

ISSN 0044-4669

Том 63, Номер 4

Апрель 2023



ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 63, номер 4, 2023 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Простой критерий оценки сеточной детализации для gans методов <i>А. А. Гаврилов, А. А. Дектерев, А. В. Шебелев</i>	533
Улучшенная оценка точности метода Тихонова для некорректных экстремальных задач в гильбертовом пространстве <i>М. М. Кокурин</i>	548
Оценка области абсолютной устойчивости численной схемы решения жестких задач Коши методом продолжения решения по параметру <i>Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов, Е. Д. Цапко</i>	557

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Разрушение решений и локальная разрешимость абстрактной задачи Коши второго порядка с некоэрцитивным источником <i>М. В. Артемьева, М. О. Корпусов</i>	573
О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости <i>Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров</i>	584
Результаты симметричной классификации 2-полевых эволюционных систем 3-го порядка с постоянной сепарантой <i>М. Ю. Балахнев</i>	596
Прямая и обратные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластинки по отысканию источника <i>К. Б. Сабитов</i>	614

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Кинетика агрегации при седиментации. Влияние диффузии частиц <i>Н. В. Бриллиантов, Р. Р. Загидуллин, С. А. Матвеев, А. П. Смирнов</i>	629
О модельных двумерных течениях газа без давления: вариационное описание и численный алгоритм в рамках динамики прилипания <i>Н. В. Ключнев, Ю. Г. Рыков</i>	639
Чувствительность функционалов от решения задачи вариационного усвоения к входным данным о потоке тепла для модели термодинамики моря <i>Е. И. Пармузин, В. П. Шутяев</i>	657
Определение высот энергетических барьеров молекулы циклогексена с использованием процедуры стохастической аппроксимации <i>А. В. Теплухин</i>	667
Численное исследование неустойчивости границы раздела сред при термоядерном горении цилиндрической оболочечной микромишени <i>К. В. Хищенко, А. А. Чарахчян</i>	678
Two-Grid Finite Element Galerkin Approximation of equations of motion arising in Oldroyd fluids of order one with non-smooth initial data <i>D. Goswami, P. D. Dam'azjo, J. Yun Yuan, B. Bir</i>	694

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.683

ПРОСТОЙ КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ СЕТОЧНОЙ ДЕТАЛИЗАЦИИ ДЛЯ RANS МЕТОДОВ¹⁾

© 2023 г. А. А. Гаврилов^{1,*}, А. А. Дектерев^{1,2,**}, А. В. Шебелев^{2,***}

¹ 630090 Новосибирск, пр-т акад. Лаврентьева, 1,
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Россия

² 660041 Красноярск, пр-т Свободный, 79, Сибирский федеральный университет, Россия

*e-mail: gavand@yandex.ru

**e-mail: dekterev@mail.ru

***e-mail: aleksandr-shebelev@mail.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

Переработанный вариант 10.10.2022 г.

Принята к публикации 15.12.2022 г.

Предложен простой критерий оценки детализации сетки для получения сеточно-независимого решения турбулентного течения в рамках статистического подхода моделирования турбулентности. Критерий выведен на основе апостериорной оценки локальной ошибки интерполяции поля кинетической энергии турбулентности. Хорошая детализация сетки должна приводить к малым значениями ошибки интерполяции сеточного поля турбулентной энергии. Использование уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности и условия реализуемости позволили свести оценку относительной ошибки интерполяции к явной формуле для оценки максимального шага сетки, необходимого для получения сеточно-независимого решения. В настоящей работе предложенный критерий применен к стационарной задаче о течении за уступом и к нестационарной задаче об обтекании полукругового профиля, установленного под нулевым углом атаки при числе Рейнольдса $Re = 45000$. В результате численного исследования показано, что введенный критерий позволяет правильно оценить необходимую детализацию сетки для получения сеточно-независимого решения вдали от стенки. Критерий может быть использован как для оценки полученного решения на сеточную независимость, так и для адаптации расчетной сетки. Библ. 10. Фиг. 12. Табл. 1.

Ключевые слова: моделирование турбулентных течений, RANS подход, сеточно-независимое решение, кинетическая энергия турбулентности, критерий сеточной детализации.

DOI: 10.31857/S0044466923040087, **EDN:** IPEKCA

1. ВВЕДЕНИЕ

Качество решения гидродинамической задачи, полученной с использованием методов вычислительной гидродинамики, определяется тремя аспектами: 1) физико-математической моделью, выбранной для описания исследуемого течения, 2) сеточной и временной детализацией (или разрешением) и 3) качеством выбранных численных методов. Последние два критерия связаны очевидным образом: чем выше точность численных методов, тем грубее может быть степень детализации сетки для получения решения заданной точности. Однако детализация сетки должна позволять численному методу разрешать особенности течения, диктуемые выбранной моделью течения.

В инженерной практике к конечно-разностной или конечно-объемной сетке предъявляются дополнительные требования, часто противоречащие основному критерию качества сетки (инженерные критерии):

1. Степень детализации не должна ухудшать итерационную сходимость решения.
2. Сетка должна описывать характерные особенности исходной геометрии.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-41-240004.

3. Сетка должна быть экономной. Объем данных на сетке должен “помещаться” в выделенные на задачу вычислительные ресурсы. Расчет на сетке должен выполняться за приемлемое время.

4. Процесс построения сетки также должен быть “экономным”. Построение сетки должно выполняться за приемлемое время.

Наиболее популярным методом в инженерной практике для моделирования турбулентных течений является подход с использованием осреднения по Рейнольдсу (Reynolds-averaged Navier–Stokes, RANS). Нестационарный вариант подхода (Unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes, URANS) позволяет непосредственно разрешить только крупномасштабные когерентные вихревые структуры, в то время как мелкомасштабные турбулентные пульсации моделируются с помощью выбранной модели турбулентности. Как правило, при решении уравнений Рейнольдса применяются конечно-объемные или конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Для аппроксимации конвективных слагаемых используются противопоточные схемы, которые в областях больших градиентов снижают порядок аппроксимации для получения гладкого решения.

Ошибки дискретизации уменьшаются при увеличении степени детализации сетки. И можно ожидать, что при некоторой степени детализации сетки дальнейшее уменьшение шага сетки не приведет к заметному изменению численного решения. Определить достаточную детализацию сетки и, более того, оценить ошибки дискретизации и порядок аппроксимации численного метода можно с помощью расчетов на последовательности сеток с разной детализацией. При исследовании сеточной сходимости нет необходимости определять индекс сеточной сходимости (grid convergence index) или порядок аппроксимации численного метода, достаточно показать монотонную сеточную сходимость интересующей величины на последовательности сеток (см. [1]). Количество сеток должно быть не меньше трех. Простейший способ оценки сходимости состоит в использовании метода Ричардсона, позволяющего сделать оценку ошибки дискретизации путем сравнения решений, полученных на последовательности сеток с разной детализацией.

На практике при решении индустриальной задачи у исследователя нет возможности выполнять подобную оценку для всех исследуемых вариантов течений. Исследование сеточной сходимости проводится для некоторых характерных случаев.

Другой подход для оценки сеточно-независимого решения может состоять в применении алгоритмов, развитых в методах адаптивных сеток. Один из способов обнаружения недостаточной сеточной детализации состоит в сравнении численных результатов, полученных по схемам с разным порядком аппроксимаций. Области с большим отличием могут быть отмечены как области с недостаточным сеточным разрешением. В этих областях и, возможно, в соседних с ними, требуется детализировать сетку для получения сеточно-независимого решения. Критерии, используемые при построении адаптивных сеток, являются скорее способами индикации численной ошибки и необходимости адаптации сетки, чем способами оценки необходимого размера шага сетки или размера ячейки.

В настоящей работе развивается подход для оценки шага сетки, необходимого для получения сеточно-независимого решения уравнений Рейнольдса, замкнутых полуэмпирической моделью вихревой вязкости. Критерий выведен на основе апостериорной оценки локальной ошибки интерполяции поля кинетической энергии турбулентных пульсаций (см. [2]) и позволяет избежать расчетов на последовательности сеток. Хорошая детализация сетки при выбранной разностной схеме и модели турбулентности должна приводить к малым значениями ошибки интерполяции сеточного поля турбулентной энергии. Использование уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности и условия реализуемости (см. [3]) позволили свести оценку относительной ошибки интерполяции к явной формуле для оценки максимального шага сетки, необходимого для получения сеточно-независимого решения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЯ

Рассматривается численное решение уравнений Рейнольдса, замкнутых полуэмпирической моделью турбулентности. Предполагается, что модель турбулентности, основанная на осреднении по Рейнольдсу, построена на основе гипотезы вихревой вязкости и использует уравнение переноса кинетической энергии турбулентности в качестве одного из уравнений подсистемы

расчета турбулентных величин. Осреднение по Рейнольдсу приводит к следующему уравнению переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций k :

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot [\rho(v + v_t) \nabla k] + P_k - \rho \epsilon,$$

где P_k — скорость генерации турбулентной энергии за счет скорости деформации среднего течения, ϵ — скорость вязкой диссипации турбулентной энергии, v и v_t — кинематические молекулярная и турбулентная вязкости соответственно, ρ — плотность среды, d/dt — субстанциональная производная. С использованием гипотезы Буссинеска для тензора рейнольдсовых напряжений генерация турбулентной энергии описывается формулой

$$P_k = \rho v_t 2S_{ij}S_{ij} = \rho v_t S^2,$$

где S_{ij} и $S = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$ — компоненты и модуль тензора скоростей деформации среднего течения.

Для дискретизации исходной системы уравнений применяется метод конечного объема второго порядка точности по пространству. Аппроксимация производных в центре контрольного объема находится на основе значений функции в центрах контрольных объемов. Непрерывная аппроксимация $(n + 1)$ -го порядка точности полевой функции f в окрестностях контрольного объема P строится с помощью разложения в ряд Тейлора относительно центра контрольного объема:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = f_P + (\nabla f)_P (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) + \dots + \frac{1}{n!} (\nabla^n f)_P (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)^n.$$

Оценка ошибки дискретизации для схем второго порядка определяется интегрированием ошибки дискретизации по контрольному объему и для случая изотропной сетки с сеточным шагом Δ имеет вид

$$e(f) = \frac{\Delta^2}{24} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f \right| = \frac{\Delta^2}{24} |\nabla^2 f|.$$

Потребуем, чтобы разностное решение на данной сетке удовлетворяло условию малости относительной ошибки дискретизации

$$e(f) < \delta |f|,$$

где δ — некоторая малая величина. В результате можно сформулировать условие на шаг сетки:

$$\Delta^2 < 24\delta \frac{|f|}{|\nabla^2 f|}.$$

Применим данную апостериорную оценку локальной ошибки интерполяции к сеточному распределению поля кинетической энергии турбулентности. Для начала рассмотрим равновесный случай при доминировании генерации турбулентности, пренебрегая пространственной неоднородностью турбулентной вязкости:

$$\rho(v + v_t) \nabla^2 k + P_k \approx 0.$$

В данном случае детализация сетки должна быть достаточной для описания диффузионного переноса турбулентной энергии из области ее генерации. Условия реализуемости для тензора рейнольдсовых напряжений (см. [3]) позволяют сделать оценку сверху для производства турбулентной энергии:

$$P_k \leq 0.3\rho k S.$$

В результате для модуля лапласиана турбулентной энергии получаем оценку

$$|\nabla^2 k| \leq \frac{0.3kS}{v + v_t}.$$

Требование малости относительной ошибки локальной интерполяции приводит к неравенству

$$\frac{e(k)}{k} \leq \frac{\Delta^2}{24} \frac{0.3S}{v + v_t} < \delta.$$

Окончательно для шага сетки в областях с доминированием сдвига средней скорости получаем неравенство

$$\Delta^2 < 24\delta \left(\frac{v + v_t}{0.3S} \right) = C_1 \left(\frac{v + v_t}{0.3S} \right), \quad C_1 = 24\delta.$$

Это неравенство можно переписать для локального сдвигового числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_m = \frac{\Delta^2 S}{(v + v_t)} < C_2, \quad C_2 = 80\delta.$$

Рассмотрим другой предельный случай, соответствующий отсутствию или малости генерации турбулентной энергии. В равновесном случае из уравнения переноса турбулентной энергии имеем следующие соотношения:

$$(v + v_t) \nabla^2 k - \varepsilon \approx 0, \quad |\nabla^2 k| \leq \frac{\varepsilon}{v + v_t}.$$

В данном случае детализация сетки должна быть достаточной для описания диффузионного переноса турбулентной энергии в область ее диссипации. Такая ситуация реализуется в вязком подслое пристеночного турбулентного пограничного слоя. В результате получаем для относительной ошибки следующую оценку:

$$\frac{e(k)}{k} \leq \frac{\Delta^2}{24} \frac{1}{(v + v_t)k} \varepsilon < \delta,$$

и ограничение для шага сетки в области с доминированием диссипации турбулентной энергии

$$\Delta^2 < 24\delta (v + v_t) T_t,$$

где $T_t = k/\varepsilon$ – временной масштаб турбулентности.

Объединяя два критерия для случаев доминирования генерации и диссипации турбулентной энергии, получаем комбинированное условие на сеточный шаг:

$$\Delta < C_3 \left[(v + v_t) \min \left(\frac{1}{0.3S}, T_t \right) \right]^{1/2}, \quad C_3 = \sqrt{24\delta}.$$

Введем сеточный критерий Q_m как отношение шага сетки к линейному некоторому масштабу L_m :

$$Q_m = \Delta/L_m,$$

$$L_m = \left[(v + v_t) \min \left(\frac{1}{0.3S}, T_t \right) \right]^{1/2}.$$

Для оценки значений коэффициентов зададим относительную ошибку $\delta \sim 5\%$, и в результате имеем следующие значения коэффициентов:

$$C_1 \approx 1.2, \quad C_2 \approx 4, \quad C_3 \approx 1.1.$$

Окончательно критерий для получения сеточно-независимого критерия формулируется в виде неравенства

$$Q_m = \Delta/L_m < 1.$$

Интересно соотнести полученный критерий с существующими критериями сеточного разрешения для метода крупных вихрей. В развитой турбулентности вдали от стенки справедливы формулы

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad T_t = \frac{k}{\varepsilon}, \quad c_\mu = 0.09,$$

в результате получаем оценку для линейного масштаба L_m :

$$L_m \approx (v_t T_t)^{1/2} = c_\mu^{1/2} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = 0.3L_\eta,$$

где $L_t = k^{3/2}/\varepsilon$ — масштаб турбулентности или характерный размер энергонесущих вихрей. Критерий для RANS моделирования дает $L_t > 3.3\Delta$, т.е. не менее трех шагов сетки должно приходиться на размер крупного турбулентного вихря. При использовании методов моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) для моделирования турбулентного течения вдали от стенки требуется, чтобы шаг сетки удовлетворял условию (см. [3])

$$L_t > 10 - 4\Delta.$$

Таким образом, сетка для LES моделирования должна быть в 3–4 раза детальнее (в каждом направлении) по сравнению с сеткой для RANS моделирования.

Менее популярный критерий оценки сеточной детализации для LES основан на локальной величине скорости сдвига течения (см. [4]):

$$\Delta < L_S = \sqrt{\frac{\varepsilon}{(S_{ij}S_{ij})^{3/2}}} = 2^{3/4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{S^3}}.$$

В случае равновесного сдвигового течения $v_t S^2 \approx \varepsilon$ сдвиговой масштаб турбулентности L_S оказывается практически равен введенному масштабу L_m :

$$L_m \approx 1.08 L_S.$$

В сделанных допущениях оказывается, что сеточные критерии для RANS и для LES моделирования совпадают.

Предложенный критерий не является строгим, так как построен для частных случаев с некоторыми допущениями. Для оценки работоспособности предложенного критерия выполнены численные расчеты для некоторых тестовых задач на последовательности сеток.

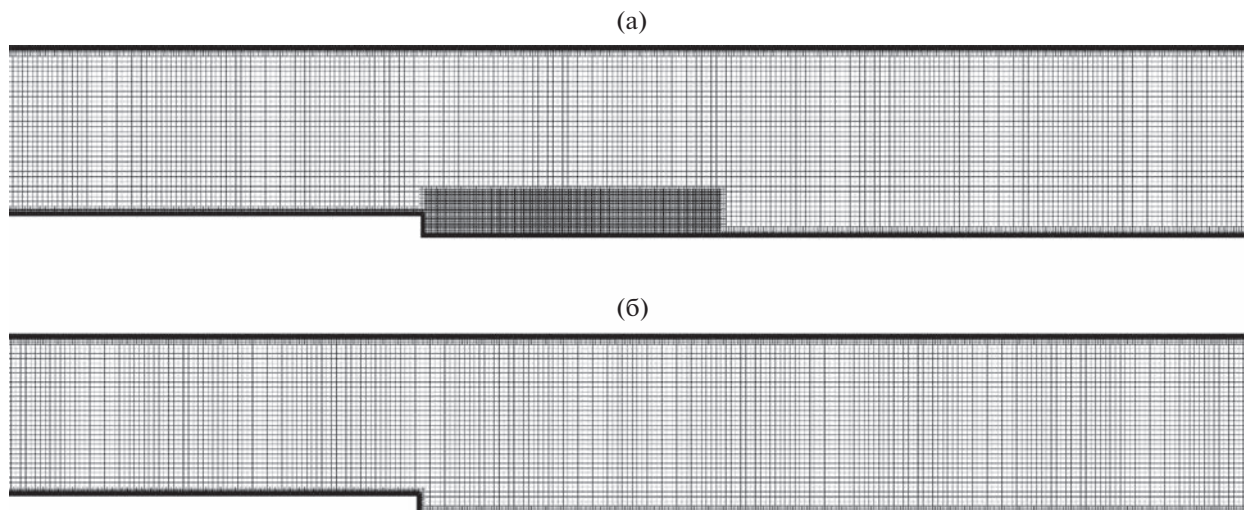
3. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

В качестве тестовых задач выбраны установившееся развитое турбулентное течение в плоском канале, течение за уступом и нестационарное обтекание полусферического тела. Использовались две низкорейнольдсовые RANS модели турбулентности, основанные на гипотезе вихревой вязкости: k - ω SST с поправкой на кривизну линий тока (см. [5]) и модель с эллиптической релаксацией и k - ε - ζ - f (см. [6]). Расчеты выполнялись с использованием программы σ Flow, численный алгоритм которой базируется на методе конечного объема для пространственных уравнений гидродинамики на неструктурированной сетке. Программа вычислительной гидродинамики σ Flow использовалась для решения широкого класса задач турбулентных течений (см. [7]).

3.1. Пристеночный пограничный слой

Оценим требование к сеточному шагу для моделирования пристеночного сдвигового турбулентного течения без использования пристеночных функций с разрешением вязкого подслоя. В вязком подслое, пренебрегая турбулентной вязкостью, получаем значение линейного масштаба $L_m = \left(\frac{\nu}{0.3S}\right)^{1/2}$ в безразмерных вязких масштабах $L_m^+ \approx 1.8$. Неравенство для введенного критерия $Q_m < 1$ требует, чтобы шаг сетки по направлению к стенке был меньше двух вязких масштабов: $\Delta y^+ < 2$, а положение первого пристеночного узла порядка единицы: $y^+ (1) \sim 1$. В используемом методе контрольного объема пристеночный шаг сетки в 2 раза больше расстояния до первого узла.

Для оценки влияния шага сетки на разрешение пристеночного слоя выполнены расчеты развитого установившегося турбулентного течения в плоском канале при вязком числе $Re_\tau = 2000$. Расчеты проводились на трех сетках с одинаковым коэффициентом сгущения узлов к стенке, равным 1.05, и разным шагом сетки по направлению к стенке. Первый пристеночный узел имел безразмерные координаты $y^+ (1) = 0.36, 1.25$ и 2.4 . Отличие расчетного значения вязкого трения, полученного на более грубой сетке, от значения, полученного на самой детальной сетке, растет с увеличением пристеночного шага сетки и составляет значения 1 и 3% для модели k - ε - ζ - f и 5 и 7% для модели k - ω SST.



Фиг. 1. Течение за уступом. Сеток M2 (а) и M5 (б).

Введенный критерий совпадает с общепринятым требованием к моделированию турбулентного пристеночного слоя, которое заключается в расположении первого пристеночного узла сетки в вязком подслое $y^+ (1) \leq 1$ (см. [8]). При нарушении критерия детализации сетки для разрешения пристеночных градиентов оказывается недостаточной для определения интегрального сопротивления.

3.2. Моделирование стационарного течения за уступом

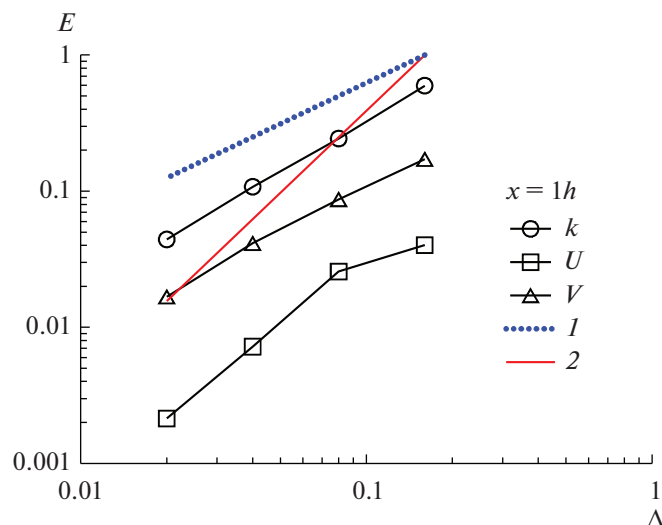
Рассматривается плоскопараллельное турбулентное течение за обратным уступом. Расчеты выполнены в плоской постановке. Высота уступа — $h = 1$ м, число Рейнольдса $Re = \rho U h / \mu = 34000$. Высота расчетной области — $9h$, длина — $60h$.

На входе ставится условие полностью развитого турбулентного течения в плоском канале. На выходе заданы неотражающие граничные условия, на поверхности обтекаемого тела — условия прилипания. Детализация сетки вблизи стенок достаточна для полного разрешения пристеночного турбулентного слоя без введения пристеночных функций (для пристеночных узлов $y^+ \sim 0.5$).

Расчеты выполнялись на равномерной сетке с выделением пристеночного сеточного слоя. Вне пристеночного слоя сетка квадратная. Для оценки сеточного критерия рассматривается влияние детализации сетки непосредственно вниз по течению за уступом в области слоя смешения и рециркуляционного течения. Прямоугольная область, в которой варьируется сеточная детализация, находится на расстоянии $0.2h$ от уступа и имеет высоту $2h$ и длину $15h$. Выполнены стационарные расчеты на пяти сетках, отличающиеся детализацией в выбранной области. Примеры сеток показаны на фиг. 1. Размеры шагов сетки Δ в выделенной области представлены в табл. 1. Оси x и y направлены вдоль и поперек течения соответственно.

Таблица 1. Течение за уступом. Параметры расчетных сеток

Сетка	Шаг сетки, Δ	Количество ячеек, тыс.
M1	0.0145	372
M2	0.029	305
M3	0.059	280
M4	0.118	274
M5	0.23	272



Фиг. 2. Течение за уступом. Изменение решения при измельчении сетки для модели $k-\varepsilon-\zeta-f$. Линии 1 и 2 соответствуют первому и второму порядку по шагу сетки соответственно.

Для анализа течения было выбрано две линии. Первая линия перпендикулярна направлению течения и расположена на расстоянии $1h$ от уступа по течению: $x = 1h$. Вторая линия расположена в сдвиговой области течения, идет вдоль течения от точки отрыва потока: $y = 1h$. Линии проходят через область максимальной генерации турбулентности в сдвиговом течении.

Для количественной оценки сходимости решения выполнен расчет изменения решения при удвоении сетки вдоль двух выбранных линий. Относительное изменение сеточного распределения некоторого поля f на сетке с шагом Δ при измельчении сетки в два раза рассчитывается в норме L_2 следующим образом:

$$E_{\Delta}(f) = \|f_{\Delta} - f_{\Delta/2}\| / \|f_{\Delta/2}\|.$$

Изменение решения вдоль линии, перпендикулярной течению, при измельчении сетки показано на фиг. 2 для распределений турбулентной энергии k и продольной U и поперечной компонент V средней скорости, полученных с использованием модели $k-\varepsilon-\zeta-f$. Аналогичные результаты получаются и для второй RANS модели турбулентности. Решение монотонно сходится при увеличении детализации сетки, и распределения на самых детальных сетках отличаются менее, чем на 5%. Сходимость решения имеет первый порядок по Δ .

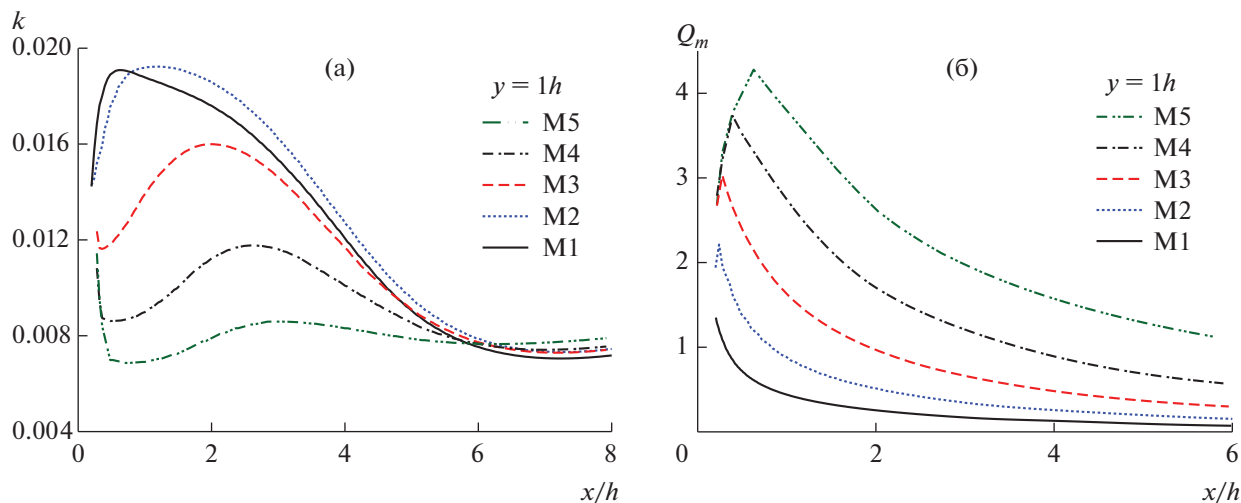
На фиг. 3 приведены графики турбулентной энергии и сеточного критерия вдоль линии $y = 1h$. Решение на грубых сетках демонстрирует заниженное значение турбулентной энергии и существенное смещение максимума по потоку. На этих сетках наблюдаются обширные области со значением сеточного критерия Q_m больше единицы. Решения на сетках M1 и M2 отличаются незначительно, при этом на сетках M1 и M2 есть небольшие области с $Q_m > 1$.

Построенные на фиг. 4 распределения коэффициента трения вдоль нижней стенки и распределение энергии турбулентных пульсаций вдоль линии $x = 1h$ показывают сходимость решения на сетках M1 и M2 и хорошее согласование с экспериментальными данными (см. [9]).

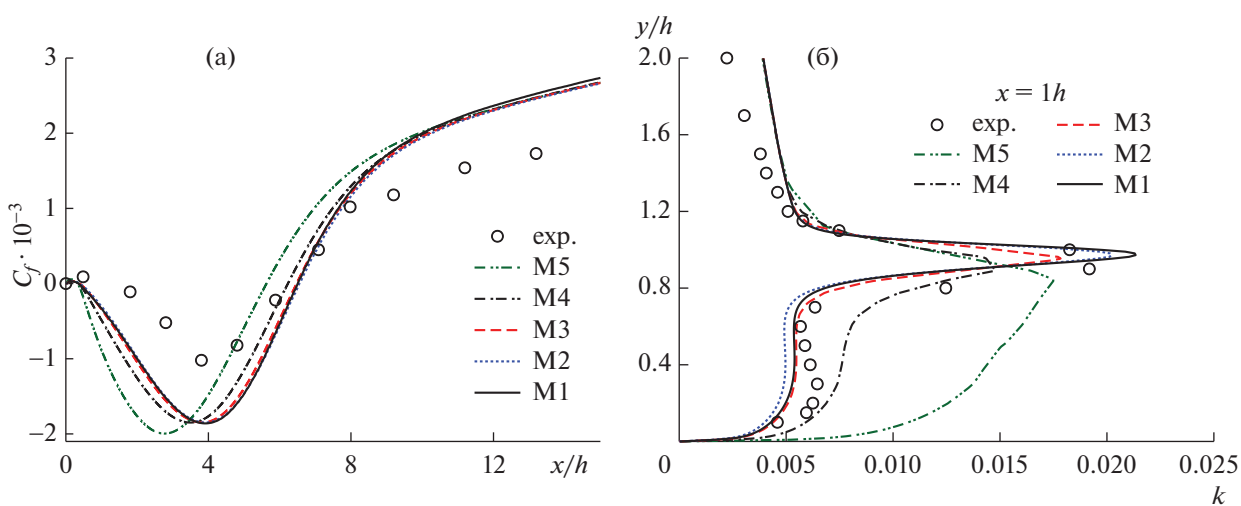
3.3. Моделирование нестационарного обтекания полуцилиндрического тела

При моделировании нестационарного течения с крупномасштабными вихревыми структурами оценка сеточного шага должна обеспечивать сеточно-независимое решение средней и разрежаемой пульсационной составляющих течения. В качестве теста выбрана задача обтекания профиля неограниченным потоком с образованием вихревой дорожки Кармана.

Моделируется обтекание полуцилиндрического тела при угле атаки, равном нулю. Число Рейнольдса задачи $Re = 45000$. Для исследования сеточной сходимости нестационарного решения в ближнем следе (на расстоянии $> 2L$ от тела) построено четыре сетки с разной детализацией в области следа. Высота расчетной области $Ly = 40L$, ширина в третьем направлении $H = 1L$ (сет-



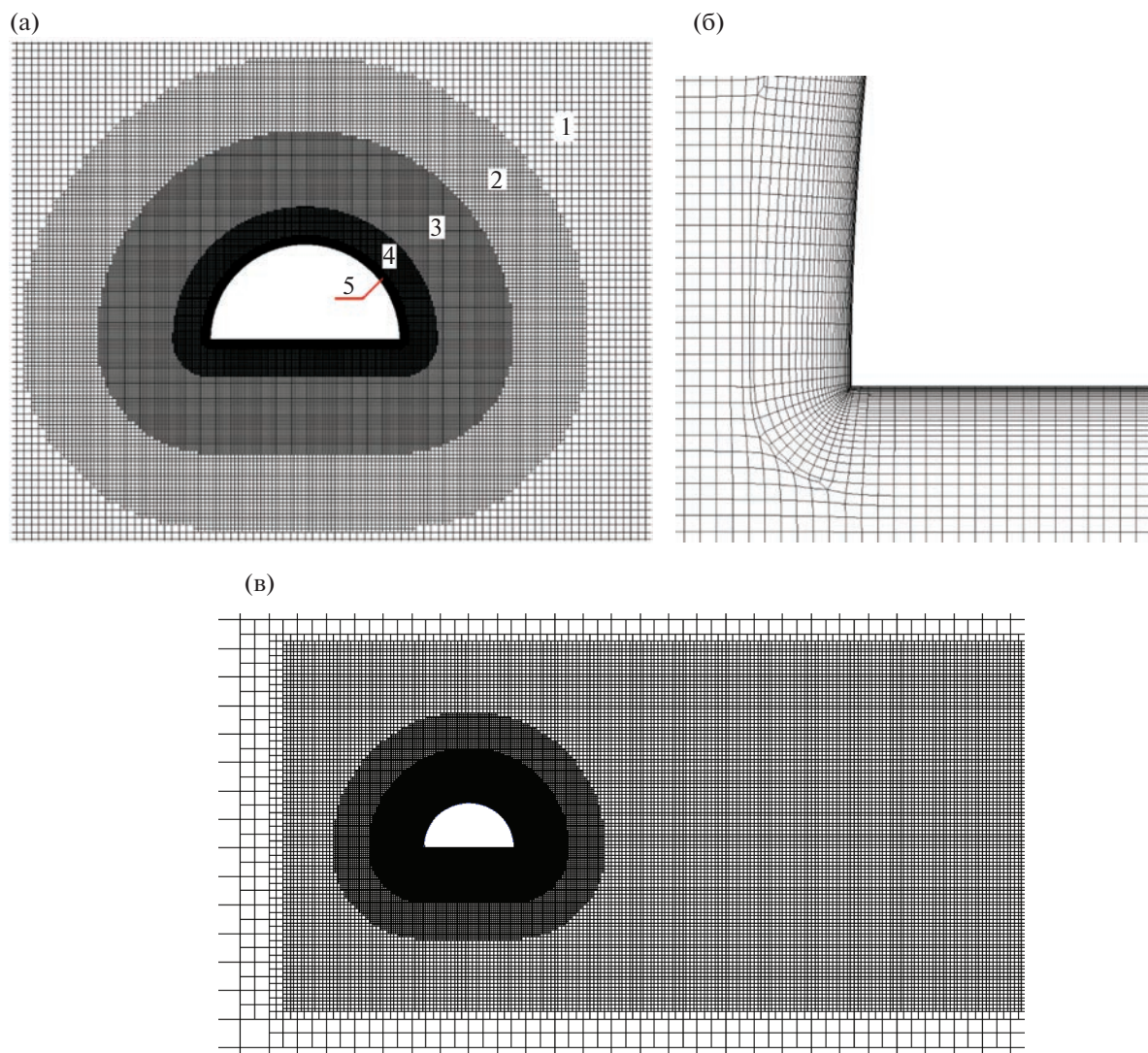
Фиг. 3. Распределение энергии турбулентных пульсаций k (а) и критерия Q_m (б) вдоль линии $y = 1h$. Модель $k-\epsilon-\zeta-f$.



Фиг. 4. Распределение коэффициента трения C_f вдоль нижней стенки (а) и распределение энергии турбулентных пульсаций k вдоль линии $x = 1h$ (б). Модель $k-\epsilon-\zeta-f$. Символы — эксперимент (см. [9]).

ка трехмерная). Размеры вдоль течения — $4.5L$ от входной границы до передней кромки тела, $14.5L$ от задней кромки до выходной границы.

Для всех рассмотренных сеток детализация в окрестностях тела на расстоянии $1L$ от тела одинаковая. Около обтекаемого тела выделены пять слоев с последовательным уменьшением размеров ячейки сетки при приближении к телу (фиг. 5а). Размер шага сетки в каждом слое постоянен и составляет 0.00245, 0.0049, 0.0098, 0.0195 и 0.039 L соответственно. Расстояние от поверхности профиля до внешней границы слоя составляет 0.05, 0.2, 0.6, 1.0 и 2.0 L соответственно. В непосредственной близости тела построен пристеночный сеточный слой толщиной $0.03L$, состоящий из 28 узлов с пристеночным шагом $h = 9 \times 10^{-5}L$. Сеточные линии в пристеночном слое сгущаются к стенке с коэффициентом сгущения 1.10. Слой вблизи передней кромки показан на фиг. 5б. Такая детализация пристеночного слоя дает значение y^+ первого пристеночного узла ~ 0.2 . Размер ячейки внешней сетки $0.31L$.

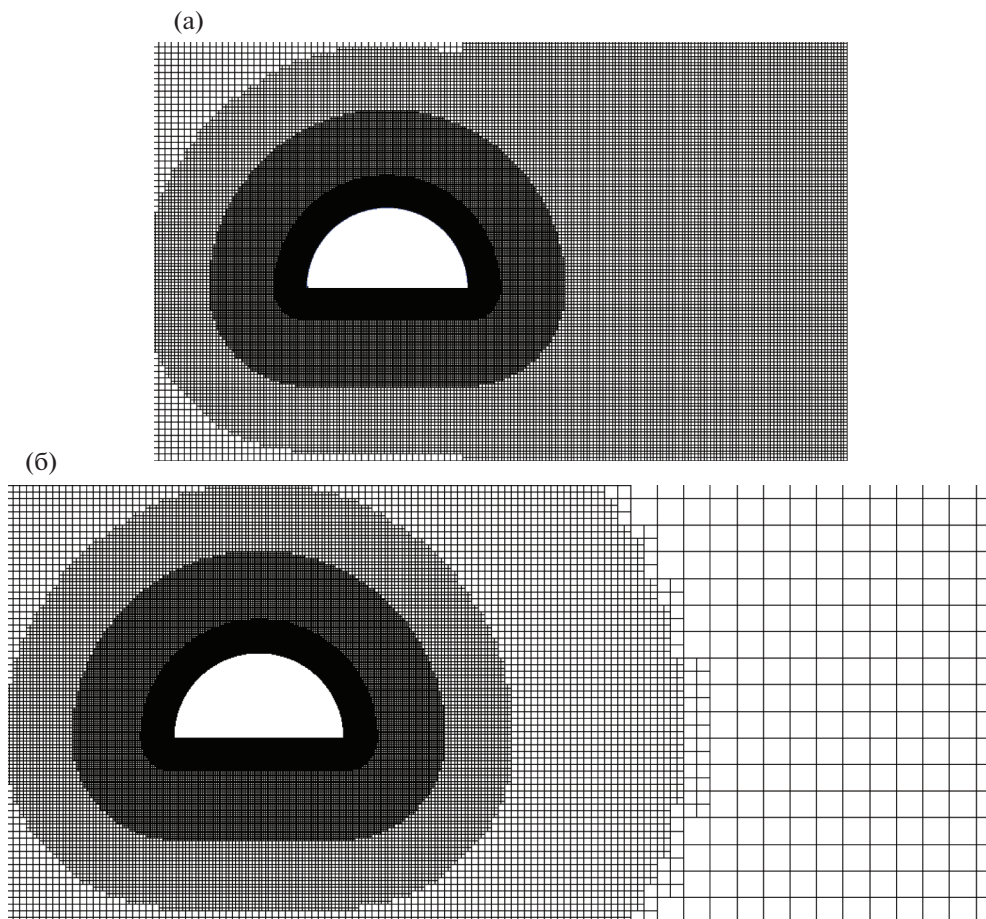


Фиг. 5. Обтекание профиля. Сетка M2: (а) — пять слоев сетки около тела, (б) — пристеночный слой, (в) — сетка с областью следа.

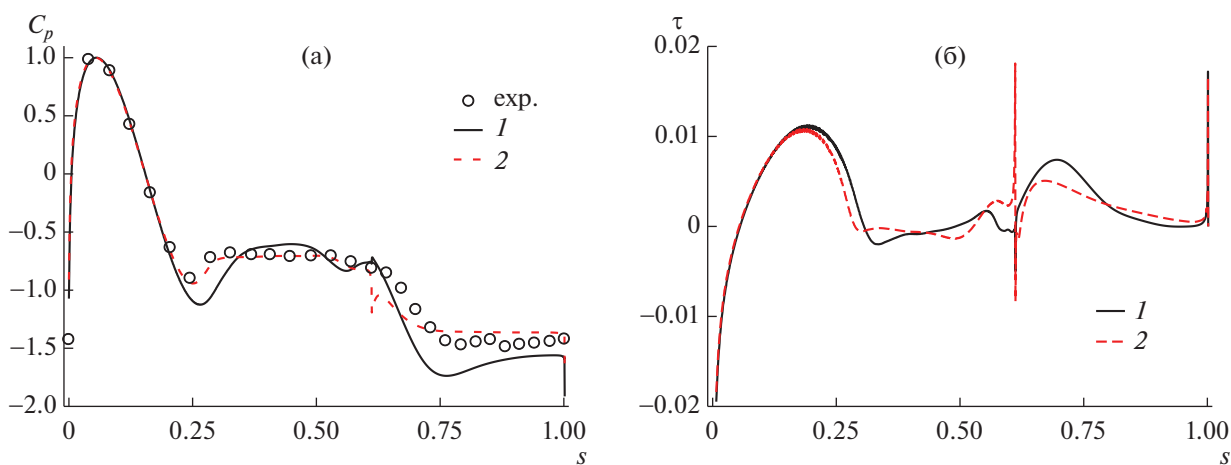
Для оценки сеточного критерия рассматривается влияние детализации сетки вниз по течению за обтекаемым телом. Для этого в области следа за телом выделяется подобласть с постоянной детализацией с квадратными ячейками. Высота подобласти $4L$. Сетки отличаются пространственной детализацией в этой подобласти. Четыре сетки имеют следующие шаги сетки в области следа: M1 — $0.02L$, M2 — $0.04L$, M3 — $0.08L$, M4 — $0.16L$. Самая детальная сетка — M1, самая грубая сетка — M4. На фиг. 6 показаны распределения узлов вблизи обтекаемого тела для сеток M1 и M4.

Расчеты выполнены с использованием модели $k-\omega$ SST с коррекцией на кривизну линий тока и модели $k-\varepsilon-\zeta-f$. Основные детали численной схемы следующие: конвективная схема на скорость — QUICK; метод нестационарного шага для уравнения движения — неявная направленная схема второго порядка; конвективная схема на турбулентные величины — UMIST TVD; метод нестационарного шага для турбулентных величин — неявная первого порядка; шаг по времени $\Delta t = 0.01 L/U$.

Распределения осредненного давления и вязких напряжений на стенке обтекаемого тела показаны на фиг. 7. Картины осредненного течения в виде траекторий частиц жидкости представлены на фиг. 8. Более детальную информацию о численном моделировании и экспериментальном исследовании обтекания полуцилиндрического тела можно найти в [10].

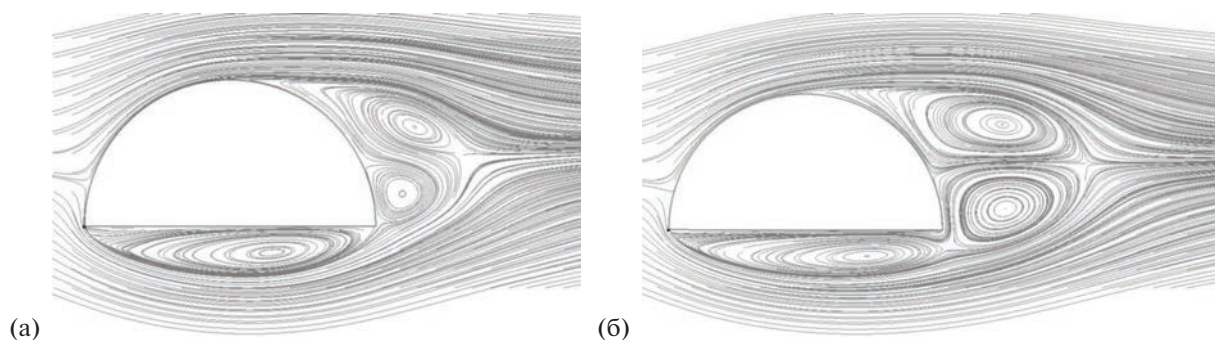


Фиг. 6. Обтекание профиля: (а) – сетка M1, (б) – сетка M4.

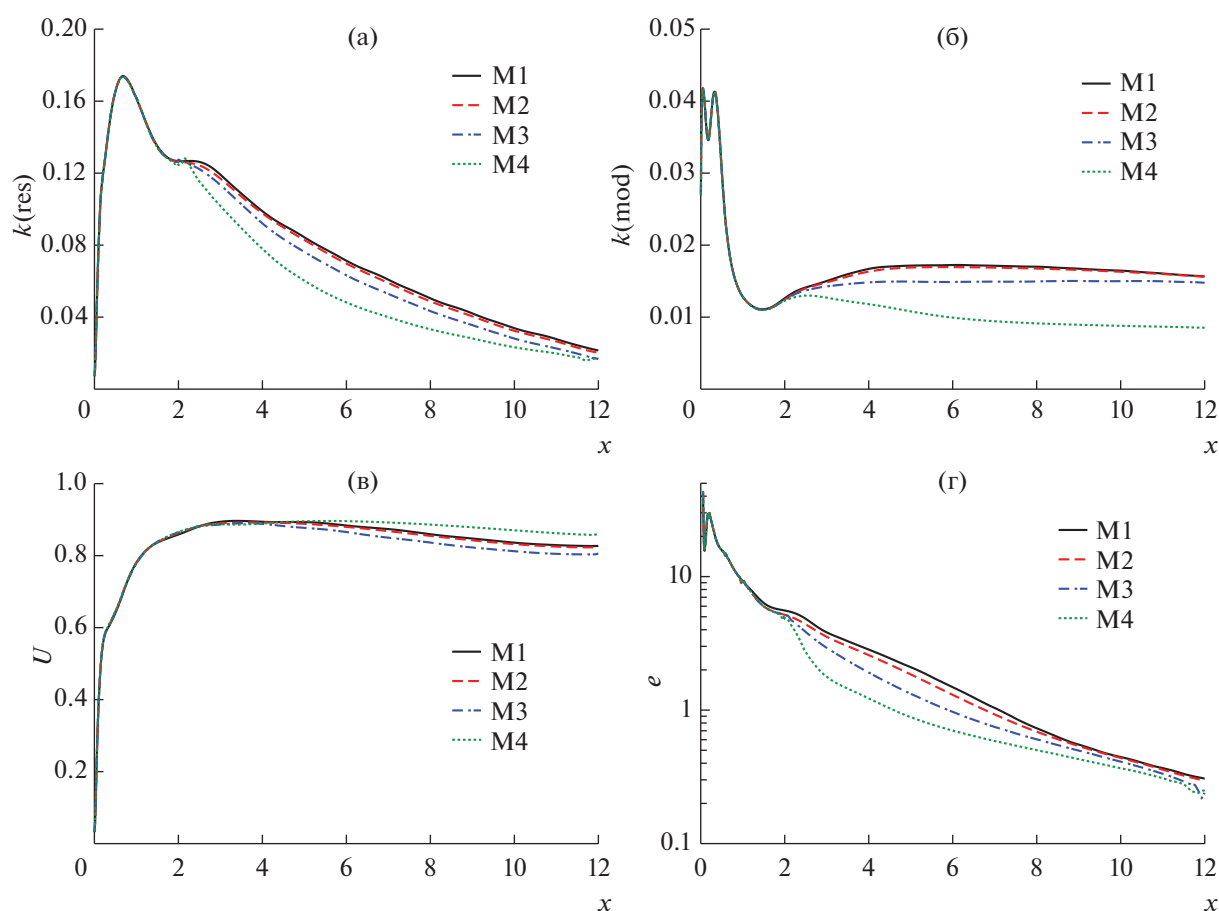


Фиг. 7. Обтекание профиля. Распределения осредненного давления C_p (а) и вязкого трения τ (б) на поверхности для моделей $k-\omega$ SST (линия 1) и $k-\epsilon-\zeta-f$ (линия 2). Символы – эксперимент (см. [10]).

Для всех расчетов на разных сетках и с использованием разных моделей выполнено сравнение интегральных сил и распределений осредненных напряжений на поверхности профиля. Для всех моделей расчеты, выполненные на разных по детализации сетках, демонстрируют независи-



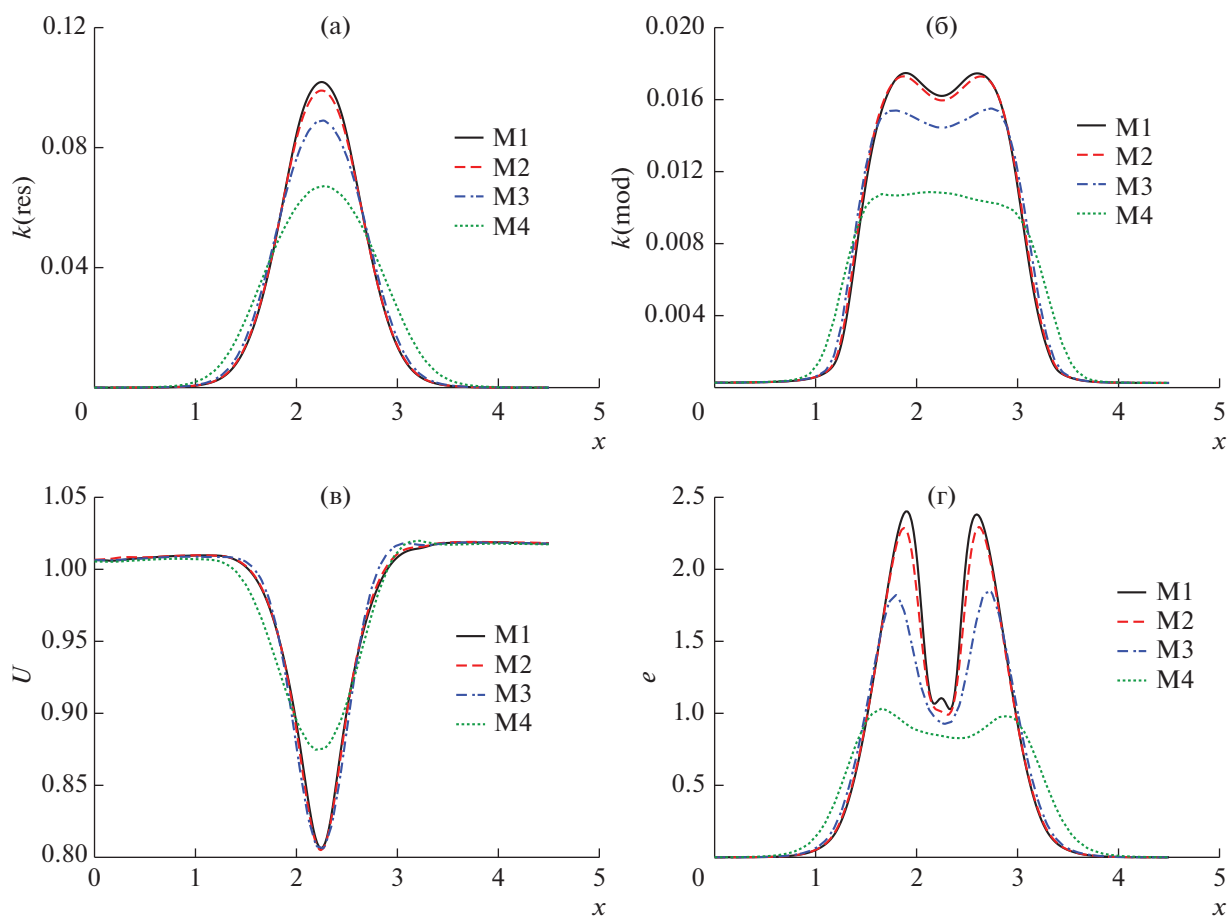
Фиг. 8. Обтекание профиля. Линии тока осредненного течения для моделей (а) $k-\omega$ SST с коррекцией на кривизну линий тока и (б) $k-\epsilon-\zeta-f$.



Фиг. 9. Обтекание профиля. Распределения вдоль линии $x1$: (а) — энергия разрешаемых пульсаций, (б) — осредненная моделируемая кинетическая энергия турбулентности, (в) — осредненная x -компонента скорости, (г) — пульсации скорости деформации.

мость мгновенных и осредненных напряжений на поверхности профиля от степени детализации сетки в следе за профилем на расстоянии $2L$ от конечной задней точки профиля.

Для оценки влияния детализации сетки в следе проводится сравнение осредненной продольной компоненты скорости U , моделируемой кинетической энергии турбулентных пульсаций $k(\text{mod}) = \langle k \rangle$, разрешаемой энергии пульсаций скорости $k(\text{res}) = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle$ и пульсаций тензора



Фиг. 10. Обтекание профиля. Распределения вдоль линии $y1$: (а) — энергия разрешаемых пульсаций, (б) — осредненная моделируемая кинетическая энергия турбулентности, (в) — осредненная x -компонента скорости, (г) — пульсации скорости деформации.

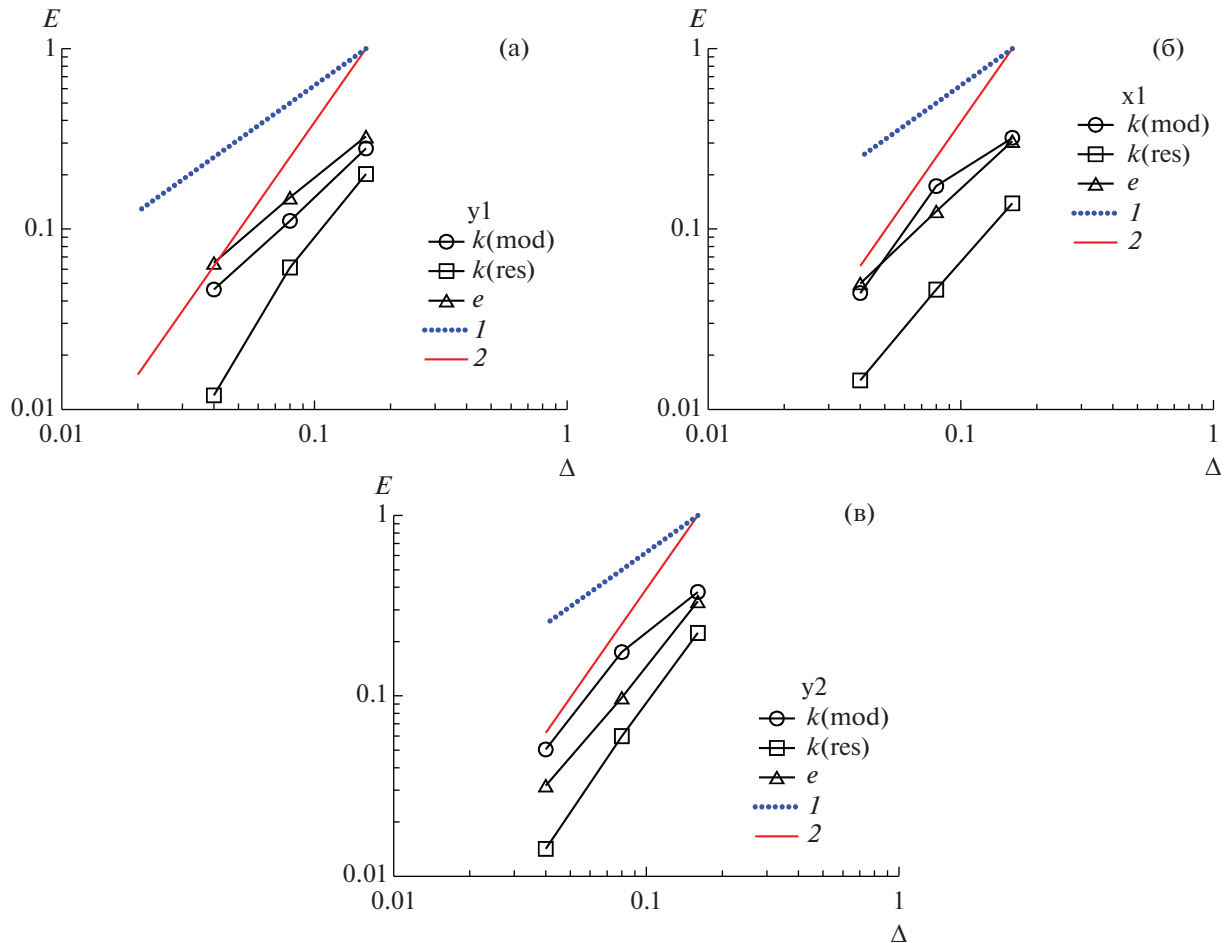
скоростей деформации $e = \langle 2S'_{ij}S'_{ij} \rangle$. Треугольные скобки означают осреднение по времени, штрих относится к разрешаемой пульсации величины. Сравниваются распределения, полученные на разных сетках, вдоль трех выбранных линий. Поперечные к потоку линии $y1$ и $y2$ расположены на расстоянии $5L$ и $10L$ за телом, линия $x1$ идет от задней кромки обтекаемого тела вдоль направления течения.

На фиг. 9 и 10 представлены распределения осредненной моделируемой кинетической энергии турбулентности и разрешаемой кинетической энергии турбулентности, полученные на разных сетках с использованием модели $k-\omega$ SST вдоль выделенных линий.

Приведенные графики демонстрируют монотонную сходимость решения при увеличении детализации сетки, т.е. при уменьшении сеточного шага. Качественно можно сказать, что сетка М4 имеет очень грубую детализацию, что приводит к сильному размазыванию распределений в следе и занижению разрешаемых пульсаций. Детализация сетки М3 оказывается также недостаточной для получения сеточно-независимого решения. На сетках М1 и М2 получены близкие решения, но на более грубой сетке М2 разрешаемые и моделируемые пульсации немного ниже.

Для количественной оценки сходимости решения выполнен расчет изменения решения при удвоении сетки вдоль трех выбранных линий. Изменения распределений $k(mod)$, $k(res)$ и e , полученные с использованием $k-\epsilon-\zeta-f$ модели, вдоль трех пространственных линий при измельчении сетки показаны на фиг. 11.

Из графиков видно, что наблюдается монотонная сходимость решения при увеличении детализации сетки. Порядок сходимости по шагу сетки лежит в диапазоне от 1 до 2. Наибольший порядок сходимости имеет величина разрешаемых пульсаций скорости, которая сходится со вто-

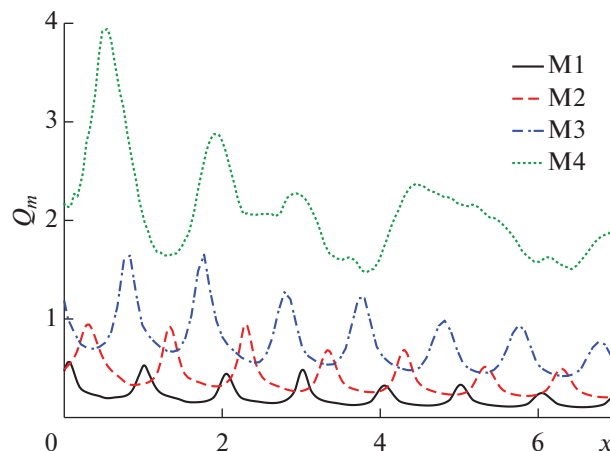


Фиг. 11. Обтекание профиля. Изменение решения при измельчении сетки для модели $k-\varepsilon-\zeta-f$. Линии 1 и 2 соответствуют первому и второму порядку по шагу сетки соответственно.

рым порядком по пространственному шагу на линиях $y1$ и $y2$. Порядок сходимости осредненной моделируемой энергии турбулентности составляет 1.3–2, а порядок сходимости пульсации скорости деформации 1.3–1.8. Следует отметить наличие сеточной сходимости как среднего течения, так и пульсационной составляющей течения.

На всех линиях изменение $k(\text{mod})$ при переходе от сетки M2 к самой детальной сетке M1 меньше 5%. Для разрешенной составляющей турбулентной энергии $k(\text{res})$ это изменение составляет меньше 2%. Изменение осредненной продольной компоненты скорости не обладает монотонной зависимостью от сеточного шага. Отклонение этой величины при переходе от сетки M2 к M1 для всех выбранных линий меньше 0.5%. Приведенные числа и графики позволяют нам утверждать, что детализации сеток M1 и M2 являются достаточными для получения сеточно-независимого нестационарного решения.

Рассмотрим распределение критерия Q_m для разных сеток. На фиг. 12 построены распределения критерия Q_m вдоль линии, параллельной набегающему потоку и расположенной в области следа. Для сеток, разрешающих нестационарные течения M1 и M2, значение критерия не превосходит значения 1, а значения сеточного сдвигового числа Re_m всюду меньше 3. Для самой грубой сетки M4 критерий имеет значение в диапазоне от 1.5 до 4. Сетка M3, имеющая недостаточное сеточное разрешение, дает локальные максимумы критерия Q_m на уровне 1.5, а числа Re_m — на уровне 9. Отсюда можно сделать следующий вывод. Значение критерия Q_m для получения сеточно-независимого RANS решения должно быть меньше единицы, а значение сеточного сдвигового числа Re_m — меньше 4. Возможно наличие локальных небольших областей со значением критерия Q_m , превышающего 1, не приведет к ухудшению численного решения. Однако, если



Фиг. 12. Распределения критерия Q_m вдоль выбранной линии x 1.

размеры этих областей будут сопоставимы с характерным размером задачи, то численное решение на такой сетке однозначно будет недоразрешенным, и потребуется детализация сетки в этих областях для получения сеточно-независимого решения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен простой критерий оценки сеточной детализации сетки для получения сеточно-независимого численного решения турбулентного течения в рамках RANS подхода с использованием полуэмпирической модели турбулентности. Критерий применен к стационарному течению за уступом и к нестационарному отрывному турбулентному течению периодического типа. Оценка приемлемости критерия сеточной детализации основывается на исследовании сеточной сходимости течений в выделенных областях. Показано, что предложенный критерий позволяет правильно оценить необходимую детализацию сетки для получения сеточно-независимого решения вдали от стенки. Если значение критерия ~ 1 , то измельчение сетки в 2 раза приводит к изменению численного решения меньше, чем на 5%. Тестовые расчеты были ограничены приближением плоскопараллельного турбулентного течения и сетками с квадратными ячейками в исследуемой области.

Критерий может быть использован как для оценки полученного решения на сеточную независимость, так и для локальной адаптации сетки. Поскольку предложенный критерий позволяет оценить сеточную детализацию для получения URANS решения, то критерий может быть использован и как ограничитель в моделях с частичным разрешением турбулентного спектра, например, в моделях частично осредненных уравнений Навье—Стокса, (Partially Averaged Navier—Stokes, PANS). Критерий может быть индикатором для переключения модели турбулентности с переменным разрешением в вихреразрешающую ветку при достаточной для URANS модели сеточной детализацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oberkampf W.L., Roy C.J. Verification and Validation in Scientific Computing, Cambridge Univ. Press, 2010.
2. Habashi W.G., Dompierre J., Bourgault Y., Ait-Ali-Yahia D., Fortin M., Vallet M.G. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part 1: general principles // Inter. J. Numer. Meth. Fluid. 2000. V. 32. P. 725–744.
3. Pope S.B. Turbulent Flows. Cambridge Univ. Press, 2000.
4. Picano F., Hanjalić K. Leray- α Regularization of the Smagorinsky-Closed Filtered Equations for Turbulent Jets at High Reynolds Numbers // Flow Turbulence Combust. 2012. V. 89. P. 627–650.
5. Isaev S.A., Baranov P.A., Zhukova Yu.V., Usachov A.E., Kharchenko V.B. Correction of the shear-stress-transfer model with account of the curvature of streamlines in calculating separated flows of an incompressible viscous fluid // J. Engineer. Phys. Thermophys. 2014. V. 87. № 4. P. 1002.

6. *Hanjalić K., Popovac M., Hadžiabdić M.* A robust near-wall elliptic relaxation eddy viscosity turbulence model for CFD // *Inter. J. Heat Fluid Flow*. 2004. V. 25. № 6. P. 1047–1051.
7. *Дектерев А.А., Гаврилов А.А., Минаков А.В.* Современные возможности CFD кода SigmaFlow для решения теплофизических задач // *Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии*. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 117–122.
8. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc., La Canada, CA, 1993.
9. *Driver D.M., Seegmiller H.L.* Features of Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow // *AIAA J.* 1985. V. 23. № 2. P. 163–171.
10. *Isaev S., Baranov P., Popov I., Sudakov A., Usachov A., Guvernnyuk S., Sinyavin A., Chulyunin A., Mazo A., Demidov D., Dekterev A., Gavrilov A., Shebelev A.* Numerical simulation and experiments on turbulent air flow around the semi-circular profile at zero angle of attack and moderate Reynolds number // *Comput. Fluid*. 2019. V. 188. P. 1–17.
<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.03.013>

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 517.988

УЛУЧШЕННАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА
ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾© 2023 г. М. М. Кокурин^{1,*}¹ 424000 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский гос. ун-т, Россия

*e-mail: kokurin@nextmail.ru

Поступила в редакцию 18.08.2022 г.

Переработанный вариант 21.09.2022 г.

Принята к публикации 15.12.2022 г.

Изучается метод Тихонова в применении к некорректным задачам минимизации гладкого невыпуклого функционала. При условии истокорпредставимости искомого решения получена оценка точности метода Тихонова в терминах параметра регуляризации, ранее известная только при условии выпуклости минимизируемого функционала или при наложении структурного условия на его нелинейность. Также получена новая оценка точности метода Тихонова в случае приближенно заданного функционала. Библ. 10.

Ключевые слова: некорректная экстремальная задача в гильбертовом пространстве, метод Тихонова, оценка точности.

