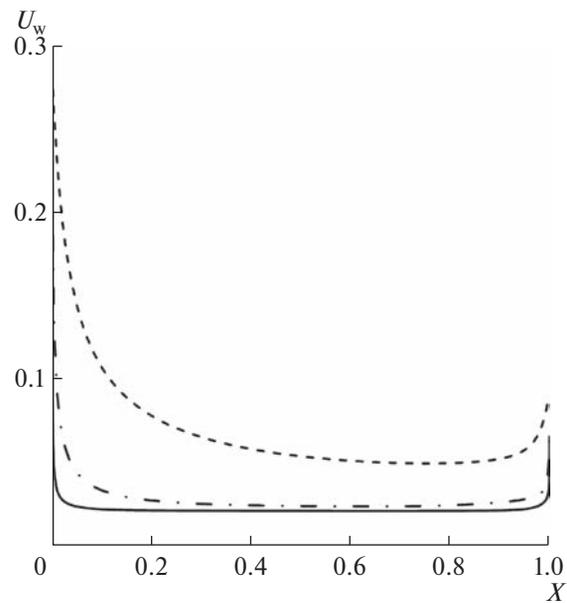
для $Kn = 0.0001$, штрихпунктирной – для $Kn = 0.001$ и штриховой – для $Kn = 0.01$. Для всех чисел Кнудсена имеются локальные максимумы скорости скольжения и трения у передней и задней кромок пластины. Скорость скольжения в центральной части пластины заметно отличается от нуля. Таким образом, при расчете рассмотренных течений на основе уравнений Навье–Стокса следует использовать условия скольжения, отражающие указанные особенности.



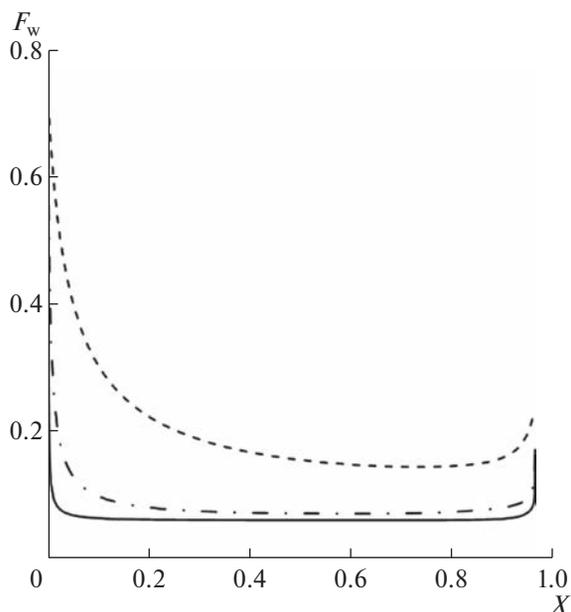
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

Контроль сходимости к стационарному состоянию осуществлялся на основе сравнения полей течения и графиков аэродинамических реакций на пластине. Характерным масштабом времени для сходимости является $t_{Kn} = \tau_0 / (\sqrt{3/2} Kn) = 0.8\tau_0 / Kn$ — время распространения звука от передней до задней кромок пластины. Для $Kn = 0.01$ потребовалось время стабилизации $t_{st} = 8t_{Kn}$, для $Kn = 0.001$ время стабилизации составило $t_{st} = 2t_{Kn}$, для $Kn = 0.0001$ сходимость наступает при $t_{st} = 1.2t_{Kn}$. Быстрая сходимость при $Kn = 0.0001$ объясняется тем, что возмущенная область близко прилегает к пластине.

Наибольшее процессорное время потребовалось для $Kn = 0.0001$ и составило 125 ч при $N_v \approx 25000$, и 180 ч при $N_v \approx 50000$ на 8-ядерном процессоре i7-11800H, 2.30 GHz. Отношение времени счета стадии релаксации к полному времени счета в первом варианте равно 0.46, во втором равно 0.62.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Были представлены примеры решения уравнения Больцмана для продольного дозвукового обтекания плоской пластины при трех отличающихся на порядок значений числа Кнудсена: $Kn = (0.01, 0.001, 0.0001)$. Течение при $Kn = 0.01$ можно отнести к границе режима сплошной среды. Два других примера относятся к режиму течения, в большей части области счета описываемому уравнениями Навье—Стокса. Решения получены на основе консервативного проекционного метода вычислений интеграла столкновений Больцмана, сохраняющего главный член асимптотики Энскога—Чепмена. Была применена оптимизация метода, которая обеспечивает стабильность счета и значительно увеличивает скорость вычислений. Расчеты выполнены на персональном компьютере средней производительности.