DOI: 10.31857/S0044466923040117, EDN: IPHNWS

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучается задача минимизации

$$J(x) \rightarrow \min_{x \in H} \quad (1)$$

нелинейного функционала $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ на вещественном гильбертовом пространстве H . Эта задача заключается в нахождении точки $x^* \in H$, доставляющей глобальный минимум функционалу J . Существование решения x^* ниже предполагается. Потребуем, чтобы функционал J был дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и его вторая производная Фреше удовлетворяла условию Липшица

$$\|J''(x) - J''(y)\|_{L(H)} \leq \Lambda \|x - y\|, \quad x, y \in H, \quad (2)$$

с некоторой константой $\Lambda > 0$. Под $\|\cdot\|$ здесь и далее понимается норма пространства H . Отметим, что из (2) с применением формулы Тейлора для отображений в нормированных пространствах [1, с. 658] следуют оценки

$$\|J'(x+h) - J'(x) - J''(x)h\| \leq \frac{1}{2} \Lambda \|h\|^2, \quad h \in H; \quad (3)$$

$$\left| J(x+h) - J(x) - (J'(x), h) - \frac{1}{2} (J''(x)h, h) \right| \leq \frac{1}{6} \Lambda \|h\|^3, \quad h \in H, \quad (4)$$

которые понадобятся нам ниже.

Задача оптимизации (1) в общем случае является некорректной [2]. Это означает, что она не может быть решена классическими методами минимизации: даже если с их помощью получена минимизирующая последовательность $\{x_n\} \subset H$, такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = J(x^*)$, эта последовательность не обязательно сходится к искомому решению x^* в норме H . Для решения некорректных экстремальных задач используются методы регуляризации, такие как метод Тихонова и методы

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-71-10070).

итеративной регуляризации [2, гл. 2]. В случае точно заданного функционала J метод Тихонова заключается в минимизации регуляризованного функционала

$$T_\alpha : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_\alpha(x) = J(x) + \alpha \|x - \xi\|^2$$

с параметром $\alpha > 0$. Если функционал J является слабо полунепрерывным снизу, существует точка глобального минимума $x_\alpha \in H$ функционала T_α [2, теорема 1.3.2] и ее можно принять в качестве приближения к искомой точке x^* . Слабая полунепрерывность снизу функционала J означает, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset H$, слабо сходящейся к некоторой точке $x_0 \in H$, справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) \geq J(x_0)$. В общем случае, если слабая полунепрерывность снизу функционала J не гарантируется, используется следующая модификация описанной выше процедуры. Наряду с параметром $\alpha > 0$, задают значение $\varepsilon > 0$ и в качестве приближения к решению x^* выбирают точку $x_{\alpha, \varepsilon}$ такую, что

$$\inf_{x \in H} T_\alpha(x) \leq T_\alpha(x_{\alpha, \varepsilon}) \leq \inf_{x \in H} T_\alpha(x) + \varepsilon. \quad (5)$$

Оценки точности метода Тихонова и других методов регуляризации устанавливаются обычно при некоторых дополнительных условиях на искомое решение x^* . Мы будем предполагать, что выполнено условие истокопредставимости

$$\exists w \in H : x^* - \xi = J''(x^*)w \quad (6)$$

с некоторым априори заданным элементом $\xi \in H$. При дополнительном условии выпуклости функционала J известна оценка точности $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha)$ (см. [3, теорема 3.9]). В [4] такая же по порядку α оценка установлена для невыпуклых функционалов J , удовлетворяющих структурному условию

$$(J''(x^* + h) - J''(x^*))w = J''(x^*)k(h, w). \quad (7)$$

Это равенство должно выполняться для любых элементов $h, w \in H$, обладающих достаточно малой нормой, с отображением $k : H \times H \rightarrow H$, на которое наложены некоторые дополнительные требования. В [5] при анализе схемы Лаврентьева в применении к операторным уравнениям вида $F(x) = 0$ с монотонным оператором F применялось структурное условие, которое можно получить из (7), если положить $F = J'$. Фактически, рассмотренная в [5] задача является задачей (1) с выпуклым функционалом J , удовлетворяющим (7). Особенностью работ [4], [5] является получение оценок точности изучаемого метода в зависимости от показателя гладкости искомого решения. Без использования структурных условий, подобных (7), для метода Тихонова в применении к некорректным задачам оптимизации с гладкими невыпуклыми функционалами J в [6] установлена оценка $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha^{1/2})$. В настоящей статье впервые устанавливается оценка $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha)$ для произвольных гладких невыпуклых функционалов J .

Изучается также случай, когда вместо точного функционала J в методе Тихонова используется его приближение J_δ . В подобных исследованиях обычно предполагается, что функционалы J_δ и J связаны соотношением

$$|J_\delta(x) - J(x)| \leq \delta \left(1 + \frac{1}{2} \|x - \xi\|^2\right), \quad x \in H, \quad (8)$$

с известным уровнем погрешности δ (см., например, [6], [7]), а параметры α и ε выбираются по определенным правилам в зависимости от δ . В настоящей статье исследуется другой критерий близости приближенного функционала к точному, который также использовался в [4] наряду с (8):

$$\|J'_\delta(x) - J'(x)\| \leq \delta(1 + \|x - \xi\|), \quad x \in H. \quad (9)$$

Таким образом, предполагается, что функционал J_δ всюду дифференцируем по Фреше. При подходящем выборе $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ мы получим оценку точности метода Тихонова с приближенным функционалом, удовлетворяющим условию (9).

Оценки точности метода Тихонова и вычислительных алгоритмов на его основе в применении к задачам в банаховых пространствах приведены, например, в [8–10]. В этих исследованиях

функционал J имеет специальный вид $J(x) = \|F(x)\|^r$, $r > 1$, с наложением дополнительных структурных условий на нелинейность оператора F .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Пусть функционал J на гильбертовом пространстве H имеет точку глобального минимума x^* , причем выполнены условие гладкости (2) и условие истокопредставимости (6). Пусть вместо J известен приближенный функционал J_δ и для него справедливо соотношение (9). Рассмотрим функционал

$$T_{\alpha,\delta}(x) = J_\delta(x) + \alpha \|x - \xi\|^2.$$

Метод Тихонова в применении к задаче (1) заключается в нахождении точки $\tilde{x} = \tilde{x}_{\alpha,\varepsilon,\delta} \in H$, такой что

$$\inf_{x \in H} T_{\alpha,\delta}(x) \leq T_{\alpha,\delta}(\tilde{x}) \leq \inf_{x \in H} T_{\alpha,\delta}(x) + \varepsilon \quad (10)$$

с параметрами $\alpha, \varepsilon > 0$, выбранными подходящим образом в зависимости от δ . Такая точка $\tilde{x}$ всегда существует. Конкретный способ выбора параметров $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ будет уточнен позже.

Из (10) следует, что для произвольного элемента $z \in H$ справедливо неравенство

$$J_\delta(\tilde{x}) + \alpha \|\tilde{x} - \xi\|^2 \leq J_\delta(z) + \alpha \|z - \xi\|^2 + \varepsilon,$$

а значит, в силу (9),

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}) + \alpha \|\tilde{x} - \xi\|^2 &\leq J(z) + (J_\delta(z) - J_\delta(\tilde{x})) - (J(z) - J(\tilde{x})) + \alpha \|z - \xi\|^2 + \varepsilon = \\ &= J(z) + \int_0^1 (J'_\delta(\tilde{x} + t(z - \tilde{x})) - J'(\tilde{x} + t(z - \tilde{x})), z - \tilde{x}) dt + \alpha \|z - \xi\|^2 + \varepsilon \leq \\ &\leq J(z) + \delta \left(1 + \max_{t \in [0,1]} \|\tilde{x} + t(z - \tilde{x}) - \xi\| \right) \|z - \tilde{x}\| + \alpha \|z - \xi\|^2 + \varepsilon = \\ &= J(z) + \delta \left(1 + \max_{t \in [0,1]} \|(1-t)(\tilde{x} - \xi) + t(z - \xi)\| \right) \|z - \tilde{x}\| + \alpha \|z - \xi\|^2 + \varepsilon \leq \\ &\leq J(z) + \delta (1 + \|\tilde{x} - \xi\| + \|z - \xi\|) \|z - \tilde{x}\| + \alpha \|z - \xi\|^2 + \varepsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

В ходе дальнейших рассуждений мы будем подставлять вместо z в неравенство (11) и его следствия разные элементы пространства H .

Следуя [6], для оценки величины $\|\tilde{x} - \xi\|$ запишем неравенство (11) с $z = x^*$:

$$J(\tilde{x}) + \alpha \|\tilde{x} - \xi\|^2 \leq J(x^*) + \delta (1 + \|\tilde{x} - \xi\| + \|x^* - \xi\|) \|x^* - \tilde{x}\| + \alpha \|x^* - \xi\|^2 + \varepsilon.$$

С учетом неравенства $J(x^*) \leq J(\tilde{x})$ отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \xi\|^2 &\leq \|x^* - \xi\|^2 + \frac{\delta}{\alpha} (1 + \|\tilde{x} - \xi\| + \|x^* - \xi\|) (\|\tilde{x} - \xi\| + \|x^* - \xi\|) + \frac{\varepsilon}{\alpha}; \\ \|\tilde{x} - \xi\| \left(\left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \|\tilde{x} - \xi\| - \frac{\delta}{\alpha} (1 + 2\|x^* - \xi\|) \right) &\leq \|x^* - \xi\|^2 + \frac{\delta}{\alpha} (1 + \|x^* - \xi\|) \|x^* - \xi\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \varepsilon(\delta) = O(\alpha^4(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (13)$$

Пусть $\delta_0 \in (0, 1]$ таково, что

$$\forall \delta \in (0, \delta_0], \quad \alpha(\delta) \leq 1, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \leq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Далее предполагается, что $\delta \in (0, \delta_0]$, так что неравенства (14) выполнены.

Заметим, что в случае, если выполнено неравенство

$$\|\tilde{x} - \xi\| \geq 2 + 4\|x^* - \xi\|, \quad (15)$$

для левой части (12) в силу (14) справедлива оценка

$$\|\tilde{x} - \xi\| \left(\left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \|\tilde{x} - \xi\| - \frac{\delta}{\alpha} (1 + 2\|x^* - \xi\|) \right) \geq \frac{1}{4} \|\tilde{x} - \xi\|^2,$$

так что в этом случае

$$\frac{1}{4} \|\tilde{x} - \xi\|^2 \leq \|x^* - \xi\|^2 + \frac{\delta}{\alpha} (1 + \|x^* - \xi\|) \|x^* - \xi\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Вновь используя (13), получаем оценку

$$\|\tilde{x} - \xi\| \leq C_1, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \quad (16)$$

Поясним смысл сделанного вывода. Здесь и далее мы считаем фиксированными функционал J , константу Λ , элементы ξ и w , зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ (точный вид этих зависимостей будет указан позже). Через $C_1, C_2, \dots$ мы будем обозначать константы, не зависящие от δ и J_δ — в частности, это значит, что они не зависят также от α и ε , хотя могут различаться для разных функционалов J или при разном выборе точки ξ . Мы доказали оценку (16) в предположении (15), однако легко видеть, что она справедлива и без этого предположения, поскольку правая часть (15) является константой в указанном выше смысле. Оценка (16) означает, что при любом выборе $\delta \in (0, \delta_0]$ и функционала J_δ , удовлетворяющего неравенству (9), соответствующая точка $\tilde{x}$, определяемая соотношениями (10), не может покидать некоторого круга.

В силу (11) и (16), для произвольного элемента $z \in H$ справедливо

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}) + \alpha \|\tilde{x} - \xi\|^2 &\leq J(z) + \alpha \|z - \xi\|^2 + \delta(C_2 + \|z - \xi\|) \|z - \tilde{x}\| + \varepsilon; \\ \|\tilde{x} - \xi\|^2 - \|z - \xi\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha} (J(z) - J(\tilde{x})) + \frac{\delta}{\alpha} (C_2 + \|z - \xi\|) \|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя легко проверяемое равенство

$$\|\tilde{x} - \xi\|^2 - \|z - \xi\|^2 = \|\tilde{x} - x^*\|^2 - 2(x^* - \xi, z - \tilde{x}) - \|z - x^*\|^2$$

и условие истокорпредставимости (6), получаем отсюда

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^*\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha} (J(z) - J(\tilde{x})) + 2(x^* - \xi, z - \tilde{x}) + \|z - x^*\|^2 + \frac{\delta}{\alpha} (C_2 + \|z - \xi\|) \|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} (J(z) - J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z - x^*) + 2(J''(x^*)w, x^* - \tilde{x}) + \|z - x^*\|^2 + \\ &\quad + \frac{\delta}{\alpha} (C_2 + \|z - \xi\|) \|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим теперь, что в силу (3) справедливо представление

$$J'(\tilde{x}) = J'(x^*) + J''(x^*)(\tilde{x} - x^*) + S_1, \quad \|S_1\| \leq \frac{1}{2} \Lambda \|\tilde{x} - x^*\|^2. \quad (19)$$

Здесь $J'(x^*) = 0_H$, поэтому

$$(J''(x^*)w, x^* - \tilde{x}) = (w, J''(x^*)(x^* - \tilde{x})) = (w, S_1 - J'(\tilde{x})).$$

Подставим полученное равенство в (18):

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^*\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha} (J(z) - J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z - x^*) + 2(w, S_1) - 2(w, J'(\tilde{x})) + \\ &\quad + \|z - x^*\|^2 + \frac{\delta}{\alpha} (C_2 + \|z - \xi\|) \|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned} \quad (20)$$

Докажем, что элемент $J'(\tilde{x})$ в (20) допускает следующее представление.

Лемма 1. Пусть выполнены соотношения (2), (9), (10), (13). Тогда справедливо представление

$$J'(\tilde{x}) = -2\alpha(\tilde{x} - \xi) + S_2, \quad \|S_2\| \leq C_3(\sqrt{\varepsilon} + \delta). \quad (21)$$

Доказательство. Запишем неравенство (17) в виде

$$T_\alpha(\tilde{x}) \leq T_\alpha(z) + \delta(C_2 + \|z - \xi\|)\|z - \tilde{x}\| + \varepsilon. \quad (22)$$

Напомним, что здесь

$$T_\alpha : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_\alpha(x) = J(x) + \alpha\|x - \xi\|^2.$$

Заметим, что $T_\alpha''(x) = J''(x) + 2\alpha E$, где E — единичный оператор в H , поэтому вторая производная T_α'' удовлетворяет условию Липшица (2) с той же константой Λ , что и J'' , и, значит, справедлива оценка (4) с заменой J на T_α . Положим $z = \tilde{x} - \sigma T'_\alpha(\tilde{x})$, $\sigma > 0$, в (22) и с учетом этой оценки получаем

$$\begin{aligned} T_\alpha(\tilde{x}) &\leq T_\alpha(\tilde{x}) - (T'_\alpha(\tilde{x}), \sigma T'_\alpha(\tilde{x})) + \frac{\sigma^2}{2} (T''_\alpha(\tilde{x}) T'_\alpha(\tilde{x}), T'_\alpha(\tilde{x})) + \\ &+ \frac{1}{6} \Lambda \sigma^3 \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^3 + \delta \sigma (C_2 + \|\tilde{x} - \sigma T'_\alpha(\tilde{x}) - \xi\|) \|T'_\alpha(\tilde{x})\| + \varepsilon; \\ \sigma \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 &\leq \frac{\sigma^2}{2} \|T''_\alpha(\tilde{x})\| \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 + \frac{1}{6} \Lambda \sigma^3 \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^3 + \delta \sigma (C_4 + \sigma \|T'_\alpha(\tilde{x})\|) \|T'_\alpha(\tilde{x})\| + \varepsilon; \\ \sigma \|T'_\alpha(\tilde{x})\| (\|T'_\alpha(\tilde{x})\| - C_4 \delta) &\leq \frac{\sigma^2}{2} \|T''_\alpha(\tilde{x})\| \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 + \frac{1}{6} \Lambda \sigma^3 \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^3 + \delta \sigma^2 \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу (2), (3), (14) и (16), здесь

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| = \|J'(\tilde{x}) + 2\alpha(\tilde{x} - \xi)\| \leq \|J'(\xi)\| + \|J''(\xi)\| \|\tilde{x} - \xi\| + \frac{1}{2} \Lambda \|\tilde{x} - \xi\|^2 + 2\alpha \|\tilde{x} - \xi\| \leq C_5,$$

$$\|T''_\alpha(\tilde{x})\|_{L(H)} = \|J''(\tilde{x}) + 2\alpha E\|_{L(H)} \leq \|J''(\xi)\|_{L(H)} + \Lambda \|\tilde{x} - \xi\| + 2\alpha \leq C_6.$$

поэтому

$$\sigma \|T'_\alpha(\tilde{x})\| (\|T'_\alpha(\tilde{x})\| - C_4 \delta) \leq C_7 \|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 \sigma^2 (1 + \sigma) + \varepsilon. \quad (23)$$

Если выполнено неравенство

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| \geq 2C_4 \delta, \quad (24)$$

то $C_4 \delta \leq \|T'_\alpha(\tilde{x})\|/2$ и из (23) следует

$$\sigma \leq 2C_7 \sigma^2 (1 + \sigma) + \frac{2\varepsilon}{\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2}.$$

Выберем теперь параметр $\sigma > 0$ так, чтобы

$$C_7 \sigma (1 + \sigma) \leq \frac{1}{4}.$$

Специально отметим, что выбранное значение σ не зависит от δ или J_δ . Получаем

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 \leq \frac{4\varepsilon}{\sigma};$$

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}.$$

Эта оценка получена нами в предположении (24). Поэтому без данного предположения будет справедлива такая оценка:

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} + 2C_4 \delta,$$

или, что то же самое,

$$\|J'(\tilde{x}) + 2\alpha(\tilde{x} - \xi)\| \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} + 2C_4 \delta.$$

Отсюда сразу следует представление (21). Лемма доказана.

Подставим теперь полученное представление (21) в (20). Тогда с использованием (19) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^*\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha}(J(z) - J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z - x^*) + 2(w, S_1) + 4\alpha(w, \tilde{x} - \xi) - 2(w, S_2) + \|z - x^*\|^2 + \\ &+ \frac{\delta}{\alpha}(C_2 + \|z - \xi\|)\|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}(J(z) - J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z - x^*) + \Lambda\|w\|\|\tilde{x} - x^*\|^2 + \\ &+ 4\alpha(w, \tilde{x} - x^*) + 4\alpha(w, J''(x^*)w) + \|z - x^*\|^2 + 2C_3\|w\|(\sqrt{\varepsilon} + \delta) + \frac{\delta}{\alpha}(C_2 + \|z - \xi\|)\|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}, \end{aligned}$$

справедливой для любого $z \in H$. Потребуем теперь, чтобы выполнялось дополнительное условие

$$\Lambda\|w\| < 1. \quad (25)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^*\|^2 &\leq C_8 \left(\frac{1}{\alpha}(J(z) - J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z - x^*) + 4\alpha(w, \tilde{x} - x^*) + \right. \\ &\left. + 4\alpha(w, J''(x^*)w) + \|z - x^*\|^2 + 2C_3\|w\|(\sqrt{\varepsilon} + \delta) + \frac{\delta}{\alpha}(C_2 + \|z - \xi\|)\|z - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Положим здесь $z = x^* - 2\alpha w$ и с учетом (13), (16) получим

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 \leq \frac{C_8}{\alpha}(J(x^* - 2\alpha w) - J(\tilde{x})) + C_9 \left(\alpha^2 + \delta + \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right) \|\tilde{x} - x^*\| \right). \quad (26)$$

Оценим величину $J(x^* - 2\alpha w) - J(\tilde{x})$ в (26). Справедлива

Лемма 2. Пусть выполнены соотношения (2), (6), (9), (10), (13). Тогда справедлива оценка

$$J(x^* - 2\alpha w) - J(\tilde{x}) \leq C_{10}\alpha(\alpha^2 + \delta + \alpha\|\tilde{x} - x^*\|). \quad (27)$$

Доказательство. С использованием соотношения (4) получаем

$$\begin{aligned} J(x^* - 2\alpha w) - J(\tilde{x}) &= (J(x^* - 2\alpha w) - J(x^*)) + (J(x^*) - J(\tilde{x})) \leq \\ &\leq (J'(x^*), -2\alpha w) + \frac{1}{2}(J''(x^*)(-2\alpha w), -2\alpha w) + \frac{1}{6}\Lambda(2\alpha\|w\|)^3 + (J(x^*) - J(\tilde{x})) \leq \\ &\leq 2\alpha^2(J''(x^*)w, w) + (J(x^*) - J(\tilde{x})) + C_{11}\alpha^3. \end{aligned} \quad (28)$$

Следующие рассуждения справедливы для любого самосопряженного линейного непрерывного оператора B в пространстве H . Конкретный выбор оператора B будет осуществлен позже и не будет зависеть от δ . Имеем

$$\begin{aligned} J(x^*) - J(\tilde{x}) &\leq J(\tilde{x} - BJ'(\tilde{x})) - J(\tilde{x}) \leq -(J'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \frac{1}{2}(J''(\tilde{x})BJ'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \\ &+ \frac{1}{6}\Lambda\|B\|^3\|J'(\tilde{x})\|^3 \leq -(J'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \frac{1}{2}(J''(x^*)BJ'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \\ &+ \frac{1}{2}\Lambda\|\tilde{x} - x^*\|\|B\|^2\|J'(\tilde{x})\|^2 + \frac{1}{6}\Lambda\|B\|^3\|J'(\tilde{x})\|^3. \end{aligned}$$

В силу (13), (16) и (21), $\|J'(\tilde{x})\| \leq C_{12}\alpha$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} J(x^*) - J(\tilde{x}) &\leq -(J'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \frac{1}{2}(J''(x^*)BJ'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + C_{13}\alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|) = \\ &= \left(J'(\tilde{x}), \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B \right) J'(\tilde{x}) \right) + C_{13}\alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|). \end{aligned}$$

Вновь используем представление (21):

$$\begin{aligned} J(x^*) - J(\tilde{x}) &\leq \left(-2\alpha(\tilde{x} - \xi) + S_2, \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B \right) (-2\alpha(\tilde{x} - \xi) + S_2) \right) + \\ &+ C_{13}\alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|) = \left(-2\alpha(x^* - \xi), \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B \right) (-2\alpha(x^* - \xi)) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(-2\alpha(x^* - \xi), \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) (-2\alpha(\tilde{x} - x^*) + S_2) \right) + \\
& + \left((-2\alpha(\tilde{x} - x^*) + S_2), \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) (-2\alpha(\tilde{x} - x^*) + S_2) \right) + \\
& + C_{13}\alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|) \leq 4\alpha^2 \left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) (x^* - \xi) \right) + \\
& + C_{14}(\alpha(\alpha\|\tilde{x} - x^*\| + \delta + \sqrt{\epsilon}) + (\alpha\|\tilde{x} - x^*\| + \delta + \sqrt{\epsilon})^2 + \alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|)) \leq \\
& \leq 4\alpha^2 \left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) (x^* - \xi) \right) + C_{15}(\alpha^3 + \alpha^2\|\tilde{x} - x^*\| + \alpha\delta).
\end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали соотношения (13) и неравенство (16). Комбинируя полученную оценку с (28), получаем

$$\begin{aligned}
J(x^* - 2\alpha w) - J(\tilde{x}) & \leq 2\alpha^2(J''(x^*)w, w) + 4\alpha^2 \left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) (x^* - \xi) \right) + \\
& + C_{16}\alpha(\alpha^2 + \delta + \alpha\|\tilde{x} - x^*\|) = 2\alpha^2\Delta + C_{16}\alpha(\alpha^2 + \delta + \alpha\|\tilde{x} - x^*\|),
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta & = (J''(x^*)w, w) + 2 \left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) (x^* - \xi) \right) = (J''(x^*)^{1/2}w, J''(x^*)^{1/2}w) + \\
& + 2 \left(J''(x^*)w, \left(-B + \frac{1}{2} BJ''(x^*)B \right) J''(x^*)w \right) = (J''(x^*)^{1/2}w, (E - 2J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)^{1/2} + \\
& + J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)BJ''(x^*)^{1/2})J''(x^*)^{1/2}w) = \left(J''(x^*)^{1/2}w, (E - J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)^{1/2})^2 J''(x^*)^{1/2}w \right) = \\
& = \left\| (E - J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)^{1/2}) J''(x^*)^{1/2}w \right\|^2 = \left\| J''(x^*)^{1/2}w - J''(x^*)^{1/2}B(x^* - \xi) \right\|^2.
\end{aligned} \tag{30}$$

Если $x^* = \xi$, то условие (6), а значит, и все дальнейшие выводы из него, справедливы с $w = 0_H$, поэтому $\Delta = 0$ в (30). Предположим, что $x^* \neq \xi$. Отметим, что все последние рассуждения справедливы для любого самосопряженного оператора $B \in L(H)$. Подберем его теперь так, чтобы $B(x^* - \xi) = w$, что опять же влечет $\Delta = 0$ в (30). Если $(x^* - \xi, w) \neq 0$, то подходит оператор B , заданный формулой $Bx = \frac{(x, w)}{(x^* - \xi, w)} w$, а если $(x^* - \xi, w) = 0$ — то заданный формулой

$$Bx = x - \frac{(x, x^* - \xi - w)}{\|x^* - \xi\|^2} (x^* - \xi - w).$$

Теперь из (29) следует оценка (27). Лемма доказана.

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА

Перейдем теперь к получению искомой оценки точности метода Тихонова. Подставим (27) в (26):

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 \leq C_{17} \left(\alpha^2 + \delta + \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right) \|\tilde{x} - x^*\| \right). \tag{31}$$

Заметим, что для любого $\epsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right) \|\tilde{x} - x^*\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right)^2}{\epsilon^2} + \epsilon^2 \|\tilde{x} - x^*\|^2 \right).$$

Комбинируя его с (31) и выбирая ϵ так, чтобы $\frac{1}{2}C_{17}\epsilon^2 < 1$, приходим к оценке

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 \leq C_{18} \left(\alpha^2 + \delta + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right). \quad (32)$$

Наконец, выберем

$$\alpha(\delta) = K_1 \delta^{1/2}, \quad \epsilon(\delta) = K_2 \delta^2 \quad (33)$$

с произвольными $K_1, K_2 > 0$. Отметим, что эти зависимости удовлетворяют соотношениям (13). Приходим к окончательной оценке

$$\|\tilde{x} - x^*\| \leq C_{19} \delta^{1/2}. \quad (34)$$

Для сравнения, в [6], [7] установлена оценка $\|\tilde{x} - x^*\| = O(\delta^{1/4})$ в случае, если связь между точным и приближенным функционалами определяется соотношением (8). При этом рассматривался как априорный, так и апостериорный способ выбора параметра α в зависимости от уровня погрешности δ .

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть вместо точного функционала J известно его приближение J_δ , выполнены условия (2), (6), (9), (25) и параметры α, ϵ в (10) выбираются по правилу (33). Тогда для точности приближения $\tilde{x}$, доставляемого методом Тихонова (10) в применении к задаче (1), справедлива оценка (34).

Рассмотрим теперь случай, когда известен точный функционал J и метод Тихонова имеет вид (5). Нетрудно видеть, что тогда выполнено условие (9) с $J_\delta = J$, $\delta = 0$. При отсутствии погрешности в минимизируемом функционале параметр ϵ в методе Тихонова следует выбирать в зависимости от значения α . В соответствии с условием (13) примем $\epsilon(\alpha) = K_3 \alpha^4$ с произвольным $K_3 > 0$. При этом все проведенные здесь рассуждения вплоть до (32) остаются справедливыми, а сама оценка (32) принимает вид

$$\|x_{\alpha, \epsilon} - x^*\| \leq C_{20} \alpha. \quad (35)$$

Если же функционал J слабо полунепрерывен снизу, можно положить $\epsilon = 0$ в (5) и получить оценку

$$\|x_\alpha - x^*\| \leq C_{20} \alpha \quad (36)$$

для $x_\alpha = \operatorname{argmin}_{x \in H} T_\alpha(x)$. Тем самым, доказана

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2), (6), (25). Тогда при выборе параметра ϵ в методе Тихонова (5) с точно заданным функционалом J по правилу $\epsilon(\alpha) = K_3 \alpha^4$, $K_3 > 0$ справедлива оценка (35). Если, кроме того, функционал J слабополунепрерывен снизу, то для точки x_α , доставляющей глобальный минимум функционалу Тихонова T_α , справедлива оценка (36).

Подчеркнем, что теорема 2 относится к случаю точно заданного функционала J и не связана с введенным в настоящей статье предположением (9). Установленные в этой теореме оценки ранее были известны только при условии выпуклости функционала J или при наложении структурного условия на его нелинейность. Теорема 2 усиливает оценку $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha^{1/2})$, полученную в [6] без использования подобных условий. Кроме того, теоремы 1 и 2 усиливают результаты, полученные в [4], в случае, когда показатель истокорепредставимости равен $p = 1$. А именно, в [4] получены те же самые оценки (34) и (36), что и в настоящей статье, однако мы при доказательстве теоремы 1 накладываем на погрешность функционала J только условие (9), а в [4] используются сразу оба условия (8), (9) и еще структурное условие на нелинейность. Отметим также, что в [4] доказана невозможность существенного улучшения обсуждаемых оценок точности метода Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачёв В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011.
2. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
3. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
4. *Кокурин М.Ю.* Необходимые и достаточные условия степенной сходимости приближений в схеме Тихонова для решения некорректных экстремальных задач // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 60–69.
5. *Tautenhahn U.* On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 191–207.
6. *Кокурин М.Ю.* Оценки скорости сходимости в схеме Тихонова для решения некорректных невыпуклых экстремальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 7. С. 1103–1112.
7. *Kokurin M.Y.* Source conditions and accuracy estimates in Tikhonov’s scheme of solving ill-posed nonconvex optimization problems // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2018. V. 26. № 4. P. 463–475.
8. *Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K.* Regularization Methods in Banach Spaces // Radon Series on Computational and Applied Mathematics. 2012.
9. *Anzengruber S.W., Ramlau R.* Morozov’s discrepancy principle for Tikhonov-type functionals with nonlinear operators // Inverse Problems. 2010. V. 26. № 2. 025001.
10. *Zhong M., Wang W.* A global minimization algorithm for Tikhonov functionals with p -convex ($p \geq 2$) penalty terms in Banach spaces // Inverse Problems. 2016. V. 32. № 10. 104008.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.622

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ КОШИ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ¹⁾

© 2023 г. Е. Б. Кузнецов^{1,*}, С. С. Леонов^{1,2,**}, Е. Д. Цапко^{1,***}

¹ 125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ (национальный исследовательский университет), Россия

² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: kuznetsov@mai.ru

**e-mail: powerandglory@yandex.ru

***e-mail: zapkokaty@gmail.com

Поступила в редакцию 11.08.2022 г.
Переработанный вариант 01.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

При моделировании физических и технологических процессов исследователи часто сталкиваются с решением жестких начальных задач. Нахождение их точного аналитического решения в большинстве случаев затруднительно. В то же время применение численных схем для их решения не всегда позволяет получить достаточно точное решение за приемлемое расчетное время. Более того, для некоторого класса задач численные схемы решения оказываются непригодными из-за недостаточной устойчивости. В статье рассматриваются численные методы на основе продолжения решения по аргументам различного вида, которые позволяют увеличить устойчивость явных численных схем. Наиболее часто используемый наилучший аргумент оказывается малоприменим для решения задач, скорость роста интегральных кривых которых является сверхстепенной или близка к экспоненциальной. Авторами ранее была предложена модификация наилучшего аргумента, которая позволила сгладить указанные недостатки. В настоящей работе получена оценка области абсолютной устойчивости явной схемы метода Эйлера при решении задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу специального вида, и уточнено доказательство аналогичной оценки для начальных задач, преобразованных к наилучшему аргументу. Проведена апробация полученных теоретических оценок и дан анализ применения модифицированного наилучшего аргумента продолжения решения на примере тестовой начальной задачи. Библ. 41. Фиг. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, область устойчивости, задача Коши, явная схема Эйлера, задача Далквиста, метод продолжения решения, наилучший аргумент, модифицированный наилучший аргумент.

DOI: 10.31857/S0044466923040129, EDN: IPJBXS

1. ВВЕДЕНИЕ

Жесткие начальные и краевые задачи возникают во многих областях науки и техники: аэро- и гидродинамика, химическая кинетика, теория горения и теория управления (см. [1]). Л. Прандтль был одним из первых, кто обнаружил эффект пограничного слоя, рассматривая движение вязкой жидкости с малым трением, описываемое системой уравнений Навье–Стокса (см. [2]). К подобным задачам относится приближенное решение уравнений с малым параметром при старшей производной. Они получили название сингулярно возмущенных уравнений и также относятся к классу жестких задач. Методы решения подобных задач получили развитие в работах А.Н. Тихонова [3] и А.Б. Васильевой [4]. В дальнейшем, в работах В.Ф. Бутузова, А.Б. Васильевой, Н.Н. Нефедова и их учеников (см., например, [5–7]) были рассмотрены задачи не только с пограничным слоем, но и с внутренними слоями. Последние получили название задач с контрастными структурами.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-31-90054).

Вычислительные проблемы численного решения жестких задач были отмечены уже в конце 40-х годов прошлого века (см. [8]). Позже было разработано множество специализированных подходов, которые подробно описаны в [9] и монографии Э. Хайрера и Г. Ваннера [10]. Вопросы устойчивости методов семейства Рунге–Кутты для жестких начальных задач подробно рассмотрены в монографии К. Деккера и Я. Вервера [11]. Отметим основные и новые работы, связанные с численным решением жестких задач. Одним из первых применил формулы дифференцирования назад к решению жестких систем американский исследователь Гир (см. [12]), что привело к развитию целого ряда неявных схем. Созданию эффективных неявных схем посвящены циклы работ Н.Н. Калиткина и соавт. [13, 14], Г.Ю. Куликова и соавт. [15–20] и Л.М. Скворцова [21–24]. В статьях Н.Н. Калиткина исследуются особенности численного интегрирования нелинейных обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений и предложен класс обратных (диагонально-неявных) схем Рунге–Кутты, а также неявные схемы для задач химической кинетики. В работах Г.Ю. Куликова разработан новый класс неявных (диагональных и симметричных) гнездовых схем численного решения жестких задач, в том числе, с глобальным контролем точности. Показана эффективность гнездовых методов на ряде тестовых задач. Помимо этого, исследована устойчивость симметричных формул Рунге–Кутты при решении гамильтоновых задач, а также при квадратичной экстраполяции численного решения. Предложенные Л.М. Скворцовым эффективные реализации неявных схем и модификации диагонально-неявных схем показали свою применимость к решению жестких начальных задач как для дифференциальных, так и для дифференциально-алгебраических уравнений. Указанные работы показывают, что неявные схемы дают высокую точность и устойчивость при решении жестких задач, но по быстродействию они намного уступают явным схемам.

Применению явных методов к решению жестких задач посвящена монография Е.А. Новикова [25] и его учебное пособие в соавторстве с Ю.В. Шорниковым [26]. К этой же тематике относятся статьи этого же автора [27–29] и Л.М. Скворцова [30], [31]. В статьях Е.А. Новикова приводятся результаты сразу по нескольким областям исследования: настройка (адаптация) численной схемы на основе критерия L-устойчивости по схеме Ческино, конструирование явных схем с расширенными областями устойчивости, решение жестких задач явными схемами с малой и умеренной точностью. Явным адаптивным (настраиваемым на конкретную задачу) схемам семейства Рунге–Кутты посвящены указанные выше работы Л.М. Скворцова. В работах В.И. Лебедева [32], [33] рассматривается применение многочленов Чебышева к решению жестких задач явными методами. Отмеченные статьи ярко указывают на недостатки применения явных схем к решению жестких задач. Большинство явных схем дают только малую или умеренную точности. При расширении области устойчивости в большинстве случаев явная схема усложняется, сокращается ее быстродействие. То же самое относится и к адаптивным явным методам, в которых возникают также трудности подбора структуры численной схемы. Тем не менее явные схемы предпочтительнее неявных, особенно для задач большой размерности.

Для устранения указанного недостатка и возможности использования явных схем, которые значительно проще алгоритмически и менее требовательны к вычислительным ресурсам, для решения жестких задач в монографии В.И. Шалашилина и Е.Б. Кузнецова [34] было предложено использовать метод продолжения решения по наилучшему аргументу. Ими же было доказано, что данный метод позволяет расширить область абсолютной устойчивости для явной схемы метода Эйлера. Отметим также значение наилучшей параметризации (позволяющей в ряде случаев улучшить ситуацию с применением методов с фиксированным размером шага интегрирования) для адаптивности квазисогласованных методов Нордсика и явных численных схем со свойством двойной квазисогласованности при решении умеренно жестких задач (см. [35], [36]).

Однако при решении жестких задач, в которых скорость роста интегральных кривых сверхстепенная или близка к экспоненциальной, наилучший аргумент может оказаться малоэффективным. В [37] авторами был предложен новый подход к решению таких задач. Он основан на модификации наилучшего параметра таким образом, чтобы снизить показатель жесткости исходной задачи. В настоящей работе получена оценка изменения области абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для исходной задачи при преобразовании ее наилучшим аргументом и модифицированным наилучшим аргументом специального вида. Проведена апробация полученных теоретических оценок и дан анализ применения модифицированного наилучшего аргумента продолжения на примере решения тестовой задачи.

2. МЕТОД НАИЛУЧШЕЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Рассмотрим задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y^{(0)}, \quad (2)$$

где t_0 — начальное значение аргумента задачи, $y^{(0)}$ — значение искомой функции $y(t)$ в начальной точке, T — заданное значение правой границы отрезка изменения аргумента задачи, $f(t, y)$ — функция правой части, которая, в общем случае, может иметь особенности, такие как предельные особые точки или точки бифуркации, а также содержать множитель, принимающий большие абсолютные значения.

Применение метода продолжения решения по наилучшему аргументу, называемому иначе методом наилучшей параметризации или методом длины дуги, для решения задач Коши основывается на переходе к новому аргументу.

2.1. Наилучший аргумент

Наилучший аргумент λ , рассматриваемый В.И. Шалашилиным и Е.Б. Кузнецовым в монографии [34], отсчитывается по касательной вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи Коши, квадрат дифференциала дуги интегральной кривой имеет для задачи (1)–(2) вид

$$d\lambda^2 = dy^2 + dt^2. \quad (3)$$

Используя аргумент λ , задаваемый соотношением (3), применительно к задаче (1)–(2), получим преобразованную систему относительно нового аргумента λ следующего вида:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{f(t, y)}{\sqrt{1 + f^2(t, y)}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2(t, y)}}, \quad (4)$$

$$y(0) = y^{(0)}, \quad t(0) = t_0.$$

В [34, 38] было изучено влияние такого преобразования на область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера. Доказано, что переход к наилучшему аргументу увеличивает область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для задачи (4), что уменьшает вычислительные трудности, характерные для жестких систем.

2.2. Экспоненциальный наилучший аргумент

В [37] предложен новый подход к решению жестких и сверхжестких начальных задач. Он основан на использовании вместо наилучшего аргумента его модификации следующего вида:

$$d\mu^2 = dy^2 + \exp(-2\gamma t) dt^2, \quad (5)$$

где γ — заданный параметр, выбираемый из условия его превосходства над показателем жесткости решаемой задачи.

Задача (1), преобразованная к новому аргументу μ задаваемым соотношением вида (5), примет вид

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{f(t, y) \exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + \exp(2\gamma t) f^2(t, y)}}, \quad \frac{dt}{d\mu} = \frac{\exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + \exp(2\gamma t) f^2(t, y)}}, \quad (6)$$

$$y(0) = y^{(0)}, \quad t(0) = t_0.$$

В [37] на тестовых примерах была показана численная эффективность разработанного подхода в сравнении с традиционными методами и наилучшей параметризацией, когда скорость роста интегральных кривых рассматриваемой задачи является экспоненциальной. В настоящей статье будет дана оценка области абсолютной устойчивости явного метода Эйлера при решении преобразованной экспоненциальным модифицированным наилучшим аргументом задачи (6). Будет доказано и продемонстрировано на тестовой задаче, что применение нового подхода увеличивает

ет область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера и дает возможность более эффективно использовать явный метод Эйлера при решении жестких начальных задач.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЯВНОЙ СХЕМЫ МЕТОДА ЭЙЛЕРА

Исследование области устойчивости и спектральных характеристик дифференциальных операторов, как было предложено в [39], рассматривают на примере задачи, получившей название задачи Далквиста:

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad y(0) = y_0, \quad (7)$$

где a — некоторая, в общем случае комплексная, константа. В стандартной задаче Далквиста константа a предполагается действительной и отрицательной. Но рассматривая возможность комплексных значений константы a , можно области абсолютной устойчивости придать ясный геометрический смысл, как это показано ниже в замечании 2.

Задача (7) моделирует локальное поведение решения дифференциального уравнения (1) в том смысле, что в окрестности любой точки (t_0, y_0) решение уравнения (1) ведет себя так, как решение линеаризованного уравнения

$$\frac{dY}{dt} = f_y(t_0, y_0)Y$$

в окрестности нуля. Тогда, если a — собственное значение линеаризованной задачи, то по поведению решений разностного метода на уравнении (7) можно предсказать их поведение на произвольном дифференциальном уравнении.

Теорема 1. *Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (7) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_t| \leq \frac{2}{|a|}. \quad (8)$$

Доказательство. Применяя явную схему метода Эйлера к задаче (7) в окрестности точки $M(t_m, y_m)$, получим разностное уравнение вида

$$y_{m+1} = y_m + ah_t y_m = (1 + ah_t)y_m, \quad (9)$$

где h_t — шаг интегрирования.

По определению разностный метод абсолютно устойчив, если все корни характеристического уравнения не превосходят по модулю единицу (см. [11], [40]). Для схемы (9) собственное значение $\xi = 1 + ah_t$.

При положительных значениях h_t неравенство $|1 + ah_t| \leq 1$ может быть справедливо только при $a < 0$. В этом случае условие устойчивости схемы (9) примет вид

$$0 < h_t \leq \frac{2}{|a|}.$$

В случае отрицательных значений h_t неравенство $|1 + ah_t| \leq 1$ может быть справедливо только при $a > 0$. В этом случае условие устойчивости схемы (9) переписывается в виде

$$-\frac{2}{|a|} \leq h_t < 0.$$

Объединяя два этих неравенства, получим условие (8).

В тривиальных случаях при $h_t = 0$ или $a = 0$ абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_t = 0$ исключается.

3.1. Область устойчивости метода Эйлера для задачи, преобразованной к наилучшему аргументу

Задачу (7) можно преобразовать к наилучшему аргументу λ вида (3). Преобразованная задача примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= \frac{ay}{\sqrt{1+a^2y^2}}, & \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2y^2}}, \\ y(0) &= y^{(0)}, & t(0) &= t_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие абсолютной устойчивости для нее получено в статье Е.Б. Кузнецова и В.И. Шалашилина [38]. Откуда следует

Теорема 2. Разностная схема явного метода Эйлера для преобразованной к наилучшему аргументу λ вида (3) задачи (10) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству

$$|h_k| \leq \frac{2(1+a^2y_m^2)^{3/2}}{|a|}. \quad (11)$$

Здесь y_m — решение задачи (10), полученное на m -м шаге явным методом Эйлера.

Доказательство. Приведем уточненное доказательство теоремы. Обозначим правые части уравнений задачи (10) как

$$f_1(y) = \frac{ay}{\sqrt{1+a^2y^2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2y^2}}.$$

В общем случае, правые части системы (10) могут зависеть от аргумента исходной задачи t , но в данном случае такой зависимости нет, поэтому представим функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$, используя разложение по формуле Тейлора до первой степени включительно в окрестности $y = y_m$. Рассмотрим сначала первое уравнение задачи (10), разложив его правую часть

$$f_1(y) = \frac{ay_m}{\sqrt{1+a^2y_m^2}} + \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}(y-y_m) + O((y-y_m)^2).$$

Рассмотрим линеаризованное первое уравнение вида

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay_m}{\sqrt{1+a^2y_m^2}} + \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}(y-y_m). \quad (12)$$

Введем замену

$$y = \bar{y} + y_*, \quad (13)$$

где y_* — координата точки покоя линеаризованной системы, получаемая из решения уравнения

$$\frac{ay_m}{\sqrt{1+a^2y_m^2}} + \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}(y-y_m) = 0$$

и равная

$$y_* = -a^2y_m^3.$$

Используя замену (13), преобразуем уравнение (12) к виду

$$\frac{d\bar{y}}{d\lambda} = \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}\bar{y}.$$

Линеаризуем второе уравнение задачи (10):

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{1}{ay} \frac{ay}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{1}{ay} \left(\frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}(y-y_*) + O((y-y_*)^2) \right).$$

Разложим первый множитель по формуле Тейлора до членов первого порядка в окрестности точки y_* :

$$\frac{1}{ay} = \frac{1}{ay_*} - \frac{1}{ay_*^2}(y-y_*) + O((y-y_*)^2).$$

Подставляя это разложение в выражение для $f_2(y)$, получим

$$f_2(y) = -\frac{1}{a^2y_m^3(1+a^2y_m^2)^{3/2}}(y-y_*) + O((y-y_*)^2).$$

Используя полученное разложение, перейдем к линеаризованной системе для задачи (10), преобразованной к переменной $\bar{y} = y + a^2y_m^3$:

$$\frac{d\bar{y}}{d\lambda} = \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}\bar{y}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{1}{a^2y_m^3(1+a^2y_m^2)^{3/2}}\bar{y}. \quad (14)$$

Явная схема метода Эйлера для системы (14) имеет вид:

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + h_\lambda \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}\bar{y}_m, \quad t_{m+1} = t_m - h_\lambda \frac{1}{a^2y_m^3(1+a^2y_m^2)^{3/2}}\bar{y}_m. \quad (15)$$

Поскольку линеаризованная система (14) получена использованием линейной замены и правая часть системы уравнений задачи (10) ограничена, то условие абсолютной устойчивости разностной схемы (15) будет эквивалентно условию абсолютной устойчивости для линеаризованной системы исходной задачи (10).

Найдем собственные значения ξ , рассмотрев характеристическое уравнение

$$|A - \xi E| = \begin{vmatrix} 1 + h_\lambda \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}} - \xi & 0 \\ -h_\lambda \frac{1}{a^2y_m^3(1+a^2y_m^2)^{3/2}} & 1 - \xi \end{vmatrix} = (\xi - 1) \left(\xi - \left(1 + h_\lambda \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}} \right) \right) = 0.$$

Получим собственные значения

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1 + h_\lambda \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}}. \quad (16)$$

Поскольку $\xi_1 = 1$, разностная схема (15) будет абсолютно устойчивой, если второе собственное значение ξ_2 не превосходит по модулю единицу, т.е.

$$\left| 1 + h_\lambda \frac{a}{(1+a^2y_m^2)^{3/2}} \right| \leq 1. \quad (17)$$

При значениях шага $h_\lambda > 0$ абсолютная устойчивость схемы (15) возможна только при значениях параметра $a < 0$. Разрешая неравенство (17) относительно шага h_λ , полагая $a = -|a|$, получим

$$0 < h_\lambda \leq \frac{2(1+a^2y_m^2)^{3/2}}{|a|}.$$

При отрицательных значениях шага h_λ абсолютная устойчивость схемы (15) возможна только при значениях параметра $a > 0$. Разрешая неравенство (17) относительно шага h_λ , полагая $a = |a|$, получим

$$-\frac{2(1+a^2y_m^2)^{3/2}}{|a|} \leq h_\lambda < 0.$$

Объединяя два этих неравенства, получим условие (11).

В тривиальных случаях при $h_\lambda = 0$ или $a = 0$ абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = \xi_1 = \xi_2 = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_\lambda = 0$ исключается.

Замечание 1. Приводимое выше доказательство теоремы, сформулированной в работе Е.Б. Кузнецова и В.И. Шалашилина [34], является новым, обобщая доказательство, приводимое в статье [34]. Е.Б. Кузнецовым и В.И. Шалашилиным принималось, что второе уравнение системы задачи (10) вносит пренебрежимо малый вклад в характер устойчивости приближенного решения, что является верным только в окрестности предельной особой точки. Вследствие чего второе уравнение исключалось из рассмотрения. В приведенном здесь доказательстве этот малый недостаток устранен.

Замечание 2. Известно, что областью устойчивости явного метода Эйлера для исходной задачи (7) является круг единичного радиуса с центром в точке $(-1, 0)$. В [34] доказано, что для преобразованной задачи (10) областью устойчивости будет круг радиуса $\rho^{3/2}$ с центром в точке $(\rho^{3/2}, 0)$, где $\rho = |1 + a^2y_m^2|$. При комплексных значениях a выражение для ρ можно переписать в виде

$$\rho = \sqrt{(1 + (\alpha^2\beta^2)y_m^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2y_m^4},$$

где α и β — действительная и мнимая части параметра a . Доказательство данного утверждения здесь опускается.

Замечание 3. Само доказательство теоремы 2 дает множество интересных следствий. Одно из них заключается в том, что одно из собственных значений $\xi_1 = 1$. Это означает, что даже при выборе значения шага из условия (11) максимальное значение $\xi_{\max} = 1$, т.е. разностная схема находится в пограничном состоянии между абсолютной устойчивостью и ее потерей. Даже для линеаризованной системы абсолютная устойчивость может быть потеряна при наложении ошибок округления. При линеаризации системы уравнений задачи (10) отбрасываются нелинейные члены, учет которых также может привести к потере абсолютной устойчивости. Данное наблюдение позволяет объяснить тот факт, что для ряда жестких начальных задач для автономных систем дифференциальных уравнений преобразование к наилучшему аргументу либо не дает вычислительных преимуществ, либо эти преимущества минимальны.

Замечание 4. Представленное выше замечание показывает, что для анализа области абсолютной устойчивости разностных схем решения начальных задач, преобразованных к наилучшему аргументу, недостаточно рассмотрения тестовой задачи Далквиста вида (7). Более целесообразно исследовать область абсолютной устойчивости для обобщенной неавтономной задачи Далквиста вида

$$\frac{dy}{dt} = ay + bt, \quad y(0) = y_0. \quad (18)$$

Решение данной задачи является предметом дальнейших исследований.

3.2. Область устойчивости метода Эйлера для задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу

Применение экспоненциального наилучшего аргумента вида (5) призвано, с одной стороны, упростить вид преобразованной системы и уменьшить трудозатраты, возникающие при решении преобразованных начальных задач. С другой стороны, экспоненциальный наилучший аргумент может позволить расширить область абсолютной устойчивости и снять ограничения, приходящие к наилучшему аргументу, отмеченные в замечании 3.

Рассмотрим преобразованную к экспоненциальному наилучшему аргументу μ вида (5) задачу (7):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\mu} &= \frac{ay \exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp(2\gamma t)}}, & y(0) &= y_0, \\ \frac{dt}{d\mu} &= \frac{\exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp(2\gamma t)}}, & t(0) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Теорема 3. Разностная схема явного метода Эйлера для преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу μ вида (5) задачи (19) является абсолютной устойчивой для значений параметра γ , удовлетворяющих условию

$$a\gamma \leq 0, \quad (20)$$

если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству

$$|h_\mu| \leq \frac{4[1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m)]^{3/2}}{|D_{\max}| \exp(\gamma t_m)}, \quad (21)$$

где y_m и t_m – решение задачи (19), полученное на m -м шаге явным методом Эйлера,

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \begin{cases} D_1, & a + \gamma \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \\ D_2, & a + \gamma < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \end{cases} \\ D_1 &= a + \gamma + \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}, \\ D_2 &= a + \gamma - \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Линеаризуем правые части уравнений задачи (19), используя разложение по формуле Тейлора в окрестности точки с координатами $y = y_m$ и $t = t_m$ до членов первой степени:

$$\begin{aligned} f_1(y, t) &= \frac{ay \exp \gamma t}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp 2\gamma t}} = \frac{ay_m \exp(\gamma t_m)}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}} + \frac{a \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} (y - y_m) + \\ &\quad + \frac{ay_m \gamma \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} (t - t_m) + O((y - y_m)^2 + (t - t_m)^2), \\ f_2(y, t) &= \frac{\exp \gamma t}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp 2\gamma t}} = \frac{\exp(\gamma t_m)}{\sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}} - \frac{y_m a^2 \exp(3\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} (y - y_m) + \\ &\quad + \frac{\gamma \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} (t - t_m) + O((y - y_m)^2 + (t - t_m)^2). \end{aligned}$$

Запишем линеаризованную систему уравнений для задачи (19):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\mu} &= \frac{1}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} \left[a \exp(\gamma t_m) y + ay_m \gamma \exp(\gamma t_m) t + a^3 y_m^3 \exp(3\gamma t_m) - a^2 y_m t_m \gamma \exp(\gamma t_m) \right], \\ \frac{dt}{d\mu} &= \frac{1}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} \left[-y_m a^2 \exp(3\gamma t_m) y + \gamma \exp(\gamma t_m) t + \right. \\ &\quad \left. + \exp(\gamma t_m) + 2a^2 y_m^2 \exp(3\gamma t_m) - \gamma t_m \exp(\gamma t_m) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В линеаризованной системе проведем замену

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y - y^* = y - y_m, \\ \bar{t} &= t - t^* = t - t_m - \frac{a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m) + 1}{\gamma}, \end{aligned}$$

где (t_*, y_*) — точка покоя линеаризованной системы, координаты которой имеют значения

$$y^* = y_m, \quad t^* = \frac{\gamma t_m - a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m) - 1}{\gamma}.$$

Получим новую линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{d\bar{\mu}} &= \frac{a \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} \bar{y} + \frac{a \gamma y_m \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} \bar{t}, \\ \frac{d\bar{t}}{d\bar{\mu}} &= \frac{-a^2 y_m \exp(3\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} \bar{y} + \frac{\gamma \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} \bar{t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку линеаризованная система (23) получена использованием линейной замены, и правая часть системы уравнений задачи (19) ограничена, то условие абсолютной устойчивости разностной схемы (22) будет эквивалентно условию абсолютной устойчивости для линеаризованной системы (23).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}, & \alpha_2 &= \frac{a \gamma y_m \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}, \\ \beta_1 &= \frac{-a^2 y_m \exp(3\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}, & \beta_2 &= \frac{\gamma \exp(\gamma t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Тогда явная схема метода Эйлера для преобразованной системы (23) имеет вид

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + h_\mu (\alpha_1 \bar{y}_m + \alpha_2 \bar{t}_m), \quad \bar{t}_{m+1} = \bar{t}_m + h_\mu (\beta_1 \bar{y}_m + \beta_2 \bar{t}_m). \quad (24)$$

Найдем собственные значения схемы (24), рассмотрев характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1 h_\mu - \xi & \alpha_2 h_\mu \\ \beta_1 h_\mu & 1 + \beta_2 h_\mu - \xi \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем следующие собственные значения:

$$\xi_{1,2} = 1 + \frac{1}{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} h_\mu \left(a + \gamma \pm \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)} \right).$$

Выражение для собственных значений зависит от значений двух параметров a и γ . Проведение анализа на большее собственное значение может оказаться трудоемким, поскольку оно зависит от знаков входящих параметров.

Ограничимся случаем, когда параметры a и γ удовлетворяют условию (20), гарантирующему неотрицательность подкоренных выражений в $\xi_{1,2}$. Тогда наибольшее собственное значение целиком зависит от последнего множителя. Тогда обозначим

$$D_1 = a + \gamma + \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}, \quad D_2 = a + \gamma - \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}. \quad (25)$$

Вычислим максимальное значение

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \gamma \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \\ D_2, & a + \gamma < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}. \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, получаем, что абсолютная устойчивость разностной схемы явного метода Эйлера для преобразованной модифицированным наилучшим аргументом μ вида (5) системы (19) возможна только при выполнении неравенства

$$\left| 1 + \frac{1}{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}} h_\mu D_{\max} \right| \leq 1. \quad (27)$$

В стоящем под модулем выражении знак может менять только $D_{\max}$. При значениях шага $h_{\mu} > 0$ абсолютная устойчивость схемы (24) возможна только при значениях параметра $D_{\max} < 0$. Разрешая неравенство (27) относительно шага h_{μ} , полагая $D_{\max} = -|D_{\max}|$, получим

$$0 < h_{\mu} \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp 2\gamma t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \gamma t_m}.$$

При отрицательных значениях шага h_{μ} абсолютная устойчивость схемы (24) возможна только при значениях параметра $D_{\max} > 0$. Разрешая неравенство (27) относительно шага h_{μ} , полагая $D_{\max} = |D_{\max}|$, получим

$$-\frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp 2\gamma t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \gamma t_m} \leq h_{\mu} < 0.$$

Объединяя два этих неравенства, получим условие (21).

В тривиальных случаях, при $h_{\mu} = 0$ или $D_{\max} = 0$ (т.е. $a = \gamma = 0$) абсолютная устойчивость также имеет место. В обоих случаях максимальное собственное значение $\xi_{\max} = 1$. Однако при практических расчетах случай $h_{\mu} = 0$ исключается.

Сформулируем некоторые следствия из теоремы 3.

Следствие 1. При значении параметра $\gamma = 0$ экспоненциальный аргумент продолжения решения (5) становится наилучшим аргументом, принимая вид (3), а условия устойчивости разностных схем явного метода Эйлера для задач (19) и (10) будут совпадать.

Доказательство. Очевидно, что при $\gamma = 0$ задачи (19) и (10) совпадают. Значит, должны совпадать и условия абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для этих задач. Докажем это.

При $\gamma = 0$ условие (21) примет вид

$$|h_{\mu}| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}{|D_{\max}|}.$$

Учитывая выражения для $D_{\max}$ (26) и D_1, D_2 (25), при $\gamma = 0$ получим

$$|D_{\max}| = 2|a|,$$

что доказывает следствие 1.

Замечание 5. Следствие 1 устанавливает связь между наилучшим аргументом и его модификацией. Экспоненциальный наилучший аргумент (5) является обобщением наилучшего аргумента (3). Экспоненциальный наилучший аргумент нацелен на повышение эффективности численного решения жестких начальных задач. Варьируя значение параметра γ , можно добиться увеличения области абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для преобразованной задачи.

Следствие 2. При значении параметра $\gamma = -a$ условие устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задачи (19) принимает вид

$$|h_{\mu}| \leq \frac{2[\exp(at_m) + a^2 y_m^2 \exp(-at_m)]}{|a|}. \quad (28)$$

Доказательство. При $\gamma = -a$ условие (21) примет вид

$$|h_{\mu}| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m))^{3/2}}{|D_{\max}| \exp(-at_m)}. \quad (29)$$

Вычислим значение $|D_{\max}|$. При $\gamma = -a$ оно примет вид

$$|D_{\max}| = D_1 = \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)} = 2|a| \sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m)}.$$

Подставляя найденное выражение для $|D_{\max}|$ в неравенство (29), перепишем его в виде

$$|h_u| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m))^{3/2}}{2|a|\sqrt{1 + a^2 y_m^2 \exp(-2at_m)} \exp(-at_m)},$$

упростив правую часть неравенства, получим условие (28).

Замечание 6. Условие абсолютной устойчивости (28) зависит от значения параметра a . Рассмотрим функцию

$$F(a) = \frac{[\exp(at_m) + a^2 y_m^2 \exp(-at_m)]}{(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}},$$

которая получена как частное правых частей неравенств (28) и (11). Функция $F(a)$ ограничена снизу, положительная и удовлетворяет условию

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} F(a) = +\infty.$$

Это означает, что существуют такие значения $a_-^* < 0$ и $a_+^* > 0$, для которых справедливо неравенство

$$F(a) > 1 \quad \forall a \in [a_+^*, +\infty) \quad \text{при} \quad a \geq 0 \quad \text{и} \quad \forall a \in (-\infty; a_-^*] \quad \text{при} \quad a \leq 0,$$

т.е. условие абсолютной устойчивости (28) при указанных условиях определяет большую область абсолютной устойчивости, чем при условии (11). Проанализируем этот факт.

При значениях a_-^* и a_+^* , равных нулю, согласно следствию 1, $F(a) = 0$. Однако в окрестности нуля функция $F(a)$ может вести себя следующим образом: сначала возрастать до некоторого значения больше единицы, затем убывать до значения меньше единицы, после чего монотонно возрастать. Поэтому, как правило, значения a_-^* и a_+^* полагаются отличными от нуля. В зависимости от рассматриваемой точки $M(t_m, y_m)$ значения a_-^* и a_+^* могут быть как умеренными, так и большими по модулю.

Следовательно, выбор $\gamma = -a$ хорошо подходит для решения жестких и сверхжестких начальных задач и менее пригоден для начальных задач с малыми значениями параметра a . Однако при больших значениях параметра a возникают вычислительные трудности с проведениями расчетов, поскольку значения $\exp(at_m)$ могут достигать очень больших значений.

4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ТЕСТ

В статье [37] на примере экспоненциального теста, предложенного Н.Н. Калиткиным и А.А. Беловым в [41], показаны преимущества использования наилучшего и модифицированного наилучшего аргументов. Рассмотрим экспоненциальную тестовую задачу

$$\frac{du}{dt} = -\xi(t)u(u^2 - a^2), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (30)$$

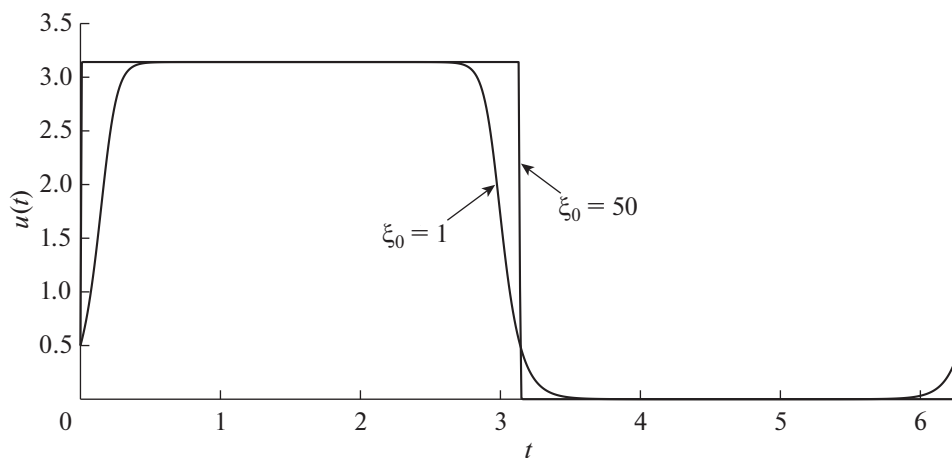
имеющую точное решение

$$u(t) = \frac{au_0}{\sqrt{u_0^2 + (a^2 - u_0^2)\exp(-2a^2\Xi(t))}}, \quad (31)$$

где $\xi(t) = \xi_0 \cos(t)$, $\Xi(t) = \xi_0 \sin(t)$, $u_0 = 0.5$, $a = \pi$. Жесткость задачи регулируется параметром ξ_0 : чем больше ξ_0 , тем уже зоны пограничных и внутренних слоев (см. фиг. 1).

Проведем анализ результатов численного решения исходной задачи (30), а также задачи, преобразованной к наилучшему аргументу λ вида

$$d\lambda^2 = du^2 + dt^2,$$



Фиг. 1. Точное решение (31) экспоненциального теста (30) для $\xi_0 = 1$, $\xi_0 = 50$.

имеющей вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\lambda} &= \frac{-\xi(t)u(u^2 - a^2)}{\sqrt{1 + \xi^2(t)u^2(u^2 - a^2)^2}}, & u(0) &= u_0, \\ \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2(t)u^2(u^2 - a^2)^2}}, & t(0) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

и задачи

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\mu} &= \frac{-\xi(t)u(u^2 - a^2)\exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + \xi^2(t)u^2(u^2 - a^2)^2 \exp(2\gamma t)}}, & u(0) &= u_0, \\ \frac{dt}{d\mu} &= \frac{\exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + \xi^2(t)u^2(u^2 - a^2)^2 \exp(2\gamma t)}}, & t(0) &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу μ :

$$d\mu^2 = du^2 + \exp(-2\gamma t)dt^2.$$

В [37] были представлены численные расчеты задач (30), (32) и (33) явным методом Эйлера с переменным шагом интегрирования, вычисляемым по правилу Рунге–Ромберга–Ричардсона. Эти результаты приведены в табл. 1, где θ – значение локальной погрешности. Начальный шаг имеет значение $h_0 = 10^{-5}$, а параметр модифицированного наилучшего аргумента $\gamma = -100$.

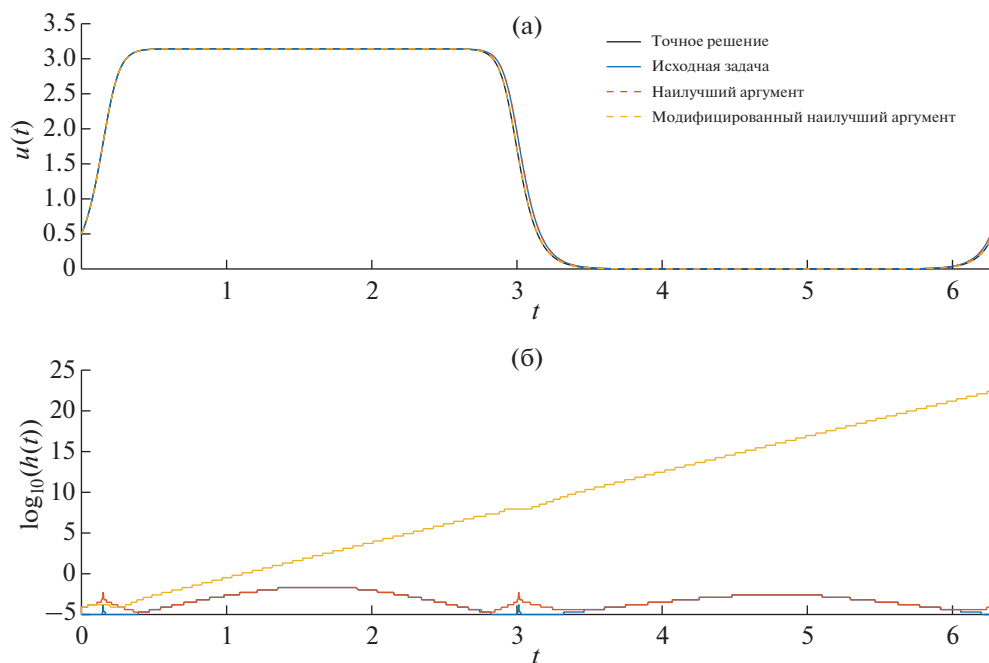
Проведем анализ изменения шага интегрирования в процессе численного решения задач (30), (32) и (33) явным методом Эйлера.

На фиг. 2б изображены значения шага интегрирования в каждой точке решения задач (30), (32) и (33). Для исходной задачи (30) и задачи, преобразованной к наилучшему аргументу (32), наблюдается уменьшение шага интегрирования при прохождении пограничных и внутренних слоев. При решении задачи (33), преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу, шаг практически не уменьшается на протяжении всего процесса вычисления, только приостанавливая свое увеличение при прохождении участков быстрого изменения интегральной кривой. Отметим, что параметр модифицированного наилучшего аргумента здесь имеет значение $\gamma = -10$, в отличие от расчетов, приведенных в табл. 1. Это сделано, чтобы более наглядно представить полученные результаты. Согласно полученным авторами результатам, при $\gamma = -100$ шаг интегрирования задачи (33) увеличивается еще значительно, что делает графики изменения шага интегрирования для задач (30), (32) менее информативными.

Таблица 1. Средняя ошибка и время счета явного метода Эйлера решения задач (30), (32) и (33) с переменным шагом интегрирования

ξ_0	θ	Исходная задача		Наилучший аргумент		Модифицированный наилучший аргумент	
		ε_{avg}	t, c	ε_{avg}	t, c	ε_{avg}	t, c
1	10^{-4}	0.0072	0.01	0.02	0.02	1.1×10^{-4}	0.33
	10^{-5}	0.02	0.05	0.02	0.03	2×10^{-5}	0.8
	10^{-6}	0.006	0.11	0.01	0.18	3.6×10^{-6}	2.5
	10^{-7}	8.5×10^{-4}	0.3	0.002	0.4	6.3×10^{-7}	8.2
	10^{-8}	1.4×10^{-4}	0.8	2.3×10^{-4}	1.25	1.1×10^{-7}	25
10	10^{-6}	—	—	—	—	7.9×10^{-4}	2.3
	10^{-7}	—	—	—	—	8.5×10^{-4}	7.2
	10^{-8}	—	—	—	—	2.1×10^{-4}	22
50	10^{-6}	—	—	—	—	0.006	2
	10^{-7}	—	—	—	—	0.003	6.6
	10^{-8}	—	—	—	—	1.6×10^{-4}	22

Также стоит обратить внимание: на фиг. 2а видно, что решение задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу, наиболее близко к точному решению (31). И хотя численное решение заняло больше времени — 22 с, чем при решении задач (30) — 6 с и (32) — 4 с, его точность на несколько порядков выше. Увеличение времени счета для задачи (33) связано с необходимостью вычисления экспоненты с большими значениями аргументов.



Фиг. 2. (а) — Численное решение задач (30), (32) и (33) для $\xi_0 = 1$ явным методом Эйлера с переменным шагом, рассчитанным по правилу Рунге—Ромберга—Ричардсона с допустимой погрешностью $\theta = 10^{-8}$, начальным шагом $h_0 = 10^{-5}$ и параметром модифицированного наилучшего аргумента $\gamma = -10$. (б) — Соответствующие значения шага интегрирования в каждой точке решения задач (30), (32) и (33).

Таким образом, преобразование исходной задачи к наилучшему и модифицированному наилучшему аргументам позволяет увеличить шаг интегрирования при использовании явного метода Эйлера, что соответствует полученным теоретическим результатам. При этом применение модифицированного наилучшего аргумента в некоторых случаях практически освобождает от необходимости подбора начального шага при использовании явного метода Эйлера с переменным шагом.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При численном решении жестких задач традиционно отдается предпочтение неявным разностным схемам. Однако метод продолжения решения по наилучшему аргументу уже давно показал свою эффективность, делая возможным применение явных схем к решению жестких задач. Экспоненциальная модификация наилучшего аргумента была разработана с целью повысить эффективность применения явных численных методов при решении задач со сверхстепенной или близкой к экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых и ранее хорошо себя показала на ряде тестовых и прикладных задач.

В настоящей работе исследовалась область абсолютной устойчивости явного численного метода Эйлера при решении задач, преобразованных к наилучшему аргументу и его модификации. Исследование проводилось на тестовой начальной задаче Далквиста, так как она моделирует локальное поведение интегральной кривой в окрестности каждой точки линеаризованной решаемой задачи.

Теорема об увеличении области абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для задачи, преобразованной к наилучшему аргументу, была сформулирована и доказана ранее в работах Е.Б. Кузнецова и В.И. Шалашилина. Однако в их доказательстве были сделаны следующие допущения, которые были устранены в текущей работе: шаг интегрирования принимался исключительно больше нуля и последнее уравнение преобразованной системы не рассматривалось, так как считалось, что оно не оказывает существенного влияния на размер области абсолютной устойчивости.

Для экспоненциального модифицированного наилучшего аргумента подобного исследования ранее не проводилось. Полученные теоретические результаты показывают, что преобразование к такому аргументу позволяет расширить область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера при корректном выборе параметра γ . Однако полученные теоретические результаты трудно применять при выборе значения параметра γ на практике. Разработка более удобного способа оценки значения параметра γ , входящего в экспоненциальный аргумент, является направлением дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи: теория и приложения. М.: Мир, 1988. 247 с.
2. Прандтль Л. Теория несущего крыла. Ч. 1. Движение жидкости с очень малым трением. М.; Л.: ГНТИ, 1931. С. 5–11.
3. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
4. Васильева А.Б. О дифференцировании решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Матем. сб. 1951. Т. 28 (70). № 1. С. 131–146.
5. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автомат. и телемех. 1997. № 7. С. 4–32.
6. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1427–1447.
7. Бутузов В.Ф. О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24. № 3. С. 288–308.
8. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1952. V. 38. P. 235–243.
9. Bjurel G., Dahlquist G., Lindberg B., Linde S., Oden L. Survey of stiff ordinary differential equations // Royal Institute of Technology, Stockholm, Depart. Informat. Proces., Comput. Sci. Rep. NA 70.11. 1970.
10. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

11. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
12. Gear C.W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1971.
13. Белов А.А., Калиткин Н.Н. Проблема нелинейности при численном решении сверхжестких задач Коши // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 4. С. 16–32. (Перевод: Belov A.A., Kalitkin N.N. Nonlinearity problem in the numerical solution of super stiff Cauchy problems // Math. Model. Comput. Simulat. 2013. V. 8. Iss. 6. P. 638–650).
14. Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П. Вычисления с использованием обратных схем Рунге–Кутты // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 10. С. 79–96 (Перевод: Kalitkin N.N., Poshivaylo I.P. Computations with inverse Runge–Kutta schemes // Math. Model. Comput. Simulat. 2013. V. 6. Iss. 3. P. 272–285).
15. Куликов Г.Ю. Вложенные симметричные неявные гнездовые методы Рунге–Кутты типов Гаусса и Лобатто для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений и гамильтоновых систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 6. С. 986–1007 (Перевод: Kulikov G.Yu. Embedded symmetric nested implicit Runge–Kutta methods of Gauss and Lobatto types for solving stiff ordinary differential equations and Hamiltonian systems // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. Iss. 6. P. 983–1003).
16. Kulikov G.Yu., Weiner R. A singly diagonally implicit two-step peer triple with global error control for stiff ordinary differential equations // SIAM J. Sci. Comput. 2015. V. 37. No. 3. P. A1593–A1613.
17. Kulikov G.Yu., Shindin S.K. Adaptive nested implicit Runge–Kutta formulas of Gauss type // Appl. Numeric. Math. 2009. V. 59. № 3–4. P. 707–722.
18. Куликов Г.Ю. Об устойчивости симметричных формул Рунге–Кутты // Докл. АН. 2003. Т. 389. № 2. С. 164–168 (Перевод: Kulikov G.Yu. On the stability of symmetric Runge–Kutta formulas // Doklady. Mathematics. 2003. V. 67. Iss. 2. P. 184–188).
19. Kulikov G.Yu. Symmetric Runge–Kutta methods and their stability // Russian J. Numer. Anal. Math. Model. 2003. V. 18. Iss. 1. P. 13–41.
20. Куликов Г.Ю. Неявные гнездовые методы Рунге–Кутты типа Гаусса и Лобатто с локальным и глобальным контролем точности для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1170–1192 (Перевод: Kulikov G.Yu. Nested implicit Runge–Kutta pairs of Gauss and Lobatto types with local and global error controls for stiff ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. Iss. 7. P. 1134–1154).
21. Скворцов Л.М. О неявных методах Рунге–Кутты, полученных в результате обращения явных методов // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 1. С. 3–19 (Перевод: Skvortsov L.M. On implicit Runge–Kutta methods received as a result of inversion of explicit methods // Math. Model. Comput. Simulat. 2017 V. 9. Iss. 4. P. 498–510).
22. Скворцов Л.М., Козлов О.С. Эффективная реализация диагонально-неявных методов Рунге–Кутты // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 1. С. 96–108 (Перевод: Skvortsov L.M., Kozlov O.S. Efficient implementation of diagonally implicit Runge–Kutta methods // Math. Model. Comput. Simulat. 2014 V. 6. Iss. 4. P. 415–424).
23. Скворцов Л.М. Однократно неявные диагонально расширенные методы Рунге–Кутты четвертого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 5. С. 755–765 (Перевод: Skvortsov L.M. Singly implicit diagonally extended Runge–Kutta methods of fourth order // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54. Iss. 5. P. 775–784).
24. Скворцов Л.М. Эффективная реализация неявных методов Рунге–Кутты второго порядка // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 5. С. 15–28 (Перевод: Skvortsov L.M. Efficient implementation of second order implicit Runge–Kutta methods // Math. Model. Comput. Simulat. 2013. V. 5. Iss. 6. P. 565–574).
25. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1997.
26. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Моделирование жестких гибридных систем. СПб: Изд-во “Лань”, 2019.
27. Novikov E.A., Rybkov M.V. Application of explicit methods with extended stability regions for solving stiff problems // J. Siberian Federal University. Math. Phys. 2016. V. 9. No. 2. P. 209–219.
28. Новиков Е.А. Алгоритм интегрирования жестких задач с помощью явных и неявных методов // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер. “Математика. Механика. Информатика”. 2012. Т. 12. № 4. С. 19–27.
29. Новиков А.Е., Новиков Е.А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 1. С. 46–56 (Перевод: Novikov A.E., Novikov E.A. Numerical integration of stiff systems with low accuracy // Math. Model. Comput. Simulat. 2010. V. 2. Iss. 4. P. 443–452).
30. Скворцов Л.М. Явные адаптивные методы Рунге–Кутты для жестких и колебательных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 8. С. 1434–1448 (Перевод: Skvortsov L.M. Explicit adaptive Runge–Kutta methods for stiff and oscillation problems // Comput. Math. Math. Phys. 2011. V. 51. Iss. 8. P. 1339–1352).

31. *Скворцов Л.М.* Явные адаптивные методы Рунге–Кутты // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 7. С. 73–87 (Перевод: Skvortsov L.M. Explicit adaptive Runge–Kutta methods // Math. Model. Comput. Simulat. 2011. V. 4. Iss. 1. P. 82–91).
32. *Лебедев В.И.* Как решать явными методами жесткие системы дифференциальных уравнений // Вычисл. процессы и системы. Вып. 8. М: Наука, 1991.
33. *Лебедев В.И.* Явные разностные схемы для решения жестких задач с комплексным или разделимым спектром // Ж. вычисл. матем и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1801–1812.
34. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с. (Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Boston, London, 2003. 236 p.)
35. *Kulikov G.Yu.* On quasi-consistent integration by Nordsieck methods // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 225. Iss. 1. P. 268–287.
36. *Kulikov G.Yu., Weiner R.* Doubly quasi-consistent parallel explicit peer methods with built-in global error estimation // J. Comput. Appl. Math. 2010. V. 233. Iss. 9. P. 2351–2364.
37. *Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D.* A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 927.
38. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 12. С. 1792–1805.
39. *Dahlquist G.* A special stability problem for linear multistep methods // BIT. 1963. № 3. P. 27–43.
40. *Самарский А.А., Гудин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
41. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 10. С. 97–109.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2023 г. М. В. Артемьева^{1,2,*}, М. О. Корпусов^{1,2}¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 1, Физический факультет,
кафедра математики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.

Переработанный вариант 11.11.2022 г.

Принята к публикации 15.12.2022 г.

Рассматривается одна абстрактная задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с нелинейными операторными коэффициентами. Доказана локальная разрешимость в соответствующих пространствах абстрактных непрерывных и дифференцируемых функций. Получены достаточные условия разрушения решений этой абстрактной задачи Коши за конечное время. Библ. 4.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923040026, EDN: IVTJTE

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы рассмотрели абстрактную задачу Коши следующего вида:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^N A_j(u) \right) + Lu = \frac{d}{dt} F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (1.1)$$

где операторы A_0 и L линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u)$ нелинейные. Отметим, что уравнение (1.1) содержит некоэрцитивный источник

$$\frac{d}{dt} F(u),$$

что сильно усложняет получение достаточных условий разрушения задачи Коши (1.1) за конечное время.

В работе [2] была рассмотрена следующая абстрактная задача Коши для интегродифференциального уравнения с нелинейными операторными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u) \right) + L_1 u + \int_0^t ds h(t-s) L_2 u(s) + DP(u) = F(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

где операторы A_0 и L_1, L_2, D линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u), P(u)$ нелинейные. Для доказательства существования сильного решения этой задачи Коши мы применим метод монотонных операторов Браудера–Минти (см. [3]), а для доказательства разрушения за конечное время применим метод энергетических оценок, развитый в [4].

В настоящей работе мы докажем существование непродолжаемого во времени классического решения задачи Коши

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^N A_j(u) \right) + \frac{d}{dt} DP(u) + Lu = \frac{d}{dt} F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (1.3)$$

при некоторых условиях на операторные коэффициенты и получим достаточные условия разрушения решения за конечное время. Уравнение (1.3) отличается от уравнения (1.1) наличием нелинейного слагаемого

$$\frac{d}{dt} DP(u),$$

которое в приложениях имеет, например, следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t \partial x_1}.$$

Отметим, что задача Коши (1.3) существенно отличается от задачи Коши (1.2) в силу условий на функцию $h(t)$, при которых рассматривалась задача (1.2).

Подробная библиография и приложения изложены в работе [1].

2. УСЛОВИЯ НА ОПЕРАТОРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1, n}$ и при $i = \overline{1, 3}$ относительно соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0, \quad \|\cdot\|_j, \quad |\cdot|_i$$

и с сопряженными банаховыми пространствами V_0^*, V_j^*, W_i^* относительно соответствующих скобок двойственностей

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_j, \quad (\cdot, \cdot)_i$$

и соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0^*, \quad \|\cdot\|_j^*, \quad |\cdot|_i^*.$$

Предположим, что банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1, n}$ и при $i = \overline{1, 3}$ являются рефлексивными и сепарабельными. Предположим также, что

$$\begin{aligned} A_0 : V_0 &\rightarrow V_0^*, & A_j : V_j &\rightarrow V_j^*, & L_1 : W_1 &\rightarrow W_1^*, \\ F : W_2 &\rightarrow W_2^*, & P : V_0 &\rightarrow W_3, & D : W_3 &\rightarrow V_0^*. \end{aligned}$$

Условия A_0 .

(i) Оператор $A_0 : V_0 \rightarrow V_0^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем имеет место неравенство

$$\|A_0 u\|_0^* \leq M_0 \|u\|_0 \quad \text{для всех } u \in V_0;$$

(ii) оператор A_0 является коэрцитивным, причем имеет место неравенство

$$\langle A_0 u, u \rangle_0 \geq m_0 \|u\|_0^2 \quad \text{для всех } u \in V_0.$$

Замечание 1. Из условий (i) и (ii) вытекает, что величина $\langle A_0 u, u \rangle_0^{1/2}$ является эквивалентной нормой на V_0 .

Условия A .

(i) Оператор $A_j : V_j \rightarrow V_j^*$ является монотонным и непрерывным;

(ii) оператор A_j дифференцируем по Фреше, причем его производная Фреше

$$A'_{jf}(u) : V_j \rightarrow \mathcal{L}(V_j, V_j^*)$$

является непрерывным, симметричным, монотонным и неотрицательно определенным оператором при любом фиксированном $u \in V_j$ и $A'_{jf}(0) = 0$;

(iii) оператор A_j является положительно-однородным

$$A_j(ru) = r^{p_j-1} A_j(u) \quad \text{при } p_j > 2, \quad r \geq 0, \quad u \in V_j;$$

(iv) справедливы следующие неравенства сверху и снизу:

$$\|A_j(u)\|_j^* \leq M_j \|u\|_j^{p_j-1}, \quad \langle A_j(u), u \rangle_j \geq m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad M_j, m_j > 0.$$

Замечание 2. Из условия (iv) вытекает, что величина $\langle A_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ является эквивалентной нормой на банаховом пространстве V_j .

Условия F.

(i) Оператор $F : W_2 \rightarrow W_2^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$|F(u_1) - F(u_2)|_2 \leq \mu(R) |u_1 - u_2|_2 \quad \text{для всех } u_1, u_2 \in W_2,$$

где $R = \max\{|u_1|_2, |u_2|_2\}$, $\mu = \mu(R)$ есть ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента;

(ii) оператор F является положительно-однородным, т.е.

$$F(ru) = r^{1+q} F(u) \quad \text{при } q > 0, \quad r \geq 0, \quad u \in W_2;$$

(iii) оператор F имеет симметричную производную Фреше

$$F'_f(\cdot) : W_2 \rightarrow \mathcal{L}(W_2, W_2^*);$$

(iv) оператор F удовлетворяет неравенству сверху

$$|F(u)|_2^* \leq M |u|_2^{q+1} \quad \text{для всех } u \in W_2.$$

Условия DP.

(i) Оператор $D : W_3 \rightarrow V_0^*$ является линейным и непрерывным, причем

$$\|Du\|_0^* \leq D_3 |u|_3 \quad \text{для всех } u \in W_3;$$

(ii) оператор $P : V_0 \rightarrow W_3$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е.

$$|P(u_1) - P(u_2)|_3 \leq \mu_0(R) \|u_1 - u_2\|_0 \quad \text{для всех } u_1, u_2 \in V_0,$$

где функция $\mu_0 = \mu_0(R)$ — ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, $R = \max\{\|u_1\|_0, \|u_2\|_0\}$;

(iii) справедливо неравенство сверху

$$|P(u)|_3 \leq D_4 \|u\|_0^{1+q_0}, \quad q_0 \geq 0, \quad \text{для всех } u \in V_0;$$

(iv) для всех $u \in V_0$ имеет место неравенство

$$\langle DP(u), u \rangle_0 = 0 \quad \text{для всех } u \in V_0;$$

(v) оператор P имеет производную Фреше

$$P'_f(\cdot) : V_0 \rightarrow \mathcal{L}(V_0, W_3).$$

Условия L.

(i) Оператор $L : W_1 \rightarrow W_1^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем

$$|Lu|_1^* \leq D_1 |u|_1 \quad \text{для всех } u \in W_1;$$

(ii) оператор L_1 является коэрцитивным, причем

$$(L_1 u, u)_1 \geq d_1 |u|_1^2 \quad \text{для всех } u \in W_1.$$

Замечание 3. Из условий (i) и (ii) вытекает, что величина $(L_1 u, u)_1^{1/2}$ является эквивалентной нормой на W_1 .

Рассмотрим теперь используемые нами банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1, n}$ и $i = \overline{1, 3}$. Пусть H — это некоторое сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным. Предположим, что выполнены следующие условия:

Условия H .

Имеют место следующие цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$V_0 \stackrel{ds}{\subset} V_j \stackrel{ds}{\subset} H \stackrel{ds}{\subset} V_j^* \stackrel{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n},$$

$$V_0 \stackrel{ds}{\subset} W_i \stackrel{ds}{\subset} H \stackrel{ds}{\subset} W_i^* \stackrel{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 3}.$$

Заметим, что в силу условий H имеют место следующие свойства:

$$\langle f, u \rangle_0 = \langle f, u \rangle_j \quad \text{для всех} \quad f \in V_j^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

$$\langle f, u \rangle_0 = \langle f, u \rangle_i \quad \text{для всех} \quad f \in W_i^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.2)$$

3. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА

Пусть функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T]$ и удовлетворяет интегродифференциальному неравенству

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma_1\Phi(t) + \gamma_2 T \int_0^t \Phi(s)ds\Phi(t) + \gamma_3\Phi^{1+\lambda}(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

при $\alpha > 1$, $\lambda > 1$ и $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 \geq 0$. Справедлива следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0]$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству (3.1) и

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \alpha > 1, \quad 1 < \lambda < 2\alpha - 1, \quad (3.2)$$

причем начальные условия $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ таковы, что существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}, \quad (3.3)$$

то $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t\right]^{1/(\alpha-1)}} \quad (3.4)$$

для всех $t \in [0, \min\{T_1, T_0\})$, где

$$A(T_1) = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}] > 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Все утверждения теоремы в целом доказаны. Отметим только, что в силу явного вида функции $A = A(T)$ и неравенства (3.3) выполнены неравенства

$$A(T) \geq A(T_1) > 0 \quad \text{для всех} \quad T \in [0, T_1].$$

Поэтому имеют место неравенства

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T)t\right]^{1/(\alpha-1)}} \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t\right]^{1/(\alpha-1)}}$$

для всех $t \in [0, T]$. Значит, функция в правой части неравенства (3.4) является неограниченной при $T = T_1$ и $t \in [0, T_1]$.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРОДОЛЖАЕМОГО РЕШЕНИЯ

Пусть выполнены все условия, сформулированные в разд. 2. Рассмотрим следующую задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u) \right) + \frac{d}{dt} DP(u) + Lu = \frac{d}{dt} F(u), \quad (4.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad (4.2)$$

Дадим определение классического решения этой абстрактной задачи Коши.

Определение 1. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; V_0)$ называется *классическим решением задачи Коши* (4.1), если

$$\frac{d^2}{dt^2} A_j(u) \in \mathbb{C}([0, T]; V_0^*) \quad \text{для всех } j = \overline{1, n}, \quad (4.3)$$

равенство (4.1) справедливо для каждого $t \in [0, T]$ и понимается в смысле банахового пространства V_0^* , причем

$$u_0 \in V_0, \quad u_1 \in V_0. \quad (4.4)$$

Пусть $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; V_0)$ – классическое решение задачи (4.1). Пусть $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ – произвольная функция. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(t) := \int_t^T \phi(s) ds \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T], \quad t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

Заметим, что $\psi(T) = 0$ и $\psi'(t) = -\phi(t)$. Справедливы следующие формулы интегрирования по частям для интегралов Бохнера в V_0^* :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \psi(t) dt &= \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \psi(t) \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ &+ \int_0^T \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \phi(t) dt = - \left(A_0 u_1 + \sum_{j=1}^n A_j'(u_0) u_1 \right) \int_0^T \phi(t) dt + \\ &+ \int_0^T \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \phi(t) dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\int_0^T Lu(t) \psi(t) dt = \int_0^t Lu(s) ds \psi(t) \Big|_{t=0}^{t=T} + \int_0^T \phi(t) \int_0^t Lu(s) ds dt \int_0^T \phi(t) \int_0^t Lu(s) ds dt, \quad (4.7)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} F(u)(t) \psi(t) dt = -F(u_0) \int_0^T \phi(t) dt + \int_0^T F(u)(t) \phi(t) dt, \quad (4.8)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} DP(u)(t) \psi(t) dt = -DP(u_0) \int_0^T \phi(t) dt + \int_0^T DP(u)(t) \phi(t) dt. \quad (4.9)$$

Теперь, умножив обе части равенства (4.1) на функцию $\psi(t)$, с учетом (4.6)–(4.8) мы получим следующее равенство:

$$\int_0^T \left\{ \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) + DP(u) + \int_0^t Lu(s) ds - F(u) - f \right\} \phi(t) dt = 0 \quad (4.10)$$

для всех $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$, где

$$f := -F(u_0) + DP(u_0) + A_0 u_1 + \sum_{j=1}^n A'_{jf}(u_0) u_1. \quad (4.11)$$

Полученное равенство (4.10) позволяет сформулировать определение сильного решения задачи Коши (4.1).

Определение 2. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0)$ называется *сильным решением задачи Коши* (4.1), если для любой функции $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ выполнено равенство (4.10), причем $u(0) = u_0 \in V_0$, $u_1 \in V_0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть банахово пространство V_0 сепарабельно, тогда в классе сильных решений задачи Коши (4.1) равенство (4.10), выполненное для любых $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$, эквивалентно равенству

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) + DP(u)(t) + \int_0^t Lu(s) ds - F(u) - f, v(t) \right\rangle_0 dt = 0 \quad (4.12)$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; V_0)$.

Замечание 4. С учетом равенства скобок двойственности (2.1) и (2.2) равенство (4.12) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), v(t) \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), v(t) \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), v(t) \rangle_0 + \right. \\ & \left. + \int_0^t (Lu(s), v(t))_1 ds - (F(u), v(t))_2 - \langle f, v(t) \rangle_0 \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; V_0)$. Теперь в равенстве (4.13) возьмем $v(t) = \phi(t)w$, $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$, $w \in V_0$ и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi(t) \left[\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), w \rangle_0 + \right. \\ & \left. + \int_0^t (Lu(s), w)_1 ds - (F(u), w)_2 - \langle f, w \rangle_0 \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

для любых $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ и $w \in V_0$. В силу условий на операторные коэффициенты имеем

$$\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 \in \mathbb{C}[0, T], \quad \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j \in \mathbb{C}[0, T], \quad (4.15)$$

$$\int_0^t (Lu(s), w)_1 ds \in \mathbb{C}[0, T], \quad (F(u), w)_2 \in \mathbb{C}[0, T], \quad (4.16)$$

$$\langle DP(u), w \rangle_0 \in \mathbb{C}[0, T]. \quad (4.17)$$

Поэтому из равенства (4.14) и свойств (4.15), (4.16) в силу основной леммы вариационного исчисления вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), w \rangle_0 + \\ & + \int_0^t (Lu(s), w)_1 ds - (F(u), w)_2 - \langle f, w \rangle_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

для всех $w \in V_0$ и всех $t \in [0, T]$.

Теперь рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) + DP(u)(t) + \int_0^t Lu(s)ds = F(u) + f, \quad (4.19)$$

$$u(0) = u_0. \quad (4.20)$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (4.19), (4.20).

Определение 3. Классическим решением задачи Коши (4.19), (4.20) называется функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0)$, удовлетворяющая уравнению (4.19) для каждого $t \in [0, T]$ в смысле V_0^* , причем $u_0 \in V_0$ и $f \in V_0^*$.

Совершенно понятно, что классическое решение задачи Коши (4.19) является сильным решением задачи Коши (4.1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия разд. 2 на операторные коэффициенты A_0, A_j, L, DP и F . Тогда при дополнительном условии, что операторы $A_j(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше для всех $u \in V_j$, для любых u_0 и u_1 из V_0 найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное классическое решение задачи Коши (4.1) класса $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; V_0)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \left\| A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u) \right\|_0^* (t) = +\infty. \quad (4.21)$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.4 работы [1].

5. РАЗРУШЕНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (4.1) ПРИ $q + 2 > \bar{p}$

Пусть $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; V_0)$ – классическое решение задачи (4.19). Прежде всего введем обозначения

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \langle A_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u), u \rangle_j, \quad (5.1)$$

$$J(t) = \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n (p_j - 1) \langle A'_{jf}(u) u', u' \rangle_j. \quad (5.2)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Имеет место следующее неравенство:

$$(\Phi'(t))^2 \leq \bar{p} J(t) \Phi(t) \quad \text{при} \quad \bar{p} = \max_{j=1, n} p_j, \quad t \in [0, T_0]. \quad (5.3)$$

Доказательство. Доказательство приведено в лемме 7.1 работы [1].

Заметим, что определение 2 сильного решения задачи Коши (4.1) эквивалентно равенству (4.18).

Положим сначала в равенстве (4.18) $w = u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; V_0)$ из определения (5.1) функционала $\Phi(t) \in \mathbb{C}[0, T_0]$ и свойства (iv) условий DP , получим следующее первое энергетическое равенство:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_0^t ds (Lu(s), u(t))_1 = (F(u), u)_2 + \langle f, u \rangle_0. \quad (5.4)$$

Теперь положим в равенстве (4.18) $w = u'(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; V_0)$ и с учетом определения (5.2) функционала $J(t)$ получим второе энергетическое равенство

$$J(t) + \int_0^t ds (Lu(s), u'(t))_1 + \langle DP(u), u' \rangle_0 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (F(u), u)_2 + \frac{d}{dt} \langle f, u \rangle_0, \quad (5.5)$$

где мы воспользовались равенством

$$(F(u), u')_2 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (F(u), u)_2.$$

Выразим из равенства (5.4) величину $(F(u), u)_2$, подставим его в равенство (5.5) и после элементарных преобразований получим следующее выражение для функционала $J(t)$:

$$J(t) = \frac{1}{q+2} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{q+2} (Lu, u)_1 - \langle DP(u), u' \rangle_0 - \frac{q+1}{q+2} \int_0^t (Lu(s), u'(t)) ds + \frac{q+1}{q+2} \langle f, u' \rangle_0. \quad (5.6)$$

Для дальнейшего мы воспользуемся неравенством Коши–Буняковского с произвольным $\varepsilon_1 > 0$:

$$ab \leq \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} b^2, \quad a, b \geq 0.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{q+2} (Lu, u)_1 \leq \frac{l}{q+2} \langle A_0 u, u \rangle_0 = \frac{2l}{q+2} \Phi(t), \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{q+1}{q+2} \int_0^t (Lu(s), u'(t))_1 ds \right| &\leq \frac{q+1}{q+2} l \int_0^t \langle A_0 u(s), u(s) \rangle_0^{1/2} \langle A_0 u'(t), u'(t) \rangle_0^{1/2} ds \leq \\ &\leq \varepsilon \langle A_0 u'(t), u'(t) \rangle_0 + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 l^2 \frac{T}{4\varepsilon} \int_0^t \langle A_0 u(s), u(s) \rangle_0 ds \leq \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{q+1}{q+2} |\langle f, u' \rangle_0| \leq \frac{q+1}{q+2} \|f\|_0^* \|u'\|_0 \leq \frac{q+1}{q+2} \|f\|_0^* \frac{1}{m_0^{1/2}} \langle A_0 u', u' \rangle_0^{1/2} \leq \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \quad (5.9)$$

$$|\langle DP(u), u' \rangle_0| \leq \varepsilon \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \frac{b}{\varepsilon} \langle A_0 u, u \rangle_0^{1+q_0} \leq \varepsilon J(t) + \frac{d}{\varepsilon} \Phi^{1+q_0}(t). \quad (5.10)$$

Итак, из равенства (5.6) с учетом неравенств (5.7)–(5.9) получим оценку

$$(1 - 3\varepsilon)J(t) \leq \frac{1}{q+2} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{2l}{q+2} \Phi(t) + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon} + \frac{d}{\varepsilon} \Phi^{1+q_0}(t). \quad (5.11)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/3)$. Тогда из неравенств (5.3) и (5.11) получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\begin{aligned} \Phi \Phi'' - \frac{q+2}{\bar{p}} (1 - 3\varepsilon) (\Phi')^2 + 2l\Phi^2 + \frac{(q+1)^2}{q+2} l^2 \frac{T}{2\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds \Phi(t) + \\ + \frac{(q+1)^2}{q+2} \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon} \Phi + \frac{d(q+2)}{\varepsilon} \Phi^{2+q_0} \geq 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

которое перепишем в общем виде, сделав замену $3\varepsilon \mapsto \varepsilon$:

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \beta \Phi^2 + \gamma_1 \Phi + \gamma_2 T \int_0^t \Phi(s) ds \Phi(t) + \gamma_3 \Phi^{1+\lambda} \geq 0, \quad (5.13)$$

где

$$\alpha = \frac{q+2}{\bar{p}} (1 - \varepsilon), \quad \beta = 2l, \quad \gamma_1 = \frac{(q+1)^2}{q+2} \frac{3\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \quad (5.14)$$

$$\gamma_2 = l^2 \frac{(q+1)^2}{q+2} \frac{3}{2\varepsilon}, \quad \gamma_3 = \frac{3d(q+2)}{\varepsilon}, \quad \lambda = 1 + q_0. \quad (5.15)$$

Потребуем выполнения условия $\alpha > 1$. Отсюда получим неравенства

$$0 < \varepsilon < \frac{q+2-\bar{p}}{q+2}, \quad q+2 > \bar{p}. \quad (5.16)$$

Кроме того, имеем

$$2\alpha - 1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon}{\bar{p}}, \quad \alpha_1 = 2(q+2) - \bar{p}, \quad \alpha_2 = 2(q+2). \quad (5.17)$$

Выберем параметр $\varepsilon > 0$, входящий в коэффициенты (5.14), таким образом, чтобы коэффициент

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1}$$

равенства (3.3) принял минимальное значение:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \begin{cases} \frac{q+2-\bar{p}}{q+2} - \delta_0, & \text{если } q+2 \leq \frac{3}{2}\bar{p}, \\ \frac{2(q+2)-\bar{p}}{4(q+2)}, & \text{если } \frac{3}{2}\bar{p} < q+2, \end{cases} \quad (5.18)$$

для любого малого $\delta_0 > 0$. Теперь подставим это значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ в коэффициенты (5.14). Проверим выполнимость условий теоремы 1.

Пусть $u_0 \in V_0$ и $f \in V_0^*$ — произвольные фиксированные, а $u_1 \in V_0$ — единственное решение следующего уравнения в V_0^* :

$$A_0 u_1 + \sum_{j=1}^n A'_{jf}(u_0) u_1 = -DP(u_0) + F(u_0) + f \in V_0^*. \quad (5.19)$$

Решение $u_1 \in V_0$ этого уравнения действительно существует в силу теоремы Браудера—Минти. В нашем случае функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0]$ имеет вид (5.1). Поэтому при $t = 0$ имеем

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \langle A_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u_0), u_0 \rangle_j, \quad (5.20)$$

а производная Фреше функционала $\Phi(t)$ имеет следующий вид:

$$\Phi'(t) = \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (A_j(u))', u' \rangle_j \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle A'_{jf}(u) u', u' \rangle_j. \quad (5.21)$$

Отсюда получаем, что

$$\Phi'(0) = \langle A_0 u_1, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle A'_{jf}(u_0) u_1, u_0 \rangle_j. \quad (5.22)$$

С учетом равенства (5.19) и свойства (iv) условия DP получим следующее выражение:

$$\Phi'(0) = (F(u_0), u_0)_2 + \langle f, u_0 \rangle_0. \quad (5.23)$$

Перепишем уравнение (3.3) в эквивалентном виде

$$K_1 T_1^4 + K_2 T_1^2 + K_3 = 0, \quad (5.24)$$

где

$$K_1 = \frac{\gamma_2}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2, \quad K_3 = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} (\Phi(0))^2, \quad (5.25)$$

$$K_2 = \frac{\beta}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1} \Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha - 1)\delta} (\Phi(0))^{1+\lambda} - (\Phi'(0))^2. \quad (5.26)$$

Введем следующие функции:

$$I_1(R) = \left(\Phi'(0) \Big|_{Ru_0} \right)^2 = \left((F(Ru_0), Ru_0)_2 + \langle f, Ru_0 \rangle_0 \right)^2 = \left(R^{q+2} (F(u_0), u_0)_2 + R \langle f, u_0 \rangle_0 \right)^2, \quad (5.27)$$

$$I_2(R) = \Phi(0) \Big|_{Ru_0} = R^2 \frac{1}{2} \langle Au_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n R^{p_j} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u_0), u_0 \rangle_j. \quad (5.28)$$

Подставим теперь в правые части равенств (5.25) и (5.26) вместо u_0 элемент Ru_0 при $R \geq 0$. Пусть, кроме того, $x = T_1^2$. Тогда биквадратное уравнение примет вид

$$K_1 x^2 + K_2 x + K_3 = 0. \quad (5.29)$$

Прежде всего, заметим, что в силу условий

$$q + 2 > \bar{p} = \max_{j=1, n} p_j, \quad 2(q + 2) > \bar{p}(1 + \lambda) \Rightarrow \lambda < \frac{2(q + 2)}{\bar{p}} - 1 \quad (5.30)$$

и формул (5.27) и (5.28) коэффициент K_2 окажется отрицательным при достаточно большом $R > 0$ и при условии $(F(u_0), u_0)_2 \neq 0$. Дискриминант

$$\mathcal{D} = K_2^2 - 4K_1 K_3$$

является положительным при достаточно большом $R > 0$. Итак, при достаточно большом $R > 0$ существует положительный корень уравнения (5.29)

$$T_1^2 = x = \frac{-K_2 + \sqrt{K_2^2 - 4K_1 K_3}}{2K_1} > 0.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены неравенства

$$q + 2 > \bar{p}, \quad 0 < q_0 < 2 \frac{q + 2 - \bar{p}}{\bar{p}},$$

$u_0 \in V_0$, $f \in V_0^*$ и $u_1 \in V_0$ является решением уравнения (5.19), причем

$$(F(u_0), u_0) \neq 0.$$

Тогда при достаточно большом $R > 0$ для начальной функции Ru_0 функционал $\Phi(t)$, определенный формулой (5.1), удовлетворяет неравенству (3.4).

Справедливо следующее утверждение (см. лемму 7.4 работы [1]):

Лемма 2. Имеет место двустороннее неравенство

$$M_1 \Phi^{1/2}(t) \leq \|A(u)\|_0^* \leq M_2 \Phi^{1/2} + \sum_{j=1}^n B_j \Phi^{(p_j-1)/p_j}(t), \quad (5.31)$$

где постоянные M_1 , M_2 и B_j больше нуля и не зависят от $u(t)$,

$$A(u) := A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u).$$

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены неравенства

$$q + 2 > \bar{p}, \quad 0 < q_0 < 2 \frac{q + 2 - \bar{p}}{\bar{p}},$$

в качестве начальной функции $u_0 \in V_0$ взята функция Ru_0 , а $u_1 \in V_0$ — решение уравнения (5.19) при $f \in V_0^*$, в котором вместо u_0 нужно подставить Ru_0 . Тогда при достаточно большом $R > 0$ время $T_0 > 0$ существования классического решения задачи (4.1) конечно и имеет следующее предельное свойство:

$$\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \quad (5.32)$$

а также справедлива оценка сверху $T_0 \leq T_1$ на время разрушения решения, где число T_1 является положительным решением биквадратного уравнения (3.3).

6. ПРИМЕРЫ

Приведем примеры начально-краевых задач, для которых справедливы полученные в работе результаты. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Пример 1. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2} u \right) - u + \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial |u|^q}{\partial t} u = 0, \quad (6.1)$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad (6.2)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.3)$$

где $p_j > 2$, $q_0 > 0$, $q > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega). \quad (6.4)$$

Пример 2. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2} u \right) + a_1 \Delta u - a_2 u + \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial |u|^q}{\partial t} u = 0, \quad (6.5)$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad (6.6)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.7)$$

где $p_j > 2$, $q > 0$, $q_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \quad (6.8)$$

$$H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega). \quad (6.9)$$

Пример 3. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\Delta^2 u + \Delta u + \sum_{j=1}^n \operatorname{div} (|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) + \Delta u + \frac{\partial^2 |\nabla u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (|\nabla u|^q \nabla u), \quad (6.10)$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^2(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^2(\Omega), \quad (6.11)$$

$$u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.12)$$

где $p_j > 2$, $q_0 > 0$, $q > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^2(\Omega), \quad V_j = W_0^{1,p_j}(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \quad (6.13)$$

$$H = L^2(\Omega), \quad W_2 = W_0^{1,q+2}(\Omega). \quad (6.14)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О. Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
2. Корпусов М.О. Разрушение решений неклассических нелокальных нелинейных модельных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 621–648.
3. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
4. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl. 2011. V. 15. P. 648.

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.4

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ
НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко^{1,*}, С. И. Сахаров^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: baderko.ea@yandex.ru

**e-mail: ser341516@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.08.2022 г.
Переработанный вариант 13.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини в полуограниченной области на плоскости с негладкой боковой границей, допускающей “клювы”. Доказаны теоремы о единственности классических решений этих задач в классе функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своей пространственной производной первого порядка, в замыкании указанной области. Библ. 33.

Ключевые слова: параболические системы, начально-краевые задачи, единственность классического решения, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466923040038, EDN: IVVRGO

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию единственности классических решений первой и второй начально-краевых задач для одномерных по пространственной переменной x параболических систем второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей.

В случае одного уравнения единственность классического решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [1, с. 27]), а единственность классического решения второй начально-краевой задачи установлена в [2], [3] с помощью теоремы о знаке косої производной. Заметим, что для систем, в отличие от уравнений, принцип максимума, вообще говоря, не имеет места (см. [4]).

Из [1, с. 706], [5] следует единственность классических решений параболических начально-краевых задач в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, если боковая граница рассматриваемой области — достаточно гладкая кривая, а именно — из класса $H^{1+\alpha/2}$, т.е. функция, задающая указанную границу, обладает первой производной из пространства $H^{\alpha/2}[0, T]$.

Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами. Единственность решений первой и второй начально-краевых задач в ограниченных областях с боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ для одномерных по пространственной переменной x параболических систем второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своей пространственной производной первого порядка, в замыкании указанных областей, доказана в [6], [7]. В случае области с боковыми границами из класса $H^{(1+\alpha)/2}$ для параболических систем с гёльдеровыми коэффициентами, не зависящими от временной переменной t , в [8] доказана теорема существова-

ния и единственности классического решения первой начально-краевой задачи из пространства $C^0(\bar{\Omega})$.

В [9]–[11] доказаны теоремы о существовании классических решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ первой и второй начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченных областях на плоскости с боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. Здесь и до конца введения ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже (1)). В [12] установлена единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной области на плоскости с боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ этого решения и на характер его гладкости по временной переменной. В [13] доказана теорема о единственности классического решения из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ второй начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области с боковой границей из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических систем с дини-непрерывными коэффициентами в плоской полуограниченной области с негладкой боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ и доказывается единственность их классических решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$. Заметим, что, как следует из работ [14], [15], рассматриваемое условие на характер непрерывности боковой границы является точным для классической разрешимости первой начально-краевой задачи в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$.

Параболические системы уравнений находят свое приложение, в частности, при описании эволюционных процессов в многокомпонентных средах (см., например, [16]–[21]).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 1 приводятся необходимые определения и формулируются основные теоремы. В разд. 2 доказывается вспомогательная лемма о единственности классического решения второй начально-краевой задачи для системы с дифференцируемыми коэффициентами. В разд. 3 и 4 доказываются основные теоремы.

Основные результаты статьи анонсированы в [22].

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть фиксировано число $T > 0$. Через $C[\tau, \eta]$, $0 \leq \tau < \eta \leq T$, обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с нормой $\|\psi; [\tau, \eta]\|^0 = \max_{t \in [\tau, \eta]} |\psi(t)|$. Положим $C_0[\tau, \eta] = \{\psi \in C[\tau, \eta] : \psi(\tau) = 0\}$.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (ее элементов).

Следуя [23, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0. \quad (1)$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1).

В полосе $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)\}$ выделяется область $\Omega = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$ с боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет следующему условию:

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad \omega_1 \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

Обозначим через $C^{2,1}(\Omega)$ пространство вектор-функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывных, вместе со своими производными $\partial_i u$, $\partial_x^l u$, $l = 1, 2$, в Ω . Через $C^0(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x,t)|$. Положим

$$C_0^{1,0}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\bar{\Omega}), \partial_x^l u(x, 0) = 0, l = 0, 1, \|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u; \Omega\|^0 < \infty \right\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω .

Пусть ω — некоторый модуль непрерывности. Введем пространства:

$$H^{1/2+\omega}[0, T] = \left\{ \psi \in C[0, T] : \|\psi; [0, T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{\substack{t, t+\Delta t \in (0, T), \\ \Delta t \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_t \psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty \right\},$$

$$H_0^{1/2+\omega}[0, T] = \{\psi \in H^{1/2+\omega}[0, T] : \psi(0) = 0\},$$

$$H^\omega(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) : \|u; \Omega\|^\omega = \|u; \Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega, \\ (\Delta x)^2 + |\Delta t| \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_{x,t} u(x, t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty \right\},$$

$$H_0^{1,\omega}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C_0^{1,0}(\bar{\Omega}) : \|u; \Omega\|^{1,\omega} = \|u; \Omega\|^{1,0} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega, \\ \Delta t \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_t u(x, t)|}{|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} + \right. \\ \left. + \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega, \\ (\Delta x)^2 + |\Delta t| \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_{x,t} \partial_x u(x, t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty \right\},$$

где $\Delta_t \psi(t) = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$, $\Delta_{x,t} u(x, t) = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2} \psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2} \psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [24], [25], введем пространство

$$C_0^{1/2}[0, T] = \left\{ \psi \in C_0^1[0, T] : \partial^{1/2} \psi \in C_0^0[0, T], \|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\partial^{1/2} \psi; [0, T]\|^0 < \infty \right\}.$$

Замечание 1. Если $\psi \in H_0^{1/2+\omega}[0, T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, то $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$ (см. [26]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [25]).

В полосе D рассматривается равномерно параболический по Петровскому (см. [27]) оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l(x, t) \partial_x^l u, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$, $l = 0, 1, 2$, суть $m \times m$ -матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определенные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(а) собственные числа μ_r , $r = \overline{1, m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$.

(б) $a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D})$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

Положим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times \bar{D} : t > \tau\}$. Известно (см. [28], если $m = 1$, и [29], если $m \geq 2$), что при выполнении условий (а) и (б) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений (ФМР) $\Gamma(x, t; \xi, \tau), (x, t; \xi, \tau) \in D^*$, и справедливы оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 2k + l \leq 2, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m , коэффициентов оператора L и модуля непрерывности ω_1 .

Основное содержание настоящей работы составляют следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (а), (б) и (2). Предположим, что вектор-функция $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}_0(\bar{\Omega})$ – решение задачи

$$Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad (3)$$

$$\partial_x u(g(t), t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (а), (б) и (2). Предположим, что вектор-функция $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}_0(\bar{\Omega})$ – решение задачи

$$Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad u(g(t), t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Замечание 2. Из результатов [15] следует, что если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0, T]$, причем модуль непрерывности ω_1 не удовлетворяет условию (1), то классическое решение первой начально-краевой задачи из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ может не существовать.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2), (а) и, кроме того, (б) $\partial_x^k a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D})$, $i, j = \overline{1, m}$, $l = 0, 1, 2$, $0 \leq k \leq l$.

Предположим, что $\omega \in \mathcal{D}$ и вектор-функция $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}_0(\bar{\Omega})$ – решение задачи (3), (4), удовлетворяющее условиям

$$|\Delta_x u(x, t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2}), \quad (x, t), (x, t + \Delta t) \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

$$|\partial_x^2 u(x, t)| \leq C[\omega^*(d(x, t))d^{-1}(x, t) + 1], \quad (x, t) \in \Omega, \quad (7)$$

где $d(x, t) = |x - g(t)|$, ω^* – некоторый модуль непрерывности. Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Доказательство. Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям леммы. Тогда u является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad v(g(t), t) = \psi(t),$$

где $\psi(t) = u(g(t), t)$, $t \in [0, T]$. При этом функция ψ принадлежит пространству $H_0^{1/2+\omega+\omega_1}[0, T]$. Из [10–12], [30] следует, что функция u может быть представлена в виде векторного потенциала простого слоя

$$u(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (8)$$

где $\varphi \in C[0, T]$ — единственное в $C[0, T]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi(t), \quad t \in [0, T].$$

Подставляя функцию (8) в граничное условие (4) и пользуясь формулой “скачка” для пространственной производной параболического потенциала простого слоя (см. [29]), получаем, что вектор-функция φ одновременно является решением граничного интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2(g(t), t))^{-1} \varphi(t) + \int_0^t \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

В силу единственности в $C[0, T]$ решения уравнения (9) (см. [9]) получаем, что $\varphi \equiv 0$. Подставляя найденное решение φ в представление (8), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (а), (б) и $f \in C^0(\bar{\Omega})$. Тогда для векторного объемного потенциала

$$Vf(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{g(\tau)}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\partial_x^l Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 t^{1-l/2}, \quad l = 0, 1, \\ |\Delta_t Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 |\Delta t| (1 + |\ln |\Delta t||), \\ |\Delta_t \partial_x Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \\ |\Delta_x \partial_x Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 |\Delta x| (1 + |\ln |\Delta x||), \\ (x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) &\in \bar{\Omega}, \quad \Delta x \neq 0, \quad \Delta t \neq 0. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказывается методом из [31], где рассматривается случай $\omega_0(z) = \omega_1(z) = Cz^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Зададим функцию $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ равенствами

$$\rho(x, t) = C_1 \exp\{(x^2 + t^2 - 1)^{-1}\}, \quad x^2 + t^2 < 1, \quad \rho(x, t) = 0, \quad x^2 + t^2 \geq 1, \quad (10)$$

где постоянная C_1 выбирается из условия

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) dx dt = 1. \quad (11)$$

Продолжим коэффициенты оператора L на $\mathbb{R}^2$, полагая

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ijl}(x, t) &= a_{ijl}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D} \quad \hat{a}_{ijl}(x, t) = a_{ijl}(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0, \\ \hat{a}_{ijl}(x, t) &= a_{ijl}(x, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > T. \end{aligned}$$

Для любого числа $r > 0$ положим

$$a_{ijl}^{(r)}(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}_{ijl}(x - ry, t - r\tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad l = 0, 1, 2,$$

и определим матричный оператор $L^{(r)}$ со “сглаженными” коэффициентами:

$$L^{(r)}u \equiv L^{(r)}(x, t)u = \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l^{(r)}(x, t) \partial_x^l u,$$

где $A_l^{(r)} = \|a_{ijl}^{(r)}\|_{i,j=1}^m$. Заметим, что коэффициенты операторов $L^{(r)}$ ограничены и бесконечно дифференцируемы в $\bar{D}$. Кроме того, существует число $r_0 > 0$ такое, что коэффициенты операторов $L^{(r)}$ удовлетворяют равномерно по $r \in (0, r_0)$ условию (а) с постоянной параболичности $\delta/2$ и условию (б) (см. [32]). Поэтому существуют ФМР $\Gamma^{(r)}$ систем $L^{(r)}u = 0$, причем справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\partial_x^l \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t - \tau)^{-(l+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \\ (x, t; \xi, \tau) &\in D^*, \quad r \in (0, r_0), \quad l = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

с постоянными C, c , не зависящими от $r \in (0, r_0)$. Не ограничивая общности, далее считаем, что $r \in (0, r_0)$, $r_0 \leq 1$.

Для любых чисел $h > 0$, ограниченной вектор-функции $v : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ и множества $\mathcal{B} \subset \bar{D}$ положим

$$\omega(h; v; \mathcal{B}) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq h, z_1, z_2 \in \mathcal{B}} |v(z_1) - v(z_2)|. \quad (13)$$

Для любого числа $R > 0$ обозначим

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}. \quad (14)$$

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 1. Зафиксируем произвольную точку $(x_0, t_0) \in \Omega$ и докажем, что $u(x_0, t_0) = 0$.

Рассмотрим область $\Omega_d = \{(x, t) \in \Omega : x > g(t) + d, d < t < T - d\}$, где число $0 < d < \min\left\{1, \frac{T}{2}\right\}$ мало так, что $(x_0, t_0) \in \Omega_d$ (число d будет выбрано ниже). Пусть $\hat{u}$ — продолжение вектор-функции u с $\bar{\Omega}$ на $\bar{D}$ с сохранением класса $C_0^{1,0}$ (см. [1, с. 344]), удовлетворяющее оценке

$$\|\hat{u}; D\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega\|^{1,0}.$$

Тогда вектор-функция $\bar{u}$, определяемая равенствами

$$\bar{u}(x, t) = \hat{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad (15)$$

$$\bar{u}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0, \quad \bar{u}(x, t) = \hat{u}(x, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > T, \quad (16)$$

является продолжением u с $\bar{\Omega}$ на $\mathbb{R}^2$ с сохранением класса $C^{1,0}$, причем

$$\|\bar{u}; \mathbb{R}^2\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega\|^{1,0}.$$

Для каждого $s > 0$ определим “сглаженную” вектор-функцию

$$u_s(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{u}(x - sy, t - s\tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in \bar{D}.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\|u\|^{1,0} = \|u; \Omega\|^{1,0}$. Поскольку существует число $0 < s_0 < 1$ такое, что для любого числа $0 < s < s_0$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0, t_0) - \bar{u}(x_0, t_0)| < \varepsilon,$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что существует число $0 < s_1 < s_0$ такое, что для любого числа $0 < s < s_1$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0, t_0)| < \varepsilon. \quad (17)$$

Пусть $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R})$ — функция со следующими свойствами:

$$0 \leq \zeta_R(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \zeta_R \equiv 1, \quad |x| \leq R, \quad \zeta_R \equiv 0, \quad |x| \geq 2R, \quad (18)$$

$$\left| \frac{d^l \zeta_R}{dx^l}(x) \right| \leq CR^{-l}, \quad l = 1, 2, \quad (19)$$

где число

$$R \geq R_0 = \max(2|x_0|, 2 \max_{t \in [0, T]} |g(t) + d|, 1).$$

Положим

$$u_{s,R}(x, t) = u_s(x, t) \zeta_R(x).$$

Для произвольных $0 < s < d$, $0 < r < r_0$ и $R \geq R_0$ вектор-функция $u_{s,R}$ является решением задачи

$$L^{(r)} v = f_{s,R}^{(r)} \quad \text{в } \Omega_d, \quad v(x, d) = h_{s,R,d}(x), \quad x \geq g(d) + d, \quad (20)$$

$$\partial_x v(g(t) + d, t) = \theta_{s,R,d}(t), \quad t \in [d, T - d], \quad (21)$$

где $f_{s,R}^{(r)}(x, t) = L^{(r)} u_{s,R}(x, t)$, $h_{s,R,d}(x) = u_{s,R}(x, d)$, $\theta_{s,R,d}(t) = \partial_x u_{s,R}(g(t) + d, t)$, причем выполнено условие согласования

$$\partial_x h_{s,R,d}(g(d) + d) = \theta_{s,R,d}(d). \quad (22)$$

Так как функции $f_{s,R}^{(r)}$, $h_{s,R,d}$ и $\theta_{s,R,d}$ — достаточно гладкие, то в силу единственности решения задачи (20), (21) (см. лемму 1), результатов [9] и гладкости соответствующих параболических потенциалов (см. лемму 2 и [30]) вектор-функция $u_{s,R}$ для произвольных $0 < s < d$ и $R \geq R_0$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} u_{s,R}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi + \int_d^t d\tau \int_{g(\tau)+d}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, \tau) f_{s,R}^{(r)}(\xi, \tau) d\xi + \\ &+ \int_d^t \Gamma^{(r)}(x, t; g(\tau) + d, \tau) \phi_{s,R,d}^{(r)}(\tau) d\tau \equiv P_{s,R,d}^{(r)}(x, t) + V_{s,R,d}^{(r)}(x, t) + U_{s,R,d}^{(r)}(x, t). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь вектор-плотность $\phi_{s,R,d}^{(r)} \in C[d, T - d]$ — единственное в $C[d, T - d]$ решение граничного интегрального уравнения Вольterra II рода

$$-(2A_2^{(r)}(g(t) + d, t))^{-1} \phi_{s,R,d}^{(r)}(t) + \int_d^t \partial_x \Gamma^{(r)}(g(t) + d, t; g(\tau) + d, \tau) \phi_{s,R,d}^{(r)}(\tau) d\tau = \hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}(t), \quad t \in [d, T - d], \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}(t) &= \theta_{s,R,d}(t) - \partial_x V_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) - \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) \equiv \\ &\equiv \partial_x u_{s,R}(g(t) + d, t) - \partial_x V_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) - \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t). \end{aligned}$$

Оценим потенциалы из представления (23). Рассмотрим сначала потенциал Пуассона $P_{s,R,d}^{(r)}$. Пусть $(x, t) \in \bar{\Omega}_d$. Для любых $0 < s < d$, $0 < r < r_0$ и $R \geq R_0$ в силу (18) справедливо равенство

$$P_{s,R,d}^{(r)}(x, t) = \int_{|\xi| < 2R} \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Используя (10), (11), (15) и (16), получаем (см. обозначения (13), (14)):

$$|h_{s,R,d}(\xi)| = \left| \zeta_R(\xi) \iint_{\mathbb{R}^2} [\bar{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \bar{u}(\xi - sy, 0)] \rho(y, \tau) dy d\tau \right| \leq \\ \leq C\omega(2d; \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T]), \quad \xi \in \mathcal{B}_{2R}. \quad (26)$$

Отсюда и из оценок (12) вытекает неравенство

$$|P_{s,R,d}^{(r)}(x, t)| \leq C\omega_0(d; R),$$

где $\omega_0(d, R) = \omega(2d; \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T])$.

Оценим $\partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(x, t)$. Обозначим через $\Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, \tau)$ ФМР системы

$$L_1^{(r)}(x, t)v = \partial_t v - A_2^{(r)}(x, t)\partial_x^2 v - A_1^{(r)}(x, t)\partial_x v = 0.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, d) d\xi = E, \quad (x, t) \in \bar{D},$$

где E — единичная матрица. В силу единственности решения задачи Коши (см. [33, с. 269]) ФМР системы $L^{(r)}u = 0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma^{(r)}(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, \tau) + W^{(r)}(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad (27)$$

где

$$W^{(r)}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x, t; y, \eta) A_0^{(r)}(y, \eta) \Gamma_1^{(r)}(y, \eta; \xi, \tau) dy,$$

причем имеют место оценки

$$|\partial_x^l W^{(r)}(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{(1-l)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad l = 0, 1. \quad (28)$$

Из (25) и (27) следует, что

$$\partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(x, t) = \int_{|\xi| < 2R} [\partial_x \Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, d)] [h_{s,R,d}(\xi) - h_{s,R,d}(x)] d\xi + \\ + \int_{|\xi| < 2R} \partial_x W^{(r)}(x, t; \xi, d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi = J_{s,R,d}^{1,(r)}(x, t) + J_{s,R,d}^{2,(r)}(x, t).$$

Оценим $J_{s,R,d}^{1,(r)}$. Имеем

$$h_{s,R,d}(\xi) - h_{s,R,d}(x) \equiv [u_s(\xi, d) - u_s(x, d)] \zeta_R(\xi) + u_s(x, d) [\zeta_R(\xi) - \zeta_R(x)] = \\ = (\xi - x) \left[\partial_{\xi} u_s(\bar{\xi}_1, d) \zeta_R(\xi) + u_s(x, d) \frac{d\zeta_R}{dx}(\bar{\xi}_2) \right],$$

где точки $\bar{\xi}_i$, $i = 1, 2$, расположены между ξ и x . В силу (10), (11), (15), (16) при $0 < s < d$ справедливы неравенства:

$$|\partial_{\xi} u_s(\bar{\xi}_1, d)| \leq C \iint_{y^2 + \tau^2 < 1} |\partial_{\xi} \bar{u}(\bar{\xi}_1 - sy, d - s\tau) - \partial_{\xi} \bar{u}(\bar{\xi}_1 - sy, 0)| dy d\tau \leq \\ \leq C\omega(2d; \partial_x \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T]), \quad \bar{\xi}_1 \in \mathcal{B}_{2R}.$$

Отсюда и из (12), (18), (19) находим

$$|\partial_x J_{s,R,d}^{1,(r)}(x, t)| \leq C(\omega_1(d, R) + \|u\|^{1,0} R^{-1}), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_d,$$

где $\omega_1(d, R) \equiv \omega(2d; \partial_x \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T])$.

Оценим $J_{s,R,d}^{2,(r)}$. В силу (26) и (28) получаем

$$\left| J_{s,R,d}^{2,(r)}(x,t) \right| \leq C\omega_0(d,R) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-d}\right) d\xi \leq C\omega_0(d,R), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left\| P_{s,R,d}^{(r)}; \Omega_d \right\|^{1,0} \leq C(\omega_0(d;R) + \omega_1(d;R) + \|u\|^{1,0} R^{-1}). \quad (29)$$

Рассмотрим объемный потенциал $V_{s,R,d}^{(r)}$. Оценим $f_{s,R}^{(r)}$. Имеем

$$\begin{aligned} f_{s,R}^{(r)}(x,t) = & [L^{(r)}u_s(x,t)]\zeta_R(x) - A_2^{(r)}(x,t) \left[2\partial_x u_s(x,t) \frac{d\zeta_R}{dx}(x) + u_s(x,t) \frac{d^2\zeta_R}{dx^2}(x) \right] - \\ & - A_1^{(r)}(x,t) u_s(x,t) \frac{d\zeta_R}{dx}(x), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу соотношений (18), (19), (30) и условия (б) получаем

$$\left| f_{s,R}^{(r)}(x,t) \right| \leq \left| [L^{(r)}u_s(x,t)]\zeta_R(x) \right| + C\|u\|^{1,0} R^{-1}.$$

Справедливо представление

$$\begin{aligned} L^{(r)}u_s(x,t) = & \iint_{y^2+\tau^2 < 1} L^{(r)}(x,t) \bar{u}(x-sy, t-s\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau = \\ = & \iint_{y^2+\tau^2 < 1} [L^{(r)}(x,t) - L^{(r)}(x-sy, t-s\tau)] \bar{u}(x-sy, t-s\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau + \\ + & \iint_{y^2+\tau^2 < 1} [L^{(r)}(x-sy, t-s\tau) - L(x-sy, t-s\tau)] \bar{u}(x-sy, t-s\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

Используя условие (б) и гладкость $\bar{u}$, при $0 < s \leq d/2$, $0 < r < r_0$, $R \geq R_0$ находим

$$\left| L^{(r)}u_s(x,t)\zeta_R(x) \right| \leq C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})], \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Здесь и далее обозначаем $C(d,R) = C(\|u\|^{1,0} + \sup_{\Omega_{d/2} \cap (\mathbb{B}_R \times [0,T])} |\partial_x^2 u|)$.