Современным способом моделирования течений в режиме сплошной среды является сращивание решения уравнений Навье—Стокса в основной области с решением кинетического уравнения вблизи поверхности тела. Этот метод позволяет значительно сократить область физического пространства, где решается кинетическое уравнение. Он намного экономичнее, чем представленный в данной статье, однако содержит две существенные проблемы при его реализации. Первая состоит в корректном выборе границ сращивания уравнений Больцмана и Навье—Стокса. Вторая — в обеспечении строгого баланса потоков массы, импульса и энергии через границу сращивания при сохранении не отрицательности функции распределения. Для этого метода требуется более сложный код, который включает решение кинетического уравнения, решение уравнений Навье—Стокса, сращивание этих решений на границах областей, проверку правильности

выбора границ сращивания. Представленный в статье метод прост в реализации, но требует значительно более интенсивных вычислений. Его возможности будут возрастать с прогрессом вычислительных устройств.

В работе [21] приведены расчеты течений сплошной среды, выполненные методом прямого статистического моделирования (DSMC) на суперкомпьютере большой мощности. В этом методе асимптотическое свойство решения не используется, что сделало расчеты исключительно интенсивными.

Сравнение с решением уравнений гидродинамики и оценка существующих моделей граничных условий скольжения заслуживают отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. С. 510. (Sydney Chapman and T.G. Cowling. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge University Press. 1952.)
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с. (Carlo Cercignani. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1975.)
3. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностр., 1977. 184 с.
5. *Паттерсон Г.Н.* Молекулярное течение газов. М.: ФМ, 1960. С. 272. (G.N. Patterson, Molecular flow of gases. John Willey & Sons, Inc., N.-Y. Chapman & Hall., limited, London.)
6. *Попов С.П., Черемисин Ф.Г.* Пример совместного численного решения уравнений Больцмана и Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 3. С. 516–527.
7. *Попов С.П., Черемисин Ф.Г.* Обтекание сверхзвуковым потоком разреженного газа решетки плоских поперечных пластин // Изв. РАН, МЖГ. 2002. № 3. С. 167–176.
8. *Попов С.П., Черемисин Ф.Г.* Динамика взаимодействия ударной волны с решеткой в разреженном газе // Аэродинамика и газовая динамика. 2003. № 3. С. 31–38.
9. *Popov S.P., Tcheremissine F.G.* A Method of Joint Solution of the Boltzmann and Navier-Stokes Equations // Rarefied Gas Dynamics. 24-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Mario Capitelli editor. AIP Conference Proceedings 762. Melville, N.-Y., 2005. USA. P. 82–87.
10. *Kolobov V.I., Arslanbekov R.R., Aristov V.V., Frolova A. A., Zabelok S.A.* Unified solver for rarefied and continuum flows with adaptive mesh and algorithm refinement // J. Comp. Phys. 2007. V. 223. P. 589–608.
11. *Tcheremissine Felix.* Direct Numerical Solution of the Boltzmann Equation // Rarefied Gas Dynamics. 24-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Mario Capitelli, editor. AIP Conference Proceedings 762. Melville, N.-Y., 2005. USA. P. 667–685.
12. *Черемисин Ф.Г.* Решение кинетического уравнения Больцмана для высокоскоростных течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 2. С. 329–343.
13. *Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Потапов А.П., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В.* Моделирование течений разреженного газа на основе решения кинетического уравнения Больцмана консервативным проекционным методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 89–105.
14. *Tcheremissine F.G.* Testing and acceleration of the conservative projection method for solving Boltzmann kinetic equation // AIP Conference Proceedings, 1648, 23005, 2015.
15. *Tcheremissine F.G.* Solution of Boltzmann equation for extremely slow flows. AIP Conference Proceedings 2293, 050008, 2020.
16. *Strang G.* On the construction and comparison of difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1968. № 5. P. 506–517.
17. *Черемисин Ф.Г.* Решение уравнения Больцмана при переходе к гидродинамическому режиму течения // Докл. АН. 2000. Т. 373. № 4. С. 483–486.
18. *Anikin Yu.A., Dodulad O.I., Kloss Yu.Yu., Martynov D.V., Shuvalov P.V., Tcheremissine F.G.* Development of applied software for analysis of gas flows in vacuum devices // Vacuum. 86 (2012). 1770–1777.
19. *Коробов Н.М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
20. *Boris J.P., Book D.L.* Flux-Corrected Transport. 1.SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works // J. Comput. Phys. 1973. V. 11. № 1. P. 38–69.
21. *Plimpton S.J., Moore S.G., Borner A., Stagg A.K., Koehler T.P., Torczynski J.R., Gallis M.A.* Direct simulation Monte Carlo on petaflop supercomputers and beyond // Phys. Fluids 31, 086101 (2019).