Таким образом, при $0 < s \leq d/2$, $0 < r < r_0$, $R \geq R_0$ выполнена оценка

$$\left| f_{s,R}^{(r)}(x,t) \right| \leq C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})] + C\|u\|^{1,0} R^{-1}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Следовательно, в силу свойств объемного потенциала (см. лемму 2) для любых $0 < s \leq d/2$, $0 < r < r_0$, $R \geq R_0$ вектор-функция $V_{s,R,d}^{(r)}$ обладает следующими свойствами:

$$V_{s,R,d}^{(r)} \in C^{1,0}(\bar{\Omega}_d), \quad (31)$$

$$\left\| V_{s,R,d}^{(r)}; \Omega_d \right\|^{1,0} \leq C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})] + C\|u\|^{1,0} R^{-1}. \quad (32)$$

Рассмотрим потенциал простого слоя $U_{s,R,d}^{(r)}$. Оценим $\hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}$. В силу (29) и (32) достаточно оценить вектор-функцию $\theta_{s,R,d}$. Положим

$$\theta_{s,R,d}(t) = \{\partial_x[(u_s(x,t) - \bar{u}(x,t))\zeta_R(x)] + \partial_x[\bar{u}(x,t)\zeta_R(x)]\}_{x=g(t)+d} = \theta_{s,R,d}^1(t) + \theta_{s,R,d}^2(t).$$

При $0 < s \leq d^2/[4(1+\mathcal{M})^2]$, $\mathcal{M} = \omega_1(1)$, $0 < r < r_0$ и $R \geq R_0$ имеем

$$\left| \theta_{s,R,d}^1(t) \right| \leq C \int_{y^2+\tau^2 < 1} |\partial_x[\{\bar{u}(x-sy, t-s\tau) - \bar{u}(x,t)\}\zeta_R(x)]|_{x=g(t)+d} dy d\tau \leq C[\omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)],$$

$$\begin{aligned}
|\theta_{s,R,d}^2(t)| &= |\partial_x [\bar{u}(x,t) \zeta_R(x)]|_{x=g(t)+d} = \\
&= \left| [\partial_x \bar{u}(g(t)+d, t) - \partial_x \bar{u}(g(t), t)] \zeta_R(g(t)+d) + \bar{u}(g(t)+d, t) \frac{d\zeta_R}{dx}(g(t)+d) \right| \leq \\
&\leq C\omega_0(d; R) + C \|u\|^{1,0} R^{-1}, \quad t \in [d, T-d].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\theta_{s,R,d}; [d, T-d]\|^0 \leq C[\omega_0(d; R) + \omega_1(d; R)] + C \|u\|^{1,0} R^{-1}. \quad (33)$$

Из (22), (29), (31)–(33) следует, что $\hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)} \in C_0[d, T-d]$ и выполнены неравенства

$$\|\hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}; [d, T-d]\|^0 \leq C \|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})].$$

Отсюда заключаем, что для решения $\phi_{s,R,d}^{(r)} \in C_0[d, T-d]$ уравнения (24) имеет место оценка

$$\|\phi_{s,R,d}^{(r)}; [d, T-d]\|^0 \leq C \|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})]$$

и, следовательно,

$$|U_{s,R,d}^{(r)}(x, t)| \leq C \|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})], \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Отсюда и из неравенств (29), (32) при $(x, t) \in \Omega_d$ находим

$$|u_{s,R}(x, t)| \leq C \|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})],$$

где постоянная C не зависит от R, d, s и r , а $C(d, R)$ — от s и r . Выбирая последовательно достаточно большое $R \geq R_0$, а затем — достаточно малые $d = d(R)$, $0 < r = r(d, R) < r_0$ и $s_1 = s_1(d, R) \leq d^2/[4(1 + M)^2]$, получаем неравенство (17). Теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда u является решением второй начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad \partial_x v(g(t), t) = \theta(t),$$

где $\theta(t) = \partial_x u(g(t), t)$, $t \in [0, T]$, $\theta \in C_0[0, T]$. Из теоремы 1 и результатов [9] следует, что вектор-функция u может быть представлена в виде потенциала простого слоя (8), где $\phi \in C_0[0, T]$ — единственное в $C[0, T]$ решение интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2(g(t), t))^{-1} \phi(t) + \int_0^t \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \phi(\tau) d\tau = \theta(t), \quad t \in [0, T].$$

Подставляя вектор-функцию (8) в граничное условие задачи (5), получаем, что вектор-плотность ϕ одновременно является решением интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \phi(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (34)$$

В силу единственности в $C[0, T]$ решения уравнения (34) (см. [11]) получаем, что $\phi \equiv 0$. Подставляя найденное решение ϕ в представление (8), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

2. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
3. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
4. Мазья В.Г., Кресин Г.И. О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
5. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
6. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
7. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
8. Коненков А.Н. Классические решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Докл. АН. 2022. Т. 503. С. 67–69.
9. Зейнеддин М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1992.
10. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
11. Baderko E.A., Cherepova M.F. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
12. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной негладкой плоской области // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
13. Бадерко Е.А., Стасенко А.А. О гладком решении второй начально-краевой задачи для модельной параболической системы в полуограниченной негладкой области на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 39–50.
14. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
15. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
16. Ворошинин Л.Г., Хусид Б.М. Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн. 1979. 255 с.
17. Гуров К.П., Карташкин Б.А., Угасте Ю.Э. Взаимная диффузия в многофазных металлических системах. М.: Наука. 1981. 350 с.
18. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
19. Князева А.Г. Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией // Прикл. механ. и техн. физ. 2003. Т. 44. № 3. С. 85–99.
20. Дышин О.А. Разрешимость в гёльдеровых функциях задачи нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористом кольцевом пласте // Науч. труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2012. № 2. С. 74–81.
21. Семенов М.Ю., Смирнов А.Е., Лашнев М.М., Ступников В.В. Математическая модель вакуумной нитроцементации теплостойкой стали ВКС-10 // Наука и образование, научн. изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 8. С. 75–90.
22. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. АН. 2022. Т. 503. С. 26–29.
23. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
24. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
25. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
26. Камынин Л.И. Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини-Гёльдера // Сиб. матем. ж. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.

27. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. 1. № 7. С. 1–72.
28. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$ -параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
29. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини. 1992. Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
30. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Smoothness in the Dini space of a single layer potential for a parabolic system in the plane // J. Math. Sci. 2018. V. 235. № 2. P. 154–167.
31. *Черепова М.Ф.* О гладкости потенциала объемных масс для параболических систем // Вестн. МЭИ. 1999. № 6. С. 86–97.
32. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem // Appl. Anal. 2016. V. 95. № 7. P. 1570–1580.
33. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.957

РЕЗУЛЬТАТЫ СИММЕТРИЙНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ 2-ПОЛЕВЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ 3-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННОЙ СЕПАРАНТОЙ

© 2023 г. М. Ю. Балахнев^{1,*}¹ 302026 Орел, ул. Комсомольская, 95, Орловский гос. университет, Россия

*e-mail: balakhnev@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.
Переработанный вариант 29.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Представлены результаты симметричной классификации нелинейных интегрируемых 2-полевых эволюционных систем 3-го порядка с постоянной сепарантой. Библ. 12.

Ключевые слова: интегрируемые системы, канонические плотности, законы сохранения.

DOI: 10.31857/S004446692304004X, **EDN:** KJYCLB

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена классификации нелинейных интегрируемых эволюционных систем третьего порядка с двумя независимыми переменными и двумя неизвестными функциями вида

$$u_t = u_{xxx} + F(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \quad v_t = av_{xxx} + G(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \quad (1.1)$$

где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $a = (3c - 7)/2$, $c^2 = 5$.

Некоторые системы вида (1.1) впервые были представлены в [1]:

$$u_t = u_{xxx} + v_x + uu_x, \quad v_t = Av_{xxx} + Bu_xu_{xx} + Cu^2u_x + Duv_x + Evu_x \quad (1.2)$$

с постоянными A, B, C, D, E вида $p + q\sqrt{5}, p, q \in \mathbb{Q}$.

Спустя более 40 лет после первого упоминания опубликовано сравнительно небольшое количество работ, посвященных изучению различных свойств (1.2) (см., например, [2–4]). Однако на сегодняшний день полный перечень интегрируемых методом обратной задачи рассеяния систем вида (1.1) отсутствовал. Вместе с тем метод построения интегрируемых уравнений и систем, основанный на исследовании законов сохранения (см. [5]), применялся при решении достаточно большого числа классификационных задач (см. [6–12]). Так, в [10] получены рекуррентные соотношения для канонических сохраняющихся плотностей систем вида (1.1). Мы не будем воспроизводить здесь все выполненные в [10] выкладки, а отметим лишь основные моменты.

По сложившейся практике введем стандартные обозначения $u_n = \partial^n u / \partial x^n$, $v_n = \partial^n v / \partial x^n$, $n = 0, 1, \dots$, $\mathbf{u}_n = (u_n, v_n)$. Число n назовем *порядком переменных* u_n и v_n , а *порядком функции* $f(\mathbf{u})$ — наибольший из порядков переменных u_i, v_j , от которых она зависит. Частные производные функций обозначим нижними индексами, например, $F_{u_1} = \partial F / \partial u_1$, $f_{1,uv_1} = \partial^2 f_1 / (\partial u \partial v_1)$ и т.д.

2. ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В процессе классификации выполнялись, когда это было необходимо, некоторые преобразования, не выводящие систему из заданного класса. Например, точечные преобразования $\{u \rightarrow f(x, u), v \rightarrow g(x, v)\}$ приведут к уравнениям, зависящим от x , тогда как в (1.1) x отсутствует. Точно так же замена $\{u \rightarrow f(u, v), v \rightarrow g(u, v)\}$ приведет к тому, что в обоих уравнениях (1.1) по-

являются слагаемые с u_3 и v_3 (см., например, [4]), что неприемлемо в рамках данной классификационной задачи. Отметим точечные преобразования, не изменяющие типа системы (1.1):

– масштабные преобразования

$$t \rightarrow \lambda^3 t, \quad t \rightarrow \lambda x; \quad (2.1)$$

– преобразование Галилея

$$x \rightarrow x - ct, \quad u_t \rightarrow u_t - cu_x; \quad (2.2)$$

– точечное преобразование с диагональной матрицей Якоби

$$u \rightarrow f(u), \quad v \rightarrow g(v); \quad (2.3)$$

– инволюция

$$u \rightarrow v, \quad v \rightarrow u, \quad t \rightarrow a^{-1}t. \quad (2.4)$$

Эти преобразования переводят систему (1.1) в систему $u_t = u_3 + a^{-1}G$, $v_t = a^{-1}v_3 + a^{-1}F$. Поскольку $a^{-1} = (-3c - 7)2^{-1}$, $c^2 = 5$, добавив к инволюции преобразование $c \rightarrow -c$, получаем из (1.1) систему $u_t = u_3 + aG$, $v_t = av_3 + aF$ с той же сепарантой, что и в системе (1.1).

Интегрируемые системы вида (1.1) часто содержат уравнения следующего вида:

$$u_t = u_3 + u_2 D_x(f) - \frac{1}{2} f_{u_1} u_2^2 + f_1 v_2^2 + f_2 v_2 + f_3, \quad (2.5)$$

где D_x – оператор полного дифференцирования по x , f и f_i – произвольные функции, зависящие от u , v , u_1 , v_1 . Выполнив замену переменной $u = \varphi(\tilde{u})$ по формулам

$$u_t = \varphi' \tilde{u}_t, \quad u_2 = \varphi' \tilde{u}_2 + \varphi'' \tilde{u}_1^2, \quad u_3 = \varphi' \tilde{u}_3 + 3\varphi'' \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \varphi''' \tilde{u}_1^3, \quad u_t = \varphi' \tilde{u}_t,$$

получаем

$$\varphi' \tilde{u}_t = (\varphi' \tilde{u}_3 + 3\varphi'' \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \varphi''' \tilde{u}_1^3) + (\varphi' \tilde{u}_2 + \varphi'' \tilde{u}_1^2) D_x(\tilde{f}) - \frac{1}{2} \tilde{f}_{\tilde{u}_1} (\varphi')^{-1} (\varphi' \tilde{u}_2 + \varphi'' \tilde{u}_1^2)^2 + \tilde{f}_1 v_2^2 + \tilde{f}_2 v_2 + \tilde{f}_3.$$

Далее, разделив уравнение на φ' , имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \tilde{u}_3 + 3(\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \varphi''' (\varphi')^{-1} \tilde{u}_1^3 + (\tilde{u}_2 + (\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2) D_x(\tilde{f}) - \\ &- \frac{1}{2} \tilde{f}_{\tilde{u}_1} (\tilde{u}_2^2 + 2\tilde{u}_2 (\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 + ((\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2)^2) + \tilde{f}_1 v_2^2 + \tilde{f}_2 v_2 + \tilde{f}_3. \end{aligned}$$

Поскольку слагаемое $(\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 D_x(\tilde{f}) = (\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 (\tilde{f}_{\tilde{u}} \tilde{u}_1 + \tilde{f}_v v_1 + \tilde{f}_{\tilde{u}_1} \tilde{u}_2 + \tilde{f}_{v_1} v_2)$, то все члены первого порядка можно включить в $\tilde{f}_3$, а $\tilde{f}_{v_1} v_2$ – в $\tilde{f}_2$. Таким образом, остается слагаемое $(\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 \tilde{f}_{\tilde{u}_1} \tilde{u}_2$, которое можно уничтожить с соответствующим членом в уравнении при $\tilde{f}_{\tilde{u}_1}$, подобрав нужное φ .

В итоге получаем уравнение

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 D_x(\tilde{f} + 3 \ln(\varphi')) - \frac{1}{2} \tilde{f}_{\tilde{u}_1} \tilde{u}_2^2 + \hat{f}_1 v_2^2 + \hat{f}_2 v_2 + \hat{f}_3.$$

Обозначив $\tilde{f} + 3 \ln(\varphi') = \hat{f}$, замечаем, что $\tilde{f}_{\tilde{u}_1} = \hat{f}_{\tilde{u}_1}$, так как φ не зависит от u_1 , т.е. точечное преобразование $u \rightarrow \varphi(u)$ не изменяет тип уравнения (2.5).

Если, к примеру, в (2.5) $f = \psi(u)\xi(v)$, то, положив $\ln(\varphi') = \psi$, получим $\hat{f} = \xi(v) + 3$. Разумеется, есть и другие ситуации, когда функцию f можно упростить с помощью преобразования $u \rightarrow \varphi(u)$.

Кроме точечных преобразований некоторые системы (1.1) допускают обратимые дифференциальные подстановки. Например, система

$$u_t = u_3 + F(u, v, u_1, v_1, v_2), \quad v_t = av_3 + (a-1)u_2 + g(u, v, v_1, u_1 + v_2),$$

допускает подстановку $\tilde{u} = u + v_1$, $\tilde{v} = v$, приводящую к следующей системе вида (1.1):

$$\tilde{u}_t = a\tilde{u}_3 + F + D_x g(\tilde{u} - \tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{u}_1), \quad \tilde{v}_t = \tilde{v}_3 + (a-1)\tilde{u}_2 + g(\tilde{u} - \tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{u}_1).$$

Некоторые интегрируемые системы вида (1.1) допускают и необратимые дифференциальные подстановки

$$u = \varphi(U, V, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n), \quad v = \psi(U, V, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где U и V — новые неизвестные функции. Подставляя u и v в заданную интегрируемую систему (1.1), иногда удается получить новую интегрируемую систему.

В процессе проверки условий интегрируемости для (1.1) очень часто встречались системы вида

$$u_t = u_3 + F(u, u_1, u_2), \quad v_t = av_3 + G(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2),$$

которые мы называем *треугольными*. Их отличает наличие независимого уравнения в системе. Как правило, независимое уравнение — это уравнение Кортевега—де Вриза (КдВ), модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза (мКдВ) или линейное уравнение. При этом второе уравнение, в нашем примере — уравнение для v , может быть произвольным. Но, если потребовать, чтобы система имела бесконечное множество высших законов сохранения, то уравнение для v получалось, как правило, линейным. По крайней мере, исключения из этого правила нам неизвестны. Канонические плотности в треугольных системах — это плотности независимого уравнения. Если уравнение для u линейное, то канонические плотности тривиальны, за исключением одной или двух плотностей нулевого порядка. Помимо этого, существуют системы, приводимые к треугольному виду подходящей треугольной дифференциальной подстановкой. В процессе классификации все треугольные системы отбрасывались.

3. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ КЛАССИФИКАЦИИ

Основным объектом в симметричном подходе к интегрируемости являются канонические законы сохранения:

$$\frac{d}{dt}\rho_n = \frac{d}{dx}\theta_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

где ρ_n и θ_n — функции, от переменных $x, u, u_1, u_2, \dots$. Функции ρ_n называются плотностями закона сохранения, а θ_n — соответствующими плотностями токами. Для практических исследований важно, что канонические плотности выражаются рекуррентными формулами в терминах правых частей системы (1.1), которая не является заведомо интегрируемой. Поэтому, исходя из (3.1), мы получаем систему уравнений для F, G и их производных — необходимые условия интегрируемости, которые называем ρ_n -условиями. Разумеется, можно проверить лишь конечное число условий, но, как показывает опыт известных классификационных работ, системы, обладающие двумя-тремя высшими законами сохранения, оказываются интегрируемыми. Достаточными же условиями интегрируемости являются, например, существование представления Лакса или преобразования Беклунда.

Алгоритм вывода рекуррентных формул для канонических плотностей системы (1.1) изложен подробно в [10] и воспроизведен в [11] с использованием следующих формул:

$$\begin{aligned} \rho_{n+2} = & \frac{1}{3}\theta_n - \sum_0^{n+1} \rho_i \rho_j - \frac{1}{3} \sum_0^n \rho_i \rho_j \rho_k - \frac{1}{3}(F_v + F_{v_1} D_x + F_{v_2} D_x^2) a_n - \frac{1}{3} F_{u_2} \left(D_x \rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_0^n \rho_i \rho_j \right) - \\ & - \frac{1}{3} F_u \delta_{n,0} - \frac{1}{3} F_{u_1} (\delta_{n,-1} + \rho_n) - \frac{1}{3} F_{v_1} \left(a_{n+1} + \sum_0^n \rho_i a_j \right) - D_x \left(\rho_{n+1} + \frac{1}{3} D_x \rho_n + \frac{1}{2} \sum_0^n \rho_i \rho_j \right) - \\ & - \frac{1}{3} F_{v_2} \left(a_{n+2} + 2D_x a_{n+1} + 2 \sum_0^{n+1} \rho_i a_j + \sum_0^n \rho_i \rho_j a_k + \sum_0^n \rho_i D_x a_j + D_x \sum_0^n \rho_i a_j \right), \quad n \geq -1; \\ (1-a)a_{n+3} = & G_u \delta_{n,0} + G_{u_1} (\delta_{n,-1} + \rho_n) + G_{u_2} \left(\delta_{n,-2} + D_x \rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_0^n \rho_i \rho_j \right) + \\ & + G_{v_1} \left(D_x a_n + a_{n+1} + \sum_0^n \rho_i a_j \right) - D_t a_n - \sum_0^n \theta_i a_j + G_v a_n + G_{v_2} \left(a_{n+2} + D_x^2 a_n + 2D_x a_{n+1} + \right. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& + D_x \sum_0^n \rho_i a_j + \sum_0^n \rho_i D_x a_j \Big) + G_{v_2} \left(2 \sum_0^{n+1} \rho_i a_j + \sum_0^n \rho_i \rho_j a_k \right) + a D_x^3 a_n + 3a D_x^2 a_{n+1} + \\
& + 3a \left(D_x a_{n+2} + 2 \sum_0^{n+1} \rho_i D_x a_j + \sum_0^n \rho_i \rho_j D_x a_k + \sum_0^{n+2} \rho_i a_j + \sum_0^{n+1} a_i D_x \rho_j + \sum_0^n a_i \rho_j D_x \rho_k + D_x \sum_0^n \rho_i D_x a_j \right) + \\
& + a \sum_0^n a_i D_x^2 \rho_j + 3a \sum_0^{n+1} \rho_i \rho_j a_k + a \sum_0^n \rho_i \rho_j \rho_k a_l, \quad n \geq -3.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера и нестандартный символ суммирования

$$\sum_0^N f_{i_1} \cdots f_{i_k} = \sum_{\substack{i_s \geq 0, \forall s \\ i_1 + \cdots + i_k = N}} f_{i_1} \cdots f_{i_k},$$

где f_i может быть любым символом, в том числе $D_x(f), D_x^2(f), \dots, D_x^n(f)$, например,

$$\begin{aligned}
\sum_0^{-1} \rho_i \rho_j &= 0, \quad \sum_0^2 p_i D_x(q_j) = p_0 D_x(q_2) + p_1 D_x(q_1) + p_2 D_x(q_0), \\
\sum_0^1 p_i p_j D_x(q_k) &= p_0^2 D_x(q_1) + 2p_0 p_1 D_x(q_0), \quad \sum_0^2 p_i p_j q_k = p_0^2 q_2 + 2p_0 p_1 q_1 + 2p_0 p_2 q_0 + p_1^2 q_0.
\end{aligned}$$

Начальные элементы последовательности плотностей и вспомогательных функций a_k для системы (1.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= -\frac{F_{u_2}}{3}, \quad \rho_1 = \frac{F_{u_2}^2}{9} - \frac{F_{u_1}}{3} + \frac{1}{3(a-1)} F_{v_2} G_{u_2} + \frac{1}{3} D_x F_{u_2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{3} \theta_0 - \frac{2F_{u_2}^3}{81} + \dots, \\
a_0 &= 0, \quad a_1 = \frac{1}{1-a} G_{u_2}, \quad \dots
\end{aligned}$$

Дальнейшие элементы значительно усложняются и мы их не приводим. Формулы для ρ_2 содержат токи θ_0 . Легко понять, что ρ_n зависит от $\theta_0, \dots, \theta_{n-2}$, поэтому, прежде чем исследовать ρ_n -условие, следует вычислить токи $\theta_0, \dots, \theta_{n-2}$.

В [10] показано, что интегрируемая система (1.1) должна иметь вид

$$u_t = u_3 + u_2 D_x f - \frac{1}{2} u_2^2 f_{u_1} + P(u, v, u_1, v_1, v_2), \quad v_t = a \left(v_3 + v_2 D_x g - \frac{1}{2} v_2^2 g_{v_1} \right) + Q(u, v, u_1, v_1, u_2), \tag{3.4}$$

где f и g — функции не выше первого порядка.

Из ρ_n -условий $1 \leq n \leq 4$ для системы (3.4) были получены следующие уравнения:

$$f_{v_1} g_{u_1} = 0, \quad f_{u_1} f_{v_1} = g_{u_1} g_{v_1}, \quad f_{u_1 v_1} = \frac{1}{6} (c+1) f_{u_1} f_{v_1}, \quad g_{u_1 v_1} = \frac{1}{6} (1-c) g_{u_1} g_{v_1}, \tag{3.5}$$

$$P_{v_2 v_2} Q_{u_2 u_2} = \frac{1}{2} (7-3c) f_{u_1} f_{v_1}, \quad P_{u_1 v_2 v_2} = 0, \quad Q_{v_1 u_2 u_2} = 0. \tag{3.6}$$

Итак, если $f_{v_1} \neq 0$, то из первого уравнения (3.5) следует $g_{u_1} = 0$, а второе уравнение дает $f_{u_1} = 0$. Оставшиеся уравнения выполнены автоматически, и мы получаем $f = f(u, v, v_1)$ и $g = g(u, v, v_1)$. Пусть наоборот, $g_{u_1} \neq 0$, тогда $f = f(u, v, u_1)$ и $g = g(u, v, u_1)$. Третья возможность $f_{v_1} = 0, g_{u_1} = 0$ также приводит к $f = f(u, v, u_1)$ и $g = g(u, v, v_1)$. Таким образом, обе части уравнений (3.5) обращаются в нули, поэтому первое из уравнений (3.6) принимает вид $P_{v_2 v_2} Q_{u_2 u_2} = 0$.

Таким образом, получаем три случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f = f(u, v, v_1), \quad g = g(u, v, v_1), \quad f_{v_1} \neq 0; \\ 2) \quad & f = f(u, v, u_1), \quad g = g(u, v, u_1), \quad g_{u_1} \neq 0; \\ 3) \quad & f = f(u, v, u_1), \quad g = g(u, v, v_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции P и Q доставляют больше всего трудностей вычислительного характера, поэтому выделим варианты, к которым приводит уравнение $P_{v_2v_2}Q_{u_2u_2} = 0$:

$$\text{A. } P_{v_2v_2} = 0, \quad Q_{u_2u_2} \neq 0; \quad \text{B. } Q_{u_2u_2} = 0, \quad P_{v_2v_2} \neq 0; \quad \text{C. } Q_{u_2u_2} = P_{v_2v_2} = 0.$$

Случаи А, В и С — это вершины графа развилки, а три ветви, введенные выше для f и g , будем обозначать цифрами: А.1, С.2 и т.д.

Заметим, что в случаях А и В исследуемые системы переходят одна в другую при инволюции (2.4), поэтому достаточно исследовать случаи А и С.

3.1. Случай А

А.1. Из уравнений (3.6) определяются частично функции $P = f_1v_2 + f_2$ и $Q = g_1u_2^2 + g_2u_2 + g_3$, $g_1 \neq 0$. Это позволяет получить дополнительную информацию из условий интегрируемости. В рассматриваемом подслучае ρ_1 -условие привело к противоречию: $f_{v_1}g_1 = 0$.

А.2. С учетом некоторых следствий из ρ_1 -условия, система (3.4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_1v_2 + f_2, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g)\right) + Q(u, v, u_1, v_1, u_2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $f_i = f_i(u, v, u_1, v_1)$, $i = 1, 2$, $f_{1,v_1} = 0$, $f_{v_1} = 0$, $g_{v_1} = 0$. При этом функция f_1 вошла во многие уравнения, возникшие из условий интегрируемости. Поэтому естественно рассмотреть подслучаи $f_1 \neq 0$ и $f_1 = 0$. В первом из них оказалось, что $g = f_1^k q(u, v)$, $k = \text{const}$. Последующие вычисления привели к тому, что $f_1 = \alpha(u)u_1 + \beta(u)$, $\alpha \neq 0$, а функция f выразилась через f_1 . Далее мы пришли к противоречиям в условиях интегрируемости во всех развилках, где $f_1 \neq 0$.

В подслучае $f_1 = 0$ удалось найти вид функции $f = p(u, v)u_1^2 + q(u, v)u_1 + r(u, v)$. Функция Q частично определилась, и система приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_2(u, v, u_1), \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g)\right) + g_1 + g_2u_2 + g_3, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $g_1 = g_1(u, v, u_1, u_2)$ и $g_i = g_i(u, v, v_1, u_1)$ для $i = 2, 3$. Далее для упрощения рассмотрены случаи: 1) $p = q = 0$; 2) $p = 0$, $q \neq 0$; 3) $p \neq 0$.

В случаях 1) и 2) система (3.9) приводится к треугольному виду с независимым уравнением для u . В случае 3) в ρ_3 -условии получено противоречие.

А.3. По условию имеем $P = f_1v_2 + f_2$, а функция Q определилась из дополнительных ρ_n -условий: $Q = g_1u_2^2 + g_2u_2 + g_3$. В итоге система (3.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_1v_2 + f_2, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g) + \frac{3}{4}(\ln g)_{v_1}v_2^2\right) + g_1u_2^2 + g_2u_2 + g_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $f = f(u, v, u_1)$, $g = g(u, v, v_1)$, а функции f_i , g_k зависят от (u, u_1) , и, кроме того, $g_1 \neq 0$, $g_{v_1} \neq 0$.

Приведем наиболее простые следствия из ρ_n -условий для $n = 0, 1, 2, 3$:

$$g_{uv_1} = 0, \quad g_{v_1v_1} = 0, \quad gg_{1,v_1} = g_1g_{v_1}, \quad (3.11)$$

$$f_{uu_1} = 0, \quad f_{vu_1} = 0, \quad f_{u_1u_1} = 0, \quad (3.12)$$

$$ff_{vu_1} = f_v f_{u_1}, \quad fg_{1,u_1v_1} = -g_{1,v_1} f_{u_1}, \quad g_{1,v_1v_1} = 0, \quad (3.13)$$

$$2gf_{1,v_1} + f_1 g_{v_1} = 0. \quad (3.14)$$

Из уравнений (3.11) и (3.12) ясно, что

$$f = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 + \alpha_3, \quad g = \beta_1 v_1 + \beta_2, \quad \beta_1 \neq 0,$$

где α_1 — постоянная, $\alpha_i = \alpha_i(u, v)$, $i > 1$, $\beta_k = \beta_k(u, v)$ — произвольные функции, но они не могут быть все нулями.

Последнее из уравнений (3.11) приводит к решению $g_1 = gs(u, v, u_1)$, где s — произвольная функция, а второе из уравнений (3.13) сводится к $s = f^{-1}\gamma(u, v)$, следовательно, $g_1 = f^{-1}g\gamma(u, v)$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то без ограничения общности $\alpha_1 = 1$. Привлекая дополнительные условия, удалось найти $g = \varphi_1(v)v_1 + \varphi_2(u, v)$. В итоге (3.10) приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1} u_2^2 + f_1 v_2 + f_2, \\ v_t &= a \left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g) + \frac{3}{4}(\ln g)_{v_1} v_2^2 \right) + f^{-1}g\gamma(u, v)u_2^2 + g_2 u_2 + g_3, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где функции f_i и g_k зависят от u, v, u_1, v_1 .

Анализ различных форм функции f основывается на первом из уравнений (3.13), которое приводит к системе

$$\alpha_1 \alpha_{2,v} = 0, \quad \alpha_1 \alpha_{3,v} = 0, \quad \alpha_{2,v} \alpha_3 = \alpha_2 \alpha_{3,v}.$$

Отсюда получаем три подслучая:

$$\text{A.3.1. } \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_i = \alpha_i(u) \quad \forall i; \quad \text{A.3.2. } \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 = \alpha_2 \gamma(u); \quad \text{A.3.3. } \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

А.3.1. В соответствии с предыдущим анализом $f = u_1^2 + \alpha(u)u_1 + \beta(u)$. Далее из рассмотренных ранее условий интегрируемости получилось $f_1 = 0$ и $f_2 = f_2(u, u_1)$, т.е. система (3.15) — треугольная.

А.3.2. Поскольку $f = \alpha_2(u, v)(u_1 + \gamma(u))$, то из ρ_n -условий с $n = 1, 2, 3$ появились уравнения $\alpha_2 = \alpha_2(u)$, $f_1 = 0$, $f_2 = f_3(u, u_1) + q(u, v)$. Вслед за этими формулами появилась еще одна $q_v = 0$, следовательно, система (3.15) — треугольная.

А.3.3. Благодаря простоте функции $f = f(u, v)$, из полученных ранее следствий из условий интегрируемости без труда получаем $f = f(u)$, $f_1 = 0$, $f_2 = f_2(u, u_1)$. Таким образом, первое из уравнений системы (3.10) не содержит функции v , следовательно, система (3.15) снова треугольная.

Итак, исследование случая А, начатое в п. 3.1, полностью завершено. Это исследование показало, что в случае А условия интегрируемости приводили либо к противоречиям, либо к треугольным системам, которые мы исключили из рассмотрения.

3.2. Случай С

Согласно нашей классификации, система, подлежащая исследованию, приняла вид

$$u_t = u_3 + u_2 D_x f - \frac{1}{2}u_2^2 f_{u_1} + f_1 v_2 + f_0, \quad v_t = a \left(v_3 + v_2 D_x g - \frac{1}{2}v_2^2 g_{v_1} \right) + g_1 u_2 + g_0, \quad (3.16)$$

где f, g, f_0, f_1, g_0, g_1 — функции не выше первого порядка. Кроме того, f и g могут быть трех типов (3.7). Так как (3.16) симметрична, то в (3.7) случаи 1) и 2) переходят один в другой при инволюции, а 3) разбивается на четыре подслучая:

$$\begin{aligned} \text{3a) } f &= f(u, v, u_1), \quad g = g(u, v, v_1), \quad f_{u_1} g_{v_1} \neq 0; & \text{3b) } f &= f(u, v, u_1), \quad g = g(u, v), \quad f_{u_1} \neq 0; \\ \text{3c) } f &= f(u, v), \quad g = g(u, v, v_1), \quad g_{v_1} \neq 0; & \text{3d) } f &= f(u, v), \quad g = g(u, v). \end{aligned}$$

Однако 3b) и 3с) переходят один в другой при инволюции, поэтому достаточно исследовать только 3b). Учитывая изложенное, мы выделяем для рассмотрения следующие варианты:

- C.1. $f = f(u, v, v_1)$, $g = g(u, v, v_1)$, $f_{v_1} \neq 0$; C.2. $f = f(u, v, u_1)$, $g = g(u, v, v_1)$, $f_{u_1} g_{v_1} \neq 0$;
C.3. $f = f(u, v, u_1)$, $g = g(u, v)$, $f_{u_1} \neq 0$; C.4. $f = f(u, v)$, $g = g(u, v)$.

C.1. Из ρ_1 -условия вытекают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} g_{v_1 v_1 v_1} - 2g_{v_1} g_{v_1 v_1} + \frac{4}{9} g_{v_1}^3 &= 0, \quad 3f_{uv_1} = g_u f_{v_1}, \quad 3f_{vv_1} = g_v f_{v_1}, \\ g_{uv_1 v_1} - \frac{2}{3} g_u g_{v_1 v_1} - \frac{4}{3} g_{v_1} g_{uv_1} + \frac{4}{9} g_u g_{v_1}^2 &= 0, \quad g_{vv_1 v_1} - \frac{2}{3} g_v g_{v_1 v_1} - \frac{4}{3} g_{v_1} g_{vv_1} + \frac{4}{9} g_v g_{v_1}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$g_{1, u_1} = 0, \quad f_{1, u_1 u_1 u_1} = 0, \quad f_{0, u_1 u_1 u_1 u_1} = 0. \quad (3.18)$$

Подстановка $g = -(3/2) \ln \xi$ приводит (3.17) к следующим уравнениям: $\xi_{v_1 v_1 v_1} = 0$, $\xi_{uv_1 v_1} = 0$, $\xi_{vv_1 v_1} = 0$, $f_{v_1} = p(v_1) \xi^{-1/2}$. Это означает $\xi = c_1 v_1^2 + q_1 v_1 + q_2$, где $q_i = q_i(u, v)$, p — произвольная функция, c_1 — постоянная. Дальнейшие несложные вычисления приводят к треугольной системе с независимым уравнением для v .

Проделанные в C.1 вычисления показали, что для упрощения вычислений следует записывать систему в виде

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2} u_2 D_x(\ln f) + \frac{3}{4} (\ln f)_{u_1} u_2^2 + f_1 v_2 + f_0, \\ v_t &= a \left(v_3 - \frac{3}{2} v_2 D_x(\ln g) + \frac{3}{4} (\ln g)_{v_1} v_2^2 \right) + g_1 u_2 + g_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

C.2. Из ρ_1 - и ρ_2 -условий вытекают следующие уравнения:

$$f_{u_1 u_1 u_1} = 0, \quad f_{uuu} = 0, \quad f_v = 0, \quad g_{v_1 v_1 v_1} = 0, \quad g_{vvv} = 0, \quad g_u = 0, \quad (3.20)$$

$$f_{1, u_1} = f_1 (\ln f - \ln f_{u_1})_{u_1}, \quad g_{1, u_1} = g_1 (\ln g - \ln g_{v_1})_{v_1}. \quad (3.21)$$

Уравнения (3.20) означают, что f и g — многочлены не выше второй степени:

$$f = c_1 u_1^2 + q_1 u_1 + q_2, \quad g = c_2 v_1^2 + p_1 v_1 + p_2, \quad (3.22)$$

где c_i — постоянные, $q_i = q_i(u)$, $p_j = p_j(v)$. Не ограничивая общности, параметры c_i можно считать равными 1 или 0.

Кроме того, из условий интегрируемости получается большое число уравнений с общими множителями c_1 и c_2 . Например, имеются уравнения $c_1 f_1 = 0$, $c_2 g_1 = 0$. Это означает, что возникают развилки

$$\text{C.2.1. } c_1 c_2 \neq 0; \quad \text{C.2.2. } c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0; \quad \text{C.2.3. } c_1 = c_2 = 0.$$

Случай $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ переходит в C.2.2 при инволюции, поэтому мы его опускаем.

C.2.1. Здесь мы имеем $f_1 = g_1 = 0$, а также $p_1 p_2' = 2p_1' p_2$, $q_1 q_2' = 2q_1' q_2$. Это означает (a) $f = u_1^2 + 2q_1 u_1 + c_3 q_1^2$, если $q_1 \neq 0$, или (b) $f = u_1^2 + q_2$, если $q_1 = 0$. Если выполнить преобразование $u \rightarrow \varphi(u)$ и выбрать должным образом φ , то в любом случае мы получаем $f = u_1^2 + 2c_2 u_1 + c_3$. Если $c_2 \neq 0$, то мы можем нормировать c_2 на 1, а c_3 будет произвольным параметром. Если $c_2 = 0$, а $c_3 \neq 0$, то мы можем нормировать c_3 на 1 или положить $c_3 = 0$.

Преобразованием $v \rightarrow \psi(v)$ можно точно упростить функцию g , и (3.19) принимает вид

$$u_t = u_3 - \frac{3f'}{4f} u_2^2 + f_0, \quad v_t = a \left(v_3 - \frac{3g'}{4g} v_2^2 \right) + g_0,$$

где $f = u_1^2 + 2c_2 u_1 + c_3$ и $g = v_1^2 + 2k_2 v_1 + k_3$, а c_i и k_i — параметры. Проверив вновь ρ_1 -условие, мы получили, что $f_0 = f_0(u, u_1)$ и $g_0 = g_0(v, v_1)$, т.е. система распалась на два независимых уравнения.

С.2.2. Здесь мы вновь имеем уравнение $q_1 q_2' = 2q_1' q_2$, поэтому, выполнив преобразования $u \rightarrow \varphi(u)$ и $v \rightarrow \psi(v)$, получаем $f = u_1^2 + 2c_2 u_1 + c_3$ и $g = v_1 + p_1(v)$. Затем, также как и в предыдущем случае, $f_1 = 0$, и далее из ρ_1 -условия, следует, что $f_0 = f_2(u, u_1)$, значит, система треугольная с независимым уравнением для u .

С.2.3. В формулах (3.22) $q_1 p_1 \neq 0$ по условию. Поэтому преобразованиями $u \rightarrow \varphi(u)$ и $v \rightarrow \psi(v)$ мы нормируем q_1 и p_1 на 1. Таким образом, в (3.19) имеем $f = u_1 + q(u)$ и $g = v_1 + p(v)$.

Из ρ_2 -условия возникают уравнения $q' = 0$, $p' = 0$, $ff_{1,u_1} = f_1$, $gg_{1,v_1} = g_1$. Это дает нам

$$q = c_1, \quad p = c_2, \quad f = u_1 + c_1, \quad g = v_1 + c_2, \quad f_1 = ff_{2,u,v,v_1}, \quad g_1 = gg_{2,u,v,u_1}. \quad (3.23)$$

Следующие уравнения получаем из ρ_3 -условия: $f_{2,u} = 0$, $g_{2,v} = 0$, $f_2 g_2 = 0$, а также

$$2gf_{2,v_1} = -3f_{2,v_1}, \quad f_{2,vv_1} = 0, \quad 2fg_{2,u_1} = -3g_{2,u_1}, \quad g_{2,uu_1} = 0, \quad (3.24)$$

$$ff_{0,u_1 v_1} = f_{0,v_1}, \quad 2ff_{0,u_1 u_1 u_1} + 3f_{0,u_1 u_1 u_1} = 0, \quad 2gf_{0,v_1 v_1 v_1} + 3f_{0,v_1 v_1} = 6f_{2,v}, \quad (3.25)$$

$$gg_{0,u_1 v_1} = g_{0,u_1}, \quad 2gg_{0,v_1 v_1 v_1} + 3g_{0,v_1 v_1} = 0, \quad 2fg_{0,u_1 u_1 u_1} + 3g_{0,u_1 u_1} = 6gg_{2,u}. \quad (3.26)$$

Решение уравнений (3.24) имеет вид $f_2 = h(v) + k_1 g^{-1/2}$, $g_2 = p(u) + k_2 f^{-1/2}$ с учетом того, что $f_2 g_2 = 0$. Дальнейшие вычисления позволяют найти

$$f_0 = ff_{3,u,v,v_1} + f_4(u, v, u_1), \quad g_0 = gg_{3,u,v,u_1} + g_4(u, v, v_1),$$

где f_4 и g_4 определяются однородными уравнениями в (3.25) и (3.26):

$$g_4 = q_1 + q_2 g^{3/2} + q_3 g^2 + q_4 g, \quad f_4 = q_5 + q_6 f^{3/2} + q_7 f^2 + q_8, \quad q_i = q_i(u, v).$$

Вид функций f_3 и g_3 определяется уравнениями, содержащими f_2 или g_2 в правых частях. Очевидно, уравнение $f_2 g_2 = 0$ имеет три решения:

$$\text{С.2.3.а. } f_2 \neq 0, \quad g_2 = 0; \quad \text{С.2.3.б. } f_2 = 0, \quad g_2 \neq 0; \quad \text{С.2.3.с. } f_2 = g_2 = 0.$$

Поскольку рассматриваемая система имеет вид

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4f} u_2^2 + v_2 ff_2 + ff_3 + f_4, \quad v_t = av_3 - \frac{3a}{4g} v_2^2 + u_2 gg_2 + gg_3 + g_4, \quad (3.27)$$

то ясно, что подслучаи С.2.3.а и С.2.3.б переходят друг в друга при инволюции. Поэтому случай С.2.3.б можно не рассматривать.

Подслучай С.2.3.а. Из двух первых условий интегрируемости получилось, что функции g_4 и g_3 зависят только от v и v_1 , а $g_2 = 0$ по условию. Таким образом, приходим к треугольной системе с независимым уравнением для v .

Подслучай С.2.3.с. Из (3.25) и (3.26) определяются функции $f_3 = p_1 + p_2 g + p_3 g^{1/2}$, $g_3 = p_4 + p_5 f + p_6 f^{1/2}$, где $p_i = p_i(u, v)$. Рассмотрев ρ_n -условия при $n = 1, 2, 3$, мы получили, что все p_i и q_i — постоянные, а система приняла вид

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4f} u_2^2 + f(k_1 g^{1/2} + k_2 g) + k_3 f^2 + k_4 f^{3/2} + k_5 f + k_6 u + k_7,$$

$$v_t = av_3 - \frac{3a}{4g} v_2^2 + g(c_1 f^{1/2} + c_2 f) + c_3 g^2 + c_4 g^{3/2} + c_5 g + c_6 v + c_7.$$

Следует пояснить, что выписать все следствия условий интегрируемости сразу невозможно. И только если система не содержит произвольных функций, то мы можем получить сколь угодно большое число таких следствий. Для данной системы были получены все следствия ρ_n -условий при $n = 1, 2, 3, 4$. Полученные следствия имеют вид полиномиальных уравнений для параметров k_i , c_j , входящих в дифференциальную систему. Иногда полиномиальные уравнения достаточно сложны, и их приходится решать с помощью пакета Gröbner в Maple или в какой-то аналогичной системе. В данном случае уравнения решались вручную. Получены два решения: 1) $k_1 = k_2 = 0$ и 2) $c_1 = c_2 = 0$. В обоих случаях получаются треугольные системы.

С.3. Здесь имеем $f = f(u, v, u_1)$, $g = g(u, v)$, $f_{u_1} \neq 0$. Из ρ_n -условий при $n = 1, 2, 3, 4$ вытекают простые уравнения

$$f_{u_1 u_1 u_1} = 0, \quad f_{uuu_1} = 0, \quad f_{vvu_1} = 0, \quad g_u f_{u_1 u_1} = 0, \quad (3.28)$$

$$f_{u_1} f_{vv_1} = f_v f_{u_1 u_1}, \quad f_{uu_1} (u_1 f_{u_1} - 2f) + f_u (f_{u_1} - u_1 f_{u_1 u_1}) = 0, \quad (3.29)$$

$$g_{1, v_1 v_1} = 0, \quad f_{u_1 u_1} f_1 = \frac{3}{2} (3 - c) f_{vv_1}, \quad f f_{1, u_1 v_1} = f_{u_1} f_{1, v_1}. \quad (3.30)$$

Из (3.28) следует $f = c_1 u_1^2 + 2q_1 u_1 + q_2$, где c_1 — постоянная, $q_i = q_i(u, v)$. Уравнения (3.29) теперь принимают вид

$$2q_1 q_{1, v} = c_1 q_{2, v}, \quad q_1 q_{2, u} = 2q_{1, u} q_2. \quad (3.31)$$

Если $c_1 = 0$, то $q_1 \neq 0$ по условию, и мы получаем $q_1 = q_1(u)$, $q_2 = q_1^2 \mu(v)$, при этом, положив $q_1 \rightarrow q_1/2$, можно записать $f = q_1(u)u_1 + q_1^2 \mu$. С помощью преобразования $u \rightarrow \varphi(u)$ нормируем q_1 на 1 и получаем окончательно $f = u_1 + \mu(v)$.

Пусть теперь $c_1 \neq 0$, тогда можем положить $c_1 = 1$ без потери общности. Первое из уравнений (3.31) дает $q_2 = q_1^2 + \lambda(u)$. Подставив q_2 во второе уравнение, получаем $q_1 \lambda'(u) = 2\lambda q_{1, u}$. Отсюда получаем несколько случаев:

$$1. \lambda = 0, \quad f = (u_1 + q_1)^2, \quad q_1 = q_1(u, v); \quad 2. q_1 = 0, \quad f = u_1^2 + \lambda(u);$$

$$3. q_1 \lambda \neq 0, \quad q_1 = \mu(v) \sqrt{|\lambda(u)|}, \quad q_2 = \mu^2 |\lambda| + \lambda, \quad |\lambda| = v^2 \Rightarrow f = (u_1 + \mu(v)v(u))^2 \pm v^2.$$

Можно заметить, что в случае 2 при $\lambda = 0$ получается то же самое, что и в 1 при $q = 0$. Если же в случае 2 $\lambda \neq 0$, то эту же функцию f можно найти из 3 при $\mu = 0$. В 3 мы можем нормировать v на ± 1 . Таким образом, приходим к следующим вариантам:

$$\text{С.3.1. } f = u_1 + \mu(v); \quad \text{С.3.2. } f = (u_1 + \mu(v))^2 + c_0, \quad c_0^2 = 1; \quad \text{С.3.3. } f = (u_1 + q_1(u, v))^2.$$

В каждом из этих вариантов исследование условий интегрируемости приводит к очень большому числу развилок, которые приводили либо к противоречиям, либо к треугольным системам. Изложение в статье всех вычислений лишено смысла, тем не менее, приведем пример:

$$\begin{aligned} u_t = u_3 - \frac{3u_2^2}{4f} - \frac{3u_2 v_1}{2f} - \frac{3}{2} v_2 (c - 3) - \frac{3v_1^2}{4f} - \sqrt{f} (c_1 v + c_4 u) - f c_0 v - c_3 v - c_5 u + F, \\ v_t = \frac{1}{2} (3c - 7) v_3 - \frac{dF}{du_1} (u_2 + v_1) + \frac{1}{2} f^{-1/2} (u_2 + v_1) (c_1 v + c_4 u) - \sqrt{f} (c_1 u_2 (2c - 7) + \\ + 2c_1 v_1 (c - 4) + c_4 v) + c_2 (u_2 + v_1) - c_0 (u_2 (2cf - 7f - v) + \\ + v_1 (2cf - 8f - v)) + c_4 f^{3/2} + c_5 u_1 + c_3 v_1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь $F = F(u_1 + v)$ — произвольная функция, $f = u_1 + v$, $c^2 = 5$, c_i — параметры. Система (3.32) имеет высшие законы сохранения. Однако, если выполнить подстановку $u = u$, $v = w^2 - u_1$, то приходим к следующей треугольной системе:

$$\begin{aligned} u_t = \frac{1}{2} (3c - 7) u_3 - u_1 (c_0 w^2 + c_1 w + c_3) + u (c_4 w + c_5) - \\ - 3(c - 3) (w w_2 + w_1^2) + 3w_1^2 + c_1 w^3 - F(w) + c_0 w^4 + c_3 w^2, \\ w_t = w_3 - (2c - 7) w_1 (c_0 w^2 + c_1 w) + c_2 w_1. \end{aligned}$$

Таким образом, первое уравнение является линейным неоднородным уравнением с переменными коэффициентами, зависящими от $w(t, x)$. Второе уравнение — это мКдВ, если $c_0 \neq 0$, или КдВ,

если $c_0 = 0$ и $c_1 \neq 0$. Высшие законы сохранения преобразованной системы зависят только от w . Начало последовательности канонических плотностей имеет вид

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \frac{2c-7}{3}(c_0 w^2 + c_1 w), \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = \frac{2c-7}{3}c_0 w_1^2 + P_4(w),$$

где P_4 — многочлен степени 4.

С.4. Поскольку $f = f(u, v)$ и $g = g(u, v)$, то исследуемая система принимает вид

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + f_1 v_2 + f_2, \quad v_t = a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g)\right) + g_1 u_2 + g_2, \quad (3.33)$$

функции f_1, f_2, g_1, g_2 зависят от переменных $\{u, u_1\}$.

Из ρ_1 - и ρ_3 -условий нетрудно получить следующие простые уравнения:

$$\begin{aligned} f_{1,u_1 u_1} &= 0, \quad f_{1,u_1 v_1} = 0, \quad g_{1,v_1 v_1} = 0, \quad g_{1,u_1 u_1} = 0, \\ 6f_{2,u_1 u_1 u_1} + (c+3)(3f_{1,u_1} g_{1,u_1 u_1} + f_1 g_{1,u_1 u_1}) &= 0, \\ 6g_{2,v_1 v_1 v_1} - (c+3)(3g_{1,v_1} f_{1,v_1 v_1} + g_1 f_{1,v_1 v_1}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из ρ_n -условий при $n = 1, 2, 3$ было получено 66 уравнений, среди которых 20 уравнений с числом членов ≤ 20 . В частности, большое число уравнений содержат только четыре функции: f_1, g_1 и f, g . Из уравнений (3.34) имеем

$$f_1 = (q_1 v_1 + q_2)u_1 + p(u, v, v_1), \quad g_1 = (q_3 u_1 + q_4)v_1 + r(u, v, u_1),$$

где $q_i = q_i(u, v)$. Подставив f_1 и g_1 в уравнения, не содержащие f_2 или g_2 , получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} q_1 q_3 &= 0, \quad q_2 q_3 = 0, \quad q_1 q_4 = 0, \quad q_{1,u} = 0, \quad q_{3,v} = 0, \quad q_1 g_u = 0, \quad q_3 f_v = 0, \\ q_1 r_{u_1} &= 0, \quad q_3 p_{v_1} = 0, \quad p_{v_1 v_1} r_{u_1 u_1} = 0, \quad p_{v_1} r_{u_1 u_1} = 0, \quad p_{v_1 v_1} r_{u_1} = 0, \\ r_{u_1 u_1} (2f q_2 + 3f_v) &= 0, \quad p_{v_1 v_1} (4g q_4 + 3(3c-7)g_u) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Отсюда вытекают случаи

$$\text{С.4.1. } q_1 = 0, \quad q_3 \neq 0; \quad \text{С.4.2. } q_3 = 0, \quad q_1 \neq 0; \quad \text{С.4.3. } q_1 = q_3 = 0.$$

Можно заметить, что при инволюции случаи С.4.1 и С.4.2 переходят один в другой, поэтому второй случай не рассматривался.

С.4.1. В силу уравнений (3.35) мы получаем $f_1 = p(u, v)$, $q_3 = q_3(u)$, $f = f(u)$. Точечным преобразованием $u \rightarrow \varphi(u)$ нормируем f на 1, что упрощает дальнейшие вычисления. Проверка условий интегрируемости в данном случае достаточно проста, хотя и требует анализа нескольких развилок. Во всех этих развилках получены только треугольные системы.

С.4.3. Функции f_1 и g_1 теперь имеют вид $f_1 = q_2 u_1 + p$, $g_1 = q_4 v_1 + r$, где $q_i = q_i(u, v)$, $p = p(u, v, v_1)$, $r = r(u, v, u_1)$. Благодаря этим упрощениям удалось получить дополнительные простые уравнения из ρ_n -условий при $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} f_{2,u_1 u_1 v_1} &= 0, \quad f_{2,u_1 u_1 u_1} = 0, \quad f_{2,u_1 u_1 u_1} = P_1(p, r), \quad f_{2,u_1 v_1 v_1} = P_2(p, r), \\ g_{2,u_1 u_1 v_1} &= 0, \quad g_{2,u_1 v_1 v_1} = 0, \quad g_{2,v_1 v_1 v_1} = Q_1(p, r), \quad g_{2,u_1 u_1 u_1} = Q_2(p, r), \\ q_2 r_{u_1 u_1} &= 0, \quad f_v r_{u_1 u_1} = 0, \quad q_4 p_{v_1 v_1} = 0, \quad g_u p_{v_1 v_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Здесь P_i и Q_i — некоторые билинейные функции от p, r и их производных по u_1 и v_1 .

Из уравнений (3.35) мы вновь получаем три случая:

$$\text{а. } p_{v_1 v_1} \neq 0, \quad r_{u_1} = 0; \quad \text{б. } r_{u_1 u_1} \neq 0, \quad p_{v_1} = 0; \quad \text{с. } p_{v_1 v_1} = r_{u_1 u_1} = 0.$$

Очевидно, что случаи а и б симметричны относительно инволюции, поэтому случай б можно не рассматривать.

Подслучай С.4.3.а. В этом случае мы имеем $r = r(u, v)$, $q_4 = 0$ и $g = g(v)$. Последняя формула означает, что функцию g можно нормировать на 1 точечным преобразованием $v \rightarrow \varphi(v)$. Более того, ввиду полученных упрощений все следствия условий интегрируемости существенно упро-

стились. Например, одно из громоздких уравнений приняло вид $f_{uv}f = f_u f_v$. Это означает, что $f = \alpha(v)\beta(u)$, а так как $\ln(f) = \ln(\alpha) + \ln(\beta)$, мы можем нормировать β на 1. Это равносильно тому, чтобы принять $f = f(v)$.

Далее условия интегрируемости привели к большому числу развилоч, которые в большинстве привели к противоречиям, и в нескольких случаях были получены треугольные системы. Большое число противоречий объясняется тем, что функция p — это многочлен второй степени по v_1 , что приводит к члену $v_1^2 v_2$ в первом уравнении системы. Указанный член имеет вес 4, тогда как член u_3 имеет вес 3. В символическом методе исследования полиномиальных интегрируемых уравнений показано, что все члены интегрируемого уравнения должны иметь одинаковые веса. Так как мы рассматриваем произвольные уравнения, а не только полиномиальные, то анализу подвергаются все случаи, вытекающие из условий интегрируемости.

Подслучай С.4.3.с. Теперь система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + v_2(a_1 u_1 + a_2 v_1 + a_3) + f_2, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g)\right) + u_2(b_1 u_1 + b_2 v_1 + b_3) + g_2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где f, g, a_i и b_i — функции, зависящие от u и v . Функции f_2 и g_2 частично определяются из ρ_1 -условия

$$\begin{aligned} f_2 &= \mu_1 u_1^3 + \mu_2 u_1^2 v_1 + \mu_3 u_1 v_1^2 + \mu_4 u_1^2 + \mu_5 u_1 v_1 + \mu_6 u_1 + f_3(u, v, v_1), \\ g_2 &= v_1 v_1^3 + v_2 u_1 v_1^2 + v_3 u_1^2 v_1 + v_4 v_1^2 + v_5 u_1 v_1 + v_6 v_1 + g_3(u, v, u_1). \end{aligned}$$

Здесь $\mu_i = \mu_i(u, v)$, $v_i = v_i(u, v)$.

Для упрощения дальнейшей нумерации случаев переобозначим С.4.3.с. как D.

3.3. Случай D

Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + v_2(a_1 u_1 + a_2 v_1 + a_3) + \mu_1 u_1^3 + \mu_2 u_1^2 v_1 + \mu_3 u_1 v_1^2 + \\ &\quad + \mu_4 u_1^2 + \mu_5 u_1 v_1 + \mu_6 u_1 + f_3(u, v, v_1), \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g)\right) + u_2(b_1 u_1 + b_2 v_1 + b_3) + v_1 v_1^3 + v_2 u_1 v_1^2 + v_3 u_1^2 v_1 + v_4 v_1^2 + \\ &\quad + v_5 u_1 v_1 + v_6 v_1 + g_3(u, v, u_1), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где функции $f, g, a_i, b_j, \mu_k, v_s$ зависят от u и v .

Условия интегрируемости для (3.38) очень громоздкие, поэтому мы рассмотрели ρ_n -условия только для $0 \leq n \leq 5$. В результате было получено около 140 уравнений для функций, входящих в систему, простейшие из которых имеют вид

$$a_{1,u} = \frac{1}{9}(c+3)\delta, \quad b_{2,v} = -\frac{1}{9}(c+3)\delta, \quad \delta = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad (3.39)$$

$$a_1(f b_1)_u = -\frac{1}{9}(c+3)\delta f b_1, \quad b_2(g a_2)_v = \frac{1}{9}(c+3)\delta g a_2, \quad (3.40)$$

$$f_{uv} = -\frac{1}{27}(9c+23)f a_1 b_2 + \frac{1}{27}(15c+41)f a_2 b_1 + \frac{4}{3}f \mu_2, \quad (3.41)$$

$$g_{uv} = -\frac{2}{27}(15c+34)g a_1 b_2 + \frac{2}{27}(39c+88)g a_2 b_1 - \frac{2}{3}(3c+7)g v_2, \quad (3.42)$$

$$a_1 g_u = -\frac{1}{9}(5c+11)\delta g, \quad b_2 f_v = -\frac{1}{9}(c-1)\delta f, \quad (3.43)$$

$$f_v g_u = \frac{8}{27}(3c+7)\delta f g, \quad (3.44)$$

$$f_u f_v + f^2 \left(\frac{2}{27} (2c + 5) a_1 b_2 - \frac{2}{27} (5c + 14) a_2 b_1 - \frac{4}{3} \mu_2 \right) = 0, \quad (3.45)$$

$$g_u g_v + g^2 \left(\frac{1}{27} (11c + 25) a_1 b_2 - \frac{1}{27} (59c + 33) a_2 b_1 + \frac{2}{3} (3c + 7) \nu_2 \right) = 0, \quad (3.46)$$

$$a_2 \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = 0, \quad b_1 \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0, \quad f_v \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = 0, \quad g_u \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0. \quad (3.47)$$

Уравнения (3.47) приводят к следующим случаям:

$$\text{D.1. } \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} \neq 0; \quad \text{D.2. } \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} \neq 0, \quad \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = 0; \quad \text{D.3. } \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} \neq 0, \quad \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0; \quad \text{D.4. } \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0.$$

D.1. По условию имеем $a_2 = b_1 = 0$ и $f = f(u)$, $g = g(v)$. Это означает, что существует точечное преобразование $u \rightarrow \varphi(u)$, $v \rightarrow \psi(v)$, которое нормирует f и g на единицу. Это влечет $\delta = 0$ в силу уравнения (3.44), например. При этом $\delta = a_1 b_2 = 0$, следовательно, $\mu_2 = \nu_2 = 0$ в силу уравнений (3.41) и (3.42). Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2(a_1 u_1 + a_3) + \mu_1 u_1^3 + \mu_3 u_1 v_1^2 + \mu_4 u_1^2 + \mu_5 u_1 v_1 + \mu_6 u_1 + f_3(u, v, v_1), \\ v_t &= a v_3 + u_2(b_2 v_1 + b_3) + \nu_1 v_1^3 + \nu_3 u_1^2 v_1 + \nu_4 v_1^2 + \nu_5 u_1 v_1 + \nu_6 v_1 + g_3(u, v, u_1), \end{aligned}$$

где $a_1 b_2 = 0$ и $a_1 = a_1(v)$, $b_2 = b_2(u)$ в силу уравнений (3.39).

Дальнейший анализ условий интегрируемости заключался в рассмотрении большого числа развилков, которые всегда приводили к тому, что f_3 и g_3 должны быть полиномами не выше третьей степени по переменным v_1 и u_1 соответственно, т.е. мы получали противоречие. Данный факт подтверждается тем, что в символическом методе исследования полиномиальных уравнений показано, что все члены интегрируемого уравнения должны иметь одинаковые веса, и, поскольку член u_3 имеет вес 3, то тот факт, что $f_{3, v_1 v_1 v_1} g_{3, u_1 u_1 u_1} = 0$, является ожидаемым. Тем не менее при классификации мы рассматривали произвольные уравнения, а не только полиномиальные, поэтому анализировали абсолютно все случаи, вытекающие из условий интегрируемости.

Как и выше, отметим, что случаи D.2. и D.3. симметричны относительно инволюции, поэтому мы исследовали только D.3.

D.3. Учитывая (3.39)–(3.47), система (3.38) приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2(a_1 u_1 + a_3) + \mu_1 u_1^3 + \mu_3 u_1 v_1^2 + \mu_4 u_1^2 + \mu_5 u_1 v_1 + \mu_6 u_1 + \eta_1 v_1^3 + \eta_2 v_1^2 + \eta_3 v_1 + \eta_4, \\ v_t &= a \left(v_3 - \frac{3}{2} v_2 D_x(\ln g) \right) + u_2(b_1 u_1 + b_2 v_1 + b_3) + \nu_1 v_1^3 + \nu_2 u_1 v_1^2 + \nu_3 u_1^2 v_1 + \nu_4 v_1^2 + \\ &\quad + \nu_5 u_1 v_1 + \nu_6 v_1 + g_3(u, v, u_1), \end{aligned}$$

где $a_1 b_2 = 0$, $a_1 = a_1(v)$, $b_2 = b_2(u)$ и $\eta_i = \eta_i(u, v)$.

Несмотря на то что в первом уравнении системы зависимость от переменных первого порядка полностью определилась, вместо функции f_3 во все уравнения, полученные из условий интегрируемости, вошли новые неизвестные η_i , что привело к значительному росту числа вариантов при дальнейшем анализе. Тем не менее, рассмотрев все возможные случаи, мы приходили либо к треугольной системе с независимым уравнением для u , либо к противоречию $g_{3, u_1 u_1 u_1} = 0$.

D.4. Указанный вариант оказался самым трудоемким. Фактически мы удовлетворили лишь уравнениям (3.47), и исследуемая система приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2} u_2 D_x(\ln f) + v_2(a_1 u_1 + a_2 v_1 + a_3) + \mu_1 u_1^3 + \mu_2 u_1^2 v_1 + \mu_3 u_1 v_1^2 + \mu_4 u_1^2 + \\ &\quad + \mu_5 u_1 v_1 + \mu_6 u_1 + p_1 v_1^3 + p_2 v_1^2 + p_3 v_1 + p_4, \\ v_t &= a \left(v_3 - \frac{3}{2} v_2 D_x(\ln g) \right) + u_2(b_1 u_1 + b_2 v_1 + b_3) + \nu_1 v_1^3 + \nu_2 u_1 v_1^2 + \nu_3 u_1^2 v_1 + \nu_4 v_1^2 + \\ &\quad + \nu_5 u_1 v_1 + \nu_6 v_1 + q_1 u_1^3 + q_2 u_1^2 + q_3 u_1 + q_4, \end{aligned}$$

где все неизвестные функции зависят только от переменных нулевого порядка.

Поскольку из (3.40)–(3.46) никаких дополнительных условий не возникло, а число неизвестных функций сильно выросло, то потребовалось колоссальное количество времени на построение и анализ системы уравнений для них. Попытка даже схематично описать проведенные расчеты потерпела фиаско, поскольку выделение подслучаев сводилось к множественному перебору вариантов — равенство/неравенство нулю различного рода множителей. Результат этих громоздких вычислений сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Не приводящиеся к треугольному виду системы (1.1), удовлетворяющие семи условиям интегрируемости (3.1), приводятся подходящими преобразованиями (2.1)–(2.4) к одной из следующих систем:

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + uu_1 + v_1, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + 3(c-2)u_1u_2 + \frac{1}{4}(c-1)(u^2 + 2v)u_1 + \frac{1}{2}(c-3)uv_1; \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + uu_1 + v_1, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{3}{2}(c-2)u_1u_2 + \frac{1}{4}(c-1)(u^2 + 2v)u_1 + \frac{1}{2}(c-3)uv_1; \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + (u+v)u_1 - \frac{1}{2}(c-3)uv_1 + \frac{1}{2}(5c-11)vv_1, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - (v-(c+2)u)u_1 + \frac{1}{2}(c-3)(u+v)v_1; \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{3}{2}(c-3)uu_2 + \frac{1}{2}(c-1)uv_1 - \frac{1}{6}(c-3)u^3; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{3}{2}(c-3)uu_2 + \frac{1}{2}(c-1)uv_1 - \frac{3}{4}(c-2)u_1^2 - \frac{1}{6}(c-3)u^3; \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + (3c-7)u(u_1 - v_2) + \frac{1}{2}(5c-11)v_1v_2 - \frac{1}{2}(5c-13)v_1u_1, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{3}{2}(c-3)u_2 + \frac{1}{2}(3c-7)(v_1 - 2u)v_1 + 2(c-1)u^2; \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + \left(v(c-2) - \frac{1}{2}(c-1)u\right)v_2 - \frac{1}{3}uv(v_1(c-1) + 2u_1) - \\ &\quad - \frac{1}{6}(c-1)(3v_1 + v^2)u_1 - \frac{1}{6}(v^2(c-3) + 2u^2)v_1 + (c-2)v_1^2, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(u(c+1) - (c-1)v)u_2 + \frac{1}{2}(c+1)u_1^2 - \frac{1}{2}(c-1)v_1u_1 - \\ &\quad - \frac{1}{3}(u_1(c+1) - 2v_1)uv + \frac{1}{3}v^2u_1 - \frac{1}{6}(c+1)u^2v_1 - \frac{1}{6}(c+3)u^2u_1; \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + \frac{1}{2}\left((5c-11)\left(v_1 - \frac{1}{6}v^2\right) - (3c-7)u\right)v_2 - 2uu_1 + \frac{1}{6}(3c-7)uvv_1 - \\ &\quad - \left(u_1(c-3) + \frac{1}{6}(5c-11)vv_1\right)\left(v_1 - \frac{1}{6}v^2\right), \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + 3u_2 + vu_1 + uv_1 - \frac{1}{12}(3c-7)v^2v_1; \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + \left(\frac{1}{6}(3c-7)v^2 + \frac{1}{2}(5c-11)v_1 + 2(c-2)u\right)v_2 + 2(c-1)uu_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(5c-9)u_1v_1 + \frac{2}{3}(c-3)uvv_1 + \frac{1}{3}(c-4)v^2u_1 + \frac{2}{9}(c-2)v^3v_1 + \frac{1}{3}(3c-7)vv_1^2, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{3}{2}(c-3)\left(u_2 - \frac{2}{9}v^2v_1\right) - (c-1)(uv_1 + vu_1); \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 - \frac{3}{2}(c-3)v_2 - (c-1)(vu_1 + uv_1) - \frac{1}{3}(c+3)u^2u_1, \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{6}((3c+7)u^2 + 6(c+2)u_1 + 6(c+1)v)u_2 + \frac{1}{2}(3c+1)v_1u_1 + \\
&+ 2(c-1)vv_1 + \frac{2}{3}(c+3)uvu_1 + \frac{1}{3}(c+4)u^2v_1 + \frac{1}{3}(3c+7)uu_1^2 + \frac{1}{9}(5c+11)u^3u_1;
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + \frac{3}{2}(c-3)v_2 + 2(c-1)v^2 - (c+3)vu_1 + \frac{1}{2}(c+3)u_1^2, \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + (u_1(c+2) - (c+3)v)u_2 - \frac{1}{2}(c+7)u_1v_1 + (c+3)vv_1;
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + \frac{3}{2}(3c-7)v_2 + \frac{1}{2}(c-3)(vu_1 + uv_1) - \frac{1}{12}(3c+7)u^2u_1, \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{1}{12}(u^2(5c+11) - 12u_1(c+2) + 6(c+3)v)u_2 - (c-3)vv_1 - \\
&- 2v_1u_1 + \frac{1}{6}(3c+7)vuu_1 + \frac{1}{6}(c+3)u^2v_1 - \frac{1}{6}(5c+11)uu_1^2 + \frac{1}{36}(13c+29)u^3u_1;
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + c_2\eta(2v_1 + (c+1)u_1) + c_3\varphi(v_1(c-3) - 4u_1), \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1 + v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) + c_2\eta(2u_1 - (c-1)v_1) - 2c_3\varphi(v_1(c-3) - u_1);
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + 2c_2\zeta^2(2u_1 - v_1) + c_3(5c+11)\varphi^{-4}(u_1 + (c+2)v_1), \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1 + v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) - c_2(c-3)\zeta^2(u_1 - 2v_1) + 2c_3\varphi^{-4}(u_1 - (c+2)v_1);
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + c_2(5c+11)\varphi^{-4}(u_1 + (c+2)v_1) + c_3\varphi(v_1(c-3) - 4u_1), \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1 + v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) + 2c_2\varphi^{-4}(u_1 - (c+2)v_1) - 2c_3\varphi(v_1(c-3) - u_1);
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + 2c_2\zeta^2(2u_1 - v_1) + c_3\eta(2v_1 + (c+1)u_1), \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1 + v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \\
&+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) - c_2(c-3)\zeta^2(u_1 - 2v_1) + c_3\eta(2u_1 - (c-1)v_1);
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c+3) - 2v_1^2(c+2) - 2u_1v_1(c+1) + 2v_2) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(u_1+2v_1) + c_1\eta(2v_1+(c+1)u_1), \quad (3.64)$$

$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c-1) + 2cu_1v_1(c+1) + 2v_1^2 + 2u_2) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(v_1+2u_1) + c_1\eta(2u_1-(c-1)v_1);$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c+3) - 2v_1^2(c+2) - 2u_1v_1(c+1) + 2v_2) - c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(u_1+2v_1) + \frac{4}{9}cc_1c_2\xi^3, \quad (3.65)$$

$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c-1) + 2cu_1v_1(c+1) + 2v_1^2 + 2u_2) + c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(v_1+2u_1) + \frac{4}{9}cc_1c_2\xi^3;$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2u_1^2 + (3v_1^2 + 4u_1v_1)(c+3) - 2v_2) - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(c+10) + 2(c+5)v_1) + 6(11c-25)c_1^2\zeta^2(2u_1-v_1), \quad (3.66)$$

$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + c_2\varphi^{-2}(2v_1^2 - (3u_1^2 + 4u_1v_1 - u_2)(c-3)) - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(2u_1(c-5) + (c-10)v_1) - 3(11c-25)c_1^2(c-3)\zeta^2(u_1-2v_1);$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2u_1^2 + (3v_1^2 + 4u_1v_1)(c+3) - 2v_2) + \frac{4}{9}cc_1c_2\varphi^{-6} - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(c+10) + 2(c+5)v_1) + 2c_1\varphi^{-4}(u_1 + (c+2)v_1), \quad (3.67)$$

$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2v_1^2 - (3u_1^2 + 4u_1v_1 - u_2)(c-3)) - \frac{2}{9}(3c-5)c_1c_2\varphi^{-6} - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(2u_1(c-5) + (c-10)v_1) + c_1\varphi^{-4}(u_1(5c-11) + (c-3)v_1);$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(v_1^2(c+1) - (u_1^2 + u_1v_1)(c-3) + 2v_2) + 3\zeta^2c_2^2(cv_1 - (2c-5)u_1) - c_1c_2\zeta^3 - \frac{3}{5}c_1\zeta^2(2u_1-v_1), \quad (3.68)$$

$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(2u_1^2(c-2) - 2u_1v_1 - 2v_1^2 + (3c-7)u_2) + \frac{3}{2}c_2^2\zeta^2(v_1(c-5) + (7c-15)u_1) + \frac{3}{10}c_1(c-3)\zeta^2(u_1-2v_1) + \frac{1}{2}c_1c_2(3c-7)\zeta^3;$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(v_1^2(c+1) - (u_1^2 + u_1v_1)(c-3) + 2v_2) + 3c_2^2\zeta^2(cv_1 - (2c-5)u_1) + c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1), \quad (3.69)$$

$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(2u_1^2(c-2) - 2u_1v_1 - 2v_1^2 + (3c-7)u_2) + \frac{3}{2}c_2^2\zeta^2(v_1(c-5) + (7c-15)u_1) + c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1);$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2u_1^2 + (3v_1^2 + 4u_1v_1)(c+3) - \\
&- 2v_2) + \frac{4}{27}(c+1)c_2^3\varphi^{-6} - \frac{2}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(c+15) - (3c-5)v_1) + \frac{3}{2}c_1\varphi(4u_1 - (c-3)v_1) - 2cc_1c_2\varphi^{-1}, \\
v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1 + v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 - \\
&- c_2\varphi^{-2}(2v_1^2 - (3u_1^2 + 4u_1v_1 - u_2)(c-3)) - \frac{4}{27}(c-1)c_2^3\varphi^{-6} + \frac{2}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(3c+5) - (c-15)v_1) + \\
&+ 3c_1\varphi(v_1(c-3) - u_1) + c_1c_2(3c-5)\varphi^{-1};
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\text{где } \xi = e^{\frac{1}{2}(u-v)(c+1)}, \quad \zeta = e^{\frac{1}{2}(c-1)u+(c+2)v}, \quad \eta = e^{\frac{1}{2}(c+3)u-v}, \quad \varphi = e^{\frac{u+\frac{1}{2}(c+3)v}{2}}.$$

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Системы (3.48)–(3.50) впервые были представлены в [1]. Если в (3.60)–(3.70) положить $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то получим систему (2.4) из [10], которую можно записать в дивергентном виде:

$$\begin{aligned}
u_t &= D_x \left[u_2 + 3(u+v)v_1 - \frac{1}{2}(c+3)v^3 + 3u^2v - \frac{3}{2}(c+1)uv^2 \right], \\
v_t &= D_x \left[\frac{1}{2}(3c-7)v_2 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u+v)u_1 - u^3) - \frac{3}{2}(c-1)u^2v - 3uv^2 \right].
\end{aligned}$$

Дополнительные исследования позволили найти несколько дифференциальных подстановок, связывающих (3.48)–(3.50) с другими системами теоремы. Приведенные ниже формулы вида $\{u' = f(u_i), v' = g(v_j); (A) \rightarrow (B)\}$ означают, что решение (u', v') системы (A) связано с решением (u, v) системы (B):

$$u' = u, \quad v' = v_1 - \frac{1}{2}u^2; \tag{3.48} \rightarrow (3.51), (3.49) \rightarrow (3.52)$$

$$u' = u, \quad v' = v_1 - u; \tag{3.50} \rightarrow (3.53)$$

$$u' = u_1 - \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{6}(c+1)uv + \frac{1}{12}(c-1)v^2,$$

$$v' = v_1 - \frac{1}{6}(c+2)u^2 + \frac{1}{6}(c+1)uv - \frac{1}{12}(c+3)v^2; \tag{3.50} \rightarrow (3.54)$$

$$u' = u, \quad v' = v_1 - \frac{1}{2}(c+3)u - \frac{1}{6}v^2; \tag{3.50} \rightarrow (3.55)$$

$$u' = u, \quad v' = v_1 + u - \frac{1}{6}(c+1)v^2; \tag{3.50} \rightarrow (3.56)$$

$$u' = u_1 + \frac{1}{6}(c+1)u^2 + v, \quad v' = v; \tag{3.50} \rightarrow (3.57)$$

$$u' = u_1 - v, \quad v' = v; \tag{3.50} \rightarrow (3.58)$$

$$u' = u_1 - \frac{1}{12}(c+3)u^2 + \frac{1}{2}(c-3)v, \quad v' = v; \tag{3.50} \rightarrow (3.59)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)(2u_1 + v_1)v_1 - c_1\xi^2,$$

$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - c_1\xi^2,$$

$$c_2 = c_3 = 0; \tag{3.50} \rightarrow (3.60)$$

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)v_1(2u_1 + v_1) + \\
&\quad + cc_2\xi(c+1)(u_1 + v_1) + \frac{2}{3}cc_2^2\xi^2 - 2c_1\eta, \\
v' &= -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - \\
&\quad - 2cc_2\xi(c+2)(u_1 + v_1) - \frac{2}{3}c_2^2\xi^2(9c+20) + c_1(c+3)\eta;
\end{aligned} \tag{3.50} \rightarrow (3.64)$$

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)v_1(2u_1 + v_1) + \\
&\quad + c_2\xi(c+5)(u_1 + v_1) - \left(c_1 - \frac{2}{3}cc_2^2\right), \\
v' &= -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - \\
&\quad - 2c_2\xi(2c+5)(u_1 + v_1) - \left(c_1 + \frac{2}{3}(9c+20)c_2^2\right)\xi^2;
\end{aligned} \tag{3.50} \rightarrow (3.65)$$

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)(2u_1 + v_1)v_1 + \\
&\quad + c_2(c+1)\varphi^{-2}v_1 + (c_2(c+1)\varphi^{-2} + 15c_1(3c-7)\zeta)u_1 + \\
&\quad + 3c_1^2(47c-105)\zeta^2 + \frac{1}{15}c_2(3c-5)(c_2\varphi^{-2}G_1\zeta)\varphi^{-2}, \\
v' &= -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 + \\
&\quad + c_2(c+1)(u_1 + v_1)\varphi^{-2} - \frac{1}{15}c_2^2(7c+15)\varphi^{-4} + \\
&\quad + 30c_1\zeta v_1 - 3c_1(3c-5)(3c_1\zeta + 2c_2\varphi^{-2})\zeta;
\end{aligned} \tag{3.50} \rightarrow (3.66)$$

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)(2u_1 + v_1)v_1 + \\
&\quad + c_2(c+1)(u_1 + v_1)\varphi^{-2} + \frac{1}{15}c_2^2(3c-5)\varphi^{-4} - c_1(c-1)\varphi^{-4}, \\
v' &= -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 + \\
&\quad + c_2(c+1)(u_1 + v_1)\varphi^{-2} - \frac{1}{15}c_2^2(7c+15)\varphi^{-4} + c_1(c+1)\varphi^{-4};
\end{aligned} \tag{3.50} \rightarrow (3.67)$$

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)v_1(2u_1 + v_1) + \\
&\quad + 3cc_3\zeta u_1 + \frac{1}{2}c_2(c+5)\zeta v_1 + \frac{3}{10}(c_2^2(4c-5) + 2c_2c_3(2c+5) + cc_3^2)\zeta^2, \\
v' &= -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - \\
&\quad - \frac{3}{2}(c_2(3c+5) + (7c+15)c_3)\zeta v_1 + \frac{3}{2}c_2(c-5)\zeta u_1 - \\
&\quad - \frac{3}{10}(c_2^2(c+10) + 2c_2c_3(3c+10) + (9c+20)c_3^2)\zeta^2, \\
c_1 &= \frac{1}{2}(c-5)c_2^2 + \frac{1}{2}(c+5)c_2c_3 + (2c+5)c_3^2.
\end{aligned} \tag{3.50} \rightarrow (3.68)$$

Интересен тот факт, что (3.48) и (3.49) допускают подстановку

$$u' = v, \quad v' = \frac{3}{2}(c-3)v_2 + \frac{1}{4}(c-5)v^2 + u.$$

Подобрав нужные точечные преобразования в полученных системах для u и v , снова приходим к (3.48) и (3.49) соответственно.

Автор выражает благодарность А.Г. Мешкову за постановку задачи, предоставление пакета Jet для симметричного анализа эволюционных уравнений и систем, а также за полезные рекомендации по ходу вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дринфельд В.Г., Соколов В.В.* Новые эволюционные уравнения, обладающие (L, A) -парой, Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики, 1981. Тр. сем. С.Л. Соболева. Вып. 2. С. 5–9.
2. *Foursov M.V.* Towards the complete classification of homogeneous two-component integrable equations // J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 3088–3096.
3. *Wang D.S.* Complete integrability and the Miura transformation of a coupled KdV equation // Appl. Math. Lett. 2010. V. 23. P. 665–669.
4. *Wang D.S., Liu J., Zhang Z.* Integrability and equivalence relationships of six integrable coupled Korteweg-de Vries equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 36. № 12. P. 3516–3530.
5. *Meshkov A.G.* Necessary conditions of the integrability // Inverse Problem. 1994. V. 10. № 3. P. 635–653.
6. *Meshkov A.G., Kulemin I.V.* To the classification of integrable systems in 1+1. dimensions // Symmetry in Non-linear Mathematical Physics. Proc. 2nd Int. Conf., Kyiv, Ukraine, July 7–13, 1997. P. 115–121.
7. *Meshkov A.G., Sokolov V.V.* Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere // Comm. Math. Phys. 2002. V. 232. № 1. P. 1–18.
8. *Балахнев М.Ю.* Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений // Теор. и матем. физ. 2005. Т. 142. № 1. С. 13–20.
9. *Balakhnev M.Ju., Meshkov A.G.* Integrable anisotropic evolution equations on a sphere // SIGMA 1. 2005. 027. 11 pages, nlin.SI/0512032.
10. *Мешков А.Г.* К симметричной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида // Фунд. и прикл. матем. 2006. Т. 12. № 7. С. 141–161.
11. *Meshkov A.G., Balakhnev M.Ju.* Two-field integrable evolutionary systems of the third order and their differential substitutions // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2008. V. 4. paper 018. P. 1–29.
12. *Мешков А.Г., Соколов В.В.* Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4. № 3. С. 104–154.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА

© 2023 г. К. Б. Сабитов^{1,2,*}¹ 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия² 453103 Стерлитамак, пр-т Ленина, 49, Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологий, Россия*e-mail: sabitov_fmfm@mail.ruПоступила в редакцию 05.02.2021 г.
Переработанный вариант 17.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

В работе для уравнения колебаний прямоугольной пластинки изучены начально-граничная и обратные задачи по отысканию правой части (источника колебаний). Решения задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования. При обосновании существования решения обратной задачи по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственных координат, возникает проблема малых знаменателей от двух натуральных переменных, в связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили доказать существование решения этой задачи в классе регулярных решений, накладывая определенные условия гладкости на данные граничные функции. Библи. 21.

Ключевые слова: уравнение колебаний прямоугольной пластины, начально-граничная и обратные задачи, интегральное уравнение Вольтерра, единственность, ряд, малые знаменатели, существование.

DOI: 10.31857/S0044466923040142, EDN: IVVXNL

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h , при этом толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами, со сторонами p и q , описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \quad (1)$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, EJ — жесткость пластинки, ρ — плотность пластинки, E — модуль упругости материала, J — момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) пластинки в момент времени t .

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок и оболочек имеют важное прикладное значение в строительной механике, машиностроении, авиастроении, судостроении, ядерных энергетических установках и т.д. Во многих случаях использование пластин связано с условиями закрепления на отдельных участках их контура. Такие задачи изучены в известных работах [2, с. 444–449], [3, с. 132–133], [4, с. 35–69] и многих других.

Рассмотрим уравнение (1) в области

$$Q = D \times (0, T), \quad \text{где} \quad D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

здесь p и q отмечены выше, размеры пластинки, T — заданная положительная постоянная, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти определенную в области Q функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y, t) \in C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q}); \quad (2)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) = u_{yy}(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_{yy}(x, q, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (4)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (5)$$

где $F(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Здесь граничные условия (4) означают, что все стороны пластинки подперты, т.е. свободно могут двигаться вокруг точек закрепления.

Задача 2. Пусть $F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$. Найти функции $u(x, y, t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5), и, кроме того,

$$g(t) \in C[0, T]; \quad (6)$$

$$u(x_0, y_0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

где $f(x, y)$ и $h(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, (x_0, y_0) — заданная точка из области D .

Задача 3. Пусть $F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$. Найти пару функций $u(x, y, t)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям (2)–(5) и, кроме того,

$$f(x, y) \in C(\bar{D}); \quad (8)$$

$$u(x, y, t_0) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (9)$$

где $g(t)$ и $\varphi_0(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции, t_0 — заданная точка из полуинтервала $(0, T]$.

Из постановок этих задач видно, что задача 1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний прямоугольной пластинки. Задачи 2 и 3 являются обратными, поэтому здесь условия (7) и (9) являются дополнительными для определения сомножителей $g(t)$ и $f(x, y)$ правой части $F(x, y, t)$ уравнения (1).

Данная работа является продолжением исследований автора [5–9], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничных и обратных задач для одномерного уравнения балки. Постановка обратных задач 2 и 3 исходит из работ [10–15], где аналогичные задачи изучены для уравнений теплопроводности, струны и операторных уравнений. Решения поставленных задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений. Отметим, что при обосновании сходимости рядов, представляющих решение задачи 3, возникает проблема малых знаменателей [16], [17], которая создает дополнительные трудности. В связи с чем установлены оценки об отдаленности от нуля с соответствующей асимптотикой. На основе этой оценки обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения (1).

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ 1

2.1. Энергетическое неравенство. Единственность решения

Теорема 1. Если существует решение начально-граничной задачи (2)–(5), то при любом $t \in [0, T]$ для решения справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy \leq \\ & \leq e^T \left[\iint_D [\psi^2 + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)] dx dy + \iiint_Q F^2(x, y, t) dx dy dt \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \iint_D [\rho h u_t^2 + EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = \rho h \frac{1}{2} \iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = \rho h E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной пластинки при нулевых граничных условиях (4).

Действительно, кинетическая энергия движущейся пластинки состоит из поступательного движения элемента $dxdy$ параллельно смещению $u(x, y, t)$ и определяется интегралом

$$K(t) = \frac{1}{2} \iint_D \rho h u_t^2 dxdy,$$

где ρh есть масса единицы площади пластинки.

Потенциальная энергия колебаний пластинки зависит от жесткости EJ при изгибе и находится интегралом [2, с. 446]

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \iint_D EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) dxdy.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t) = K(t) + \Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний пластинки.

Доказательство теоремы. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} u_t Lu = & \frac{1}{2} [u_t^2 + \alpha^2 (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]_t' + \alpha^2 (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy})_x' + \\ & + \alpha^2 (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy})_y' \end{aligned}$$

и интегрируя его по области

$$Q_\tau = Q \cap \{t < \tau\}, \quad 0 < \tau \leq T,$$

будем иметь

$$E(\tau) - E(0) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \iiint_{Q_\tau} F u_t dxdydt, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \alpha^2 \iint_{S_1} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy}) dydt, \\ J_2 &= \alpha^2 \iint_{S_2} (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy}) dxdt, \\ J_3 &= \alpha^2 \iint_{S_3} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy}) dydt, \\ J_4 &= \alpha^2 \iint_{S_4} (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy}) dxdt, \end{aligned}$$

$S_i, i = \overline{1, 4}$ — грани параллелепипеда Q_τ , лежащие соответственно на плоскостях $x = p$, $y = q$, $x = 0$, $y = 0$.

Пусть выполнены граничные условия (4), т.е. $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, и $u = u_{yy} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$. Тогда $u_t = u_y = u_{ty} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, поэтому интегралы $J_1 = J_3 = 0$. Аналогично $u_t = u_x = u_{tx} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$, в силу чего, интегралы $J_2 = J_4 = 0$.

Тогда из равенства (11) следует, что

$$E(\tau) \leq E(0) + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} F^2(x, y, t) dxdydt + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} u_t^2 dxdydt = A + \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \iint_D u_t^2 dxdy \leq A + \int_0^\tau E(t) dt, \quad (12)$$

где

$$A = E(0) + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} F^2(x, y, t) dxdydt.$$

Отсюда, следуя [18, с. 77], получим

$$A + \int_0^T E(t) dt \leq A e^T. \quad (13)$$

Тогда из неравенств (12), (13) следует оценка (10).

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 правая часть $F(x, y, t)$ уравнения (1) равна нулю, то при любом $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \iint_D [\psi^2(x, y) + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)] dx dy, \quad (14)$$

т.е. равенство (14) означает, что полная энергия собственных колебаний однородной пластины остается в течение всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.

Справедливость равенства (14) следует из соотношения (11).

Следствие 2 (теорема единственности). Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственно.

Доказательство. Пусть существуют две функции $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$, удовлетворяющие условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t) = u(x, y, t)$ принадлежит классу (2), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в Q , нулевым начальным условиям $u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) \equiv 0$ и граничным условиям (4). Для такого решения из равенства (14) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_Q [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = 0$$

при любом $t \in [0, T]$. Данное равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_{xy} \equiv 0$ и $u_{yy} \equiv 0$ в области Q . Из этих условий следует, что $u(x, y, t) = ax + by + c$, где a , b и c – произвольные постоянные. По условию эта функция должна удовлетворять одному из граничных условий (4) и нулевым начальным условиям. Из граничных условий (4) следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, $u(x, y, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$.

2.2. Колебания пластины, шарнирно опирающейся на все края

Разделяя переменные $u(x, y, t) = v(x, y)f(t)$ в уравнении (1) при $F(x, y, t) \equiv 0$, относительно функции $v(x, y)$ получим следующую спектральную задачу:

$$\Delta(\Delta v) + \lambda^2 v = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} v(0, y) = u_{xx}(0, y) = v(p, y) = v_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \\ v(x, 0) = v_{yy}(x, 0) = v(x, q) = v_{yy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p. \end{aligned} \quad (16)$$

В качестве решения спектральной задачи (15), (16) возьмем функции

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad (17)$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{q} \right)^2, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Отметим, что система собственных функций (17) задачи (15), (16) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(D)$ и образует там базис.

Следуя работам [5], [6], введем функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy, \quad (19)$$

где $u(x, y, t)$ – решение начально-граничной задачи (2)–(5).

Дифференцируя равенство (19) дважды по $t \in (0, T)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u_{mn}''(t) = \iint_D F(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy - \alpha^2 \iint_D (u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) v_{mn}(x, y) dx dy. \quad (20)$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (4) и (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_D u_{xxxx} v_{mn}(x, y) dx dy &= \left(\frac{m\pi}{p} \right)^4 u_{mn}(t), \\ \iint_D u_{yyyy} v_{mn}(x, y) dx dy &= \left(\frac{n\pi}{q} \right)^4 u_{mn}(t), \\ \iint_D u_{xxyy} v_{mn}(x, y) dx dy &= \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{q} \right)^2 u_{mn}(t). \end{aligned}$$

Подставляя значения этих интегралов в равенство (20), получим

$$u_{mn}''(t) - \alpha^2 \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = F_{mn}(t), \quad (21)$$

здесь

$$F_{mn}(t) = \iint_D F(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy. \quad (22)$$

Общее решение дифференциального уравнения (21) находится по формуле

$$u_{mn} = a_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \frac{1}{\alpha \lambda_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\alpha \lambda_{mn}(t-s)] ds, \quad (23)$$

где a_{mn} и b_{mn} — произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_{mn} и b_{mn} воспользуемся начальными условиями (5) и формулой (19):

$$u_{mn}(0) = \iint_D u(x, y, 0) v_{mn}(x, y) dx dy = \iint_D \varphi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy = \varphi_{mn}, \quad (24)$$

$$u_{mn}'(0) = \iint_D u_t(x, y, 0) v_{mn}(x, y) dx dy = \iint_D \psi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy = \psi_{mn}. \quad (25)$$

Удовлетворив функции (23) начальным условиям (24) и (25), найдем

$$a_{mn} = \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}}.$$

Подставляя найденные значения a_{mn} и b_{mn} в формулу (23), получим явный вид функций

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \tilde{F}_{mn}(t), \quad (26)$$

где

$$\tilde{F}_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds, \quad \omega_{mn} = \alpha \lambda_{mn}. \quad (27)$$

На основании частных решений (26) и (17) решение задачи (2)–(5) можно определить в виде суммы ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x, y). \quad (28)$$

В дальнейшем правую часть $F(x, y, t)$ уравнения (1) представим в виде: $F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$, так как в задачах 2 и 3 используется такое представление. Тогда функции (22) и (26) принимают вид:

$$F_{mn}(t) = f_{mn}g(t), \quad (29)$$

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn}t + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn}t + f_{mn}g_{mn}(t), \quad (30)$$

где

$$f_{mn} = \iint_D f(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy, \quad (31)$$

$$g_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t g(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)]ds. \quad (32)$$

Лемма 1. При любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки

$$|u_{mn}(t)| \leq C_1 \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\Psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0, T)} \right), \quad (33)$$

$$|u''_{mn}(t)| \leq C_2 (\lambda_{mn}^2 |\varphi_{mn}| + \lambda_{mn} |\Psi_{mn}| + \lambda_{mn} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0, T)}), \quad (34)$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , p , q и T .

Справедливость оценок (33) и (34) следует из формул (26), (27) и (29).

Формально из ряда (28) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t)v_{mn}(x, y), \quad (35)$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p} \right)^4 v_{mn}(x, y), \quad (36)$$

$$u_{yyyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{n\pi}{q} \right)^4 v_{mn}(x, y), \quad (37)$$

$$u_{xxyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{q} \right)^2 v_{mn}(x, y). \quad (38)$$

Ряды (28), (35)–(38) при любых $(x, y, t) \in \bar{Q}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$C_3 \sum_{m,n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 |\varphi_{mn}| + \lambda_{mn} |\Psi_{mn}| + \lambda_{mn} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0, T)}). \quad (39)$$

Лемма 2. Если $\varphi(x, y) \in C^6(\bar{D})$, $\varphi(0, y) = \varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xxxx}(0, y) = \varphi(p, y) = \varphi_{xx}(p, y) = \varphi_{xxxx}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\varphi(x, 0) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yyyy}(x, 0) = \varphi(x, q) = \varphi_{yy}(x, q) = \varphi_{yyyy}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$; $\psi(x, y) \in C^4(\bar{D})$, $\psi(0, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi(p, y) = \psi_{xx}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\psi(x, 0) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi(x, q) = \psi_{yy}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $f(x, y) \in C^4(\bar{D})$, $f(0, y) = f_{xx}(0, y) = f(p, y) = f_{xx}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $f(x, 0) = f_{yy}(x, 0) = f(x, q) = f_{yy}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $g(t) \in C(0, T) \cap L_2(0, T)$, то справедливы представления:

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} = & \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-6} (|\varphi_{mn}^{(6,0)}| + 6|\varphi_{mn}^{(5,1)}| + 15|\varphi_{mn}^{(4,2)}| + 20|\varphi_{mn}^{(3,3)}| + \\ & + 15|\varphi_{mn}^{(2,4)}| + 6|\varphi_{mn}^{(1,5)}| + |\varphi_{mn}^{(0,6)}|) = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-6} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 6 \\ i+j=6}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\psi_{mn} = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-4} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 4 \\ i+j=4}} |\psi_{mn}^{(i,j)}|, \quad (41)$$

$$f_{mn} = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-4} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 4 \\ i+j=4}} |f_{mn}^{(i,j)}|, \quad (42)$$

где $\varphi_{mn}^{(i,j)}$, $\psi_{mn}^{(i,j)}$, $f_{mn}^{(i,j)}$ — коэффициенты Фурье соответствующих производных

$$\frac{\partial^{i+j} \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} \psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j},$$

по системам функций $\frac{\partial^{i+j} v_{mn}(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$, при этом следующие ряды сходятся:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^6 \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=6, \quad (43)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=4, \quad (44)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=4. \quad (45)$$

Доказательство. Следуя аналогично работе [19, с. 335], интегрируя по частям в интегралах формул (24), (25), (22), получим искомые представления (40)–(42), а оценки (43)–(45) являются аналогами неравенств Бесселя для двойных рядов Фурье.

На основании леммы 2 обоснуем сходимость ряда (39). Из равенства (18) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{l_M} \right)^2 (m^2 + n^2) \leq \lambda_{mn} \leq \left(\frac{\pi}{l_m} \right)^2 (m^2 + n^2), \quad l_m = \min\{p, q\}; \quad \frac{1}{\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right)^2} \leq \frac{l_M^2}{(m+n)^2}, \quad l_M = \max\{p, q\}. \quad (46)$$

Тогда ряд (39) мажорируется рядом

$$C_4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2} \left[\sum_{\substack{i+j=6 \\ 0 \leq i, j \leq 6}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| + \sum_{\substack{i+j=4 \\ 0 \leq i, j \leq 4}} |\psi_{mn}^{(i,j)}| + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 4 \\ i+j=4}} |f_{mn}^{(i,j)}| \right],$$

который в силу сходимости рядов (43)–(45) и неравенства

$$\frac{1}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4mn} < \frac{1}{mn}$$

сходится при любом $t \in [0, T]$. Отсюда следует, что ряды (28), (35)–(38) сходятся равномерно на $\bar{Q}$. Тогда сумма ряда (28) удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(5).

Следовательно, нами доказана следующая

Терема 2. Если функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $f(x, y)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи (2)–(5), которое определяется суммой ряда (28).

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи от начальных функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и правой части $F(x, y, t)$.

Терема 3. Для решения (28) задачи (2)–(5) имеют место оценки:

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} \leq C_5 (\|\varphi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|F(x, y, t)\|_{L_2(Q)}), \quad (47)$$

$$\|u(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})} \leq C_6 (\|\varphi(x, y)\|_{C^2(\bar{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})}). \quad (48)$$

Доказательство. Поскольку система (17) ортонормирована в $L_2(D)$, то из формулы (28) на основании оценки (33) получим

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t) \leq 3C_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{mn}|^2 + \frac{1}{\lambda_{mn}^2} |\psi_{mn}|^2 + \frac{1}{\lambda_{mn}^2} |f_{mn}|^2 \|g\|_{L_2(0,T)}^2 \right) = \\ &= 3C_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}|^2 + |\psi_{mn}|^2 + |f_{mn}|^2 \|g\|_{L_2(0,T)}^2) \leq 3C_1^2 (\|\varphi(x, y)\|_{L_2(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)}^2 + \|F(x, y, t)\|_{L_2(Q)}^2). \end{aligned}$$

Отсюда и получим оценку (47).

Пусть (x, y, t) — произвольная точка из $\bar{Q}$. Тогда из (28) с учетом оценки (33) имеем

$$|u(x, y, t)| \leq \frac{2C_1}{\sqrt{pq}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)} \right). \quad (49)$$

По условию коэффициент φ_{mn} можно представить

$$|\varphi_{mn}| = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-2} (|\varphi_{mn}^{(2,0)}| + 2|\varphi_{mn}^{(1,1)}| + |\varphi_{mn}^{(0,2)}|) = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-2} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|. \quad (50)$$

Тогда из неравенства (49) с учетом (50) и (46) и используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| &\leq \tilde{C}_1 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(m+n)^2} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| + \frac{1}{m^2 + n^2} |\psi_{mn}| + \frac{1}{m^2 + n^2} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)} \right] \leq \\ &\leq \tilde{C}_1 \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^4} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}|^2 \right)^{1/2} + \right. \\ &+ \left. \|g\|_{L_2(0,T)} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \tilde{C}_2 \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} \left\| \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L_2(D)} + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|F(x, y, t)\|_{L_2(Q)} \right) \leq \\ &\leq C_6 (\|\varphi(x, y)\|_{C^2(\bar{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})}), \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость оценки (48).

Таким образом, нами полностью доказана корректность постановки задачи (2)–(5). При этом отметим, что при доказательстве теоремы 2 существования решения задачи на начальные условия (5) наложены достаточно сильные условия гладкости. Если ввести понятие обобщенного решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

На основе прямой задачи исследуем задачу 2 по отысканию пары функций $u(x, y, t)$ и $g(t)$.

Для этого удовлетворим функцию (28) граничному условию (7):

$$u(x_0, y_0, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x_0, y_0) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (51)$$

Заменив в (51) функцию $u_{mn}(t)$ ее выражением (30), получим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t g(s) K(t, s) ds = \tilde{h}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (52)$$

здесь

$$K(t, s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{\omega_{mn}} \sin[\omega_{mn}(t-s)] v_{mn}(x_0, y_0), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (53)$$

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x_0, y_0). \quad (54)$$

В силу условий теоремы 1 функция $f(x, y)$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} f(x, y) \in C^4(\bar{D}), \quad f(0, y) = f_{xx}(0, y) = f(x, y) = f_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q; \\ f(x, 0) = f_{yy}(x, 0) = f(x, q) = f_{yy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p. \end{aligned} \quad (55)$$

В силу условий (55) ряд (53) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по t первого и второго порядков, сходятся равномерно на $0 \leq s \leq t \leq T$, поэтому функции $K(t, s)$, $K_t(t, s)$ и $K_{tt}(t, s)$ непрерывны на указанном множестве.

Если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то ряд в правой части равенства (54) равномерно сходится на $[0, T]$ и допускает там почленное дифференцирование по t дважды. Следовательно, при условии $h(t) \in C^2[0, T]$ функция $\tilde{h}(t)$ также принадлежит $C^2[0, T]$.

Теперь, продифференцировав интегральное уравнение (52) по t , получим

$$K(t, t)g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} ds = \tilde{h}'(t). \quad (56)$$

Из равенства (53) следует, что $K(t, t) \equiv 0$. Тогда, дифференцируя уравнение (56) еще раз по t , будем иметь

$$\left. \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right|_{s=t} g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K^2(t, s)}{\partial t^2} ds = \tilde{h}''(t). \quad (57)$$

На основании соотношения (53) вычислим

$$\left. \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right|_{s=t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0). \quad (58)$$

Отсюда видно, что если $f(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (57) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра II рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Следовательно, интегральное уравнение (57), стало быть, и интегральное уравнение (52), имеют единственное решение $g(t)$ в классе $C[0, T]$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (55), $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(0) = \varphi(x_0, y_0)$, $h'(0) = \psi(x_0, y_0)$. Тогда, если $f(x_0, y_0) \neq 0$, то задача (2)–(7) имеет единственное решение. Это решение определяется по формуле (28), в которой функция $g(t)$ находится из интегрального уравнения (57).

Теперь выясним, насколько существенно условие $f(x_0, y_0) \neq 0$ в теореме 4. Пусть при некоторых $m = m_0$, $\tilde{x}_0 = x_0/p \in (0, 1)$ или $n = n_0$, $\tilde{y}_0 = y_0/q \in (0, 1)$ выполняется равенство

$$\sin \frac{m_0 \pi x_0}{p} = \sin m_0 \pi \tilde{x}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{n_0 \pi y_0}{q} = \sin n_0 \pi \tilde{y}_0 = 0.$$

Ясно, что такие $\tilde{x}_0$ и $\tilde{y}_0$ существуют. Пусть выполнено первое из этих равенств. Тогда для функции $f(x, y) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q}$ при любой функции $g(t) \in C[0, T]$ существует ненулевое решение задачи 2 (где $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$)

$$u_{m_0 n}(x, y, t) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q} \frac{1}{\omega_{m_0 n}} \int_0^t g(s) \sin[\omega_{m_0 n}(t-s)] ds.$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 3

Решение (28) прямой задачи 1 удовлетворим граничному условию (9). Тогда получаем уравнение

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t_0)v_{mn}(x,y) = \varphi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{0mn}v_{mn}(x,y), \quad (59)$$

здесь

$$\varphi_{0mn} = \iint_D \varphi_0(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy, \quad (60)$$

а $u_{mn}(t_0)$ определяется равенством (30), где коэффициенты f_{mn} пока неизвестны и подлежат нахождению. Из уравнения (59) найдем

$$f_{mn} = \frac{1}{g_{mn}(t_0)} \left(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t - \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right), \quad (61)$$

при условии, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$g_{mn}(t_0) \neq 0, \quad (62)$$

где $g_{mn}(t)$ определяется по формуле (32).

Подставляя (61) в равенство (30), построим в явном виде функции

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \frac{g_{mn}(t)}{g_{mn}(t_0)} \left(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t_0 - \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t_0 \right). \quad (63)$$

Тогда решение задачи 3 определится как сумма рядов

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \quad (64)$$

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}v_{mn}(x,y), \quad (65)$$

где коэффициенты $u_{mn}(t)$ и f_{mn} находятся соответственно формулами (63) и (61).

Теперь докажем единственность решения задачи. Пусть $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \varphi_0(x,y) \equiv 0$ и выполнены условия (62) при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда из равенств (24), (25), (60), (61) и (63) следует, что $u_{mn}(t) \equiv 0$ и $f_{mn} \equiv 0$. Отсюда в силу равенств (19) и (31) получаем, что при всех $t \in [0, T]$ и $m, n \in \mathbb{N}$

$$\iint_D u(x,y,t)v_{mn}(x,y)dxdy = 0, \quad \iint_D f(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy = 0.$$

Эти равенства в силу полноты системы функций (17) в пространстве $L_2(D)$ означают, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду на $\bar{D}$ при любом $t \in [0, T]$ и $f(x,y) = 0$ почти всюду на $\bar{D}$. Отсюда в силу условий (2) и (8) следует, что $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$ и $f(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$ при любой непрерывной на $[0, T]$ функции $g(t)$.

Если при некоторых t_0 , $m = m_0$ или $n = n_0$ выражение $g_{m_0 n}(t_0) = 0$ или $g_{m n_0}(t_0) = 0$, то однородная задача 3 (где $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \varphi_0(x,y) \equiv 0$) при любой непрерывной функции $g(t)$ имеет ненулевое решение

$$u(x,y,t) = f_{m_0 n} g_{m_0 n}(t) v_{m_0 n}(x,y), \quad f(x,y) = f_{m_0 n} v_{m_0 n}(x,y),$$

где $f_{m_0 n} \neq 0$ — произвольная постоянная.

Теперь возникает вопрос о существовании нулей функций $g_{mn}(t_0)$. Пусть функция $g(s)$ монотонная на $[0, t_0]$. Тогда на основании второй теоремы о среднем имеем

$$\begin{aligned}\omega_{mn}g_{mn}(t_0) &= g(0)\int_0^{\xi}\sin[\omega_{mn}(t_0-s)]ds + g(t_0)\int_{\xi}^{t_0}\sin[\omega_{mn}(t_0-s)]ds = \\ &= \frac{g(0)}{\omega_{mn}}[\cos\omega_{mn}(t_0-\xi) - \cos\omega_{mn}t_0] + \frac{g(t_0)}{\omega_{mn}}[1 - \cos\omega_{mn}(t_0-\xi)] = \\ &= \frac{\cos\omega_{mn}(t_0-\xi)}{\omega_{mn}}[g(0) - g(t_0)] + \frac{g(t_0)}{\omega_{mn}} - \frac{g(0)}{\omega_{mn}}\cos\omega_{mn}t_0, \quad 0 < \xi < t_0.\end{aligned}\quad (66)$$

Теперь уточним монотонность функции $g(s)$ на $[0, t_0]$. Пусть она возрастающая и неотрицательная. Тогда $g(t_0) = g(0) + \alpha$, $\alpha \geq 0$. Тогда из равенства (66) получим

$$\begin{aligned}\omega_{mn}g_{mn}(t_0) &= \frac{g(0)}{\omega_{mn}}(1 - \cos\omega_{mn}t_0) + \frac{\alpha}{\omega_{mn}}(1 - \cos\omega_{mn}(t_0 - \xi)) \geq \\ &\geq \frac{g(0)}{\omega_{mn}}(1 - \cos\omega_{mn}t_0) = \frac{2g(0)}{\omega_{mn}}\sin^2\frac{\omega_{mn}t_0}{2}.\end{aligned}\quad (67)$$

Отсюда видно, что при $g(s) = \text{const} \neq 0$

$$g_{mn}(t_0) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\omega_{mn}t_0}{2} = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi k}{\alpha\lambda_{mn}} \quad k, m, n \in \mathbb{N},$$

т.е. при этих значениях t_0 нарушается единственность решения задачи 3.

Следовательно, нами установлен критерий единственности решения задачи 3.

Теорема 5. Если существует решение задачи 3, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (62).

Поскольку выражение $g_{mn}(t_0)$ может иметь счетное множество нулей, то возникает проблема малых знаменателей [16], [17], [18, с. 112–118] и поэтому необходимо установить оценки об отдаленности от нуля с соответствующей асимптотикой.

Выражение $\sin(\omega_{mn}t_0/2)$ представим в следующем виде:

$$\sin\frac{\omega_{mn}t_0}{2} = \sin\pi N^2 v_{mn}, \quad N = \max\{m, n\}, \quad (68)$$

где

$$v_{mn} = d \left[\left(\frac{qm}{N} \right)^2 + \left(\frac{pn}{N} \right)^2 \right], \quad d = \frac{\alpha t_0 \pi}{2(pq)^2}.$$

Поскольку v_{mn} зависит от n и m , то в зависимости от данных задачи α , p , q и t_0 выражение v_{mn} может принимать только рациональные или иррациональные значения. Если v_{mn} принимает только рациональные значения, то выражение (68) будет иметь счетное множество нулей. Поэтому остается рассмотреть случай, когда v_{mn} принимает иррациональные значения. Также заметим, что множество значений v_{mn} ограничено

$$dl_m^2 < v_{mn} \leq d(p^2 + q^2), \quad l_m = \min\{p, q\}.$$

Предварительно из теории чисел приведем утверждение, которое является аналогом теоремы Рота [20, с. 268].

Утверждение. Для любого иррационального алгебраического числа β степени $s \geq 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $C_1 > 0$ такое, что при любых целых p и q ($q > 0$) справедливо неравенство

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{C_1}{q^{4+\varepsilon}}. \quad (69)$$

Лемма 3. Если v_{mn} является иррациональным алгебраическим числом степени $s \geq 2$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что при всех $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|\sin \pi N^2 v_{mn}| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}}, \quad (70)$$

где C_2 зависит от m и n .

Доказательство. Для всякого $N \in \mathbb{N}$ можно подобрать $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| < \frac{1}{2N^2}. \quad (71)$$

Действительно, следуя [21], число m можно взять таким:

$$k = \begin{cases} [v_{mn} N^2], & \text{если } \{v_{mn} N^2\} < 1/2, \\ [v_{mn} N^2] + 1, & \text{если } \{v_{mn} N^2\} > 1/2, \end{cases}$$

где $[v_{mn} N^2]$ и $\{v_{mn} N^2\}$ — целая и дробная части иррационального числа $v_{mn} N^2$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, такое, что выполняется неравенство (71). Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (72)$$

и оценки (69) из соотношения (68) будем иметь

$$|\sin \pi N^2 v_{mn}| = \left| \sin \pi N^2 \left(v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right) \right| > 2N^2 \left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}} \geq \frac{C_0}{N^{2+\varepsilon}},$$

так как множество значений C_2 от m и n ограничено снизу постоянной $C_0 > 0$ в силу ограниченности множества значений v_{mn} .

Отметим, что если v_{mn} является иррациональным числом с неограниченным множеством элементов при разложении в цепные дроби [18, с. 115], [19, с. 267], то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество чисел $k, N \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| < \frac{\varepsilon}{N^4}.$$

Тогда на основании этого неравенства имеем

$$|\sin \pi N^2 v_{mn}| = \left| \sin \pi N^2 \left(v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right) \right| \leq \pi N^2 \left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| < \frac{\pi \varepsilon}{N^2}.$$

Отсюда следует, что для таких чисел v_{mn} выражение $\sin \pi N^2 v_{mn}$, которое является знаменателем, может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому для таких иррациональных чисел v_{mn} решение обратной задачи в виде рядов (64) и (65) не существует.

Если же множество элементов числа v_{mn} ограничено, то существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $k, N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{N^4}.$$

Как известно из теории чисел, что алгебраические числа степени 2, т.е. квадратические иррациональности, имеют ограниченное множество элементов. В этом случае имеет место оценка (70), где только $\varepsilon = 0$.

Для обоснования сходимости рядов (64) и (65) в соответствующих классах (2) и (8) установим оценки для коэффициентов этих рядов.

Лемма 4. Пусть функции $g(t)$ возрастающая и положительная на сегменте $[0, T]$ и v_{mn} является алгебраическим иррациональным числом степени $s \geq 2$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$|g_{mn}(t)| \leq \frac{2 \|g\|_C}{\omega_{mn}^2} = \frac{C_3}{\lambda_{mn}^2} \leq \frac{C_4}{N^2}, \quad (73)$$

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, \quad (74)$$

где $\|g\|_C = \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$, C_i — здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , p , q , t_0 и $\|g\|_C$.

Доказательство. Из равенства (18) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{l_M}\right)^2 N^2 \leq \lambda_{mn} \leq 2\left(\frac{\pi}{l_m}\right)^2 N^2,$$

где $l_m = \min\{p, q\}$, $l_M = \max\{p, q\}$. Тогда из левой части неравенства (67) следует оценка (73). На основании леммы 1 с учетом правой части соотношения (67), получим оценку (74):

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{2g(0)}{\omega_{mn}^2} |\sin \pi v_{mn} N^2|^2 \geq \frac{2g(0)C_0^2}{\omega_{mn}^2} \frac{1}{N^{4+2\varepsilon}} = \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}.$$

Лемма 5. Пусть v_{mn} является алгебраическим числом степени $s \geq 2$. Тогда при любом $t \in [0, T]$ и $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:

$$|u_{mn}(t)| \leq C_6 N^{4+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right), \quad (75)$$

$$|u''_{mn}(t)| \leq C_7 N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right), \quad (76)$$

$$|f_{mn}| \leq C_8 N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right). \quad (77)$$

Доказательство оценок (75)–(77) непосредственно следует из формул (63) и (61) на основе леммы 4.

Формально из ряда (64) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \quad (78)$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p} \right)^4 v_{mn}(x, y), \quad (79)$$

$$u_{yyyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{n\pi}{q} \right)^4 v_{mn}(x, y), \quad (80)$$

$$u_{xxyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{q} \right)^2 v_{mn}(x, y). \quad (81)$$

Ряды (64), (65), (78)–(81) при любых $(x, y, t) \in \bar{Q}$ на основании леммы 5 мажорируются рядом

$$C_9 \sum_{m,n=1}^{\infty} N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right) = \sum_{N=1}^{\infty} N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right). \quad (82)$$

Для сходимости ряда (82) достаточно потребовать выполнение следующих условий (A): $\varphi(x, y), \varphi_0(x, y) \in C^{10+\delta}(\bar{D})$, $2\varepsilon < \delta < 1$, $\varphi_x^{(i)}(0, y) = \varphi_x^{(i)}(p, y) = \varphi_{0x}^{(i)}(0, y) = \varphi_{0x}^{(i)}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\varphi_y^{(i)}(x, 0) = \varphi_y^{(i)}(x, q) = \varphi_{0y}^{(i)}(x, 0) = \varphi_{0y}^{(i)}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$; $\psi(x, y) \in C^{8+\delta}(\bar{D})$, $\psi_x^{(j)}(0, y) = \psi_x^{(j)}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\psi_y^{(j)}(x, 0) = \psi_y^{(j)}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $j = 0, 2, 4, 6$.

При выполнении этих условий на основании работы [19, с. 335] нетрудно показать справедливость следующих оценок:

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{C_{10}}{N^{10+\delta}}, \quad |\varphi_{0mn}| \leq \frac{C_{10}}{N^{10+\delta}}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{C_{11}}{N^{8+\delta}}. \quad (83)$$

В ряде (82) число членов с заданным N имеет порядок N . Тогда на основании оценок (83) ряд (82) мажорируется сходящимся рядом

$$C_{12} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1+\delta-2\varepsilon}}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. Пусть функции $\varphi(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям (А) и непрерывная функция $g(t)$ и числа v_{mn} удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда существует единственное решение задачи 3 и оно определяется рядами (64) и (65).

Отметим, что с решением задачи 3 можно было поступить иначе. Уравнение (59) равносильно интегральному уравнению Фредгольма I рода

$$\iint_D f(\xi, \eta) K(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = H(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (84)$$

где

$$K(\xi, \eta; x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn}(t_0) v_{mn}(x, y) v_{mn}(\xi, \eta), \quad (85)$$

$$H(x, y) = \varphi_0(x, y) - \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t_0 + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t_0 \right) v_{mn}(x, y). \quad (86)$$

Ядро $K(\xi, \eta; x, y)$, определяемое рядом (85), по крайней мере, непрерывно дифференцируемо на замкнутом множестве $\bar{D} \times \bar{D}$, правая часть уравнения (84), т.е. функция $H(x, y)$, определяемая рядом (86), принадлежит классу $C^9(\bar{D})$.

Как известно, интегральные уравнения Фредгольма I рода трудно разрешимы и они относятся к классу некорректных задач. В данном случае при выполнении условий теоремы 3 интегральное уравнение (84) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (65) и (61).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с. (изд. 3).
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
3. Гуд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.
4. Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванов А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 216 с.
5. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
6. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
7. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. ур-ния, 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
8. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
9. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.
10. Орловский Д.Г. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
11. Орловский Д.Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614–1621.
12. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
13. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.

14. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.
15. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2).
16. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи матем. наук.* 1963. Т. XVIII. Вып. 6 (114). С. 91–192.
17. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // *Матем. заметки.* 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276.
18. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с. (изд. 2).
19. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М.: Изд. МГУ, 1987. 358 с.
20. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. СПб.: Лань, 2008. 384 с.
21. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Матем. заметки.* 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

КИНЕТИКА АГРЕГАЦИИ ПРИ СЕДИМЕНТАЦИИ. ВЛИЯНИЕ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ¹⁾

© 2023 г. Н. В. Бриллиантов^{1,4,*}, Р. Р. Загидуллин^{1,2,**},
С. А. Матвеев^{2,3,***}, А. П. Смирнов^{2,****}

¹ 121205 Москва, Большой бульвар, 30, стр. 1, Сколковский институт науки и технологий, Россия

² 119991 Москва, ул. Колмогорова, 1, стр. 52,

Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Россия

³ 119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики РАН им. Г.И. Марчука, Россия

⁴ LE1 7RH, Лестер, Университетская ул., Университет Лестера, Великобритания

*e-mail: n.brilliantov@skoltech.ru

**e-mail: zagidullinrisha@gmail.com

***e-mail: matseralex@cs.msu.ru

****e-mail: sap@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 28.05.2022 г.
Переработанный вариант 27.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

В работе исследуется кинетика агрегации седиментирующих частиц аналитически и численно при использовании уравнения переноса-диффузии. Агломерация, вызванная этими механизмами (диффузией и переносом), важна как для мелких частиц (например, для первичных частиц пепла или сажи в атмосфере), так и для крупных частиц одинакового или близкого размера, где пространственная неоднородность менее выражена. Аналитические результаты можно получить для малых и больших чисел Пекле, определяющих относительное соотношение диффузии и переноса. При малых числах (пространственная неоднородность существует преимущественно из-за диффузии), мы получаем выражение для скорости агрегации через разложение чисел Пекле. При больших числах Пекле, когда перенос является основным источником пространственной неоднородности, мы получаем скорость агрегации из баллистических коэффициентов. Комбинируя эти результаты, предлагается аппроксимация рациональной функцией для всего диапазона чисел Пекле. Оцениваются скорости агрегации, численно решая уравнение переноса-диффузии. При этом результаты численного моделирования хорошо согласуются с аналитической теорией для большого диапазона рассматриваемых чисел Пекле (разница между минимальным и максимальным рассматриваемыми числами составляет 4 порядка). Библ. 26. Фиг. 2.

Ключевые слова: ядро коагуляции, пространственная неоднородность, число Пекле.

DOI: 10.31857/S0044466923040051, **EDN:** IPBWKP

1. ВВЕДЕНИЕ

Осаждение коагулирующих частиц происходит в многочисленных природных и промышленных процессах, см., например, [1–5]. В качестве ярких примеров можно назвать агрегацию пыли, пепла или сажи, попадающих в воздух, коагулирующих органических частиц, оседающих в воде (озера, реки, моря). Частицы, падающие в жидкость, подвергаются действию движущей силы (силы тяжести и силы Архимеда) и силы трения. После короткого переходного периода эти силы уравниваются, что приводит к установившейся скорости падающей частицы. Различные установившиеся скорости приводят к столкновению частиц, если их траектории пересекаются. Если частица достаточно мала, становится важной стохастическая сила, возникающая из-за молекулярных флуктуаций в окружающей жидкости. Она порождает случайную, диффузионную составляющую движения частиц. Например, диффузионное движение сравнимо с балли-

¹⁾ Работа Н. Бриллиантова, Р. Загидуллина, А. Смирнова (вывод уравнений, постановка задачи, численное решение) выполнена при финансовой поддержке РНФ (21-11-00363), и С. Матвеева (построение рациональной аппроксимации) – РНФ (19-11-00338).

стическим для частиц размером менее 2 микрометра [6–8] в воздухе, что соответствует первичным частицам сажи [9].

Точно так же диффузия частиц может вызвать столкновения. Если частицы связаны, что всегда имеет место для мелких частиц из-за молекулярных поверхностных сил, они слипаются, образуя совместный агрегат. Эти агрегаты могут в дальнейшем сталкиваться с другими агрегатами или частицами. По мере эволюции системы появляются все более крупные кластеры, и распределение агрегатов по размерам в системе постоянно расширяется. Будем характеризовать агрегаты, состоящие из k частиц (мономеров), их концентрацией $n_k(t)$ и радиусом R_k , считая их сферическими. Соответственно, концентрация первичных частиц (мономеров) радиуса R_1 равна $n_1(t)$.

Скорость процесса коагуляции, т.е. количество агрегатных столкновений в единицу времени и единицу объема агрегатов размера i и j , можно записать как $K_{ij}n_i n_j$ [10–12]. Она пропорциональна концентрации частиц n_i и n_j и константе скорости K_{ij} , которая зависит от природы частиц, их размера и конкретного процесса агрегации. В классическом случае Смолуховского для диффундирующих частиц, равномерно распределенных в пространстве и в отсутствие внешних сил, эти константы имеют вид $K_{ij} = 4\pi(D_i + D_j)(R_i + R_j)$, где D_i и D_j — соответственно коэффициенты диффузии агрегатов i и j [10–12]. Следовательно, агрегация обусловлена взаимной диффузией частиц.

Если все агрегаты будут двигаться с одинаковой установившейся скоростью, то кинетические константы, естественно, не изменятся. Однако разница в установившихся скоростях меняет механизм агрегации, поскольку частицы могут сталкиваться, обгоняя друг друга. Если частицы достаточно велики, чтобы диффузионным движением можно было пренебречь, константы скорости следуют из чисто баллистических траекторий частиц, что дает $K_{ij}^{\text{bal}} = \pi(R_i + R_j)^2 |v_i - v_j|$, где v_i и v_j — суммарные установившиеся скорости, соответствующие скоростям агрегации Смолуховского для сдвигового течения [13], [14]. Для учета гидродинамических взаимодействий между падающими частицами эти скорости модифицируются с помощью коэффициента эффективности столкновения $E(R_i, R_j)$, из которых получаем: [6], [15], [16],

$$K_{ij}^{\text{bal}} = \pi(R_i + R_j)^2 E(R_i, R_j) |v_i - v_j|. \quad (1)$$

Множитель $E(R_i, R_j)$ может быть получен в результате численного решения сложной гидродинамической задачи для двух обтекаемых сфер. К сожалению, в настоящее время отсутствует явное выражение для этого фактора; он доступен в виде таблиц со значениями E для различных размеров частиц и давления воздуха [6].

Для случая осаждения мелких частиц важны оба механизма — диффузионный и за счет разности скоростей. Кроме того, даже для крупных частиц уравнение (1) предсказывает исчезающие скорости агрегации для частиц одинакового размера, для которых установившиеся скорости равны. Для частиц близкого размера скорости также малы, так что нельзя пренебрегать механизмом диффузии.

Относительная важность адвективного движения и диффузионного движения количественно определяется числом Пекле Pe (см. определение ниже). В [17], [18] аналитически исследована кинетика агрегации седиментирующих частиц с сильным преобладанием диффузионной составляющей (малые значения Pe), а в работе [19] рассмотрен другой предел сильного преобладания адвективного движения (большие значения Pe). В работе [4] было проведено обширное численное моделирование с использованием метода решеточных уравнений Больцмана в сочетании с методом больших вихрей. Однако во всех этих работах не было дано аналитического выражения для ядра скорости K_{ij} , адекватного для всего диапазона Pe .

Целью настоящей работы является построение явных выражений для ядра коагуляции K_{ij} , описывающих агрегацию седиментирующих частиц, которые можно использовать для произвольных значений числа Пекле. Такие коэффициенты скорости особенно важны для процесса агломерации, когда значения Pe очень малы для первичных частиц и становятся большими для зрелых агрегатов. Для получения этих выражений рассмотрим отдельно два предельных случая малого и большого Pe . Затем мы строим простое рациональное приближение, которое точно описывает кинетику агрегации для всего диапазона числа Пекле. В этом подходе мы пренебре-

гаем гидродинамическими взаимодействиями между частицами; для учета последних взаимодействий мы предлагаем простое обобщение нашей аппроксимации.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы развиваем теоретический подход к рассматриваемой задаче, разд. 3 посвящен численному анализу, а также сравнению результатов теории и моделирования. Наконец, в разд. 4 приводится заключение.

2. МОДЕЛЬ АГРЕГАЦИИ СЕДИМЕНТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим седиментацию частиц при малых числах Рейнольдса, что подразумевает справедливость линейной гидродинамической теории. Проблема многочастичной седиментации очень сложна, поэтому мы предполагаем, что система очень разбавлена, и важны только парные взаимодействия между соседними частицами; мы также пренебрегаем гидродинамическими взаимодействиями между частицами.

Рассмотрим первую осевшую одиночную частицу массы m , радиуса R и плотности ρ_p . Если частица достаточно мала, она совершает случайное движение, которое подчиняется уравнению Ланжевена:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma \mathbf{v} + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{st}. \quad (2)$$

Здесь сила вязкого трения равна $-\gamma \mathbf{v}$ с $\gamma = 6\pi\eta R$, где η — вязкость жидкости. Она действует вместе с силой $\mathbf{F}_b$, объединяющей гравитацию и плавучесть $(4/3)\pi R^3(\rho_p - \rho_f)g$, где ρ_f — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Стохастическая сила $\mathbf{F}_{st}(t)$ имеет нулевое среднее значение и дисперсию в соответствии с теоремой диссипации-флуктуации (FDT) [10]:

$$\langle \mathbf{F}_{st}(t) \rangle = 0, \quad \langle F_{st}^\alpha(t) F_{st}^\beta(t') \rangle = \Gamma \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad \Gamma = 2k_B T \gamma, \quad (3)$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$, k_B — постоянная Больцмана, T — температура. Для малых частиц инерционные эффекты, связанные с членом $m\dot{\mathbf{v}}$, пренебрежимо малы, что приводит к передемпфированному уравнению движения:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \gamma^{-1} \mathbf{F}_b + \gamma^{-1} \mathbf{F}_{st}. \quad (4)$$

В приведенном выше уравнении Ланжевена рассматривается случайная величина — координата частицы $\mathbf{r}$, а роль стохастической силы играет $\gamma^{-1} \mathbf{F}_{st}$. Соответственно коэффициент Γ в рамках флуктуационно-диссипационной теоремы следует заменить на $\Gamma' = \Gamma/\gamma^2 = 2k_B T/\gamma$. Соответствующая функция распределения $P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0)$ дает вероятность пребывания частицы в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ находился в точке $\mathbf{r}_0$. Она подчиняется уравнению Фоккера–Планка [10], [20]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{U} P + D \Delta_{\mathbf{r}} P, \quad (5)$$

где $\mathbf{U} = \gamma^{-1} \mathbf{F}_b$ — скорость установившегося движения частицы под действием силы $\mathbf{F}_{mb}$ и

$$D = \frac{\Gamma'}{2} = \frac{k_B T}{\gamma} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

есть коэффициент диффузии.

Теперь применим приведенный выше анализ для двух частиц с массами m_1 и m_2 и соответствующими радиусами R_1 и R_2 . Соответствующие уравнения Ланжевена с избыточным демпфированием получают следующие:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \gamma_1^{-1} \mathbf{F}_{b,1} + \gamma_1^{-1} \mathbf{F}_{st,1}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \gamma_2^{-1} \mathbf{F}_{b,2} + \gamma_2^{-1} \mathbf{F}_{st,2}, \quad (6)$$

где, как и ранее, $\gamma_{1/2} = 6\pi\eta R_{1/2}$ и объединенные силы $\mathbf{F}_{b,1/2}$ и стохастические силы $\mathbf{F}_{st,1/2}$ подчиняются тем же соотношениям, что и выше, при соответствующих значениях параметров частиц. Мы предполагаем, что эти стохастические силы не скоррелированы, $\langle \mathbf{F}_{b,1}(t) \mathbf{F}_{b,2}(t') \rangle = 0$.

Из уравнений (6) получаем уравнение Ланжевена для межчастичного расстояния $\mathbf{r}_{12}$:

$$\dot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{U}_{12} + \mathbf{F}_{\text{st},12}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{U}_{12} = \gamma_1^{-1} \mathbf{F}_{b,1} - \gamma_2^{-1} \mathbf{F}_{b,2} = \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 \quad (8)$$

это относительная установившаяся скорость со стохастической силой

$$\langle \mathbf{F}_{\text{st},12} \rangle = 0, \quad \langle F_{\text{st},12}^\alpha(t) F_{\text{st},12}^\beta(t') \rangle = \Gamma_{12} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad \Gamma_{12} = \frac{2k_B T}{\gamma_1} + \frac{2k_B T}{\gamma_2} = 2(D_1 + D_2). \quad (9)$$

Аналогично, как и для случая одной частицы, мы можем записать уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности $P_{12}(\mathbf{r}_{12}, t | \mathbf{r}_{12,0}, 0)$ межчастичного расстояния $\mathbf{r}_{12}$:

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{r}_{12}} \cdot \mathbf{U}_{12} P_{12} + D_{12} \Delta_{\mathbf{r}_{12}} P_{12}, \quad (10)$$

где $D_{12} = \frac{1}{2} \Gamma_{12} = D_1 + D_2$ — относительный коэффициент диффузии для пары частиц. Отметим, что это уравнение получено без учета гидродинамических взаимодействий между частицами.

Теперь мы будем использовать уравнение (10), чтобы найти скорость агрегации. Сначала выберем направление силы тяжести по оси OZ и запишем $\mathbf{U}_{12}$ как $\mathbf{U}_{12} = (2/9)\Delta\rho g (R_1^2 - R_2^2) \mathbf{k} = v_{12} \mathbf{k}$, где $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$ и $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении z . Далее рассмотрим поток частиц радиуса R_2 (частиц сорта “2”) на поверхность частиц радиуса R_1 (частиц сорта “1”). Пусть частица сорта 1 находится в начале координат и $P(\mathbf{r}_{12}, t | \mathbf{r}_{12,0}, 0)$ дает вероятность нахождения частиц сорта 2 на расстоянии $\mathbf{r}_{12}$ от центра частиц сорта 1 в момент времени t . Удобно работать с концентрацией $n_2(\mathbf{r}, t)$ частиц сорта 2, которая просто пропорциональна плотности вероятности. Чтобы найти скорость агрегации, необходимо вычислить стационарное течение частиц сорта 2 на поверхности частицы сорта 1 в начале координат [10], [17], [18]. Мы предполагаем, что как только частицы касаются друг друга в точке $|\mathbf{r}_{12}| = R_1 + R_2$, мгновенно образуется совместный агрегат, и частицы сорта 2 исчезают. Это означает, что концентрация частиц 2 на поверхности $r_{12} = (R_1 + R_2)$ равна нулю. С другой стороны, на очень большом расстоянии от частицы сорта 1 концентрация частиц сорта 2 равна $n_{2,\infty}$. Тогда уравнение (10) может быть преобразовано в стационарном состоянии в форму

$$D\Delta n - v \frac{n}{z} = 0, \quad n(r = R) = 0, \quad n(r \rightarrow \infty) = n_{\infty}. \quad (11)$$

Чтобы не загромождать обозначения, мы опускаем здесь все нижние индексы (т.е. $D = D_{12}$, $n = n_2$, $v = v_{12}$, $n_{\infty} = n_{2,\infty}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$) и используем сокращенную запись $R = R_1 + R_2$. Далее введем безразмерные переменные $\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}$ и $n \rightarrow n_{\infty} n$, сохранив для простоты те же обозначения, что и для размерных величин. Тогда в сферических координатах с осью OZ по силе тяжести (т.е. по скорости $\mathbf{U}_{12}$) безразмерное уравнение имеет вид

$$\Delta n - 2\mu \partial_z n = 0, \quad \partial_z n = \cos \theta \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial n}{\partial \theta}, \quad (12)$$

где константа

$$\mu = \frac{vR}{2D} \quad (13)$$

соответствует числу Пекле. Также, используя замену

$$n = u(r, \theta) e^{\mu z} + 1,$$

мы преобразуем приведенное выше уравнение в форму,

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \quad (14)$$

$$u(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (15)$$

$$u(r = 1, \theta) = -e^{-\mu \cos \theta}, \quad (16)$$

где мы выбираем сферические координаты с осью OZ вдоль скорости U_{12} и используем симметрию системы относительно азимутального угла ϕ .

Разделение переменных $u(r, \theta) = \mathcal{R}(r)\Theta(\theta)$ дает два уравнения:

$$r^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} - (\mu^2 r^2 + n(n+1)) \mathcal{R} = 0, \quad (17)$$

$$\Delta_{\theta\theta} \Theta + n(n+1) \Theta = 0, \quad (18)$$

где $\Delta_{\theta\theta}$ — угловая часть лапласиана и $n = 0, 1, \dots$. Решение первого уравнения (17) можно представить в виде $\mathcal{R}(r) = K_{n+\frac{1}{2}}(\mu r)/\sqrt{r}$, что является модифицированной функцией Бесселя II рода, деленной на квадратный корень из r . Решение второго уравнения (18) — многочлены Лежандра, $\Theta(\theta) = P_n(\cos \theta)$. Следовательно, общее решение уравнения (14) имеет вид

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) K_{n+\frac{1}{2}}(\mu r), \quad (19)$$

где коэффициенты A_n следуют из граничных условий уравнений (15) и (16) [21]. Разлагая граничное условие (16) по полиномам Лежандра и используя $r = 1$ в уравнении (19), находим

$$A_n = -\frac{(2n+1)}{2K_{n+\frac{1}{2}}(\mu)} F_n, \quad (20)$$

$$F_n = \int_{-1}^1 e^{-\mu x} P_n(x) dx. \quad (21)$$

Радиальная часть потока

$$J_r = -D \frac{n}{r} + v \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_r n = -D \frac{n}{r} + v \cos \theta n, \quad (22)$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор в радиальном направлении. На границе $r = R$ получаем поток

$$J_r = -\frac{n_{\infty} D}{R} \left[\frac{1}{2} - \mu \cos(\theta) - \mu e^{\mu \cos(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) K'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)}{2K_{n+\frac{1}{2}}(\mu)} F_n P_n(\cos \theta) \right], \quad (23)$$

где $K'_{n+\frac{1}{2}}$ обозначает производную функции. Коэффициент коагуляции можно получить, интегрируя радиальный поток по поверхности контакта двух частиц. Отсюда получаем

$$K = \frac{1}{n_{\infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta (-J_r) H(-J_r) = 2\pi D R \left[1 - \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) K'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)}{2K_{n+\frac{1}{2}}(\mu)} F_n C_n \right], \quad (24)$$

где

$$C_n = \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) e^{\mu \cos \theta} H[-J_r(\cos \theta)] \sin \theta d\theta. \quad (25)$$

Единичная ступенчатая функция Хевисайда $H(x)$ в подынтегральном выражении уравнений (24) и (25) гарантирует, что только радиальная составляющая потока, направленная к центру частицы, дает вклад в скорость коагуляции K . Используя соотношение $x K'_{1/2}(x)/K_{1/2}(x) = -(x + 1/2)$, легко проверить, что в случае, когда $\mu = 0$ получается стандартный результат Смолуховского $K = 4\pi R D$.

Трудности вычисления коэффициентов C_n связаны с множителем $H(-J_r)$ под интегралом. Наш численный анализ показал, что при малых числах Пекле $\mu < 0.5$, когда преобладает диффузия, поток отсутствует, т.е. $J_r < 0$ для всех углов θ . Это позволяет убрать множитель $H(-J_r)$ в уравнении (25) для малых μ . Более того, при малых μ можно также использовать в уравнениях (21) и (25) для F_n и C_n разложения Тейлора, $e^{\pm \mu x} = 1 \pm \mu x + (\mu x)^2/2 + \dots$. Это дает следующее аналитическое выражение для K при малых μ :

$$K = 4\pi DR \left(1 + \mu - \frac{1}{3}\mu^2 + \dots \right). \quad (26)$$

Для очень больших μ , когда преобладает перенос, можно пренебречь диффузионным движением и аппроксимировать поток выражением $J = v \mathbf{k} n_\infty$ с $J_r = v n_\infty \cos \theta$. Тогда из уравнения (24) получаем

$$K = 2\pi \int_0^\pi R^2 v \sin \theta \cos \theta H(-\cos \theta) d\theta = \pi R^2 v = 2\pi R D \mu. \quad (27)$$

Стоит найти экстраполяционное выражение, которое могло бы описать не только предельные случаи $\mu \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow \infty$, но и весь диапазон μ . Это можно сделать, применив приближение, которое правильно воспроизводит предельные случаи и, как мы надеемся, обеспечивает приемлемую точность для промежуточных значений μ .

Стоит отметить, что выбранный вид рациональной аппроксимации может оказаться неоптимальным с точки зрения точности приближения искомой функции, однако целью данной работы мы считаем в первую очередь корректное качественное соответствие построенного аппроксиманта асимптотикам исходного ядра в нуле и на бесконечности. Необходимость подбора подобных аппроксимаций часто встречается в математической физике [22]. Поэтому мы воспользуемся стандартным методом ее получения [23]. Составим аппроксиманту следующего вида:

$$\mathcal{F}(\mu) = \frac{A_0 + A_1\mu + A_2\mu^2}{1 + B\mu}. \quad (28)$$

Если поделить числитель и знаменатель на μ и допустить, что $\mu \rightarrow \infty$. Тогда для выполнения условия (27) надо, чтобы

$$\frac{A_2}{B} = \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Для получения других уравнений, которые позволили бы однозначно определить коэффициенты, разложим знаменатель в ряд Тейлора до квадратичного члена. Тогда при соответствующих степенях и в соответствии с (26) получаем следующие соотношения:

$$A_0 = 1, \quad (30)$$

$$A_1 - A_0 B = 1, \quad (31)$$

$$A_2 - B A_1 + A_0 B^2 = -\frac{1}{3}. \quad (32)$$

Тогда мы находим соответствующие коэффициенты и подставляем их в ядро коагуляции:

$$K = 4\pi DR \mathcal{F}(\mu), \quad \mathcal{F}(\mu) = \left(\frac{1 + \frac{5}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu^2}{1 + \frac{2}{3}\mu} \right). \quad (33)$$

Также стоит записать ядро коагуляции в начальных размерных обозначениях:

$$K_{ij} = 4\pi D_{ij} (R_i + R_j) \mathcal{F}(\mu_{ij}), \quad (34)$$

$$\mu_{ij} = \frac{|v_i - v_j| (R_i + R_j)}{2D_{ij}}, \quad (35)$$

где

$$D_{ij} = (D_i + D_j), \quad (36)$$

$$|v_i - v_j| = \frac{2}{9} |\Delta\rho| g (R_i^2 - R_j^2) \quad (37)$$

суть коэффициент взаимной диффузии и стокова относительная скорость оседающих частиц, при этом $D_l = k_B T / (6\pi\eta R_l)$, $l = i, j$. Функция $\mathcal{F}(x)$ определена в уравнении (33).

При выводе аналитического выражения (34) мы пренебрегаем гидродинамическими взаимодействиями между агрегирующими частицами. Для количественной оценки гидродинамической коррекции необходимо решение уравнений гидродинамики для двух сфер в жидкости. Это сложно сделать даже численно. В то время как поправочный коэффициент $E(R_i, R_j)$ для баллистических столкновений представлен в виде нескольких таблиц, анализ коэффициента взаимной диффузии был выполнен аналитически, см., например, [17], [18], [24]. К сожалению, все эти исследования основаны на разложениях гидродинамических сил при большом межчастичном расстоянии; аналитические выражения для сил для малых расстояний в настоящее время отсутствуют. Однако наиболее важным является воздействие гидродинамических сил в условиях близкого расположения частиц, непосредственно перед столкновением. Поэтому получение надежных аналитических оценок представляется маловероятным. Хотя вывод соответствующих гидродинамических поправок является сложной задачей, возможно, стоит получить хотя бы грубую аналитическую оценку этого влияния на кинетику агломерации.

Мы предлагаем следующую феноменологическую модификацию (34) с гидродинамическими поправками:

$$K_{ij}^{(h)} = 4\pi D_{ij} (R_i + R_j) \left(\frac{1 + \mu_{ij} + \mu_{ij}^3 E_{ij}}{1 + \mu_{ij}^2} \right), \quad (38)$$

где $E_{ij} = E(R_i, R_j)$ — коэффициент эффективности столкновений [6]. Для больших $\mu_{ij} \gg 1$, когда диффузией можно пренебречь, приведенное выше уравнение даст кинетические скорости (1). В то же время при $\mu_{ij} \ll 1$ скорости (38) будут совпадать со скоростями (34) с точностью до членов порядка $\mathcal{O}(\mu_{ij}^2)$. Обратите внимание, что уравнение (38) не учитывает гидродинамические поправки для коэффициентов взаимной диффузии из-за отсутствия надежных аналитических выражений для гидродинамических сил ближнего поля.

Мы ожидаем, что приведенное выше выражение (38) будет особенно полезно для описания кинетики агрегации для частиц близкого размера, когда $R_i \approx R_j$, так как стандартное соотношение (1) дает нулевые скорости агрегации, что не может быть верно. Потому что при малой разности плотностей $\Delta\rho$ диапазон разности радиусов $R_i^2 - R_j^2$, приводящий к малым относительным скоростям $|v_i - v_j| \rightarrow 0$, может быть достаточно большим.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Чтобы проверить точность нашей теории для коэффициентов коагуляции, когда присутствуют как диффузия, так и перенос, мы численно решаем уравнение (11) для различных чисел Пекле $\mu = vR/(2D)$. Мы используем неявный метод конечных разностей для видоизмененных радиальной и угловой операторов. А именно:

$$\Delta_r n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{g} \frac{\partial(gn)}{\partial r} \right), \quad (39)$$

$$\Delta_\theta n = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{g} \frac{\partial(gn)}{\partial \theta} \right), \quad (40)$$

$$g = e^{-2\mu r \cos \theta}. \quad (41)$$

Это преобразование необходимо для стабилизации численной ошибки, возникающей при больших числах Пекле μ . Включение экспоненциального множителя g приводит к членам

$\mu(\cos \theta_j - \cos \theta_{j\pm 1/2})$ и μdr (нижние индексы относятся к узлам сетки), которые могут уменьшить дестабилизирующий эффект больших μ за счет применения меньших шагов дискретизации [25].

Таким образом получается следующая численная схема:

$$\Lambda_r = \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{h_r} \left(r_i r_{i+1} \frac{n_{i+1,j} e^{-2\mu \cos \theta_j (r_{i+1} - r_{i+0.5})} - n_{i,j} e^{-2\mu \cos \theta_j (r_i - r_{i+0.5})}}{h_r} - \right. \\ \left. - r_i r_{i-1} \frac{n_{i,j} e^{-2\mu \cos \theta_j (r_i - r_{i-0.5})} - n_{i-1,j} e^{-2\mu \cos \theta_j (r_{i-1} - r_{i-0.5})}}{h_r} \right), \quad (42)$$

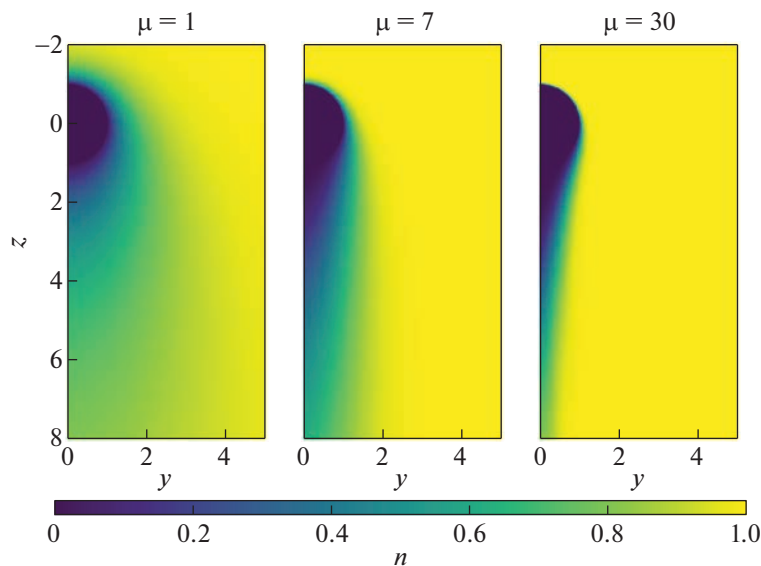
$$\Lambda_\theta = \frac{1}{r_i^2 \sin \theta_j h_\theta} \left(\sin \theta_{j+0.5} \frac{e^{-2\mu r_i (\cos \theta_{j+1} - \cos \theta_{j+0.5})} n_{i,j+1} - e^{-2\mu r_i (\cos \theta_j - \cos \theta_{j+0.5})} n_{i,j}}{h_\theta} - \right. \\ \left. - \sin \theta_{j-0.5} \frac{e^{-2\mu r_i (\cos \theta_j - \cos \theta_{j-0.5})} n_{i,j} - e^{-2\mu r_i (\cos \theta_{j-1} - \cos \theta_{j-0.5})} n_{i,j-1}}{h_\theta} \right), \quad (43)$$

$$\Lambda_r + \Lambda_\theta = 0, \quad (44)$$

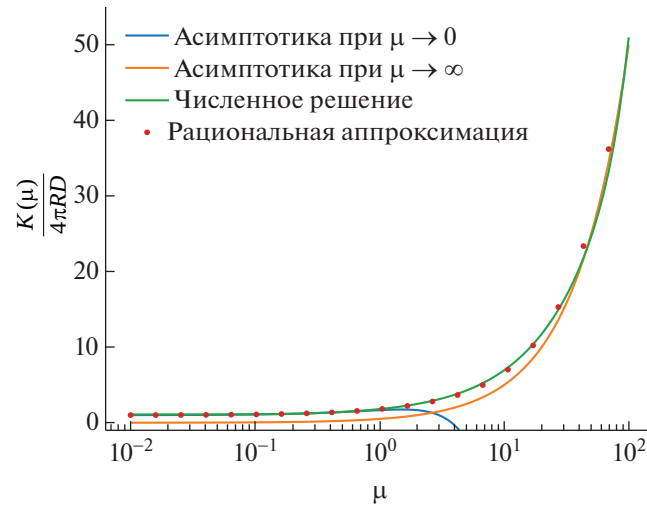
где $i = \{1, \dots, N-2\}$, $j = \{0, \dots, M-1\}$, h_r — шаг по радиальной переменной, h_θ — шаг по угловой переменной. При $i = 0$, $i = N-1$ схема заменяется граничными условиями для уравнения (11). Если разбить сетку по θ таким образом, что $\theta_{-0.5} = 0$ ($j = 0$) и $\theta_{M-1+0.5} = \pi$ ($j = M-1$), благодаря множителям $\sin \theta_{j-0.5}$ и $\sin \theta_{j+0.5}$, угловой оператор остается в границах расчетной области по n без необходимости явно определять граничные условия для численной схемы по угловой переменной.

Наконец, из полученной схемы мы строим систему линейных уравнений с разреженной матрицей размера NM на NM , где N — количество точек по r , M — количество точек по θ , решение которой дает нам численное решение уравнения (11). Для решения систем линейных уравнений мы использовали стандартный прямой решатель из пакета `umfpack` [26] через интерфейс `scipy.sparse.linalg` на языке программирования Python3.

Мы численно исследуем следующий диапазон числа Пекле, $\mu \in [0, 01, 100, 0]$, используя сетку из 100 точек для угловой координаты θ и 500 точек для радиальной координаты r . Погрешность численной схемы по норме Чебышёва во всех расчетах не превышала 0,01. Результат для распре-



Фиг. 1. Численное решение стационарного уравнения переноса-диффузии (11) для различных чисел Пекле $\mu = \nu R/(2D)$.



Фиг. 2. Приведенная скорость агрегации $K/(4\pi RD)$ как функция числа Пекле $\mu = vR/(2D)$. Результат, полученный прямым численным решением уравнения переноса-диффузии (11) (сплошная зеленая линия), очень близок к аналитической аппроксимации (33) для всего диапазона μ . Также показаны асимптотики (26) для $\mu \rightarrow 0$ (сплошная синяя линия) и (27) для $\mu \rightarrow \infty$ (сплошная коричневая линия). Аналитическое выражение близко аппроксимирует численные результаты.

деления концентрации n показан на фиг. 1 для трех различных чисел Пекле. Мы видим, что диффузионное “гало” исчезает при больших μ и существует при меньших μ . Данный результат соотносится с интуитивными ожиданиями, что при больших числах Пекле диффузия не дает никакого вклада в коагуляцию.

На фиг. 2 представлены результаты для скорости агрегации K , полученные прямым численным решением уравнения (11), сравнивается с аналитическим результатом (33). Фигура демонстрирует близость аналитического приближения для всего диапазона чисел Пекле, охватывающего четыре порядка величины μ .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы численно и аналитически исследовали кинетику агломерации седиментирующих частиц на основе уравнения переноса-диффузии. Оба транспортных механизма — диффузия и перенос — важны для агрегации в двух случаях. Во-первых, для мелких частиц, таких как, например, первичные частицы пепла или сажи в атмосфере. Во-вторых, для крупных частиц одинакового или близкого размера, такие частицы осаждаются почти с одинаковой скоростью, что делает адекватный механизм агрегации слабым, сравнимым или даже слабее диффузионного. Следовательно, желательно иметь скорости агрегации для таких систем, где относительная значимость перечисленных выше механизмов (скажем, диффузионных) колеблется от преобладающего до пренебрежимо малого. В нашем анализе мы не рассматривали явно гидродинамические взаимодействия между агломерирующими частицами: для доминирующей адвекции мы использовали феноменологический фактор эффективности столкновения. Для доминирующей диффузии мы пренебрегали гидродинамическими силами из-за отсутствия надежных выражений для этих сил при близких межчастичных расстояниях.

Для малых чисел Пекле мы получили аналитическое выражение для скоростей агрегации в виде разложения чисел Пекле. При очень больших числах Пекле мы использовали соответствующее выражение для чисто баллистического относительного движения частиц. Используя эти результаты, мы построили аппроксимацию рациональной функцией для большого диапазона чисел Пекле. Мы также решали уравнение переноса-диффузии численно, применяя прием, повышающий точность численной схемы. Результаты численного моделирования находятся в согласии с аналитической теорией для всех исследованных чисел Пекле, варьирующихся на четыре порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vowinckel B., Withers J., Luzzatto-Fegiz P., Meiburg E.* Settling of cohesive sediment: particle-resolved simulations // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 858. P. 5–44.
2. *Fischer A., Chatterjee A., Speck T.* Aggregation and sedimentation of active Brownian particles at constant affinity // *J. Chem. Phys.* 2019. V. 150. № 6. P. 064910.
3. *Yang Y.-J., Kelkar A.V., Corti D.S., Franses E.I.* Effect of Interparticle Interactions on Agglomeration and Sedimentation Rates of Colloidal Silica Microspheres // *Langmuir* 2016. V. 32. № 20 P. 5111–5123.
4. *Hongsheng Ch., Wenwei L., Zhiwei Ch., Zhong Zh.* A numerical study on the sedimentation of adhesive particles in viscous fluids using LBM-LES-DEM // *Powder Technol.* 2021. V. 391. P. 467–478.
5. *Whitmer J.K., Luijten E.* Sedimentation of aggregating colloids // *J. Chem. Phys.* 2011. V. 134. P. 034510.
6. *Pinsky M., Khain A., Shapiro M.* Collision Efficiency of Drops in a Wide Range of Reynolds Numbers: Effects of Pressure on Spectrum Evolution // *J. Atmos. Sci.* 2001. V. 58. P. 742–766.
7. *Khodzher T.V., et al.* Study of Aerosol Nano-and Submicron Particle Compositions in the Atmosphere of Lake Baikal During Natural Fire Events and Their Interaction with Water Surface // *Wat. Air and Soil Poll.* 2021. V. 232. P. 266.
8. *Zhamsueva G., et al.* Studies of the Dispersed Composition of Atmospheric Aerosol and Its Relationship with Small Gas Impurities in the Near-Water Layer of Lake Baikal Based on the Results of Ship Measurements in the Summer of 2020 // *Atmosphere.* 2022. V. 13. P. 139.
9. *Shahad H.A.K.* An experimental investigation of soot particle size inside the combustion chamber of a diesel engine // *Energy Convers. Manag.* 1989. V. 29. P. 141–149.
10. *Krapivsky P.L., Redner A., Ben-Naim E.* A Kinetic View of Statistical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
11. *Leyvraz F.* Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation // *Phys. Rep.* 2003. V. 383. P. 95–212.
12. *Smoluchowski M.V.* Attempt for a mathematical theory of kinetic coagulation of colloid solutions // *Z. Phys. Chem.* 1917. V. 92. P. 265–271.
13. *Higashitani K., Ogawa R., Hosokawa G., Matsuno Y.* Kinetic Theory of Shear Coagulation for Particles in a Viscous Fluid // *J. Chem. Eng. Japan.* 1982. V. 15. № 4. P. 299–304.
14. *Saffman P.F., Turner N.F.* On the collision of drops in turbulent clouds // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. № 1. P. 16–30.
15. *Falkovich G., Fouxon A., Stepanov, M.* Acceleration of rain initiation by cloud turbulence // *Nature.* 2002. V. 419. P. 151.
16. *Falkovich G., Stepanov M.G., Vucelja M.* Rain Initiation Time in Turbulent Warm Clouds // *J. Appl. Meteor. Climatol.* 2006. V. 45. P. 591.
17. *van de Ven T.G.M., Mason S.G.* The microrheology of colloidal dispersions VIII. Effect of shear on perikinetic doublet formation // *Colloid Polym. Sci.* 1977. V. 255. № 8. P. 794–804.
18. *Melik D.H., Fogler H.S.* Effect of gravity on Brownian flocculation // *J. Colloid Interface Sci.* 1984. V. 101. № 1. P. 84–97.
19. *Feke D.L., Scjowalter W.R.* The effect of Brownian diffusion on shear-induced coagulation of colloidal dispersions // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 133. P. 17–35.
20. *van Kampen N.* Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: Elsevier, 1992.
21. *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* Equations of mathematical physics. New York: Dover Publications, 2013.
22. *Andrianov I., Shatrov A.* Padé Approximants, Their Properties, and Applications to Hydrodynamic Problems // *Symmetry.* 2021. V. 13. P. 1869.
23. *Brezinski C.* History of Continued Fractions and Padé Approximants. Berlin: Springer, 1991.
24. *Reed C.C., Anderson J.L.* Hindered settling of a suspension at low Reynolds number // *AIChE J.* 1980. V. 26. № 5. P. 816–827.
25. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational heat transfer. New York: John Wiley and Sons, 1995.
26. *Davis T.A.* Algorithm 832 // *ACM Trans. Math. Softw.* 2004 V. 30. № 2 P. 196–199.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.956

О МОДЕЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА БЕЗ ДАВЛЕНИЯ: ВАРИАЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ В РАМКАХ ДИНАМИКИ ПРИЛИПАНИЯ

© 2023 г. Н. В. Ключнев^{1,*}, Ю. Г. Рыков¹

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: n_klyushnev@mail.ru

Поступила в редакцию 17.05.2022 г.
Переработанный вариант 24.10.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Изучаются обобщенные решения системы уравнений газовой динамики без давления в случае двух пространственных измерений. Работа имеет теоретический характер и рассматривает указанную систему уравнений с точки зрения общей математической теории законов сохранения. Сделан акцент на важной отличительной особенности данной системы уравнений – возникновении сильных особенностей плотности вдоль многообразий разной размерности. Данное свойство характеризуется как возникновение иерархии особенностей. В более ранних работах прикладной направленности (например, А.Н. Крайко и др., в том числе, и для более сложных случаев трехмерных течений двухфазных сред) указанное свойство изучалось на физическом уровне строгости. В настоящей статье возникновение иерархии особенностей рассмотрено с математической точки зрения, поскольку строго обосновать, например, существование решения с сильной особенностью в точке (для двумерного случая) оказывается не так просто. Поэтому для формирования математических гипотез о поведении решения используется специальный численный алгоритм. С теоретической точки зрения рассмотрены подходы к построению вариационного принципа для обобщенных решений. С вычислительной точки зрения реализован алгоритм на основе варианта приближенной динамики прилипания в многомерном случае. Алгоритм верифицирован на ряде примеров (двумерная задача Римана) с точки зрения внутренней сходимости и сравнения с математическими результатами, в том числе, и других авторов. Библ. 30. Фиг. 8. Табл. 4.

Ключевые слова: законы сохранения, газовая динамика без давления, вариационный принцип, динамика прилипания, соотношения Ренкина–Гюгонио, иерархия особенностей.

DOI: 10.31857/S0044466923040105, **EDN:** IPHKRD

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к средам с отсутствием собственного перепада давления (кратко: среды без давления) возник при попытках описания сложных физических явлений, таких как эволюция многофазных потоков, движение дисперсных сред, в частности пылевых частиц или капель, взаимодействие гиперзвуковых потоков в некоторых предельных случаях и т.п. В работе А.Н. Крайко [1], касавшейся указанных прикладных задач, было показано, что в средах без давления возникает новый тип скачков с концентрацией вещества на, вообще говоря, гиперповерхностях. В этой работе также были получены законы эволюции подобных гиперповерхностей на физическом уровне строгости.

Основным прикладным аспектом моделей сред без собственного давления являются течения в твердотопливных ракетных двигателях с двухфазными продуктами сгорания, где одна фаза является обычным газом, а другая – средой твердых частиц с нулевым давлением. Здесь имеется обширная литература, посвященная как описанию возникновения, в том числе, специфических особенностей различных типов в среде без давления, обозначаемых как “пелены” и “шнуры”, в более сложной ситуации взаимодействия с газом и в трехмерной постановке, так и соответствующему численному моделированию. Направленность статьи не предполагает какого-либо обзора прикладных работ, поэтому, для примера, в дополнение к [1] упомянем только работы [2, 3].

Подчеркнем, что настоящая работа имеет теоретический характер и рассматривает систему уравнений газовой динамики без давления с точки зрения общей математической теории законов сохранения. В этом отношении все особенности, возникающие вследствие пересечения каких-либо полей характеристик, мы будем называть “ударными волнами”, не останавливаясь на выделении каких-либо их типов. Работа практически не касается прикладных аспектов, разве только с иллюстративной целью. Представленный ниже специальный численный метод используется только для формирования математических гипотез о поведении решения и в данном варианте не предназначен для практических расчетов.

Отметим, что еще одной существенной областью приложения моделей сред без давления является астрофизика. А именно, законы крупномасштабного распределения вещества во Вселенной (см., например, [4]).

Система уравнений газовой динамики без давления представляет собой обычную систему уравнений газовой динамики, в которой формально давление положено равным нулю. Ниже мы явно запишем данную систему в случае двух пространственных переменных. Исследование задачи Римана для этого случая при условии образования особенностей не только вдоль поверхностей, но и вдоль кривых в пространстве (t, x, y) , как с теоретической, так и численной точек зрения, является основной целью настоящей статьи. Пусть $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, тогда интересующая нас система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho uv)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v^2)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где ϱ — плотность, а (u, v) — вектор скорости.

Система (1) представляет собой нестрого гиперболическую систему законов сохранения с тремя совпадающими собственными значениями и неполным набором собственных векторов. Вследствие этого в (1) образуются сильные δ -особенности на поверхностях разной коразмерности в пространстве (t, x, y) . Мы будем рассматривать задачу Коши для (1) с начальными условиями

$$\varrho(0, x, y) = \varrho_0(x, y) \geq 0, \quad u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad v(0, x, y) = v_0(x, y), \quad (2)$$

где функции ϱ_0, u_0, v_0 являются произвольными ограниченными измеримыми функциями, но ниже будут принадлежать гораздо более узкому классу кусочно-постоянных функций. Более конкретно, нас будет интересовать решение задачи Римана для (1). Оговорим заранее, что обобщенные решения системы (1) будут, вообще говоря, пониматься в смысле мер Радона и, соответственно, также будут пониматься начальные данные. А именно, начальные данные Коши будут задаваться как меры Радона $P_0(dx, dy)$, $I_0(dx, dy)$, $J_0(dx, dy)$, определенные на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^2$. При этом $P_0 \geq 0$ и в смысле Радона–Никодима существуют $dI_0/dP_0 = u_0(x, y)$ и $dJ_0/dP_0 = v_0(x, y)$. В случае начальных условий (2) соответствующие меры P_0, I_0, J_0 будут абсолютно непрерывными относительно стандартной меры Лебега.

Работа [5] обозначила новый всплеск роста интереса к математическому осмыслению моделей сред без давления. С этого времени появилось достаточно много публикаций, изучающих систему типа (1), но, главным образом, в случае одного пространственного переменного. Ником образом не претендуя на полноту обзора, отметим несколько характерных работ. В [6] и [7] разными методами было доказано существование обобщенных решений в пространстве мер, и далее в [8] развернуто описан вариационный принцип, который использовался для доказательства существования решения. Вариационный подход будет активно обсуждаться и в настоящей статье. Из-за вырожденного характера системы уравнений газовой динамики без давления условия единственности решений имеют неоднозначный характер. Вопросы, связанные с существованием, и с единственностью обобщенных решений в случае одной пространственной переменной рассматривались, например, в [9], [10], где единственность обеспечивалась выполнением условия типа E , предложенного в свое время О.А. Олейник, и той или иной формой запрета распада вещества. Наконец, в недавних работах [11], [12] рассмотрено влияние внешних сил и обобщен вариационный подход на системы без давления с нетривиальной правой частью.

В отличие от одномерного случая случай многих пространственных переменных гораздо менее изучен. Это, по-видимому, связано с тем, что, вообще говоря, при эволюции начальных функций возникает иерархия особенностей плотности, сосредоточенных на многообразиях разной размерности. Опять же не претендуя на полноту, отметим ряд публикаций на эту тему. В [13] для случая двух пространственных переменных было получено обобщение соотношений Ренки-

на—Гюгонио в дифференциальной форме на случай сильных особенностей на поверхностях в пространстве (t, x, y) системы уравнений газовой динамики без давления, и исследованы решения двумерной задачи Римана, которые такие особенности содержат. Это было сделано в рамках изучения решений двумерной задачи Римана для уравнений газовой динамики в целом. В [14] и более развернуто в [15] были также получены формулы для соотношений Ренкина—Гюгонио при возникновении концентраций плотности на поверхностях, но и в форме интегральных соотношений, отражающих процессы концентрации вещества, и в дифференциальной форме на основе теории новых обобщенных функций Ж.Ф. Коломбо (см., например, [16]). Дополнительно был сделан вывод о существовании концентрации вещества не только вдоль поверхностей, но и вдоль кривых в пространстве (t, x, y) . Подробное исследование решений двумерной задачи Римана для системы уравнений газовой динамики без давления, включающей также и уравнение для энергии, представлено в [17]. Однако там также не была рассмотрена возможность возникновения концентрации плотности вдоль кривых.

В многомерном случае концентрация вещества на гиперповерхностях коразмерности один изучалась, например, в [18–20]. Форма вариационного принципа в многомерном случае анонсирована в [21]. Также в [22], [23] рассмотрены тонкие вопросы распространения векторного поля скоростей на пространственно-временные точки, находящиеся внутри особенностей разных размерностей, в ситуации, когда система (1) может быть записана как уравнение Гамильтона—Якоби.

В отличие от большинства работ по данной тематике настоящая публикация акцентирует внимание на важности построения иерархии особенностей на поверхностях разных размерностей при построении решений многомерных систем уравнений газовой динамики без давления. При этом мы ограничимся двумерным случаем, уже для которого построение точных решений с особенностями разного типа приводит к заметным трудностям. Поэтому мы рассмотрим эвристический метод построения оценок, описывающих качественное поведение обобщенных решений, на основе вариационного подхода, а также предложим численный метод решения двумерной системы уравнений газовой динамики без давления. При построении численного метода будем руководствоваться принципом наибольшей простоты и робастности даже в ущерб минимизации вычислительных затрат. Вследствие достаточной сложности возникающих иерархий особенностей, особенно в многомерном случае, на который в дальнейшем планируется обобщить предлагаемую методику, необходимо иметь алгоритм, с наибольшей вероятностью воспроизводящий реальную структуру решений, в которых важную роль может играть, например, динамика отдельных точек на плоскости (x, y) . Возможная иерархическая структура системы уравнений газовой динамики без давления в двумерном и трехмерном случаях была описана в [24], а в более ранней работе [25] приведен эвристический вывод условий согласования особенностей в двумерном случае.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 посвящен теоретическому описанию эвристического метода построения оценок, демонстрирующих качественное поведение обобщенных решений задачи Римана в двумерном случае, на основе вариационных техник, предложенных в [24]. Применение данной методологии в определенных случаях приводит к появлению иерархии особенностей в отличие от, например, [17], где подобная ситуация не рассматривалась. Однако на данном этапе разработанный метод касается только процесса возникновения особенностей при отсутствии вакуума. В разд. 3 приведено детальное описание численного алгоритма расчета для обобщенных решений системы уравнений газовой динамики без давления, построенного на основе результатов [26]. Расчету обобщенных решений задачи Римана без образования вакуума и их верификации с помощью признака внутренней сходимости и сравнения с теоретическими формулами и с расчетами в [17] посвящен разд. 4. В разд. 5 приводятся численные расчеты задачи Римана и верификация их качественного поведения в соответствии с [17] в случае образования вакуума. Также приводится расчет, демонстрирующий возможность отображения крупномасштабной структуры Вселенной. Наконец, в Заключение получены результаты резюмируются и намечаются направления дальнейших исследований.

2. ОПИСАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВАКУУМА

Вначале проведем ряд предварительных рассмотрений. Обозначим $\mathbf{x} \equiv (x, y)$, $d\mathbf{x} \equiv (dx, dy)$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \equiv (u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x}))$, $\mathbf{I}_t(d\mathbf{x}) \equiv (I_t(dx, dy), J_t(dx, dy))$.

Определение 1. Пусть $P_t(dx)$, $I_t(dx)$ – семейства мер Радона, определенные на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^2$, слабо непрерывные по t , и, кроме того, $P_t \geq 0$, а мера I_t абсолютно непрерывна относительно P_t для почти всех $t > 0$. Определим вектор-функцию $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ как производную Радона–Никодима $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = dI_t/dP_t$. Тогда P_t , I_t назовем *обобщенным решением* задачи Коши (1), (2), если: 1) для любых функций $f, g, h \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ и любых $0 < t_1 < t_2 < +\infty$

$$\begin{aligned} \iint f(\mathbf{x}) P_{t_2}(d\mathbf{x}) - \iint f(\mathbf{x}) P_{t_1}(d\mathbf{x}) &= \int_{t_1}^{t_2} \iint \nabla f \cdot \mathbf{I}_\tau(d\mathbf{x}) d\tau, \\ \iint g(\mathbf{x}) I_{t_2}(d\mathbf{x}) - \iint g(\mathbf{x}) I_{t_1}(d\mathbf{x}) &= \int_{t_1}^{t_2} \iint \nabla g \cdot \mathbf{u} I_\tau(d\mathbf{x}) d\tau, \\ \iint h(\mathbf{x}) J_{t_2}(d\mathbf{x}) - \iint h(\mathbf{x}) J_{t_1}(d\mathbf{x}) &= \int_{t_1}^{t_2} \iint \nabla h \cdot \mathbf{u} J_\tau(d\mathbf{x}) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\iint$ обозначает интегрирование по $\mathbb{R}^2$; 2) в слабом смысле при $t \rightarrow +0$, $P_t \rightarrow P_0$, $I_t \rightarrow I_0$.

В случае одной пространственной переменной (см. [8], [9]) обобщенное решение задачи (1), (2) можно строить с помощью следующего вариационного принципа. Вначале следует найти глобальный минимум $a(t, x)$ по переменной a у функции

$$F(t, x; a) = \int_{0-0}^{a-0} (u_0(\sigma)t + \sigma - x) P_0(d\sigma). \quad (4)$$

Если такой минимум единственный, то $u(t, x) = (x - a(t, x))/t$ и является непрерывной, а мера $P_t(dx; x)$ является абсолютно непрерывной по отношению к мере Лебега и имеет плотность ϱ такую, что $\varrho(t, x)dx = P_0(da)$. Если же минимумов F несколько, то имеет место разрыв скорости u , и $P_t(dx; x) = \int_{a_{\min}(t, x)}^{a_{\max}(t, x)} P_0(da)$. Отметим для полноты, что в [27] и [28] рассматривались неклассические решения одномерной системы уравнений газовой динамики без давления, которые не удовлетворяют описанному выше вариационному принципу.

В многомерном случае особенности плотности могут возникать на поверхностях в пространстве (t, x, y) , а также вдоль кривых. При эволюции особенности вдоль поверхности характеристики системы (1) должны приходить на эту поверхность с разных ее сторон. Обозначим эти стороны как “+” и “−”. Пусть поверхность концентрации плотности задается параметрически как $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, l)$, $\mathbf{X} \equiv (\chi, \gamma)$. Приходящие характеристики определяют соответствующие точки в лагранжевых координатах как $\mathbf{a}(t, l)$, $\mathbf{a} \equiv (a, b)$, $\mathbf{X}(t, l) = \mathbf{a}(t, l) + t\mathbf{u}_0(\mathbf{a}(t, l))$. Как показано в [14], [15], справедлива следующая интегральная форма для обобщенных соотношений Ренкина–Гюгонио на особых поверхностях для системы (1):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [\mathbf{X}(t, l) - \mathbf{a}^+(\tau, l) - \tau \mathbf{u}_0^+(\tau, l)] \varrho_0(\mathbf{a}^+) [(a^+)_\tau (b^+)_l - (b^+)_\tau (a^+)_l] d\tau = \\ = \int_{t_0}^t [\mathbf{X}(t, l) - \mathbf{a}^-(\tau, l) - \tau \mathbf{u}_0^-(\tau, l)] \varrho_0(\mathbf{a}^-) [(a^-)_\tau (b^-)_l - (b^-)_\tau (a^-)_l] d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где равенства (5) выполняются покомпонентно, $t_0 > 0$ – фиксированный момент времени, а l – некоторый параметр вдоль сечения поверхности плоскостью $t = t_0$. То есть в двумерном случае справедливы два соотношения, определяющие поверхность концентрации вещества.

В [25] в случае двух пространственных измерений фактически приведено схематическое доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть имеется только конечное число кусочно-непрерывно дифференцируемых поверхностей, а также конечное число кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых концентрации меры $P_i(dx)$. Пусть вне этих поверхностей и кривых меры $P_i(dx)$, $I_i(dx)$ кусочно абсолютно непрерывны по отношению к мере Лебега с кусочно-непрерывно дифференцируемой плотностью. Тогда указанные меры являются обобщенными решениями системы (1) в смысле определения 1 прямой, если: а) вне многообразий концентрации меры $P_i(dx)$ уравнения (1) удовлетворяются в обычном обобщенном смысле; б) на поверхностях концентрации меры $P_i(dx)$ выполняются соотношения (5); в) вдоль кривых концентрации меры $P_i(dx)$, заданных в виде $\mathbf{x} = \mathbf{s}(t) \equiv (s_1(t), s_2(t))$, выполняются соотношения

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{I}_i(d\mathbf{x}; \mathbf{s}(t)) / P_i(d\mathbf{x}; \mathbf{s}(t)). \quad (6)$$

Условие (5) в интегральной форме является прямым обобщением условия равенства минимумов функции F в (4). Однако проверять выполнение этого условия часто удобнее, когда оно записано в дифференциальной форме (об эквивалентности этих форм см. [15])

$$\dot{P}_i = \chi_i \{V[\varrho] - [\varrho v]\} - \gamma_i \{U[\varrho] - [\varrho u]\}, \quad \dot{\mathbf{I}}_i = \chi_i \{V[\varrho \mathbf{u}] - [\varrho v \mathbf{u}]\} - \gamma_i \{U[\varrho \mathbf{u}] - [\varrho u \mathbf{u}]\}, \quad (7)$$

где $(U, V) \equiv d\mathbf{I}_i/dP_i$, и для любой величины f обозначено $[f] \equiv f^+ - f^-$.

Теперь перейдем к построению эвристических оценок для решений задачи Римана. Во-первых, отметим, что при изучении возникновения иерархии особенностей оказывается важным следить за эволюцией в координатах Лагранжа. В [25], [24] было показано, что в двумерном случае вместо функции (4) следует рассмотреть вектор-функцию

$$\mathbf{F} \equiv \iint_A (\mathbf{u}_0(\mathbf{a})t + \mathbf{a} - \mathbf{x}) \varrho_0(\mathbf{a}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \equiv \iint_A \mathbf{S}(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b)}{\partial(\tau, l)} d\tau dl, \quad (8)$$

где A — некоторая область в лагранжевых переменных (a, b) , $(a(\tau, l), b(\tau, l))$ — параметризация этой области, а $\partial(a, b)/\partial(\tau, l) \equiv (a_\tau b_l - b_\tau a_l)$. Там же сформулирован следующий признак возникновения концентрации плотности ϱ , т.е. меры $P_i(dx)$, вдоль некоторой поверхности $\Gamma \equiv (t, \mathbf{X}(t, l))$. Пусть на некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ определены кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $\mathbf{a}(\tau, l)$ в пространстве лагранжевых переменных. Определим следующую вектор-функцию:

$$\Phi(\tau, l) \equiv (\Phi_1, \Phi_2) \equiv \int^\tau \mathbf{S}(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b)}{\partial(\alpha, l)} d\alpha, \quad (9)$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ определена в (8). Тогда условие возникновения особенности на поверхности Γ выглядит следующим образом. Для любого l существуют такие $\tau_1(l)$, $\tau_2(l)$, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau_1, l) = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau_2, l) = 0, \quad \Phi(\tau_1, l) = \Phi(\tau_2, l). \quad (10)$$

Замечание 1. При соответствующих ограничениях на рост функций ϱ_0 , $\mathbf{u}$, $\mathbf{a}$ условия (10) можно интерпретировать как поиск покомпонентных глобальных экстремумов функции Φ из (9), которая является аналогом функции (4). Таким образом, условия (10) предполагают процедуру поиска обобщенных решений с концентрацией особенностей, обобщающую соответствующий вариационный принцип в случае одной пространственной переменной.

Далее, условие возникновения особенности вдоль кривой в пространстве $(t, \mathbf{x})$ предполагает, что на плоскости лагранжевых координат существует область $D(t)$, ограниченная частями границ областей K для разных Γ , и таких, что

$$\iint_{D(t)} \mathbf{S}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} = 0, \quad (11)$$

где в функцию $\mathbf{S}$ из (8) подставлена траектория особенности $\mathbf{x} = \mathbf{s}(t)$.

Замечание 2. Только что кратко изложенные подходы работы [24] обусловлены, в том числе, тем фактом, что произвольно построенная система движущихся частиц, которая в одномерном случае использовалась для построения приближенного решения, в двумерном случае ведет себя довольно нерегулярным образом. Так, например, возможны ситуации не существования и не единственности (см. [29]), а также скрещивания большинства траекторий для полного по неко-

торой мере набора начальных расположений частиц (см. [30]). Фактически в [24] сделана попытка сформулировать альтернативный принцип построения решений.

Рассмотрим задачу Римана для (1). Задачей Римана называется такая задача Коши, когда в каждом квадранте начальной плоскости (x, y) при $t = 0$ начальные функции ϱ_0 , u_0 , v_0 постоянны, т.е. координатные оси служат линиями разрыва начальных данных. В дальнейшем будем нумеровать квадранты плоскости стандартным образом с помощью индекса $i = 1, 2, 3, 4$, и этим же индексом будем отмечать значения соответствующих величин, в частности, начальных данных.

Предварительно рассмотрим более простую задачу, для которой конкретизируем приведенные выше соотношения (9), (10). А именно, пусть при $t = 0$ имеется прямая $\mu y - \nu x = 0$ с положительной нормалью $(-\nu, \mu)$. В соответствии с направлением положительной нормали данная прямая делит $\mathbb{R}^2$ на две полуплоскости: положительную $\mathbb{R}_+^2$, которую будем обозначать индексом “+”, и отрицательную $\mathbb{R}_-^2$, которую будем обозначать индексом “-”. Пусть $\varrho_0 = \varrho^+ = \text{const}$, $u_0 = u^+ = \text{const}$ при $\mu y - \nu x > 0$ и $\varrho_0 = \varrho^- = \text{const}$, $u_0 = u^- = \text{const}$ при $\mu y - \nu x < 0$. При $t = 0$ плоскость (x, y) является плоскостью Лагранжевых координат, которую мы для удобства будем обозначать как (a, b) . Введем в полуплоскостях $\mathbb{R}_\pm^2$ наборы аффинных координат (τ, l) по формулам

$$a = \alpha^\pm \tau + \gamma^\pm l, \quad b = \beta^\pm \tau + \delta^\pm l. \quad (12)$$

Определение 2. Системы координат (12) называются а) допустимыми, если

$$D^\pm \equiv \alpha^\pm \delta^\pm - \beta^\pm \gamma^\pm \neq 0, \quad \mu \beta^\pm - \nu \alpha^\pm \neq 0,$$

и б) согласованными, если

$$\frac{\nu \gamma^+ - \mu \delta^+}{\mu \beta^+ - \nu \alpha^+} = \frac{\nu \gamma^- - \mu \delta^-}{\mu \beta^- - \nu \alpha^-} \equiv \zeta_0.$$

Теорема 2. Существуют такие допустимые и согласованные системы координат (12), что выполняются условия (10), а поверхность Γ и плотность сконцентрированного вещества P_t задаются формулами

$$X(t, l) = t \frac{u^+ \sqrt{\varrho^+} + u^- \sqrt{\varrho^-}}{\sqrt{\varrho^+} + \sqrt{\varrho^-}} + l(\mu, \nu), \quad P_t = t(\nu[u] - \mu[v]) \sqrt{\varrho^+ \varrho^-}. \quad (13)$$

Замечание 3. В отличие от, например, [13], [17], для вывода формул (13) в теореме 2 не использовались никаких дифференциальных соотношений. Это свойство лежит в основе возможности использования результатов теоремы 2 для получения эвристических оценок в более сложных ситуациях с возникновением концентрации вещества вдоль кривой. Дополнительно можно видеть, что соотношения (13) удовлетворяют системе (7), а значит, и (5), т.е. в соответствии с теоремой 1 вектор-функция $(\varrho, \mathbf{u})$, представляющая собой области постоянных значений плотности и скорости, разделенные поверхностью (13), является обобщенным решением системы (1).

Доказательство. Введем обозначения $\mathbf{A} \equiv (\alpha, \beta)$, $\mathbf{B} \equiv (\gamma, \delta)$. Тогда, учитывая структуру начальных данных, функция Φ из (9) имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} \int_{\zeta_0 l}^{\tau} (t u^- - x + \mathbf{A}^- \tau + \mathbf{B}^- l) \varrho^- D^- d\tau & \text{при } \tau \leq \zeta_0 l, \\ \int_{\zeta_0 l}^{\tau} (t u^+ - x + \mathbf{A}^+ \tau + \mathbf{B}^+ l) \varrho^+ D^+ d\tau & \text{при } \tau \geq \zeta_0 l. \end{cases} \quad (14)$$

Непосредственные вычисления дают следующие условия наличия экстремумов у функций Φ_1 , Φ_2 :

$$\text{если } \tau_1^- = \frac{x - t u^- - \gamma^- l}{\alpha^-} < \zeta_0 l, \quad \text{то } \Phi_{1, \text{extr}}^- = -\varrho^- D^- (x - t u^- - \gamma^- l - \alpha^- \zeta_0 l)^2 / (2\alpha^-);$$

$$\begin{aligned}
&\text{если } \tau_1^+ = \frac{x - tu^+ - \gamma^+ l}{\alpha^+} > \zeta_0 l, \quad \text{то } \Phi_{1,\text{extr}}^+ = -\varrho^+ D^+ (x - tu^+ - \gamma^+ l - \alpha^+ \zeta_0 l)^2 / (2\alpha^+); \\
&\text{если } \tau_2^- = \frac{y - tv^- - \delta^- l}{\beta^-} < \zeta_0 l, \quad \text{то } \Phi_{2,\text{extr}}^- = -\varrho^- D^- (y - tv^- - \delta^- l - \beta^- \zeta_0 l)^2 / (2\beta^-); \\
&\text{если } \tau_2^+ = \frac{y - tv^+ - \delta^+ l}{\beta^+} > \zeta_0 l, \quad \text{то } \Phi_{2,\text{extr}}^+ = -\varrho^+ D^+ (y - tv^+ - \delta^+ l - \beta^+ \zeta_0 l)^2 / (2\beta^+).
\end{aligned} \tag{15}$$

В соответствии с условиями (10) концентрация вдоль поверхности возникает при выполнении следующих соотношений:

$$\tau_1^- = \tau_2^- < \zeta_0 l, \tau_1^+ = \tau_2^+ > \zeta_0 l; \quad \Phi_{1,\text{extr}}^- = \Phi_{1,\text{extr}}^+, \Phi_{2,\text{extr}}^- = \Phi_{2,\text{extr}}^+. \tag{16}$$

Введем обозначения $X^\pm \equiv x - tu^\pm - \gamma^\pm l$, $Y^\pm \equiv y - tv^\pm - \delta^\pm l$. Тогда соотношения (16) примут вид

$$\begin{aligned}
\alpha^+ \varrho^- D^- (X^- - \alpha^- \zeta_0 l)^2 &= \alpha^- \varrho^+ D^+ (X^+ - \alpha^+ \zeta_0 l)^2, \quad \beta^- X^- = \alpha^- Y^-; \\
\beta^+ \varrho^- D^- (Y^- - \beta^- \zeta_0 l)^2 &= \beta^- \varrho^+ D^+ (Y^+ - \beta^+ \zeta_0 l)^2, \quad \beta^+ X^+ = \alpha^+ Y^+.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) следуют соотношения

$$\frac{\beta^-}{\alpha^-} = \frac{\beta^+}{\alpha^+}, \quad t \left\{ [u] \frac{\beta^\pm}{\alpha^\pm} - [v] \right\} + l \left\{ [\gamma] \frac{\beta^\pm}{\alpha^\pm} - [\delta] \right\} = 0. \tag{18}$$

Принимая во внимание тот факт, что (18) должно выполняться при всех t, l , окончательно получаем из (17)

$$\begin{aligned}
\beta^- \alpha^+ &= \beta^+ \alpha^-, \quad [u] \beta^\pm = [v] \alpha^\pm, \quad [\gamma] \beta^\pm = [\delta] \alpha^\pm, \\
[u] y &= [v] (x - tu^- - \gamma^- l) + [u] (tv^- + \delta^- l), \\
\alpha^+ \varrho^- D^- (X^- - \alpha^- \zeta_0 l)^2 &= \alpha^- \varrho^+ D^+ (X^+ - \alpha^+ \zeta_0 l)^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Непосредственно проверяется, что $\alpha^+ D^- = \alpha^- D^+$ и из последнего соотношения (19) следует уравнение для $x(t, l)$:

$$x^2 [\varrho] - 2x [t \varrho u + l \varrho (\gamma + \zeta_0 \alpha)] + [\varrho (ut + l(\gamma + \zeta_0 \alpha))^2] = 0. \tag{20}$$

Решая квадратное уравнение (19), придем к следующему выражению:

$$[\varrho] x - t [\varrho u] - l [\varrho (\gamma + \zeta_0 \alpha)] = \pm \sqrt{\varrho^+ \varrho^-} (t[u] + l[\gamma + \zeta_0 \alpha]). \tag{21}$$

Из условий согласованности рассматриваемых систем координат из определения 2 следует, что

$$(\gamma^\pm + \zeta_0 \alpha^\pm) (\mu[v] - \nu[u]) = \mu(\gamma^\pm[v] - \delta^\pm[u]). \tag{22}$$

Выполнение начального условия $x(0, l) = \mu l$ предполагает, что

$$\gamma^\pm[v] - \delta^\pm[u] = \mu[v] - \nu[u]. \tag{23}$$

Принимая во внимание неравенства в (15) и учитывая (22), (23), придем к формулам для $X(t, l)$ в (13).

С учетом ориентации масса, которая будет сконцентрирована на поверхности $X(t, l)$, может быть вычислена так:

$$\begin{aligned}
P_t &= \int_{\zeta_0 l}^{\tau_1^-} \varrho^- D^- d\tau + \int_{\tau_1^+}^{\zeta_0 l} \varrho^+ D^+ d\tau = (\varrho^- D^- / \alpha^-) (x - tu^- - \mu l) - (\varrho^+ D^+ / \alpha^+) (x - tu^+ - \mu l) = \\
&= -(\alpha^\pm / \alpha^\pm) ([\varrho] (x - \mu l) - t [\varrho u]) = t (\delta^\pm[u] - \gamma^\pm[v]) \sqrt{\varrho^+ \varrho^-}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Далее, используя соотношение (23), придем к формуле для P_t из (13).

Теорема доказана.

Теперь вернемся к рассмотрению двумерной задачи Римана и сформулируем эвристический метод получения оценок, описывающих качественное поведение решений задачи Римана при отсутствии зон вакуума, т.е. зон, где $\varrho = 0$.

Как следует из постановки задачи Римана, которая была приведена выше, в начальный момент времени имеют место разрывы начальных функций на прямых $x = 0$ и $y = 0$. Поскольку в каждом квадранте $i = 1, 2, 3, 4$ заданы свои постоянные значения $\varrho_i, \mathbf{u}_i$, то при $t > 0$, вообще говоря, возникнет попарное взаимодействие между всеми квадрантами с образованием поверхностей разрыва в соответствии с формулами теоремы 2. Обозначим эти поверхности разрыва как X_{i-j} , где i, j – номера соответствующих квадрантов. При этом на лагранжевой плоскости $\mathbf{a}$ возникнут области A_{i-j} точек, которые концентрируются на поверхностях X_{i-j} до возникновения взаимодействий этих поверхностей. Наличие соприкосновения областей A_{i-j} свидетельствует о возникновении новой поверхности концентрации, эволюция которой определяется более сложными законами, чем формулы (13) теоремы 2 (скорее всего, решения будут автомодельными). Этим поверхностям также будут соответствовать некоторые области $\tilde{A}$ на плоскости $\mathbf{a}$. Если же найдется еще одна область, которая будет охватываться (см. [24]) областями $\tilde{A}$, то это сигнализирует о возникновении концентрации на линии, т.е. возникновении иерархии особенностей.

Конкретные примеры качественного описания обобщенных решений на основе выделенных выше признаков будут приведены в разд. 4. Упор будет сделан на ситуации с возникновением иерархии особенностей, поскольку в отсутствие такой иерархии достаточно подробное исследование было выполнено в [13], [17].

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ПРИЛИПАНИЯ И ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Для задачи Коши (1), (2) в одномерном случае обоснован метод слипающихся частиц (adhesion dynamics) (см. [6–8]), выражающий входящие в систему (1) законы сохранения массы и импульса. Этот метод состоит в рассмотрении эволюции набора отдельных частиц, претерпевающих абсолютно неупругие столкновения, т.е. слипающихся при столкновениях. В одномерном случае рассмотрение слипающихся частиц позволяет доказать теоремы существования и единственности энтропийных решений, а также получить компактное представление этих решений (вариационный принцип), описывающее все типичные особенности. Как уже отмечалось, в двумерном случае поведение соответствующей системы частиц не обладает теми свойствами, которые присущи ей в одномерном случае (см. [29], [30]). Однако сложности, возникающие при строгом математическом описании, можно преодолеть, перейдя к приближенному описанию и используя его для построения численного алгоритма. Динамика прилипания сохраняется, просто она описывается более сложным образом (см., например, [24]).

Таким образом, в настоящей работе используется численная реализация метода слипающихся частиц для двумерного случая, основанная на подходе, описанном в [26]. Выбор численного метода (без построения сеток и использования конечно-разностных аппроксимаций) обусловлен возникновением иерархии сильных особенностей и, соответственно, необходимостью получения точной картины взаимодействия ударных волн. Здесь мы сконцентрируемся, в основном, на воспроизводстве качественных закономерностей необходимо существенно увеличить количество исходных частиц и использовать параллельную реализацию на высокопроизводительных вычислительных системах, что предполагается сделать в дальнейшем. Кроме того, мы приведем пример расчета, качественно демонстрирующего возможность получения картины крупномасштабного распределения вещества во Вселенной. Для подобных расчетов, основанных на физических данных, также необходимо привлечение суперкомпьютерных мощностей. В этом разделе мы опишем основные этапы алгоритма получения численного решения задачи Коши (1), (2) с помощью указанной выше реализации метода слипающихся частиц.

Во всех экспериментах, результаты которых будут обсуждаться в следующих разделах, расчетная область Ω представляет собой прямоугольник. Для получения начального распределения частиц в Ω строится вспомогательная прямоугольная сетка с количеством ячеек $N_x \times N_y$. Затем в каждой ячейке начальная плотность $\varrho(0, x, y)$ (см. (2)), интегрируется с помощью двумерной формулы трапеций, результирующая масса присваивается частице, помещенной в центр ячейки, и компоненты ее скорости выбираются равными значениям функций $u(0, x, y)$ и $v(0, x, y)$ в центре

ячейки. Таким образом, количество частиц в начальный момент времени равно $N_x N_y$. Отметим, что в данной работе все численные эксперименты (кроме эксперимента б) представляют собой решения двумерной задачи Римана, т.е. соответствующие начальные данные составлены из констант, поэтому выбор, например, квадратурной формулы для получения массы не играет роли.

Далее мы рассчитываем эволюцию полученной системы частиц. Частица движется во времени t по прямой в соответствии с имеющейся скоростью. Каждая итерация цикла продвижения по времени устроена следующим образом: находятся попарные расстояния между траекториями частиц как функции времени, вычисляется их минимум при $t > 0$: если он меньше, чем критическое значение d_{cr} , то частицы считаются столкнувшимися. Выбирается ближайшее по времени столкновение и обрабатываются все частицы, столкнувшиеся в этот момент в этой или других точках области Ω . Все столкновения считаются абсолютно неупругими, т.е. масса, скорость и координата результирующей точки для каждого столкновения вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{x}_{\text{new}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i}, \quad \mathbf{u}_{\text{new}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{u}_i}{\sum_i m_i}, \quad m_{\text{new}} = \sum_i m_i,$$

где m_i обозначает массу, $\mathbf{u}_i$ — скорость, $\mathbf{x}_i$ — положение частицы, а суммирование ведется по всем частицам, столкнувшимся в данной точке. Затем для полученного набора новых частиц описанный процесс начинается с начала.

Одной из сложностей численной реализации двумерного метода слипающихся частиц является обеспечение достаточно высокой вероятности взаимодействия отдельных частиц. Дело в том, что на плоскости вероятность столкновения двух геометрических точек (не имеющих площади и линейных размеров) равна нулю, и чтобы это изменить, необходимо присвоить им некий эффективный “размер”. Обычно для этого вводится критическая величина расстояния d_{cr} , описанная выше. Существуют способы дополнительного увеличения вероятности взаимодействия частиц, например, специальное восстановление скорости (см. [26]). Однако мы провели серии отдельных расчетов, чтобы подобрать оптимальное d_{cr} для рассматриваемого класса задач. Подробнее об этом будет сказано в следующем разделе.

Чтобы получить поле плотности в заданный момент времени, его необходимо восстановить из распределения частиц. Основной интерес представляют δ -особенности плотности, т.е. концентрация вещества вдоль поверхностей или кривых в пространстве (t, x, y) . Для восстановления этих особенностей в выбранный момент времени среди частиц выделяются два класса: как минимум на порядок более тяжелые и как минимум на три порядка более тяжелые, чем самая легкая частица при $t = 0$. Первый класс считается относящимся к особенностям вдоль поверхности, а второй класс — к особенностям вдоль кривой. Значение плотности восстанавливается следующим образом:

$$\varrho(\mathbf{x}_i) = \frac{m_i}{d_i},$$

где $\mathbf{x}_i$ — координаты частицы с массой m_i , а d_i для частицы первого класса равно расстоянию до ближайшей частицы первого или второго класса, а для частицы второго класса $d_i = 1$.

С теоретической точки зрения представляют интерес области начальных данных, с которых масса собирается со временем в δ -особенности плотности. Для нахождения и отображения этих областей на каждой итерации алгоритма (т.е. для каждого обработанного столкновения) проводятся дополнительные операции и сохраняется дополнительный массив данных.

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕШЕНИЙ БЕЗ ОБРАЗОВАНИЯ ВАКУУМА

В этом разделе мы рассмотрим результаты численного решения задач Коши (1), (2) для ряда начальных данных, не приводящих к образованию областей с $\varrho = 0$.

Во всех численных экспериментах ниже расчетная область Ω представляет собой прямоугольник $(x, y) \in [-l, l] \times [-l, l]$, где l — выбранный масштаб длины. Количество частиц в начальный момент времени по направлениям x и y выбирается одинаковым, будем обозначать его через $N = N_x = N_y$. Во всех случаях, кроме эксперимента б, решается задача Римана, т.е. начальные данные в каждой четверти координатной плоскости составлены из констант. Компоненты на-

чальных данных будем обозначать через ϱ_i , u_i , v_i , где i — номер четверти. Четверти нумеруются традиционно: с первой по четвертую против часовой стрелки, начиная с правой верхней. Для фиксированного t будем называть для краткости δ -особенности плотности вдоль поверхности и вдоль кривой в пространстве (t, x, y) “тяжелой линией” и “тяжелой точкой” соответственно, имея в виду проекции соответствующих поверхностей и кривых на плоскости $t = \text{const}$. Через M_h будем обозначать массу тяжелой точки. Таких тяжелых точек во всех рассмотренных экспериментах наблюдается не более одной.

Конкретный выбор масштаба длины l не имеет значения в качественном смысле, а лишь накладывает ограничение на максимальное время $t_{\max}$, для которого результаты расчета могут трактоваться как приближенное решение задачи Коши (1), (2) в некой части расчетной области Ω . Оценка сверху для этого максимального времени имеет следующий вид:

$$t_{\max} < \tilde{t}_{\max} = \frac{l}{\max_i \{u_i, v_i\}}.$$

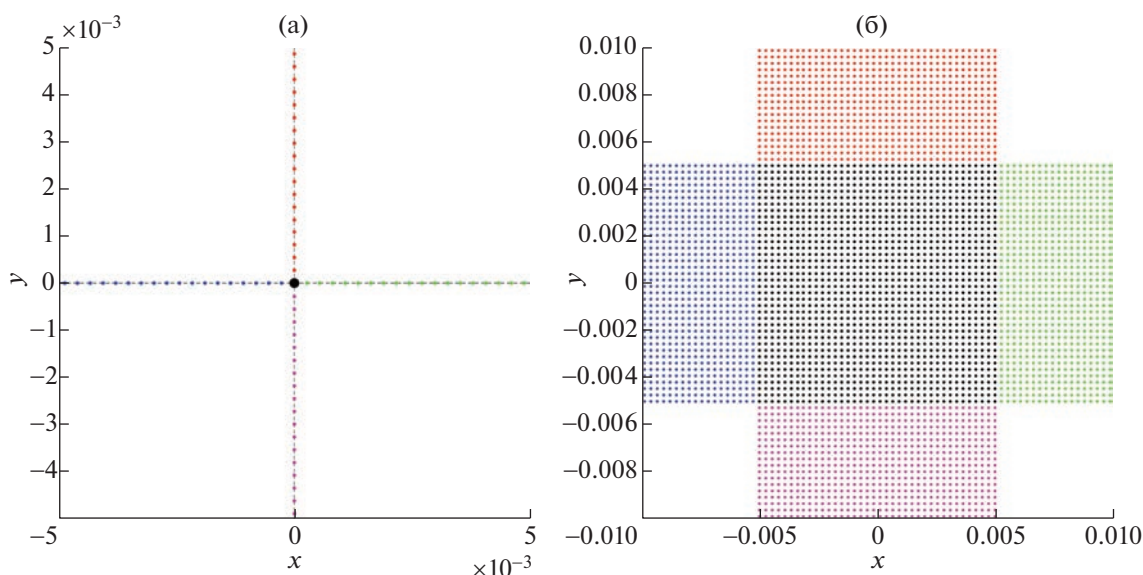
При $t = \tilde{t}_{\max}$ все частицы из начального распределения для как минимум одной из четвертей расчетной области заведомо покинут эту четверть либо столкнутся с другими частицами. Во всех рассмотренных экспериментах l выбиралось равным 10^{-2} , и все рассмотренные фиксированные моменты времени удовлетворяли $t < \tilde{t}_{\max}$.

Теоретические оценки этого раздела основаны на методике, описанной в разд. 2.

4.1. Эксперимент 1

Вначале рассмотрим симметричный пример концентрации массы в неподвижной точке, расположенной в начале координат. Начальные данные имеют следующий вид: $\varrho_i = 1 \forall i$, $u_1 = u_4 = -1$, $u_2 = u_3 = 1$, $v_1 = v_2 = -1$, $v_3 = v_4 = 1$.

С теоретической точки зрения формулы (13) приводят к возникновению неподвижной иерархии особенностей. При этом плотность концентрации вещества на поверхностях равна $2t$, а масса, сосредоточенная на кривой, равна $4t^2$.



Фиг. 1. Для эксперимента 1 и $t = 0.005$ изображены: (а) — δ -особенности плотности (тяжелая точка черным цветом, тяжелые линии другими цветами), (б) — области начальных данных, соответствующие этим особенностям (теми же цветами).

Таблица 1. Сходимость различных величин с увеличением количества частиц в начальный момент времени для эксперимента 1 и $t = 0.005$

N	M_h	ρ_{12}	ρ_{23}
75	9.47×10^{-5}	9.73×10^{-3}	9.73×10^{-3}
150	9.74×10^{-5}	9.87×10^{-3}	9.87×10^{-3}
299	9.87×10^{-5}	9.93×10^{-3}	9.93×10^{-3}
Теория	1×10^{-4}	1×10^{-2}	1×10^{-2}

На фиг. 1 изображены рассчитанные в соответствии с описанным выше алгоритмом δ -особенности плотности, а также области начальных данных, с которых масса собралась в эти особенности.

В табл. 1 для разных значений N представлены масса тяжелой точки, а также величина ρ_{ij} — постоянная линейная плотность тяжелой линии, разделяющей i -ю и j -ю четверти расчетной плоскости. Из-за симметрии задачи все расчетные плотности вдоль тяжелых линий получаются одинаковые. Видно, что полученные данные согласуются с приведенными выше формулами, и наблюдается сходимость с увеличением N .

Отметим, что этот эксперимент был использован для поиска оптимального d_{cr} — критического расстояния слипания частиц. Для этого в симметричное расположение частиц в начальный момент времени вводились возмущения (разные в различных четвертях расчетной области) и сравнивалось, насколько полученные данные были близки к полученным аналитически значениям. В результате серии экспериментов было выбрано значение $d_{cr} = 0.7d_{min}$, где d_{min} — минимальное расстояние между частицами в начальный момент времени. Такое d_{cr} использовалось во всех экспериментах, которые будут рассмотрены далее. Можно рассмотреть и более сложные подходы к подбору d_{cr} , например, связывая эту величину с массой образующегося кластера, однако расчеты показали, что для рассмотренных примеров такой выбор позволяет получить достаточно устойчивые и согласующиеся с теоретическими оценками результаты.

4.2. Эксперимент 2

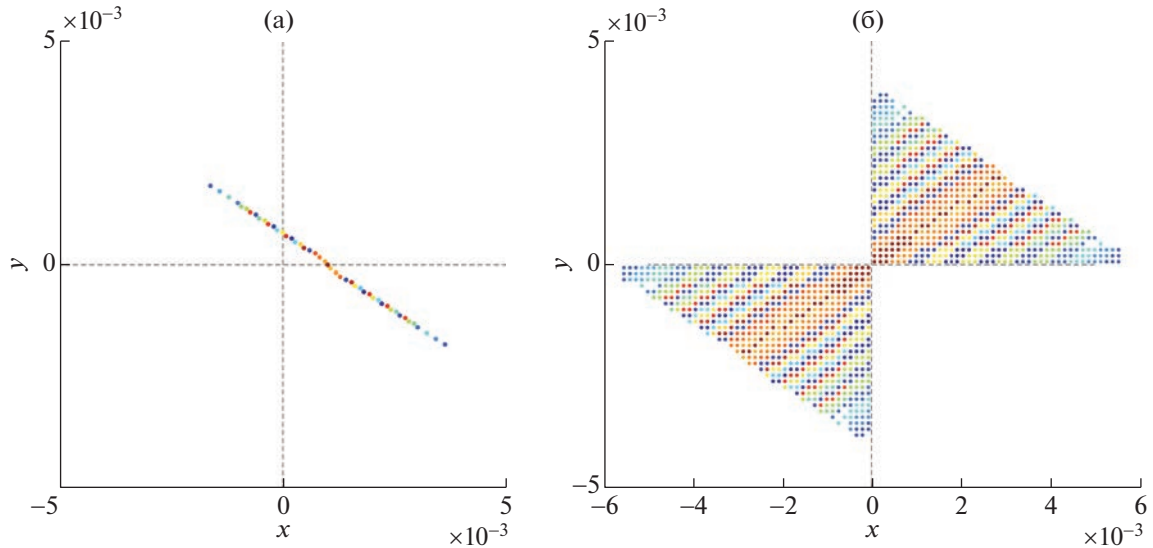
Начальные данные имеют следующий вид: $\rho_i = 1 \forall i$, $u_1 = u_2 = -1$, $u_3 = u_4 = 2$, $v_1 = v_4 = -1$, $v_2 = v_3 = 1$.

В данной вырожденной ситуации область A_{1-3} имеет две компоненты, которые пересекаются в одной точке. То есть возможно появление автомодельного решения. Такое решение существует, и его можно получить из системы (7). Оно имеет вид

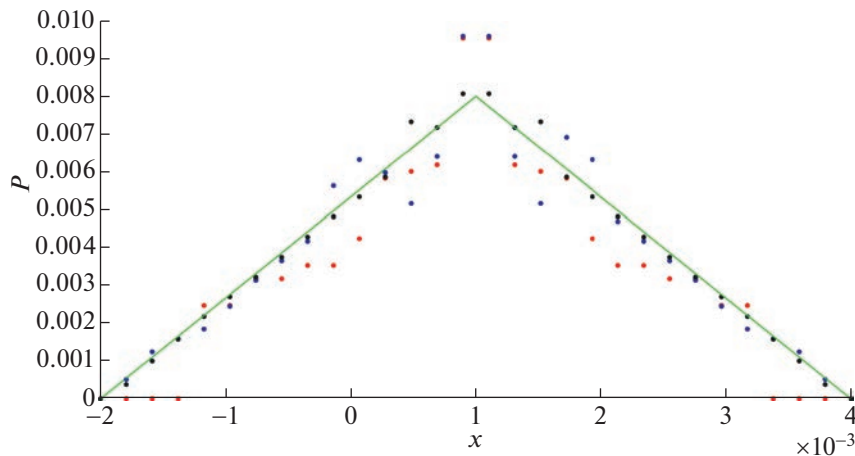
$$\begin{aligned} x(t, l) &= t/2 + l, \quad y = -2l/3, \quad -3t/2 \leq l \leq 3t/2, \\ P(t, l)dl &= \{(4t + 8l/3)dl \text{ при } -3t/2 \leq l \leq 0; \quad (4t - 8l/3)dl \text{ при } 0 \leq l \leq 3t/2\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где l — параметр вдоль сечения поверхности концентрации вещества плоскостью $t = \text{const}$. Формулы (13) теоремы 2 дают оценку плотности, равную $4t$, лишь в окрестности точки $l = 0$.

На фиг. 2 изображена рассчитанная в соответствии с описанным выше алгоритмом δ -особенность плотности, а также области начальных данных, с которых масса собралась в эту особенность. В данном случае образуется одна тяжелая линия без тяжелой точки. На фиг. 3 сравнивается плотность вдоль тяжелой линии, полученная с помощью формул (25) (при этом плотность была выражена через величину x , которая играла роль параметра), с полученными численно при разных количествах частиц в начальный момент времени. Видно, что с увеличением количества начальных частиц расчетные данные приближаются к аналитическому решению. Интеграл от модуля разности между численным и аналитическим решением для количества частиц в начальный момент времени 75, 150 и 299 равен 4.9×10^{-6} , 3.1×10^{-6} и 9.8×10^{-7} соответственно. В данном случае плотность была восстановлена следующим образом: диапазон значений x был разбит точками на равномерные отрезки, плотность в каждой точке полагалась равной отношению массы, заключенной в двух соседних отрезках, и их суммарной длины.



Фиг. 2. Для эксперимента 2 и $t = 0.002$ изображены: (а) — δ -особенность плотности (тяжелая линия) различными цветами, (б) — область начальных данных, соответствующая этой особенности (теми же цветами).



Фиг. 3. Для эксперимента 2 и $t = 0.002$ изображена плотность вдоль тяжелой линии, полученная аналитически (зеленый) и рассчитанная при количестве частиц в начальный момент времени 75 (красный), 150 (синий) и 299 (черный).

4.3. Эксперимент 3

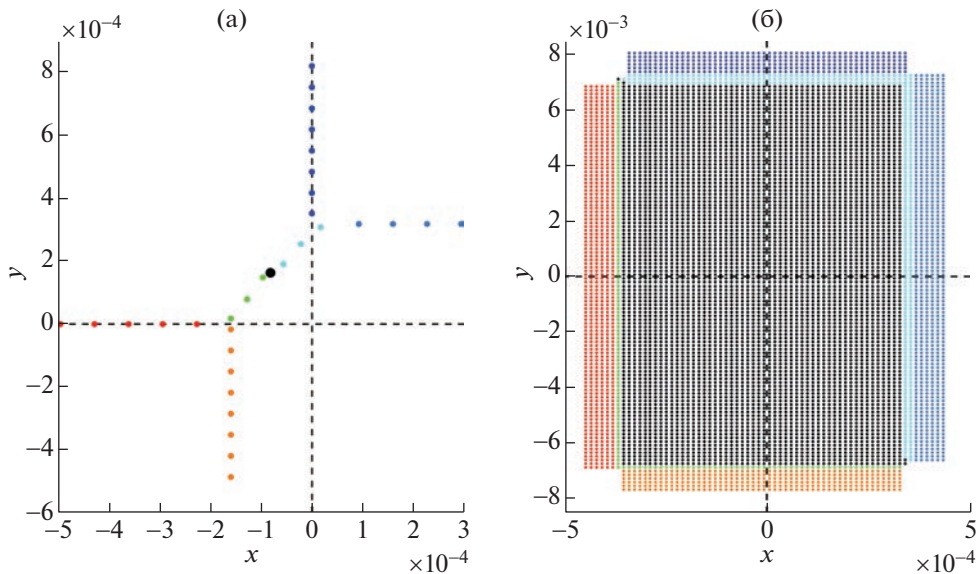
Рассмотрим начальные данные, записанные в следующем виде: $\varrho_i = \varrho > 0$, $i = 1, 2, 3$; $\varrho_4 = R > \varrho$, $u_1 = u_4 = -u$, $u_2 = u_3 = u$, $v_1 = v_2 = -v$, $v_3 = v_4 = v$, $u > 0$, $v > 0$.

Для таких начальных данных рассмотрим более подробно расположение областей A_{i-j} на лагранжевой плоскости (a, b) . Обозначим

$$\lambda \equiv \frac{\sqrt{R} - \sqrt{\varrho}}{\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}}, \quad \theta \equiv \frac{2\sqrt{\varrho}}{\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}}, \quad \Theta \equiv \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{\varrho}}.$$

При данной конфигурации начальных данных области A_{1-3} , A_{2-4} можно не рассматривать, поскольку частицы, расположенные в соответствующих квадрантах, не успеют взаимодействовать между собой. Рассмотрим области A_{1-2} , A_{2-3} , A_{3-4} , A_{4-1} , они имеют вид

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= \{(a, b) : -tu < a < tu, b > \Theta tv\}; & A_{2-3} &= \{(a, b) : a < -\Theta tu, -tv < b < tv\}; \\ A_{3-4} &= \{(a, b) : -\Theta tu < a < \Theta tu, b < -tv\}; & A_{4-1} &= \{(a, b) : a > tu, -\Theta tv < b < \Theta tv\}. \end{aligned}$$



Фиг. 4. Для эксперимента 3 и $t = 0.0035$ изображены: (а) – δ -особенности плотности (тяжелая точка черным цветом, тяжелые линии другими цветами), (б) – области начальных данных, соответствующие этим особенностям (теми же цветами).

Этим областям соответствуют поверхности концентрации вещества в пространстве (t, x, y) согласно формулам (13). А именно, области A_{1-2} соответствует $x = 0, y > \lambda tv$; области A_{2-3} соответствует $y = 0, x < -\lambda tu$; области A_{3-4} соответствует $x = -\lambda tu, y < 0$; области A_{1-4} соответствует $x > 0, y = \lambda tv$.

Далее на плоскости (a, b) можно выделить области $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \{-\theta tu < a < -tu, -tv < b < tv\} \cup \{-tu < a < \theta tu, -tv < b < -\theta tv\}, \\ \tilde{A}_2 &= \{\theta tu < a < tu, -\theta tv < b < tv\} \cup \{-tu < a < \theta tu, tv < b < \theta tv\},\end{aligned}$$

которые формируют предположительно автомодельные поверхности концентрации вещества. В соответствии с законами сохранения можно дать оценку общей массы M_k и интегрального импульса $\mathfrak{S}_k, k = 1, 2$, этих поверхностей:

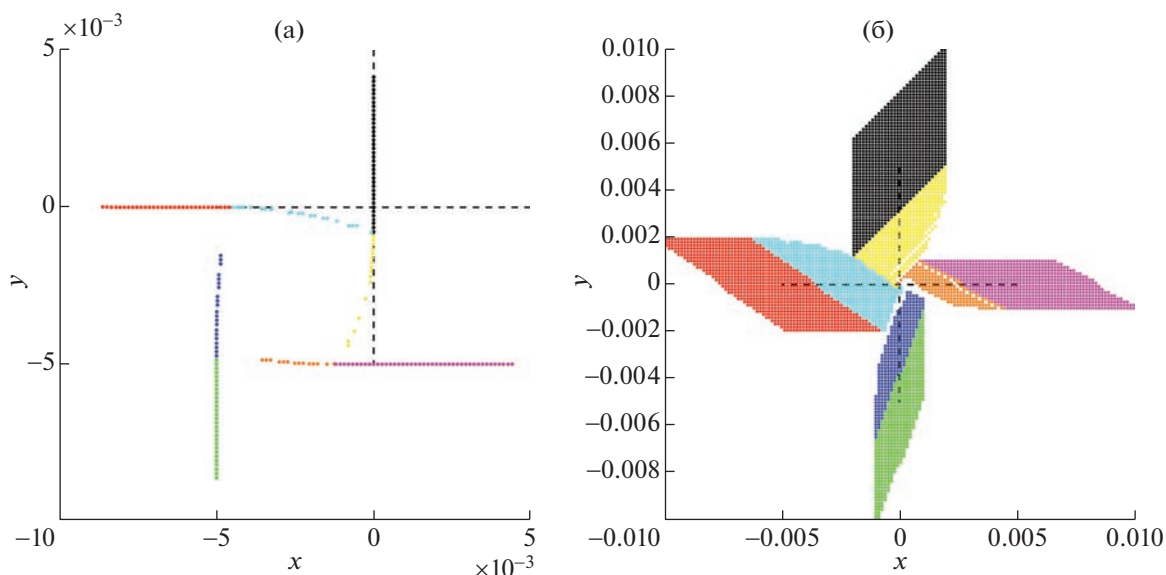
$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 : M_1 &= \lambda t^2 uv(3\varrho + R\theta), \quad \mathfrak{S}_1 = (\lambda t^2 u^2 v(3\varrho - R\theta), \lambda t^2 uv^2(\varrho + R\theta)), \\ \tilde{A}_2 : M_2 &= \lambda t^2 uv(3\varrho + R\theta), \quad \mathfrak{S}_2 = (-\lambda t^2 u^2 v(\varrho + R\theta), \lambda t^2 uv^2(-3\varrho + R\theta)).\end{aligned}$$

Для возникающей линии концентрации вещества справедливы следующие оценки величин массы и вектор-импульса соответственно:

$$t^2 uv(\varrho + 2\varrho\theta + R\theta^2), \quad (t^2 u^2 v(\varrho - R\theta^2), t^2 uv^2(R\theta^2 - \varrho)).$$

Дополнительно подчеркнем, что полученные выше выражения являются только оценками для описания качественной структуры решения. Получить аналитическое решение данной задачи на основе уравнений (7) и (6) неожиданно оказывается довольно сложно.

Для численных экспериментов были выбраны следующие начальные данные: $\varrho = \varrho_i = 1, i = 1, 2, 3; R = \varrho_4 = 1.2, u_1 = u_4 = -1, u_2 = u_3 = 1, v_1 = v_2 = -2, v_3 = v_4 = 2$. На фиг. 4 изображены рассчитанные в соответствии с описанным выше алгоритмом δ -особенности плотности, а также области начальных данных, с которых масса собралась в эти особенности. В табл. 2 приведено сравнение рассчитанных величин массы и компонент импульса с полученными по приведенным выше формулам. Индекс 1 соответствует тяжелой линии, расположенной ниже тяжелой точки (желтый цвет на фиг. 4), индекс 2 соответствует тяжелой линии, расположенной выше тяжелой



Фиг. 5. Для эксперимента 4 и $t = 0.002$ изображены: (а) — δ -особенности плотности (тяжелые линии) различными цветами, (б) — области начальных данных, соответствующие этим особенностям (теми же цветами).

точки (бирюзовый цвет на фиг. 4). Видно, что с увеличением N полученные численные значения приближаются к теоретическим оценкам.

5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕШЕНИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ВАКУУМА

В этом разделе будут рассмотрены результаты численного решения задачи Коши (1), (2) для начальных данных, приводящих к образованию областей с $\varrho = 0$. Как уже было сказано во Введении, качественное поведение решений совпало с теоретическими построениями из [17].

Также приводится пример расчета, который достаточно хорошо отображает современные представления о крупномасштабной структуре Вселенной (см., например, [4]).

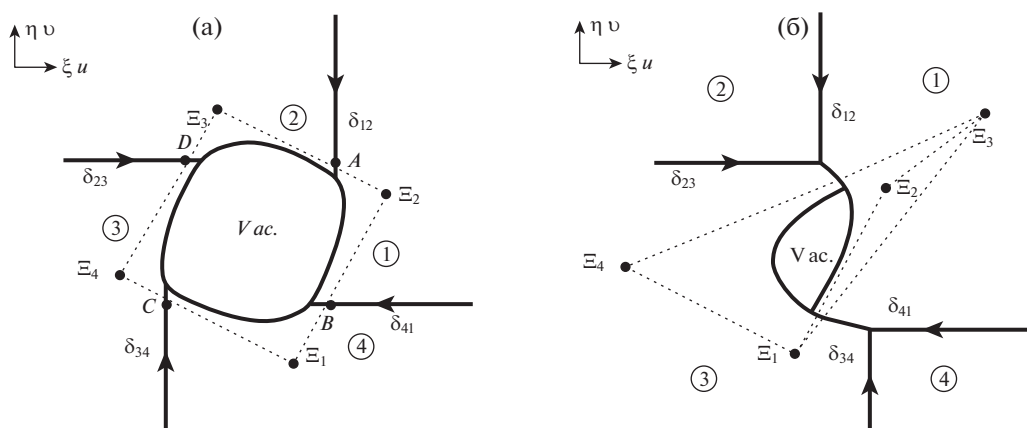
5.1. Эксперимент 4

Начальные данные имеют следующий вид: $\varrho_i = 1 \forall i$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -2$, $u_4 = -3$, $v_1 = -3$, $v_2 = -1$, $v_3 = 1$, $v_4 = -2$. Такие значения подходят под п. 4.2(i) работы [17], в которой аналитически исследовалось качественное поведение решений задачи Коши, эквивалентной задаче (1), (2) в смысле переменных (ϱ, u, v) . Поведение полученного нами численного решения (см. фиг. 5) качественно согласуется со структурой решения, схематически приведенного в [17] (см. фиг. 6а). В табл. 3 для этого эксперимента показана сходимость характерных величин с увеличением количества частиц в начальный момент времени. Индекс 12 относится к вертикальной линии между

Таблица 2. Сравнение массы и импульса частей особенности при разном количестве точек в начальный момент времени со значениями, полученными аналитически, для эксперимента 3 при $t = 0.0035$

N	M_h	$\mathfrak{I}_h^x$	$\mathfrak{I}_h^y$	M_1	$\mathfrak{I}_1^x$	$\mathfrak{I}_1^y$	M_2	$\mathfrak{I}_2^x$	$\mathfrak{I}_2^y$
75	9.934	-0.07305	0.4967	0.5654	0.3550	0.4003	0.7641	-0.3842	-0.7217
150	9.983	-0.08782	0.7232	0.2880	0.1813	0.1991	0.6805	-0.3996	-0.5163
299	9.781	-0.2633	0.4330	0.5324	0.2622	0.5063	0.5380	-0.3029	-0.4339
Теория	9.805	-0.2282	0.4565	0.4626	0.2070	0.4788	0.4626	-0.2394	-0.4139

Примечание. Все значения нормированы на 1×10^{-5} .

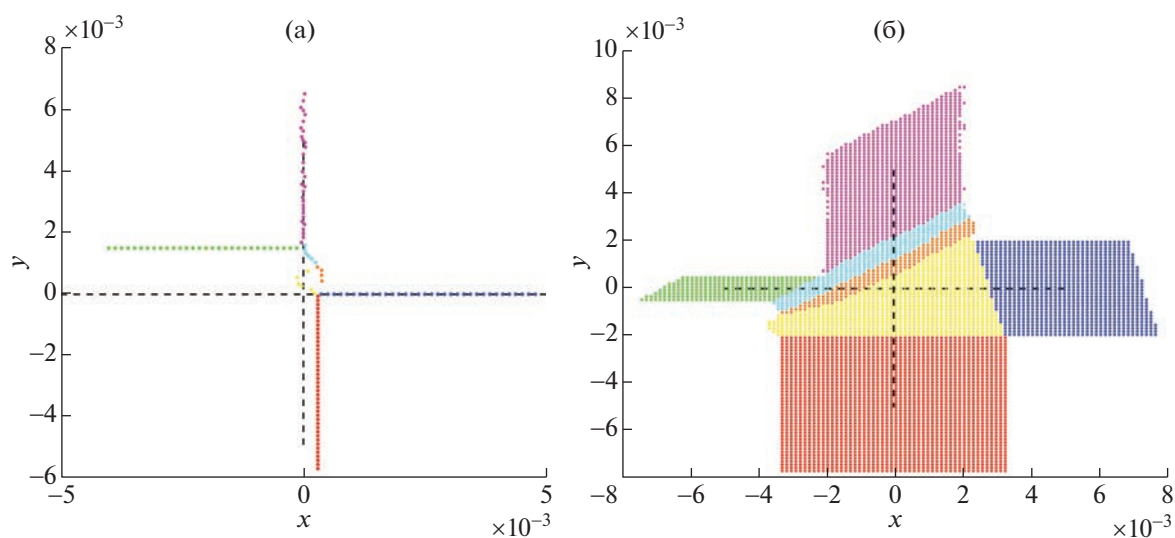


Фиг. 6. Качественное поведение решения, приведенное в [17] для случаев, соответствующих эксперименту 4 (а) и эксперименту 5 (б).

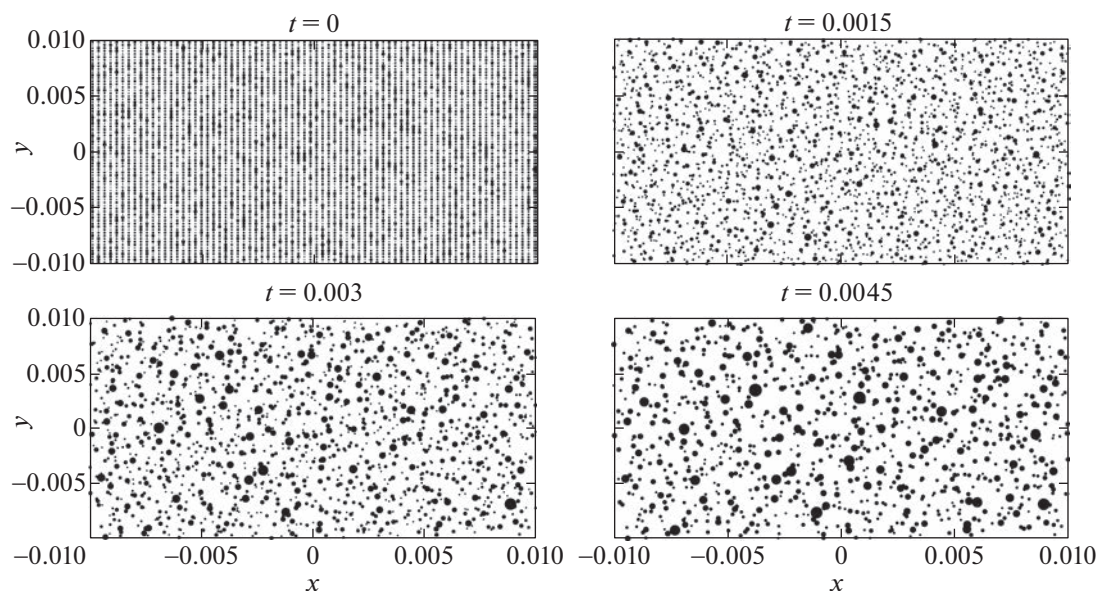
первой и второй четвертями (черный цвет на фиг. 5), индекс 23 относится к горизонтальной линии между второй и третьей четвертями (красный цвет), 34 — к вертикальной линии снизу (зеленый цвет). В последних двух столбцах приведены интегралы от модуля разности координаты y и плотности ρ как функций x , восстановленных на этой и предыдущей по мелкости сетках, вдоль верхнего криволинейного участка особенности (светло-голубой цвет на фиг. 5). Координата y приближалась полиномом третьей степени в смысле наименьших квадратов, а плотность была восстановлена так же, как описано для эксперимента 2.

5.2. Эксперимент 5

Начальные данные имеют следующий вид: $\rho_i = 1 \forall i$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1.7$, $u_4 = -1.5$, $v_1 = -1$, $v_2 = 0.5$, $v_3 = 1$, $v_4 = 1$. Такие значения подходят под п. 4.2(iii) работы [17]. Поведение полученного нами численного решения (см. фиг. 7) качественно согласуется со структурой решения, схематически приведенного в [17] (см. фиг. 6б). В табл. 4 для этого эксперимента также показана сходимость характерных величин с увеличением количества частиц в начальный момент времени. Индекс 34 относится к вертикальной линии между третьей и четвертой четвертями



Фиг. 7. Для эксперимента 5 и $t = 0.002$ изображены: (а) — δ -особенности плотности (тяжелые линии) различными цветами, (б) — области начальных данных, соответствующие этим особенностям (теми же цветами).



Фиг. 8. Распределение частиц для эксперимента 6 при разных значениях времени t . Размер точек пропорционален их массе.

(красный цвет на фиг. 7), индекс 41 относится к горизонтальной линии между четвертой и первой четвертями (синий цвет). В последних двух столбцах приведены интегралы от модуля разности координаты y и плотности ϱ как функций x , восстановленных на этой и предыдущей по мелкости сетках, вдоль нижнего криволинейного участка особенности (черный цвет на фиг. 7). В данном случае была взята лишь часть этого участка, чтобы сохранить однозначность упомянутых функций. Координата y приближалась полиномом третьей степени в смысле наименьших квадратов, а плотность была восстановлена так же, как описано для эксперимента 2.

5.3. Эксперимент 6

Наконец, приведем результат расчета, который имеет отношение к моделированию формирования крупномасштабной структуры Вселенной.

Начальные плотность и компоненты скоростей задавались следующим образом: $\varrho = N(1, 0.3)$, $u = N(0, 0.3)$, $v = N(0, 0.3)$, где $N(\mu, \sigma)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ . Крайние значения распределений были “обрезаны” так, чтобы $\varrho \in [0, 2]$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [-1, 1]$. На фиг. 8 изображено распределение частиц для различных моментов времени, масса отражена размером точек. Видно, что начальные данные в виде случайных распределений приводят с течением времени к формированию структур, состоящих из массивных кластеров, соединенных связями, имеющими вид кривых.

Таблица 3. Сходимость различных величин с увеличением количества частиц в начальный момент времени для эксперимента 4 при $t = 0.002$

N	ϱ_{12}	ϱ_{23}	x_{34}	$ y(x)_{\text{upper}} $	$ \varrho(x)_{\text{upper}} $
75	3.78×10^{-3}	4.32×10^{-3}	-4.94×10^{-3}	—	—
150	4.00×10^{-3}	4.00×10^{-3}	-5.00×10^{-3}	9.71×10^{-8}	5.98×10^{-6}
299	4.03×10^{-3}	4.03×10^{-3}	-5.00×10^{-3}	1.63×10^{-8}	4.81×10^{-6}

Таблица 4. Сходимость различных величин с увеличением количества частиц в начальный момент времени для эксперимента 5 при $t = 0.002$

N	ϱ_{41}	ϱ_{34}	x_{34}	$ y(x)_{\text{lower}} $	$ \varrho(x)_{\text{lower}} $
75	3.78×10^{-3}	6.49×10^{-3}	1.99×10^{-4}	—	—
150	4.00×10^{-3}	6.40×10^{-3}	1.99×10^{-4}	3.29×10^{-8}	9.57×10^{-6}
299	4.03×10^{-3}	6.44×10^{-3}	2.00×10^{-4}	5.49×10^{-9}	6.52×10^{-6}

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена двумерная система уравнений газовой динамики без давления как с теоретической, так и с численной точек зрения. В отличие от многих других работ в данном направлении в настоящей публикации сделан акцент на важной отличительной особенности данной системы уравнений — возникновении особенностей плотности не только вдоль поверхностей, но и вдоль кривых в пространстве (t, x, y) . Образование такой иерархии особенностей, т.е. особенностей, сосредоточенных на многообразиях разной размерности, по-видимому, характерно для общего многомерного случая и не имеет аналогов в случае одной пространственной переменной.

В многомерном случае для строгого математического анализа нет возможности опираться на систему движущихся частиц, по аналогии с одномерным случаем, так как столкновения таких частиц оказываются редкими для большинства начальных данных. В настоящей работе показано, что, тем не менее, можно искать обобщения на уровне вариационных принципов, по крайней мере, для специальных видов течений. Полученные обобщения качественно характеризуют ситуацию возникновения иерархии особенностей и позволяют делать эвристические оценки.

Вследствие трудностей теоретического описания в настоящей статье также предложен численный метод на основе реализации динамики прилипания (adhesion dynamics), который позволяет получать достаточно сложные структуры взаимодействия волн при наличии особенностей на поверхностях различной коразмерности. Приведен достаточно представительный набор экспериментов, подтверждающий робастность разработанного метода. А именно, для ряда расчетов (двумерная задача Римана) показана сходимость результатов с увеличением количества частиц в начальный момент времени, а также их приближение к значениям, полученным теоретически. Для более сложных структур, связанных с образованием вакуума (областей с плотностью, равной нулю), показано совпадение качественного поведения численного решения с известными результатами. Это позволяет обосновать высокую вероятность воспроизведения с помощью предложенного численного метода реальной структуры решений исследуемой системы. Также в качестве направления непосредственных дальнейших приложений приведен пример расчета, отражающий современные представления о крупномасштабной структуре Вселенной.

В дальнейшем предполагается расширить имплементацию предложенного метода на архитектуры высокопроизводительных вычислительных средств, в частности, с использованием графических плат, что позволит значительно увеличить количество частиц в начальный момент времени и достичь таким образом более точного воспроизведения мелкомасштабной структуры особенностей решений, что, в свою очередь, играет важную роль для углубления теоретического анализа многомерной системы уравнений газовой динамики без давления.

В заключение авторы приносят благодарность А.И. Аптекареву за полезные замечания и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления // Приклад. матем. и мех. 1979. Т. 43. № 3. С. 500–510.
2. Крайко А.Н., Сулайманова С.М. Двужидкостные течения смеси газа и твердых частиц с “пеленами” и “шнурами”, возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. № 4. С. 619–630.
3. Крайко А.Н. Математические модели для описания течений газа и инородных частиц и нестационарной фильтрации жидкости и газа в пористых средах // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 1. С. 34–48.

4. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182. № 3. С. 233–261.
5. Bouchut F. On zero-pressure gas dynamics // in: B. Perthame (Ed.), *Advances in Kinetic Theory and Computing*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. Singapore.: World Sci. 1994. V. 22. P. 171–190.
6. И В., Рыков Ю.Г., Синай Я.Г. Вариационный принцип Лакса-Олейник для некоторых одномерных систем квазилинейных уравнений // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50. № 1. С. 193–194.
7. Grenier E. Existence globale pour la systeme des gaz sans pression // C.R. Acad. Sci. Ser. 1. Math. 1995. V. 321. № 2. P. 171–174.
8. E W., Rykov Yu.G., Sinai Ya.G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 177 P. 349–380.
9. Huang F., Wang Z. Well posedness for pressureless flow // *Comm. Math. Phys.* 2001. V. 222. № 1. P. 117–146.
10. Li J. and Warnecke G. Generalized characteristics and the uniqueness of entropy solutions to zero-pressure gas dynamics // *Adv. Differential Equations*. 2003. V. 8. № 8. P. 961–1004.
11. Hynd R. Sticky particle dynamics on the real line // *Not. Am. Math. Soc.* 2019. V. 66. № 2. P. 162–168.
12. Hynd R. A trajectory map for the pressureless Euler equations // *Transact. Am. Math. Soc.* 2020. V. 373. № 10. P. 6777–6815.
13. Li J., Zhang T., Yang S.L. *The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics*. London: Longman, 1998.
14. Рыков Ю.Г. Особенности типа ударных волн в среде без давления, решения в смысле теории меры и в смысле Коломбо // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 30. URL: https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id_1998-30.
15. Rykov Yu.G. On the nonhamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas // *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. Ser. 8*. 2002. V. 5-B. P. 55–78.
16. Colombeau J.F. *Elementary introduction to new generalized functions*. North-Holland Math. Studies. V. 113, 1985.
17. Pang Y. The Riemann problem for the two-dimensional zero-pressure Euler equations // *J. Math. Anal. Appl.* 2019. V. 472. № 2. P. 2034–2074.
18. Li J., Yang H. Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for multidimensional zero-pressure gas dynamics // *Quart. Appl. Math.* 2001. V. LIX. P. 315–342.
19. Шелкович В.М. Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ и δ' -ударных волн и процессы переноса и концентрации // Успехи матем. наук. 2008. Т. 63. Вып. 3. С. 73–146.
20. Albeverio S., Rozanova O.S., Shelkovich V.M. Transport and concentration processes in the multidimensional zero-pressure gas dynamics model with energy conservation law // <https://arxiv.org/abs/1101.5815>.
21. Антекарев А.И., Рыков Ю.Г. Вариационный принцип для многомерных законов сохранения и среды без давления // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 6. С. 159–160.
22. Khanin K., Sobolevski A. Particle dynamics inside shocks in Hamilton-Jacobi equations // *Phil. Trans. Roy. Soc. A*. 2010. V. 368. P. 1579–1593.
23. Khanin K., Sobolevski A. On Dynamics of Lagrangian Trajectories for Hamilton–Jacobi Equations // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 2016. V. 219. Iss. 2. P. 861–885.
24. Антекарев А.И., Рыков Ю.Г. Детализация механизма образования особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 6. С. 655–658.
25. Рыков Ю.Г. Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 94. URL: https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id_16-94.
26. Chertock A., Kurganov A., Rykov Yu. A new sticky particle method for pressureless gas dynamics // *SIAM J. Numer. Anal.* 2007. V. 45. №6. P. 2408–2441.
27. Рыков Ю.Г. Решения с распадом вещества в системе уравнений газовой динамики без давления // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 3. С. 477–480.
28. Klyushnev N.V., Rykov Yu.G. Non-conventional and conventional solutions for one-dimensional pressureless gas // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42. № 11. P. 2615–2625.
29. Bressan A., Nguyen T. Non-existence and non-uniqueness for multidimensional sticky particle systems // *Kinetic and Relatet Model.* 2014. V. 7 (2), P. 205–218.
30. Bianchini S., Daneri S. On the sticky particle solutions to the multi-dimensional pressureless Euler equations // Preprint arXiv:2004.06557 (2020).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.6,551.46

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ К ВХОДНЫМ ДАННЫМ О ПОТОКЕ ТЕПЛА ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ МОРЯ¹⁾

© 2023 г. Е. И. Пармузин^{1,*}, В. П. Шутяев^{1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Россия

*e-mail: parm@inm.ras.ru

**e-mail: victor.shutyaev@mail.ru

Поступила в редакцию 29.04.2022 г.
Переработанный вариант 02.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Для математической модели термодинамики моря, разработанной в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, рассматривается задача вариационного усвоения данных наблюдений с целью восстановления потоков тепла на поверхности моря. Исследована чувствительность функционалов от решения к входным данным о потоке тепла в рассматриваемой задаче вариационного усвоения и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Черного моря. Библ. 31. Фиг. 3.

Ключевые слова: вариационное усвоение данных наблюдений, оптимальное управление, сопряженные уравнения, ковариационные матрицы, чувствительность функционалов, модель термодинамики моря.

DOI: 10.31857/S0044466923040130, EDN: IPMMNL

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы методы исследования и численного решения задач вариационного усвоения данных, представляющих собой конкретные задачи оптимального управления, получили большое развитие в метеорологии и океанографии, где данные наблюдений усваиваются в моделях атмосферы и океана с целью получения начальных, граничных условий или других параметров модели для последующего моделирования и прогноза (см. [1–9]).

При исследовании задач вариационного усвоения данных наблюдений важную роль играет анализ чувствительности оптимального решения и его функционалов по отношению к входным данным (см. [10–17]). Настоящая работа обобщает результаты предыдущих работ авторов на случай задачи вариационного усвоения данных с целью восстановления потоков тепла на поверхности моря при одновременном использовании ковариационных матриц ошибок данных наблюдений и ошибок начального приближения (бэкграунда). Проведено исследование чувствительности функционалов от оптимального решения задачи вариационного усвоения данных о температуре поверхности для модели термодинамики моря по отношению к входным данным о потоке тепла. С учетом свойств гессиана функции стоимости доказана теорема о представлении градиента функционала по отношению к данным бэкграунда, сформулирован алгоритм вычисления градиента функционала и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Черного моря, разработанной в ИВМ РАН.

1. ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ МОРЯ

Рассмотрим задачу термодинамики моря в виде (см. [18], [19])

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20057, исследования в разд. 1 и 2), а также при поддержке Отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2022-286).

$$\begin{aligned}
T_t + (\bar{U}, \text{Grad})T - \text{Div}(\hat{a}_T \cdot \text{Grad} T) &= f_T \quad \text{в } D \times (0, \bar{t}), \quad T = T_0 \quad \text{при } t = 0 \quad \text{в } D, \\
-v_T \frac{\partial T}{\partial z} &= Q \quad \text{на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,c} \times (0, \bar{t}), \\
\bar{U}_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} &= \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \quad \text{на } \Gamma_{w,op} \times (0, \bar{t}), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \quad \text{на } \Gamma_H \times (0, \bar{t}),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $T = T(x, y, z, t)$ — неизвестная функция температуры, $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$, $\Omega \subset R^2$, $H = H(x, y)$ — функция рельефа дна, $Q = Q(x, y, t)$ — суммарный приток тепла, $\bar{U} = (u, v, w)$, $\hat{a}_T = \text{diag}((a_T)_{ii})$, $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$, $(a_T)_{33} = v_T$, $f_T = f_T(x, y, z, t)$ — заданные функции. Скорости u, v, w зависят в общем случае от пространства и времени, а коэффициенты μ_T, v_T предполагаются зависящими только от пространственных переменных на рассматриваемом интервале по времени. Граница области $\Gamma \equiv \partial D$ представляется как объединение четырех непересекающихся частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S = \Omega$ (невозмущенная поверхность моря), $\Gamma_{w,op}$ — жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ — твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H — дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах [20–22].

Запишем задачу (1.1) в форме операторного уравнения в $(W_2^1(D))^*$:

$$\begin{aligned}
T_t + LT &= F + BQ \quad \text{для п.в. } t \in (0, \bar{t}), \\
T &= T_0 \quad \text{при } t = 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где равенство понимается в обобщенном смысле, а именно,

$$(T_t, \hat{T}) + (LT, \hat{T}) = F(\hat{T}) + (BQ, \hat{T}) \quad \forall \hat{T} \in W_2^1(D), \tag{1.3}$$

а операторы L, F, B определяются интегральными соотношениями

$$\begin{aligned}
(LT, \hat{T}) &\equiv \int_D (-T \text{Div}(\bar{U}\hat{T})) dD + \int_{\Gamma_{w,op}} \bar{U}_n^{(+)} T \hat{T} d\Gamma + \int_D \hat{a}_T \text{Grad}(T) \text{Grad}(\hat{T}) dD, \\
F(\hat{T}) &= \int_{\Gamma_{w,op}} (Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T) \hat{T} d\Gamma + \int_D f_T \hat{T} dD, \\
(T_t, \hat{T}) &= \int_D T_t \hat{T} dD, \quad (BQ, \hat{T}) = \int_{\Omega} Q \hat{T} \Big|_{z=0} d\Omega,
\end{aligned}$$

при этом функции $\hat{a}_T, Q_T, f_T, Q$ таковы, что равенство (1.3) имеет смысл.

Рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря, следуя [21], [23]. Предположим, что в задаче (1.1) функция $Q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ не известна. Пусть задана функция данных наблюдений $T_{\text{obs}}(x, y, t)$ на $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$ при $t \in (0, \bar{t})$, которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на Ω , т.е. к $T|_{z=0}$. Считаем, что $T_{\text{obs}} \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$. Допускается случай, когда T_{obs} имеется лишь на некотором подмножестве из $\Omega \times (0, \bar{t})$, характеристическую функцию которого обозначим через m_0 . Вне этого подмножества для определенности считаем T_{obs} нулевой.

Будем предполагать, что данные наблюдений T_{obs} заданы с ошибками, а именно,

$$T_{\text{obs}} = m_0 T^t \Big|_{z=0} + \xi_{\text{obs}},$$

где T^t — точное решение задачи (1.1) при некотором $Q = Q^t$, а $\xi_{\text{obs}} \in Y_{\text{obs}} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ рассматривается как ошибка наблюдений в пространстве наблюдений Y_{obs} . Предполагается, что ошибки ξ_{obs} случайные и они распределены по нормальному закону (гауссовские) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $R = E[(\cdot, \xi_{\text{obs}}) \xi_{\text{obs}}], R: Y_{\text{obs}} \rightarrow Y_{\text{obs}}$, где E — математическое ожидание. Ковариационные матрицы ошибок наблюдений играют важную роль при вариационном усвоении данных: обратные к ним матрицы включаются в качестве весовых

операторов в исходный функционал стоимости [8]. В дальнейшем мы будем предполагать, что R положительно определен и, значит, обратим.

Рассмотрим следующую задачу вариационного усвоения данных: найти T и Q такие, что

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \\ J(Q) &= \inf_Q J(Q), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$J(Q) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q - Q^{(0)}) \mathcal{B}^{-1} (Q - Q^{(0)}) d\Omega dt + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) d\Omega dt,$$

$Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$ — заданная функция, $\mathcal{B} : Y_{\text{obs}} \rightarrow Y_{\text{obs}}$ — ковариационный оператор ошибок бэкграунда. Функция $Q^{(0)}$ обычно выбирается в качестве начального приближения для неизвестного потока Q (так называемый бэкграунд или фоновый поток). Цель вариационного усвоения данных — используя $Q^{(0)}$, найти лучшую оценку для Q , согласованную с решением модели и наблюдениями для дальнейшего моделирования и прогноза.

Слагаемое с весовым оператором $\mathcal{B}^{-1}$ играет роль регуляризации по Тихонову (см. [24]), он считается заданным при рассмотрении задачи. Если оператор $\mathcal{B}$ положительно определен, то поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач (см. [2]), так как можно показать, что решение задачи (1.2) непрерывно зависит от потока Q (имеют место априорные оценки в соответствующих функциональных пространствах).

Необходимое условие оптимальности $\text{grad } J = 0$, которое определяет решение сформулированной задачи вариационного усвоения данных, приводит к так называемой системе оптимальности (см. [2]):

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} -(T^*)_t + L^* T^* &= BR^{-1} m_0 (B^* T - T_{\text{obs}}), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T^* &= 0 \quad \text{при} \quad t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\mathcal{B}^{-1} (Q - Q^{(0)}) + B^* T^* = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (1.7)$$

где L^* , B^* — операторы, сопряженные к L , B соответственно.

2. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ДАННЫМ О ПОТОКЕ ТЕПЛА

Рассмотрим функцию $G(T, Q)$, зависящую от T , Q , которая предполагается вещественнозначной и может рассматриваться как функционал на $X = L_2(D \times (0, \bar{t})) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$. Нас интересует чувствительность функционала $G(T, Q)$ к данным бэкграунда $Q^{(0)}$ при условии, что T , Q получены после вариационного усвоения из системы оптимальности (1.5)–(1.7). Как известно из [1], [25], чувствительность функционала определяется градиентом по $Q^{(0)}$, который является производной Гато:

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial Q^{(0)}} + \frac{\partial G}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial Q^{(0)}}. \quad (2.1)$$

Обозначим через $\delta Q^{(0)}$ вариацию функции $Q^{(0)}$. Из (1.5)–(1.7) выводим систему оптимальности для вариаций:

$$\begin{aligned} \delta T_t + L \delta T &= B \delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} -(\delta T^*)_t + L^* \delta T^* &= BR^{-1} m_0 B^* \delta T, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T^* &= 0 \quad \text{при} \quad t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{B}^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) + B^* \delta T^* = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (2.4)$$

Отметим, что данные наблюдений T_{obs} уже не входят в систему (2.2)–(2.4), в отличие от (1.5)–(1.7). Система (2.2)–(2.4) эквивалентна следующей задаче усвоения данных для определения $\delta T, \delta Q$ таких, что

$$\begin{aligned} \delta T_t + L \delta T &= B \delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \\ S(\delta Q) &= \inf_Q S(Q), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$S(\delta Q) = \frac{1}{2} \iint_{0\Omega} (\delta Q - \delta Q^{(0)}) \mathcal{B}^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) d\Omega dt + \frac{1}{2} \iint_{0\Omega} m_0 \delta T|_{z=0} R^{-1} \delta T|_{z=0} d\Omega dt. \quad (2.6)$$

Справедлива

Лемма 1. Гессиан $\mathcal{H}$ функционала (2.6) определяется на $v \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ последовательным решением задач

$$\begin{aligned} \psi_t + L\psi &= Bv, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi &= 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} -(\psi^*)_t + L^* \psi^* &= BR^{-1} m_0 B^* \psi, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi^* &= 0 \quad \text{при} \quad t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{H}v = \mathcal{B}^{-1}v + B^* \psi^*. \quad (2.9)$$

Доказательство. Согласно системе оптимальности (2.2)–(2.4), градиент функционала (2.6) определяется по формуле

$$\text{grad } S = \mathcal{B}^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) + B^* \delta T^*,$$

где δT^* – решение сопряженной задачи (2.3). Продифференцируем последнюю формулу еще раз по δQ , чтобы получить правило действия гессиана:

$$\mathcal{H}v = \mathcal{B}^{-1}v + B^* \psi^*,$$

где v – вариация δQ , а ψ^* – решение сопряженной задачи (2.8), которая есть не что иное, как продифференцированная задача (2.3). При этом ψ – решение задачи (2.7), которая получена из (2.2) дифференцированием по δQ . Лемма доказана.

Используя (2.7)–(2.9), нетрудно видеть (см. [26]), что система (2.2)–(2.4) эквивалентна уравнению для вариации оптимального решения δQ :

$$\mathcal{H} \delta Q = \mathcal{B}^{-1} \delta Q^{(0)}. \quad (2.10)$$

Гессиан $\mathcal{H}$ действует в $L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ с областью определения $D(\mathcal{H}) = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, он ограничен, самосопряжен и неотрицательно определен. Если $\mathcal{B}^{-1}$ положительно определен, то $\mathcal{H}$ положительно определен, поскольку $(\mathcal{H}v, v) \geq (\mathcal{B}^{-1}v, v)$. В последнем случае уравнение (2.10) имеет единственное решение

$$\delta Q = \mathcal{H}^{-1} \mathcal{B}^{-1} \delta Q^{(0)}. \quad (2.11)$$

Формула (2.11) дает в явном виде выражение для вариаций оптимального решения δQ через вариацию функции начального приближения (бэкграунда) $\delta Q^{(0)}$. Уравнение вида (2.11) может быть положено в основу исследования чувствительности оптимального решения и его функционалов к ошибкам бэкграунда.

Справедлива

Теорема 1. Градиент функционала $G(T, Q)$ по $Q^{(0)}$ имеет вид

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \quad (2.12)$$

где

$$\mathcal{F} = B^* \phi^* + \frac{\partial G}{\partial Q}, \quad (2.13)$$

$\mathcal{H}$ – гессиан, определенный формулами (2.7)–(2.9), а ϕ^* – решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при} \quad t = \bar{t}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Доказательство. Рассмотрим значение градиента (2.1) на вариации $\delta Q^{(0)}$:

$$\left(\frac{dG}{dQ^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}} = \left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y + \left(\frac{\partial G}{\partial Q}, \delta Q \right)_{Y_{\text{obs}}}, \quad (2.15)$$

где $\delta Q^{(0)}$ – вариация функции $Q^{(0)}$, $\delta T = \frac{\partial T}{\partial Q^{(0)}} \delta Q^{(0)}$, $\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial Q^{(0)}} \delta Q^{(0)}$ – решения системы (2.2)–(2.4), $Y = L_2(D \times (0, \bar{t}))$.

Задача (2.14) является сопряженной по отношению к (2.2), поэтому в силу соотношения сопряженности

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (\phi^*, B \delta Q)_Y = (B^* \phi^*, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}}. \quad (2.16)$$

Из (2.15)–(2.16) получаем

$$\left(\frac{dG}{dQ^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}} = \left(B^* \phi^* + \frac{\partial G}{\partial Q}, \delta Q \right)_{Y_{\text{obs}}} = (\mathcal{F}, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}}, \quad (2.17)$$

где $\mathcal{F}$ определяется по формуле (2.13).

Уравнение для δQ определяется формулой (2.11), откуда

$$(\mathcal{F}, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}} = \left(\mathcal{F}, \mathcal{H}^{-1} \mathcal{B}^{-1} \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}} = \left(\mathcal{B}^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}}. \quad (2.18)$$

Таким образом, из (2.15)–(2.18) заключаем, что

$$\left(\frac{dG}{dQ^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}} = \left(\mathcal{B}^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{\text{obs}}}, \quad (2.19)$$

откуда следует утверждение теоремы.

Реальное (практическое) использование теоремы 1 может быть сформулировано в виде следующего алгоритма для вычисления градиента функционала. Градиент $dG/dQ^{(0)}$ определяется последовательным выполнением следующих шагов:

1) решить сопряженную задачу

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при} \quad t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

полагая

$$\mathcal{F} = B^* \phi^* + \frac{\partial G}{\partial Q};$$

2) найти u как решение уравнения с гессианом

$$\mathcal{H}u = \mathcal{F}; \quad (2.21)$$

3) вычислить градиент функционала по формуле

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \mathcal{B}^{-1}u. \quad (2.22)$$

Алгоритм (2.20)–(2.22) с учетом конкретного вида производных $\partial G/\partial T$, $\partial G/\partial Q$ использовался при численных расчетах для оценки чувствительности функционалов, связанных с температурой после усвоения данных наблюдений, по отношению к изменениям функции бэкграунда $Q^{(0)}$.

Отметим, что в процессе отыскания градиента функционала нет необходимости вычислять обратный гессиан $\mathcal{H}^{-1}$, который фигурирует в (2.12), достаточно просто решить задачу $\mathcal{H}u = \mathcal{F}$ вида (2.21), например, итерационным методом.

Отметим также, что данные наблюдений T_{obs} предполагаются случайными величинами, их случайность учитывается в функции стоимости $J(Q)$ через ковариационный оператор R , который входит в дальнейшем в определение гессиана (2.7)–(2.9).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Численные эксперименты проводились с использованием трехмерной численной модели гидротермодинамики Черного и Азовского морей, разработанной в ИВМ РАН на основе метода расщепления (см. [22]) и дополненной процедурой усвоения температуры поверхности моря (ТПМ) для восстановления тепловых потоков Q с учетом ковариационных матриц ошибок наблюдений и ошибок бэкграунда.

Объектом моделирования является акватория Черного и Азовского морей. Параметры рассматриваемой области и ее географические координаты можно описать следующим образом: σ -сетка $306 \times 200 \times 27$ (широта, долгота и глубина соответственно). Первая точка “сетки С” (см. [27]) имеет координаты 26.65° E и 40.15° N. Шаги сетки по x и y постоянны и равны 0.05 и 0.036 градуса соответственно. Шаг по времени равен $\Delta t = 2.5$ мин.

Данные наблюдений ТПМ предоставлены спутниковой службой “See the Sea”, входящей в состав ЦКП “ИКИ Мониторинг”, которая занимается сбором и обработкой различных данных о состоянии земной поверхности и ориентируется на работу со спутниковыми наблюдениями (см. [28]). В качестве T_{obs} в данном эксперименте были выбраны данные ТПМ спектрометра VIIRS на спутнике SNPP и спектрометра MODIS на спутнике Aqua (несколько измерений в сутки в определенные моменты времени). Данные ТПМ за период с 1 января по 30 июня 2019 г. были пересчитаны на сетку численной модели (см. [29]). Для расчета атмосферного воздействия в модели использовались метеорологические характеристики, в том числе, балк-формулы для расчета турбулентных течений на поверхности моря. Рассчитанные таким же образом значения среднего климатического теплового потока $Q^{(0)}$ использовались в процедуре усвоения данных в качестве начального приближения (бэкграунда).

Для расчета диагональных элементов ковариационной матрицы $\mathcal{B}$ были получены данные о тепловом потоке на поверхности моря. Поток тепла на поверхности моря рассчитан по данным реанализа Era 5 (www.ecmwf.int/en/forecasts/datasets/reanalysis-datasets/era5) (см. [30]) за период с 1979 по 2020 г. Данные Era 5 загружались с временным разрешением 12 ч, что позволяет учитывать суточный ход изменений, разделять дневные и ночные потоки тепла. По данным за 1979–2020 гг. рассчитаны средние значения и дисперсии теплового потока по дневным и ночным данным для каждого дня года. Полученные дисперсии представляют собой диагональные элементы ковариационной матрицы ошибок бэкграунда $\mathcal{B}$. Аналогичным образом (см. [31]) на основе данных сервиса Copernicus (период с 1982 по 2019 г.) и данных ЦКП “ИКИ Мониторинг” о температуре поверхности моря рассчитывались элементы ковариационной матрицы ошибок данных наблюдений R .

В численных примерах рассматривались функционалы вида

$$G(T, Q) = \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} F^*(x, y, t) T(x, y, 0, t) d\Omega, \quad (3.1)$$

где $F^*(x, y, t)$ — некая весовая функция, связанная с полем температуры на поверхности $z = 0$. Так, для определения средней температуры в избранной акватории океана ω при $z = 0$ в интервале $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$ в качестве F^* выбирается функция

$$F^*(x, y, t) = \begin{cases} 1/(\tau \text{mes } \omega), & \text{если } (x, y) \in \omega, \quad t_1 - \tau \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\text{mes } \omega$ означает площадь района ω . В этом случае функционал (3.1) представляется в виде

$$G(T, Q) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1 - \tau}^{t_1} dt \left(\frac{1}{\text{mes } \omega} \int_{\omega} T(x, y, 0, t) d\Omega \right). \quad (3.3)$$

С использованием обозначений, введенных выше, функционал (3.1) записывается в виде скалярного произведения

$$G(T, Q) = \int_0^{\bar{t}} (BF^*, T) dt = (BF^*, T)_Y, \quad Y = L_2(D \times (0, \bar{t})).$$

В силу

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (BF^*, \delta T)_Y,$$

производные от G по T, Q , входящие в (2.20)–(2.22), определяются по формулам

$$\frac{\partial G}{\partial T} = BF^*, \quad \frac{\partial G}{\partial Q} = 0. \quad (3.4)$$

Приведем результаты численных расчетов. При реализации алгоритма усвоения данных использовалась система (1.5)–(1.7). Расчет чувствительности выбранного функционала происходил на одном шаге по времени (t_k, t_{k+1}) , где $t_{k+1} = \bar{t} = t_k + \Delta t$. На каждом из таких шагов была рассчитана чувствительность функционала к данным бэкграунда. Были выбраны два момента времени для расчета чувствительности функционала к данным бэкграунда: 31 мая 2019 г. 10 ч 25 мин (86 655 временных шагов модели) и 1 июля 2019 г. 23 ч 30 мин (104 820 временных шагов модели). Выбор данных моментов времени обусловлен тем, что в эти моменты времени данные со спутников покрывали почти всю исследуемую акваторию Черного и Азовского морей.

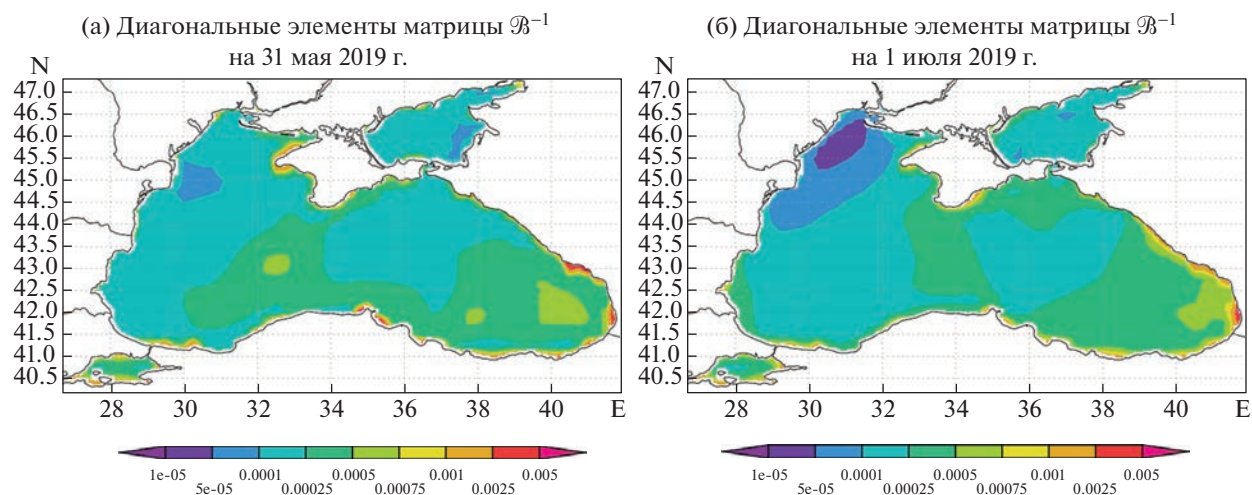
На фиг. 1 представлены значения диагональных элементов матрицы $\mathcal{B}^{-1}$ в разные моменты времени. Так, диагональные элементы, рассчитанные на 31 мая 2019 г., показаны на фиг. 1а, а 1 июля 2019 г. — на фиг. 1б.

Значения диагональных элементов R^{-1} на эти же даты приведены на фиг. 2. Результаты расчета чувствительности к данным бэкграунда для 31 мая и 1 июля 2019 г. представлены на фиг. 3а и 3б соответственно, где даны градиенты функции отклика в разные моменты времени.

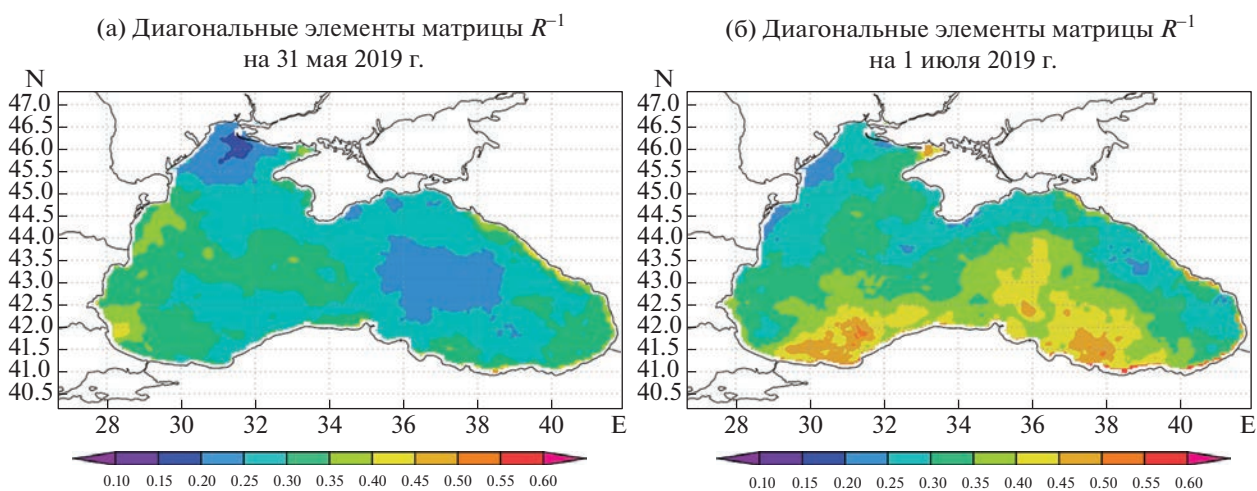
Стоит отметить, что результаты, полученные в эксперименте в рассматриваемые моменты времени, не сильно отличаются друг от друга. Характерной особенностью является малая чувствительность функционала к данным бэкграунда в центральной, наиболее глубокой, области Черного моря. В областях с меньшей глубиной прослеживается возрастание чувствительности, которая принимает максимальные значения в некоторых точках на границе области как в Черном, так и в Азовском морях.

В целом чувствительность рассматриваемого функционала к данным бэкграунда намного меньше, чем чувствительность к данным наблюдений, исследованная в [23].

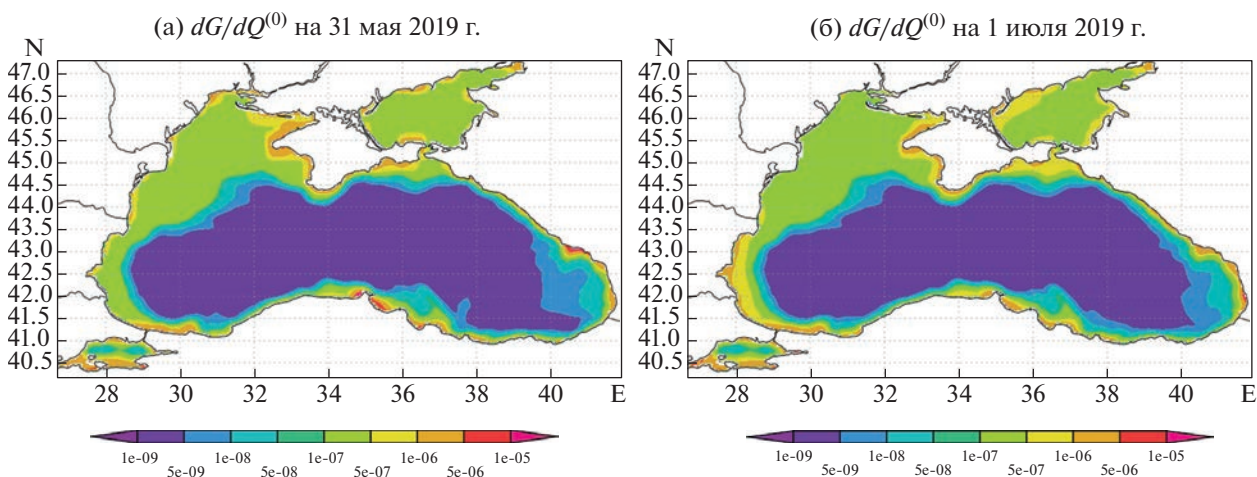
Этот результат подтверждается прямым вычислением функционала $G(T, Q)$ в соответствии с (3.3), полученным после вариационного усвоения, путем введения возмущений в данные бэкграунда $Q^{(0)}$, следуя работе [23].



Фиг. 1. Значения диагональных элементов матрицы $\mathcal{B}^{-1}$ в численном эксперименте для различных моментов времени.



Фиг. 2. Значения диагональных элементов матрицы R^{-1} в численном эксперименте для различных моментов времени.



Фиг. 3. Градиент функционала $G(T, Q)$ в различные моменты времени.

Таким образом, сформулированный алгоритм (2.20)–(2.22) позволяет оценивать чувствительность функционалов, связанных с температурой поверхности моря после усвоения, по отношению к ошибкам данных бэкграунда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием трехмерной модели гидротермодинамики Черного моря, разработанной в ИВМ РАН, в настоящей работе проведено исследование чувствительности функционалов от решения задачи вариационного усвоения данных с восстановлением потоков тепла на поверхности моря. Разработанный алгоритм позволяет вычислять градиенты функционалов от решения задачи после усвоения по отношению к входным данным о потоке тепла. Вычисление градиента функционала требует однократного решения уравнения с гессианом функции стоимости и решения сопряженной задачи. Для решения этого уравнения нет необходимости вычислять обратный гессиан в явном виде, тем не менее, было бы интересно в будущем провести аналитические оценки обратного гессиана, например, через собственные значения, и использовать их для оценки чувствительности. Численные эксперименты для модели динамики Черного моря подтверждают работоспособность предложенного алгоритма. Проведенные исследования могут быть полезны для решения проблемы определения районов моря, в которых функционалы от оптимального решения являются наиболее чувствительными к произвольным возмущениям в исходных данных бэкграунда при использовании процедуры вариационного усвоения, в том числе в случаях, когда значения этих возмущений заранее не известны.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, которые позволили улучшить представление результатов и изложение материала в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marchuk G.I.* Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. *Lions J.L.* Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris: Dunod, 1968.
3. *Sasaki Y.K.* An objective analysis based on the variational method // J. Meteor. Soc. Japan. 1958. V. 36. P. 77–88.
4. *Пененко В.В., Образцов Н.Н.* Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // Метеорология и гидрология. 1976. № 11. С. 1–11.
5. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
6. *Le Dimet F.X., Talagrand O.* Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus. 1986. V. 38A. P. 97–110.
7. *Агошков В.И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.
8. *Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Martin M., Vidard A.* NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // ECMWF Technical Memorandum. 2009. No. 120.
9. *Пененко А.В.* Математическое моделирование процессов адвекции-диффузии-реакции с усвоением данных наблюдений и решением обратных задач. Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2021.
10. *Le Dimet F.-X., Ngodock H.E., Luong B., Verron J.* Sensitivity analysis in variational data assimilation // J. Meteorol. Soc. Japan. 1997. V. 75 (1B). P. 245–255.
11. *Le Dimet F.-X., Navon I.M., Daescu D.N.* Second-order information in data assimilation // Month. Wea. Rev. 2002. V. 130 (3). P. 629–648.
12. *Le Dimet F.-X., Shutyaev V.* On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlin. Process. Geophys. 2005. V. 12. P. 481–490.
13. *Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.* On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput. 2008. V. 30. No. 4. P. 1847–1874.
14. *Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.* On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys. 2010. V. 229. P. 2159–2178.
15. *Gejadze I., Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X.* Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2013. V. 139. P. 1826–1841.
16. *Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С. 643–654.
17. *Шутяев В.П., Ле Диме Ф.* Чувствительность функционалов задач вариационного усвоения данных // Докл. АН. Математика. 2019. Т. 486. № 4. С. 421–425.

18. *Алексеев В.В., Залесный В.Б.* Численная модель крупномасштабной динамики океана / Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1993. С. 232–253.
19. *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
20. *Agoshkov V.I., Gusev A.V., Diansky N.A., Oleinikov R.V.* An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. V. 22 (2). P. 133–161.
21. *Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 8. С. 1371–1391.
22. *Zalesny V.B., Diansky N.A., Fomin V.V., Moshonkin S.N., Demyshev S.G.* Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2012. V. 27. No. 1. P. 95–112.
23. *Shutyaev V., Parmuzin E., Gejadze I.* Stability analysis of functionals in variational data assimilation with respect to uncertainties of input data for a sea thermodynamics model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2021. V. 36. No. 6. P. 347–357.
24. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. No. 3. P. 501–504.
25. *Cacuci D.G.* Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2803–2812.
26. *Шутяев В.П.* Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. М.: Наука, 2001.
27. *Diansky N.A., Bagno A.V., Zalesny V.B.* Sigma model of global ocean circulation and its sensitivity to variations in wind stress // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2002. V. 38. No. 4. P. 477–494.
28. *Лупян Е.А., Матвеев А.А., Уваров И.А., Бочарова Т.Ю., Лаврова О.Ю., Митягина М.И.* Спутниковый сервис See the Sea – инструмент для изучения процессов и явлений на поверхности океана // Совр. пробл. дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т. 9. № 2. С. 251–261.
29. *Zakharova N.B., Agoshkov V.I., Parmuzin E.I.* The new method of ARGO buoys system observation data interpolation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2013. V. 28. No. 1. P. 67–84.
30. *Hersbach H. et al.* The ERA5 global reanalysis // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2020. V. 146. P. 1999–2049.
31. *Агошков В.И., Шутяев В.П., Пармузин Е.И., Захарова Н.Б., Шелопут Т.О., Лезина Н.Р.* Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря // Морской гидрофиз. журн. 2019. Т. 35. № 6. С. 585–599.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.856

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСОТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ БАРЬЕРОВ МОЛЕКУЛЫ ЦИКЛОГЕКСЕНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕДУРЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

© 2023 г. А. В. Теплухин^{1,*}

¹ 142290 Пущино, М.о., ул. проф. Виткевича, 1, Институт математических проблем биологии РАН – филиал Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: tepl@impb.ru

Поступила в редакцию 05.07.2022 г.
Переработанный вариант 05.07.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Методом Монте-Карло (стохастическая аппроксимация) выполнен расчет относительных значений плотности состояний молекулы циклогексена в пространстве координат Кремера–Попла. С помощью этих данных были оценены высоты энергетических барьеров, разделяющие стереоизомеры молекулы. Библ. 49. Фиг. 7.

Ключевые слова: внутреннее вращение, моделирование, Монте-Карло, SAMC.

DOI: 10.31857/S0044466923040154, **EDN:** IPOLXU

ВВЕДЕНИЕ

Много лет конформационный анализ успешно применяется в изучении изменений физико-химических свойств и реакционной способности молекул, сопровождающих взаимопревращения стереоизомеров [1]. Работы в этой области проводятся и экспериментальными, и теоретическими методами. В последние десятилетия, благодаря взрывному росту производительности вычислительной техники, компьютерное моделирование с использованием методов квантовой химии, классической молекулярной динамики и Монте-Карло [2–4] находит широкое применение в исследованиях конформационного пространства молекул. В связи с этим особую важность приобретает поиск эффективных решений “обратной задачи”, состоящей в определении параметров силовых полей молекулярных моделей, позволяющих с высокой точностью воспроизводить имеющиеся экспериментальные данные.

В предыдущей работе [5], посвященной параметризации торсионных потенциалов ковалентных связей в молекулах углеводов, мы столкнулись с серьезными трудностями при определении высоты потенциальных барьеров, разделяющих конформеры. Дело в том, что в этой работе мы использовали стандартную процедуру Метрополиса и др. [6] для расчета структурных и энергетических характеристик молекул путем усреднения по статистически значимой выборке из канонического ансамбля молекулярных конфигураций при комнатной температуре. При такой постановке “вычислительного эксперимента” вероятность выбора конфигурации пропорциональна соответствующему ей больцмановскому фактору. Ясно, что репрезентативность выборки в области переходных состояний может оказаться очень низкой, поэтому для того чтобы поднять точность оценок высоты потенциальных барьеров до приемлемого уровня, необходимо либо работать с очень большими выборками, либо выбрать иное, наиболее подходящее для решения этой задачи средство, обратившись к богатому арсеналу методов вычислительной статистики [7], применяемых в современном молекулярном моделировании [8], [9]. Так, в работе [5], чтобы избежать задержки при подготовке данных к публикации, нам пришлось отказаться от использования алгоритма Метрополиса и др. [6] для расчета характеристик молекулы циклогексена, воспользовавшись более подходящей в данном случае процедурой Ванга–Ландау [10], [11].

Тем не менее, следует отметить, что метод Ванга–Ландау [10], [11] имеет несколько серьезных недостатков, ограничивающих его применение. Так, установлено (см. [12]), что после некоторого числа итераций статистическая точность оценок этим методом перестает улучшаться, поскольку из-за очень быстрого уменьшения величины модификационного фактора вклад всей

оставшейся части выборки становится несущественным. Как было показано в работах [13], [14], эту проблему можно устранить, применив другое правило для изменения модификационного фактора, а именно после выполнения некоторого числа итераций метода [10], [11] вместо экспоненциального закона использовать формулу $1/t$. К сожалению, в этом случае алгоритм вычислений не только усложняется, но и появляются дополнительные параметры, чьи величины иначе как методом проб и ошибок определить не получится. Следует отметить, что и сам термин “время t ”, фигурирующий в статьях [13], [14], допускает множественное толкование. Добавим также, что для перехода к очередной стадии вычислений алгоритмы [10], [11] и [13], [14] требуют проверки “критерия плоскостности”, устанавливаемого опытным путем. Помимо всего этого необходимо задать точные границы заполняемых в процессе расчетов гистограмм, а в случае многомерных гистограмм, такую работу сделать очень сложно.

В [15] предложен более простой метод, основанный на теории процедур стохастической аппроксимации [16–18]. В настоящее время этот подход, обозначаемый в текстах статей аббревиатурой SAMC, активно используется в изучении строения и физико-химических свойств полимеров [19–21]. Цель настоящей статьи – продемонстрировать возможности метода SAMC [15] для решения задач конформационного анализа и разработки наборов параметров силовых полей молекулярных моделей. В последующих разделах будет дано описание выбранной нами модели молекулы циклогексена, рассмотрены основные этапы вычислительного алгоритма SAMC и представлены данные о высотах энергетических барьеров, полученные в результате исследования конформационного пространства этой молекулы.

1. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Как и прежде [5], [22], наша модель молекулы циклогексена представляет собой систему конфигурационно жестких фрагментов (четыре CH_2 -группы и $\text{CH}=\text{CH}$, о фрагментах и фрагментации молекул подробно рассказано в работе [22]) соединенных одинарными связями в соответствии с химической структурой этой молекулы. Для длин химических связей CH и $\text{C}=\text{C}$ взяты значения 1.085 и 1.34 Å (экспериментальные данные [23]: $|\text{HCsp}^3| = 1.092$ Å, $|\text{HCsp}^2| = 1.083$ Å, $|\text{Csp}^2 = \text{Csp}^2| = 1.326$ Å), угол HCH равен 109.47° , а $\text{HC} = \text{C} - 120^\circ$ (стандартные значения для sp^3 и sp^2 -гибридизации).

Потенциальная энергия, характеризующая конформацию молекулы циклогексена, приобретает за счет невалентных взаимодействий атомов ее фрагментов (потенциалы Леннарда-Джонса и Кулона), энергии деформации межфрагментных ковалентных связей и смежных с ними валентных углов, а также торсионных потенциалов, затрудняющих вращение молекулярных фрагментов вокруг этих связей. Параметры потенциальных функций Леннарда-Джонса такие же, как в работе [22], парциальные заряды на атомах (в единицах элементарного заряда: фрагмент $\text{CH}=\text{CH}$ $q_{\text{C}} = -0.094$, $q_{\text{H}} = 0.057$, у соседних с ним CH_2 -групп $q_{\text{C}} = -0.084$, $q_{\text{H}} = 0.058$, а у дальних CH_2 -групп – $q_{\text{C}} = -0.103$, $q_{\text{H}} = 0.054$) и параметры торсионных потенциалов взяты из работы [5]. Энергия деформации пропорциональна квадрату отклонения длин связей и величин углов от их равновесных значений с коэффициентами 310 ккал/моль/Å² и 40 ккал/моль/рад² соответственно. Для равновесных длин химических связей $\text{Csp}^3-\text{Csp}^3$ и $\text{Csp}^3-\text{Csp}^2$ взяты значения 1.526 и 1.51 Å, а для углов – 109.47° (Csp^3) и 120° (Csp^2). Такой выбор был в значительной степени мотивирован параметрами силовых полей, представленных в статьях [24], [25]. Атомы соседних фрагментов, соединенные ковалентной связью друг с другом или через третий атом, не участвуют во взаимодействиях, описываемых потенциалом Леннарда-Джонса.

Размерность конфигурационного пространства нашей модели молекулы циклогексена в системе координат одного из ее фрагментов равна 24 ($5 \times 6 - 6$), поэтому проводить конформационный анализ в терминах декартовых координат и углов Эйлера, по меньшей мере, не рационально. В подобных ситуациях следует перейти от описания в системе большого числа эквивалентных координат к представлению с помощью обобщенных координат, причем таких, что только одна-две из них (в крайнем случае, три), сублимировав большой объем структурной информации, позволяют уверенно локализовать все особые точки гиперповерхности потенциальной энергии и обратным преобразованием с высокой точностью восстановить декартовы координаты всех атомов любого из конформеров. Для циклогексена такая возможность может быть реализована на основе концепции псевдовращения [26], если в рамках формализма Кремера–Попла [27–29] перейти к описанию конформационного многообразия молекулы в сферических координатах Q , θ и ϕ (см. [30]).

В общем случае конформационный анализ в редуцированном до трех измерений пространстве может оказаться весьма трудоемким, но для циклогексена работа сильно упрощается из-за обособленности первой координаты в этой тройке. В самом деле, амплитуда Q характеризует степень складчатости молекулы циклогексена, выражая свое среднее значение как радиус “конформационного глобуса” (см. [31, фиг. 3.19]), а оставшиеся две: фазовые углы θ и φ — определяют тип конформации и задают ее положение на этом глобусе. Таким образом, одну сложную задачу мы разделим на несколько более простых задач, чьи решения допускают прямое сопоставление с экспериментальными данными. К таковому можно отнести расчет зависимости конформационной энергии от амплитуды складчатости Q , построение поверхности потенциальной энергии в координатах θ и φ и др.

Потенциальную энергию, которой обладает молекула циклогексена в состоянии теплового равновесия при температуре T в моменты, когда амплитуда складчатости равна Q , можно выразить статистическим интегралом по всему диапазону значений конформационной энергии E , реализующихся в соответствующем каноническом ансамбле:

$$\langle E(Q) \rangle = (1/Z_Q) \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} w(E|Q) E \exp(-E/RT) dE.$$

Здесь $w(E|Q)$ — статистический вес конформационных состояний с амплитудой Q и энергией в интервале $(E, E + dE)$, R — универсальная газовая постоянная, а $Z_Q = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} w(E|Q) \exp(-E/RT) dE$ — нормировочная константа.

Так как символьное выражение для функции $w(E|Q)$ нам не известно, будем вычислять отношение этих интегралов численно по формуле трапеций. Для этого разобьем выбранный для анализа диапазон энергий на N смежных интервалов и сопоставим каждому из них E_i — среднее арифметическое величин энергии на концах соответствующего интервала (i — его порядковый номер). Вообще, при выборе границ диапазона полезно ориентироваться на уже известные данные о высотах потенциальных барьеров, иначе придется действовать методом проб и ошибок, а задавая N , следует искать разумный баланс между точностью и трудоемкостью вычислений. Далее, после преобразования в дискретную форму имеем для практического применения следующую формулу:

$$\langle E(Q) \rangle = \left[\sum_{i=1}^N E_i \exp(g(i) - E_i/RT - C) \right] / \left[\sum_{i=1}^N \exp(g(i) - E_i/RT - C) \right],$$

из которой следует, что статистические веса $w(E_i|Q)$ достаточно знать с точностью до постоянного множителя. Здесь $g(i) = \ln[w(E_i|Q)]$, а $C = \max_i [g(i) - E_i/RT]$. Переход к логарифму статистического веса и введение константы C необходимы для исключения ошибок переполнения в процессе расчетов на компьютере.

В этом месте, отдавая дань уважения труду первопроходцев, нельзя не упомянуть работу [32], авторы которой, смоделировав на компьютере случайное блуждание в той части конфигурационного пространства, где потенциальная энергия изучаемой системы не превышает заданного уровня, смогли оценить относительные значения статистических весов и рассчитать с их помощью термодинамические характеристики газофазного аргона.

Для определения значений g мы будем использовать многостадийную процедуру стохастической аппроксимации [15]. В ее основе лежит общая для методов [10], [13], [15] идея организовать в конфигурационном пространстве изучаемой модели случайное блуждание с переходными вероятностями обратно пропорциональными итерационно уточняемым статистическим весам $w(E_i|Q)$ макросостояний в исследуемой области значений энергии. В терминах статистической механики это макросостояния, каждому из которых соответствует огромное число микросостояний в конфигурационном пространстве молекулярной модели. Для контроля можно построить гистограмму, где каждый столбик показывает количество случаев, когда мгновенная потенциальная энергия молекулы оказывалась в диапазоне значений соответствующего интервала. Вычисления считаются успешно завершенными, если на некоторой итерации значения конформационной энергии станут появляться с примерно равной частотой во всех интервалах. В этом случае огибающая вершин столбцов гистограммы для $\{E_i\}$ будет выглядеть как ровная горизонтальная линия.

Стохастическая процедура [15], реализуемая на дискретном множестве состояний, не является цепью Маркова в строгом смысле [33], но имеет с ней много общего. Более того, на завершающих стадиях, когда модифицирующий фактор практически равен единице, их можно считать эквивалентными. Учитывая это обстоятельство, необходимую для наших расчетов и общую для методов [10], [13], [15] формулу переходной вероятности, можно вывести из теорем теории цепей Маркова [34], используя логическую схему [35], [36] и аргументацию, представленную в оригинальных работах [6], [37], [38].

Выберем в качестве прототипа цепи Маркова, обладающие свойством обратимости [34]. Цепи этого класса следуют принципу детального баланса [36], связывающему общим уравнением π (инвариантное распределение состояний) и p — вероятностью переходов между ними: $\pi(s_1) \cdot p(s_1 \rightarrow s_2) = \pi(s_2) \cdot p(s_2 \rightarrow s_1)$. Функциональное уравнение такого вида имеет много решений для заданного (целевого) распределения π . Как было показано в работе [39], оптимальным среди них является функция Метрополиса и др. (см. [6]) $p(s_1 \rightarrow s_2) = \min[1, \pi(s_2)/\pi(s_1)]$. В нашей задаче, как и в работах [10], [13], [15], целевое распределение вероятностей можно выразить формулой $\pi(E_i|Q) = Z/w(E_i|Q) = Z/w_i$, где Z — неизвестная нормировочная константа. Таким образом, для вычисления значений переходных вероятностей мы будем использовать выражение

$$p_{s_1 \rightarrow s_2} = \min[1, w_{s_1}/w_{s_2}] = \min[1, \exp(g(s_1) - g(s_2))],$$

в котором неизвестные константы сократились.

В целом кривую, изображающую зависимость конформационной энергии от амплитуды Q , можно построить, разбив весь диапазон вариации Q на M смежных интервалов и сопоставив каждому из них Q_j — среднее арифметическое значений на концах соответствующего интервала. Средние энергии в этом случае рассчитываются по формуле:

$$\langle E(Q_j) \rangle = \left[\sum_{i=1}^N E_{ij} \exp(g(i, j) - E_{ij}/RT - C_j) \right] / \left[\sum_{i=1}^N \exp(g(i, j) - E_{ij}/RT - C_j) \right].$$

Здесь $C_j = \max_i [g(i, j) - E_{ij}/RT]$, $i = 1, \dots, N$, а $j = 1, \dots, M$. Чтобы оценить входящие в эту формулу величины $g(i, j)$, необходимо реализовать процедуру [15] уже в двумерном пространстве макросостояний $\{E_{ij}, Q_j\}$. Напомним, что состояние с амплитудой Q_j может реализоваться для многих сочетаний фазовых углов θ и ϕ .

Ядро алгоритма для расчета $\{g(i, j)\}$ состоит из двух этапов, выполняемых последовательно в цикле: реализация очередного макросостояния (E_{ij}, Q_j) в конфигурационном пространстве изучаемой модели и модификация значения соответствующего элемента двумерного массива $g(i, j)$. Эти два этапа составляют один шаг вычислительной процедуры.

В начале первого этапа готовится пробная конформация молекулы: случайно выбранный фрагмент сдвигается на случайный вектор и поворачивается на случайный угол (вместо полярного угла используется случайное значение его косинуса) вокруг своего геометрического центра как твердое тело. “Случайные” величины, упомянутые здесь, имеют равномерное распределение и вычисляются с помощью алгоритма для генерации псевдослучайных чисел [40]. Амплитуда перемещений (0.025 Å на каждую координату) и поворотов (1.3° на каждый угол Эйлера) за один шаг процедуры постоянна в течение всего вычислительного эксперимента.

Далее рассчитывается потенциальная энергия молекулы E и определяется амплитуда складчатости Q . Пробная конформация принимается в качестве реализации макросостояния s_2 на этом шаге вычислительной процедуры, если $g(i_{s_2}, j_{s_2}) < g(i_{s_1}, j_{s_1})$ или, в противном случае, если $\exp[g(i_{s_1}, j_{s_1}) - g(i_{s_2}, j_{s_2})] \geq \xi$. Здесь ξ — случайное число, равномерно распределенное в интервале (0,1), а s_1 — макросостояние на предыдущем шаге. Если эти условия не выполнены, а также в случаях, когда величины E и Q выходят за границы заданного диапазона или когда длины ковалентных связей отклоняются от равновесных значений больше чем на 0.12 Å, а валентные углы — больше чем на 12°, переход в новое макросостояние не осуществляется, но еще раз используется s_1 . Амплитуда перемещений и поворотов молекулярных фрагментов за один шаг процедуры (см. выше) подбирается заранее так, чтобы принималось около 35% пробных конформаций.

На втором этапе выполняется модификация элемента массива $g(i, j)$, соответствующего макросостоянию, реализованному на первом этапе этого шага вычислительной процедуры: $g(i, j) = g(i, j) + \gamma$. Здесь γ — логарифм модифицирующего фактора. Напомним, что перед началом расчетов массив g необходимо инициализировать, присвоив всем его элементам значение 0

(как и в [10], мы считаем, что в этот момент статистические веса всех макросостояний одинаковы и равны 1). Величина γ определяется по формуле (см. [15]): $\gamma(t) = t_0 / \max(t_0, t)$, где $t = 1, 2, \dots$ — порядковый номер итерации. Для выбора конкретного значения параметра t_0 в [15] не оставили какого-либо рецепта, ограничившись указанием, что его величина должна соответствовать сложности задачи, а также количеству элементов массива $g(i, j)$. В то же время еще одна неопределенность, заключающаяся в том, как соотносятся “итерации” и “шаги” вычислительной процедуры [15], дает стимул к разработке оптимальных алгоритмов. В этой ситуации большую помощь может оказать информация об условиях, влияющих на сходимость процессов стохастической аппроксимации [41].

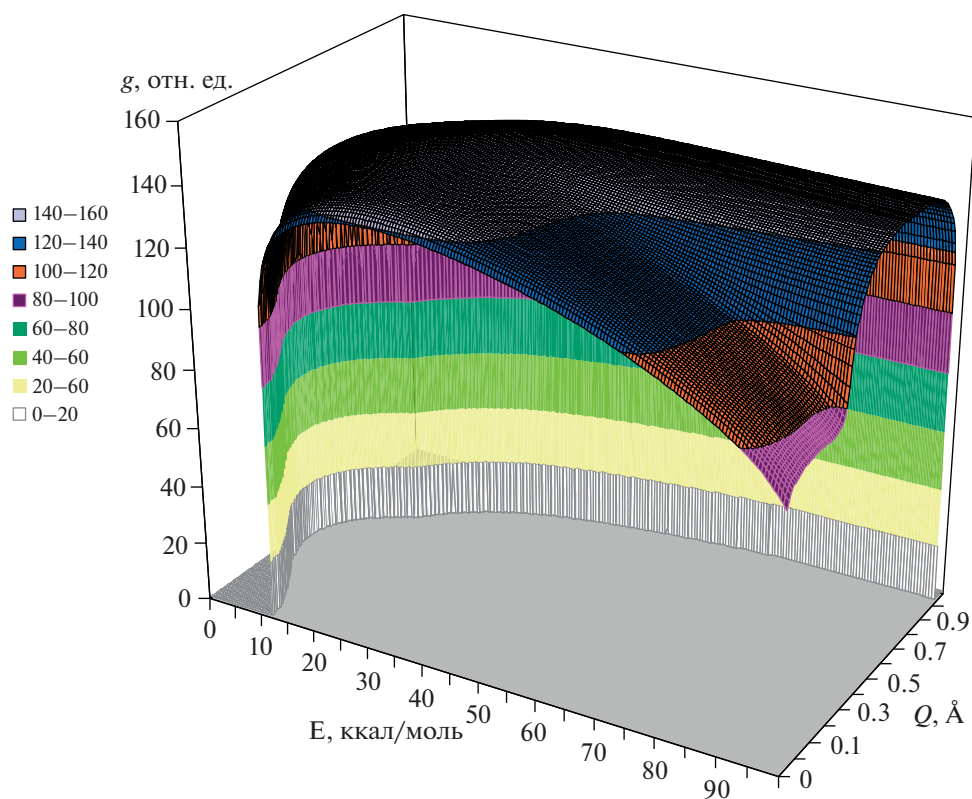
Учитывая случайный характер модификаций, вычислительная процедура должна работать так, чтобы в среднем изменения $g(i, j)$ происходили в правильном направлении. Для этого необходимо выполнить два условия [16], [41]. Во-первых, фактор случайности не должен быть настолько сильным, чтобы происходило накопление ошибок, следовательно, ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \gamma^2(t)$ должен сходиться. Во-вторых, величина γ не может уменьшаться слишком быстро, иначе элементы массива $g(i, j)$ перестанут существенно изменяться задолго до того, как они приблизятся к искомым значениям (основной недостаток метода [10]). Таким образом, ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \gamma(t)$ должен расходиться. Нетрудно убедиться, что зависимость типа $\gamma(t) = t_0 / \max(t_0, t)$ (см. [13], [15]) вполне удовлетворяет этим условиям.

Несмотря на концептуальную простоту, практическое применение метода SAMC [15] для изучения молекулярных моделей сопряжено с некоторыми неудобствами. Затруднения возникают не только на этапе планирования общей стратегии проведения вычислительного эксперимента, но и в конкретных ситуациях, из-за аномалий при заполнении массива $g(i, j)$. Различные способы решения этих проблем рассмотрены в статье [20].

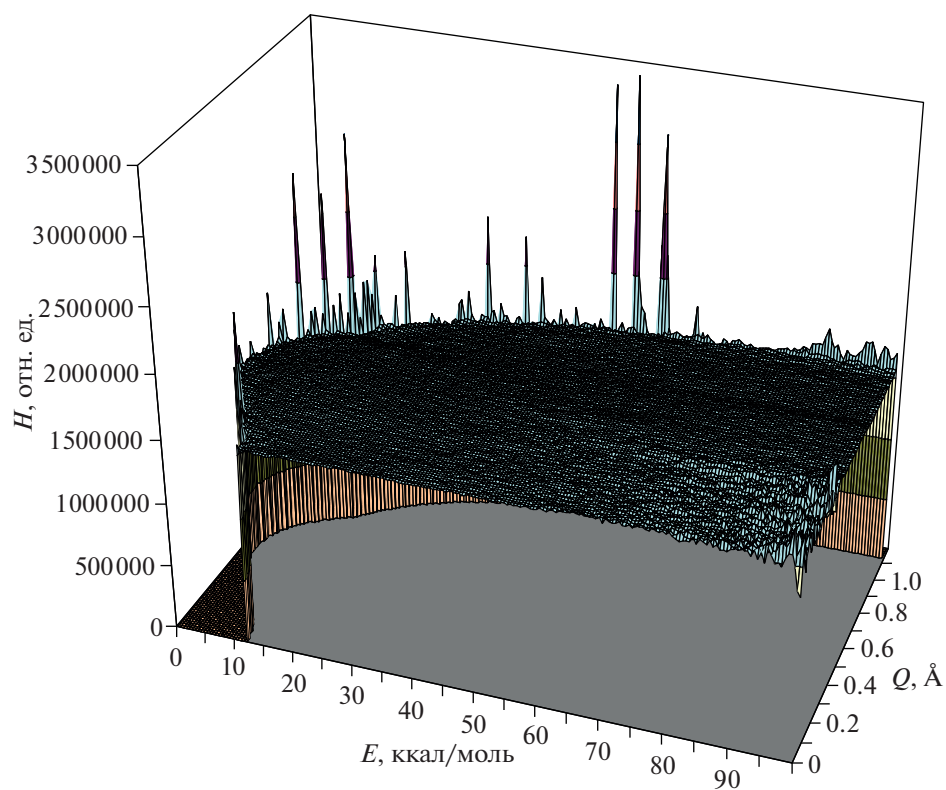
В нашей работе параметр t_0 равен 10. Диапазон конформационных энергий E (0–100 ккал/моль) разбит на 200, а диапазон амплитуд Q (0–1.12 Å) — на 120 интервалов. Таким образом, 24 тысячи элементов массива $g(i, j)$ хранят всю необходимую информацию об относительных значениях плотности состояний. В соответствии с рекомендациями [15], на каждой *итерации* выполнялось 120 тысяч *шагов* вычислительной процедуры (см. выше). Здесь мы учли, что наша модель молекулы циклогексена состоит из пяти фрагментов. Всего для расчета $E(Q)$ было выполнено 33 миллиона итераций, при этом γ уменьшился от 1 до 3.03×10^{-7} . На самом деле для этой задачи достаточно 1 миллиона итераций, но мы решили убедиться в надежности результатов. Поверхность, изображающая функцию $g(E, Q)$ после завершения итераций, показана на фиг. 1. На фиг. 2 представлена двумерная гистограмма, высота каждого столбца которой равна количеству случаев, когда реализовывалось соответствующее ему макросостояние (E_{ij}, Q_j) . Эти данные собраны на последних 250 тысячах итераций. Хорошо видно, что гистограмма стала практически плоской, за исключением отдельных пиков в областях, не оказывающих существенное влияние на результат.

Чтобы определить, как конформационная энергия E зависит от фазовых углов θ и ϕ , был проведен новый вычислительный эксперимент для расчета значений логарифма статистических весов в трехмерном пространстве макросостояний $(E_{ijk}, \theta_j, \phi_k)$. В этот раз параметр t_0 снова равен 10. Диапазон конформационных энергий E (0–100 ккал/моль) разбит на 200 интервалов, а диапазоны фазовых углов θ (0° – 180°) и ϕ (0° – 360°) — на 36 и 72 интервала соответственно. Массив $g(i, j, k)$ состоит из 518 400 элементов, поэтому на каждой *итерации* выполнялось 2592 тысяч *шагов* вычислительной процедуры. Для расчета $E(\theta, \phi)$ было выполнено 6.7 миллиона итераций, при этом γ уменьшился от 1 до 1.49×10^{-6} . Контроль сходимости осуществлялся путем построения и визуального анализа 36 двумерных гистограмм, отображающих количество случаев, когда в слое θ_j реализовывалось макросостояние с E_{ijk} и ϕ_k .

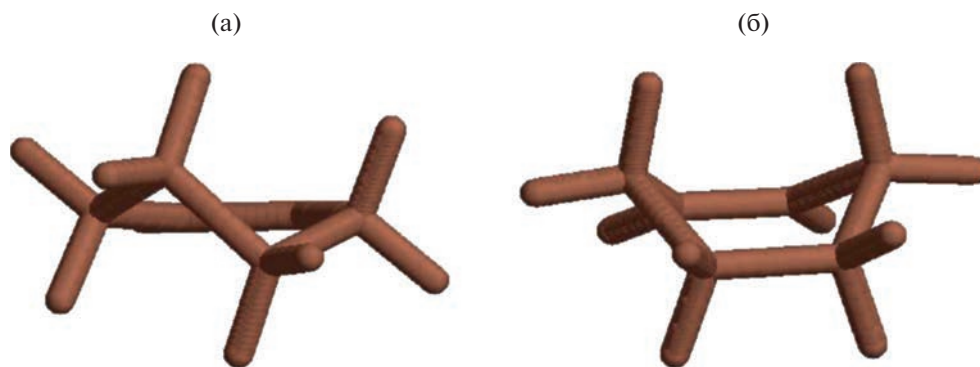
Карту средних значений амплитуды Q в координатах θ и ϕ , необходимую для полного описания, также можно построить с помощью $g(i, j, k)$, но для этого нужна дополнительная информация об амплитудах Q_{ijk} . Такие данные были получены нами на последних 50 тысячах итераций простым усреднением величин Q у конформеров, соответствующих конкретному макросостоянию $(E_{ijk}, \theta_j, \phi_k)$.



Фиг. 1. Зависимость логарифма плотности состояний g от конформационной энергии E и амплитуды складчатости Q .



Фиг. 2. H — количество реализаций макросостояний с энергией E и амплитудой складчатости Q на заключительных итерациях.



Фиг. 3. Стереизомеры циклогексена: (а) — перекрученная форма (*полукресло*, симметрия C_2), (б) — конфигурация типа *ванны* (симметрия C_s).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

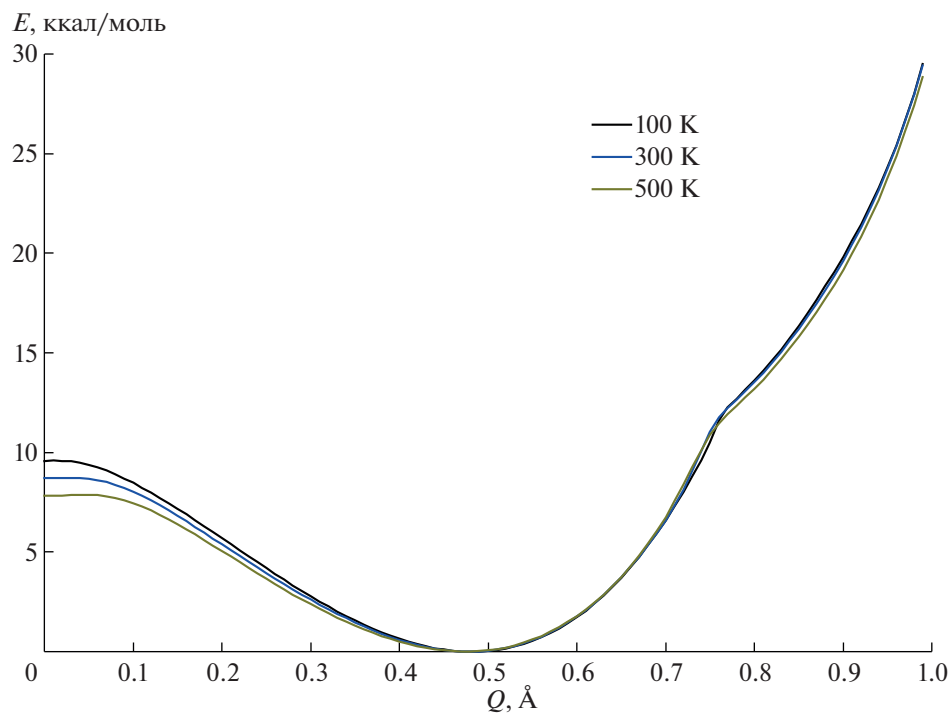
В результате экспериментальных исследований циклогексена [42–45] установлено, что наиболее стабильный его конформер — *полукресло*, перекрученная форма, обладающая симметрией C_2 (фиг. 3). Благодаря тепловым флуктуациям молекула способна осуществить инверсию шестичленного кольца, временно трансформировавшись в энергетически невыгодную конфигурацию типа *ванны* (симметрия C_s). Активационная энтальпия этого процесса (энергетический барьер инверсии) занимает диапазон 5.3–10.3 ккал/моль по экспериментальным данным [42], [46] или 5.2–6.28 ккал/моль согласно квантово-химическим расчетам [47–49]. Помимо этого, переход в еще одну неустойчивую форму (симметрия C_{2v}) с плоским шестичленным кольцом требует по разным оценкам 10.4 [47] – 13.4 [46] ккал/моль.

В рамках формализма Кремера-Попла [27–29] инверсионная пара стабильных конформеров циклогексена (форма C_2) может быть отображена на гиперповерхности потенциальной энергии парой точек с координатами $\theta = 52.7^\circ$, $\varphi = 210^\circ$, $Q = 0.4574 \text{ \AA}$ и $\theta = 127.3^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $Q = 0.4574 \text{ \AA}$, а соответствующая пара переходных структур (C_s -*ванны*) точками $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 300^\circ$, $Q = 0.634 \text{ \AA}$ и $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 120^\circ$, $Q = 0.634 \text{ \AA}$ (см. [31]). Форму C_{2v} с плоским шестичленным кольцом в этой системе представляет точка в начале координат.

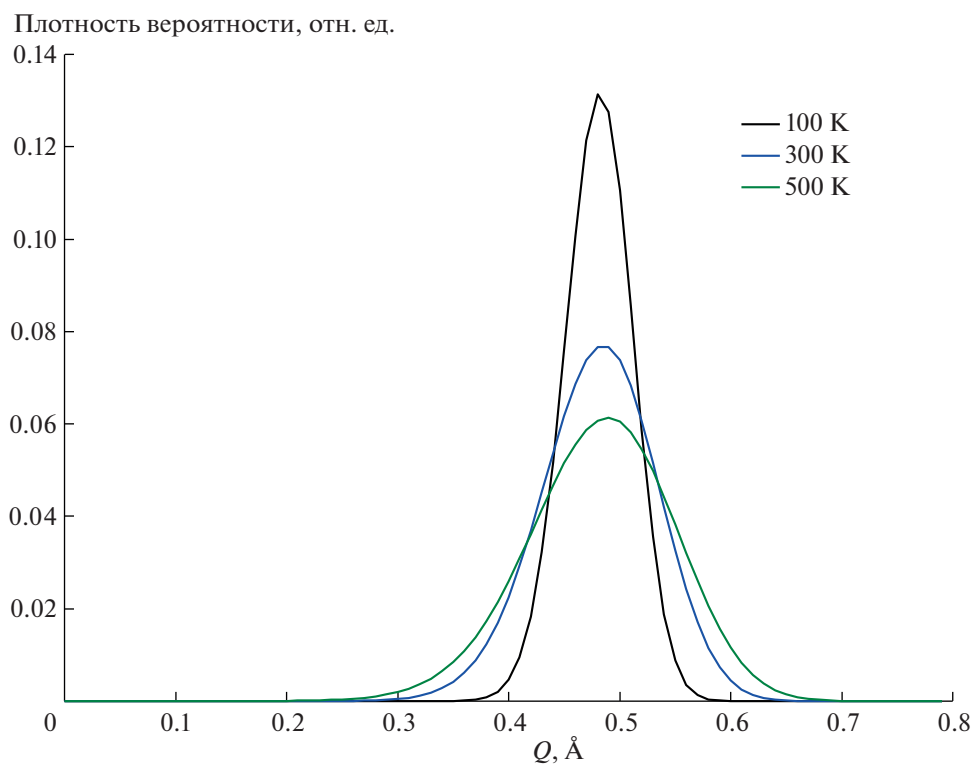
На фиг. 4 показаны кривые, изображающие зависимость рассчитанной нами средней потенциальной энергии E молекулы циклогексена от амплитуды складчатости Q при разных температурах. Как видно на этом рисунке, переход к форме C_{2v} с плоским шестичленным кольцом ($Q = 0 \text{ \AA}$) увеличивает среднюю потенциальную энергию этой молекулы на 9.58–7.82 ккал/моль (8.72 ккал/моль при $T = 300 \text{ K}$). Снижение барьера перехода к плоской форме при повышении температуры указывает на то, что в этих условиях тепловые флуктуации длин ковалентных связей и углов между ними дают больше возможностей избежать стерических напряжений. Для неплоских структур ($Q > 0.35 \text{ \AA}$) влияние температуры выражено слабее. Излом линий при $Q = 0.76 \text{ \AA}$ говорит о резком изменении характера деформаций молекулы для очень больших значений конформационной энергии. Ясно, что исследование этой особенности выходит за рамки данной работы, поскольку требует использования силовых полей, адекватно воспроизводящих поведение химических связей при высоких температурах.

Согласно нашим оценкам, распределения значений амплитуды Q имеют форму гауссовой кривой во всем диапазоне рассмотренных температур (фиг. 5). Таким образом, можно предположить, что основное состояние конфигурационного ансамбля молекул циклогексена реализуется стереоизомерами типа *полукресло* (симметрия C_2), у которых амплитуда Q равна $0.485 \pm 0.006 \text{ \AA}$, а переход в плоскую форму C_{2v} — очень редкое событие.

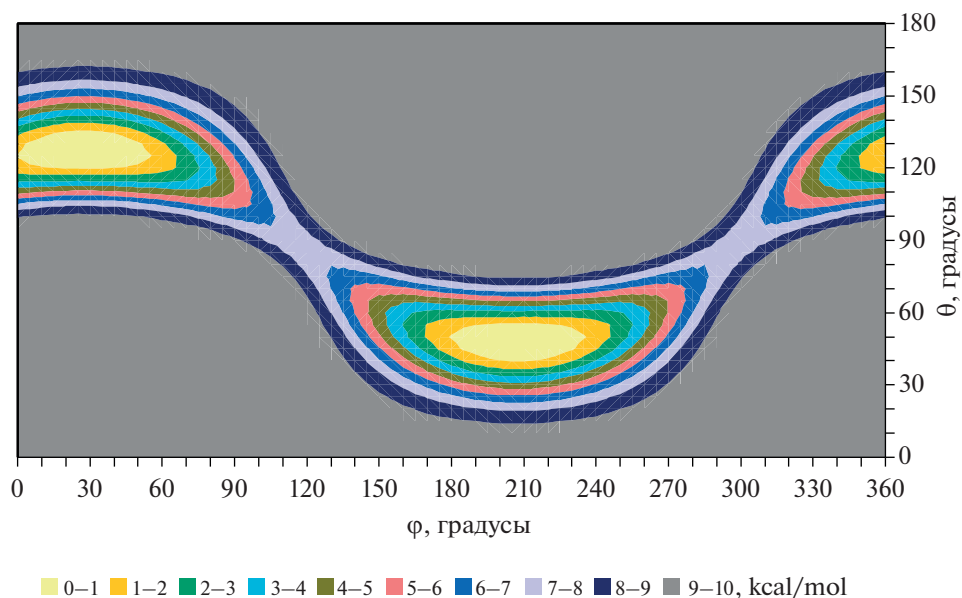
Барьер инверсии форм C_2 молекулы циклогексена можно оценить по карте потенциальной энергии при температуре 300 K (фиг. 6), рассчитанной нами в зависимости от θ и φ . Координаты двух минимумов и двух седловых участков на этой карте с высокой точностью соответствуют позициям конформеров C_2 и переходных форм C_s на “конформационном глобусе” циклогексена (см. [31, фиг. 3.19]), а среднее значение высоты перевалов на пути между минимумами (энергия активации процесса инверсии при температуре 300 K) равно 7.35 ккал/моль. С понижением тем-



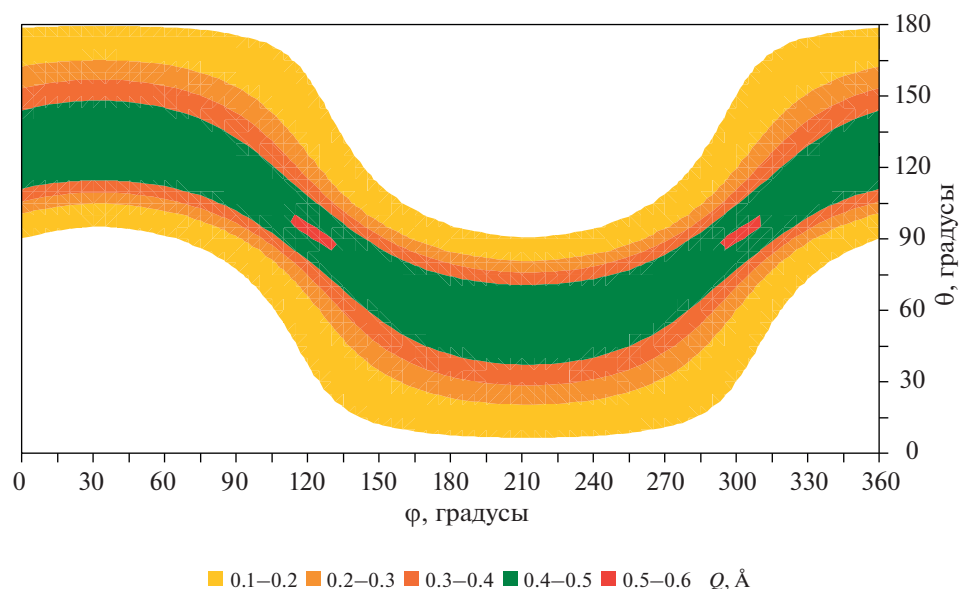
Фиг. 4. Зависимость средней потенциальной энергии E молекулы циклогексена от амплитуды складчатости Q при трех значениях абсолютной температуры.



Фиг. 5. Распределение амплитуд складчатости Q для трех значений абсолютной температуры.



Фиг. 6. Потенциальная энергия E молекулы циклогексена как функция фазовых углов псевдовращения φ и θ .



Фиг. 7. Средняя амплитуда складчатости Q молекулы циклогексена как функция фазовых углов псевдовращения φ и θ .

пературы высота энергетического барьера растет, а при повышении, наоборот, снижается. Так, при 100 К она достигает 7.51 ккал/моль, а при 500 К — опускается до 7.2 ккал/моль.

Зависимость средней амплитуды складчатости Q молекулы циклогексена от фазовых углов θ и φ при температуре 300 К показана на фиг. 7. Хорошо видно, что максимумы с $Q = 0.51$ Å расположены в центрах двух областей этой карты ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 120^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 300^\circ$), занимаемых переходными структурами типа *ванны* (симметрия C_s). В зонах стабильных конформеров (*полукресло*, симметрия C_2 , центры зон имеют координаты $\theta = 53^\circ$, $\varphi = 210^\circ$ и $\theta = 127^\circ$, $\varphi = 30^\circ$) амплитуда Q близка к своему равновесному значению 0.485 Å. Следует отметить, что при увеличении температуры от 100 до 500 К характер рельефа карты, изображенной на фиг. 7, практически не меняется, демонстрируя лишь небольшой (0.05 Å) общий рост уровня средних значений Q .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод SAMC [15], удачно сочетающий простоту алгоритма Ванга-Ландау [10], [11] и точность процедур стохастической аппроксимации [17], [41], имеет высокий потенциал для решения широкого спектра задач конформационного анализа и параметризации силовых полей, используемых в молекулярном моделировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elieil E.L., Allinger N.L., Angyal S.J., Morrison G.A.* Conformational Analysis. New York: Interscience-Wiley, 1965.
2. *Leach A.R.* Molecular Modeling: Principles and Applications. Harlow: Pearson Education Ltd., 2001.
3. *Hinchliffe A.* Molecular Modelling for Beginners. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
4. *Jensen F.* Introduction to Computational Chemistry. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
5. *Teplukhin A.V.* Parametrization of the torsion potential in all-atom models of hydrocarbon molecules using a simplified expression for the deformation energy of valence bonds and angles // *J. Struct. Chem.* 2021. V. 62. P. 1653.
6. *Metropolis N., Rosenbluth A.W., Rosenbluth M.N., Teller A.H., Teller E.* Equation of state calculations by fast computing machines // *J. Chem. Phys.* 1953. V. 21. P. 1087.
7. *Liang F., Liu C., Carroll R.J.* Advanced Markov Chain Monte Carlo Methods: Learning from Past Samples. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2010.
8. *Singh S., Chopra M., de Pablo J.J.* Density of States—Based Molecular Simulations // *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.* 2012. V. 3. P. 369.
9. *Janke W., Paul W.* Thermodynamics and structure of macromolecules from flat-histogram Monte Carlo simulations // *Soft Matter*. 2016. V. 12. P. 642.
10. *Wang F., Landau D.P.* Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 2050.
11. *Landau D.P., Tsai S.-H., Exler M.* A new approach to Monte Carlo simulations in statistical physics: Wang-Landau sampling // *Am. J. Phys.* 2004. P. 72. P. 1294.
12. *Yan Q., de Pablo J.J.* Fast calculation of the density of states of a fluid by Monte Carlo simulations // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. P. 035701.
13. *Belardinelli R.E., Pereyra V.D.* Fast algorithm to calculate density of states // *Phys. Rev. E.* 2007. V. 75. P. 046701.
14. *Belardinelli R.E., Pereyra V.D.* Wang-Landau algorithm: A theoretical analysis of the saturation of the error // *J. Chem. Phys.* 2007. V. 127. P. 184105.
15. *Liang F., Liu C., Carroll R.J.* Stochastic approximation in Monte Carlo computation // *J. Am. Statist. Assoc.* 2007. V. 102. P. 305.
16. *Robbins H., Monro S.* A Stochastic Approximation Method // *Ann. Math. Statist.* 1951. V. 22. P. 400.
17. *Wasan M.T.* Stochastic Approximation. New York: Cambridge University Press, 1969.
18. *Lai T.L.* Stochastic approximation // *Ann. Statist.* 2003. V. 31. P. 391.
19. *Werlich B., Shakirov T., Taylor M.P., Paul W.* Stochastic approximation Monte Carlo and Wang–Landau Monte Carlo applied to a continuum polymer model // *Comput. Phys. Commun.* 2015. V. 186. P. 65.
20. *Zablotskiy S.V., Martemyanova J.A., Ivanov V.A., Paul W.* Stochastic approximation Monte Carlo algorithm for calculation of diagram of states of a single flexible-semiflexible copolymer chain // *Polym. Sci. ser. A.* 2016. V. 58. P. 899.
21. *Shakirov T., Paul W.* Folded alkane chains and the emergence of the lamellar crystal // *J. Chem. Phys.* 2019. V. 150. P. 084903.
22. *Teplukhin A.V.* Monte Carlo calculation of thermodynamic and structural characteristics of liquid hydrocarbons // *J. Struct. Chem.* 2021. V. 62. P. 70.
23. *Allen F.H., Kennard O., Watson D.G., Brammer L., Orpen A.G., Taylor R.* Tables of bond lengths determined by X-ray and neutron diffraction. Part 1. Bond lengths in organic compounds // *J. Chem. Soc. Perkin Trans. 2.* 1987. P. S1.
24. *Cornell W.D., Cieplak P., Bayly C.I., Gould I.R., Merz K.M., Ferguson D.M., Spellmeyer D.C., Fox T., Caldwell J.W., Kollman P.A.* A second generation force field for the simulation of proteins, nucleic acids, and organic molecules // *J. Am. Chem. Soc.* 1995. V. 117. P. 5179.
25. *Jorgensen W.L., Maxwell D.S., Tirado-Rives J.* Development and testing of the OPLS all-atom force field on conformational energetics and properties of organic liquids // *J. Am. Chem. Soc.* 1996. V. 118. P. 11225.
26. *Kilpatrick J.E., Pitzer K.S., Spitzer R.* The thermodynamics and molecular structure of cyclopentane // *J. Am. Chem. Soc.* 1947. V. 69. P. 2483.

27. *Cremer D., Pople J.A.* A general definition of ring puckering coordinates // *J. Am. Chem. Soc.* 1975. V. 97. P. 1354.
28. *Essén H., Cremer D.* On the relationship between the mean plane and the least-squares plane of an N-membered puckered ring // *Acta Cryst. B.* 1984. V. 40. P. 418.
29. *Cremer D.* On the correct usage of the Cremer-Pople puckering parameters as quantitative descriptors of ring shapes – a reply to recent criticism by Petit, Dillen and Geise // *Acta Cryst. B.* 1984. V. 40. P. 498.
30. *Sega M., Autieri E., Pederiva F.* Pickett angles and Cremer–Pople coordinates as collective variables for the enhanced sampling of six membered ring conformations // *Mol. Phys.* 2011. V. 109. P. 141.
31. *Cremer D., Szabo K.J.* Ab initio studies of six-membered rings: Present status and future developments // In: *Conformational Behavior of Six-Membered Rings: Analysis, Dynamics, and Stereoelectronic Effects* / Ed. E. Juaristi. New York: Wiley-VCH, 1995. Ch. 3. P. 59.
32. *McDonald I.R., Singer K.* Machine calculation of thermodynamic properties of a simple fluid at supercritical temperatures // *J. Chem. Phys.* 1967. V. 47. P. 4766.
33. *Chung K.L.* Markov chains: With Stationary Transition Probabilities. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
34. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and its Applications. V. 1. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1968.
35. *Hastings W.K.* Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications // *Biometrika.* 1970. V. 57. P. 97.
36. *Stirzaker D.* Stochastic Processes and Models. New York: Oxford University Press, 2005.
37. *Wood W.W., Parker F.R.* Monte Carlo equation of state of molecules interacting with the Lennard-Jones potential. I. A supercritical isotherm at about twice the critical temperature // *J. Chem. Phys.* 1957. V. 27. P. 720.
38. *Fisher I.Z.* Applications of the Monte Carlo method in statistical physics // *Sov. Phys. Usp.* 1960. V. 2. P. 783.
39. *Peskun P.H.* Optimum Monte-Carlo sampling using Markov chains // *Biometrika.* 1973. V. 60. P. 607.
40. *Wichmann B.A., Hill I.D.* Generating good pseudo-random numbers // *Comput. Statist. Data Anal.* 2006. V. 51. P. 1614.
41. *Nevel'son M.B., Has'minskii R.Z.* Stochastic Approximation and Recursive Estimation. Providence: American Mathematical Society, 1976.
42. *Anet F.A.L., Haq M.Z.* Ring inversion in cyclohexene // *J. Am. Chem. Soc.* 1965. V. 87. P. 3147.
43. *Scharpen L.H., Wollrab J.E., Ames D.P.* Microwave spectrum, structure, and dipole moment of cyclohexene // *J. Chem. Phys.* 1968. V. 49. P. 2368.
44. *Chiang J.F., Bauer S.H.* The molecular structure of cyclohexene // *J. Am. Chem. Soc.* 1969. V. 91. P. 1898.
45. *Naumov V.A., Dashevskii V.G., Zaripov N.M.* Refinement of the molecular structure of cyclohexene // *J. Struct. Chem.* 1970. V. 11. P. 736.
46. *Rivera-Gaines V.E., Leibowitz S.J., Laane J.* Far-infrared spectra, two-dimensional vibrational potential energy surface, and conformation of cyclohexene and its isotopomers // *J. Am. Chem. Soc.* 1991. V. 113. P. 9742.
47. *Saebø S., Cordell F.R., Boggs J.E.* Structures and conformations of cyclopentane, cyclopentene, and cyclopentadiene // *J. Mol. Struct. (Theochem).* 1983. V. 104. P. 221.
48. *Anet F.A.L., Freedberg D.I., Storer J.W., Houk K.N.* On the potential energy surface for ring inversion in cyclohexene and related molecules // *J. Am. Chem. Soc.* 1992. V. 114. P. 10969.
49. *Shishkina S.V., Shishkin O.V., Leszczynski J.* Three-stage character of ring inversion in cyclohexene // *Chem. Phys. Lett.* 2002. V. 354. P. 428.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАНИЦЫ
РАЗДЕЛА СРЕД ПРИ ТЕРМОЯДЕРНОМ ГОРЕНИИ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ МИКРОМИШЕНИ**

© 2023 г. К. В. Хищенко^{1,*}, А. А. Чарахчян^{2,**}

¹ 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2, ОИВТ РАН, Россия

² 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: konst@ihed.ras.ru

**e-mail: chara@ccas.ru

Поступила в редакцию 11.07.2022 г.
Переработанный вариант 26.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Исследование ограничено двумерными возмущениями границы раздела сред. Использовалась вычислительная технология, основанная на явном выделении границы раздела в виде одной из линий регулярной сетки. Предложен способ визуализации спонтанных возмущений на ранней стадии, когда их еще нельзя увидеть на профиле границы раздела. Показано, что ошибка округления компьютера играет незначительную роль в их формировании. Для поздней стадии развития возмущений предложен способ получения профиля локальной амплитуды колебаний вдоль границы раздела. Изучены особенности спонтанного возмущения на разных стадиях его развития. Показано, что спонтанное возмущение имеет тенденцию к сечеточной сходимости по крайней мере до начала процесса формирования квазистационарной безударной волны горения. Показано, что при формировании квазистационарной волны и ее последующем движении возникает дополнительное спонтанное возмущение. Изучено взаимодействие с квазистационарной волной горения задаваемого синусоидального возмущения с начальной амплитудой до 0.1 от длины волны. Показано, что неустойчивость Кельвина–Гельмгольца является основным механизмом развития неустойчивости на нелинейной стадии. Волна горения не разрушается. Получены профили амплитуды колебаний задаваемого возмущения, из которых можно выделить универсальную часть, не зависящую от времени. Библ. 41. Фиг. 12.

Ключевые слова: численное моделирование, управляемый термоядерный синтез, волна горения, неустойчивость Рихтмайера–Мешкова, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

DOI: 10.31857/S0044466923040099, **EDN:** IPFYTI

ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость границы раздела сред применительно к задачам инерциального термоядерного синтеза исследовалась во многих работах (см. [1–6]). Обзор численных методов, применяемых для моделирования таких неустойчивостей, приведен в [7].

В настоящей работе рассматривается мишень в виде цилиндра с термоядерным горючим, окруженного тяжелой оболочкой. Как впервые было показано в [8], при наличии небольшого участка с достаточно высокой температурой в такой мишени возникает близкая к стационарной незатухающая детонационная волна вдоль оси цилиндра. В [9–11] аналогичная задача рассматривалась применительно к торцевому зажиганию предварительно сжатой мишени пучком тяжелых ионов в соответствии с концепцией быстрого зажигания, которому предшествует сравнительно медленная стадия сжатия (см. [12], [13]).

Та же задача, но с другим зажигающим драйвером рассматривалась в нашей работе [14]. Вместо пучка тяжелых ионов был выбран пучок протонов с примерно в 10 раз меньшей глубиной прогрева горючего. Было обнаружено, что при зажигании мишени вначале образуется нестационарная детонационная волна с растущей по времени амплитудой. Превращение такой волны в близкую к стационарной сопровождается изменением механизма ее распространения. Вместо детонационной волны с ударно-волновым механизмом распространения возникает волна горе-

ния, основным механизмом распространения которой является нелокальный нагрев α -частицами, возникающими в реакции синтеза ядер дейтерия и трития. Далее будем называть такую волну горения *безударной*. В отличие от волны медленного горения (см. [15]), механизмом распространения которой является обычная теплопроводность, рассматриваемая в нашей работе волна является быстрой (т.е. распространяется со скоростью порядка скорости детонационной волны). Возможность существования таких волн и некоторые приближенные формулы, основанные на анализе энергетического баланса, обсуждаются в [16] и цитируемых там работах.

Давление и скорость в волне имеют примерно линейный профиль по пространственной переменной. Изучение профилей вдоль оси симметрии показало, что их наклоны с хорошей точностью удовлетворяют известной зависимости, которая следует из одномерных уравнений гидродинамики. Наклон профиля давления с хорошей точностью описывается простой зависимостью от начальной плотности, скорости волны и производной по времени от удельной внутренней энергии вблизи начала волны. Максимальные значения давления и скорости в волне с хорошей точностью удовлетворяют условию Чепмена—Жуге и известным формулам для сильных детонационных волн (см. [15]). Изучался также генерируемый высокочастотным излучением радиационный предвестник волны, имеющий сравнительно низкую температуру, которая медленно растет со временем.

В [17] рассматривалась задача с условием симметрии на некоторой плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, что соответствует столкновению на этой плоскости двух одинаковых волн горения. Для выбранного небольшого размера мишени детонационная волна не успевает превернуться в безударную.

Применительно к очень малым возмущениям, которые остаются малыми для рассматриваемого интервала времени, изучена роль двух возможных механизмов развития неустойчивости границы раздела: ее импульсного ускорения детонационной волной (неустойчивость Рихтмайера—Мешкова) и высокоскоростного скольжения горючего вдоль границы раздела (неустойчивость Кельвина—Гельмгольца). Использовались известные формулы для скорости роста амплитуды малых синусоидальных возмущений плоской границы (см. [18], [19]), коэффициенты которых полагались зависящими от времени и брались из расчета рассматриваемой задачи. Как оказалось, для выбранного размера мишени основную роль играет неустойчивость Рихтмайера—Мешкова, так как в волне разрежения, примыкающей к волне горения, касательная к границе раздела скорость горючего быстро уменьшается по мере удаления от волны. Следует отметить, что по мере движения волны влияние этого эффекта на неустойчивость границы вблизи волны уменьшается, так как уменьшение касательной составляющей скорости в волне разрежения замедляется.

В [17] проанализирована также эволюция небольшого локального возмущения границы раздела, возникающего при формировании детонационной волны. Для определения амплитуды возмущения использовалась некоторая обработка расчетного профиля границы раздела. Для выбранного размера мишени оказалось, что скорость роста амплитуды возмущения до отражения детонационной волны определяется неустойчивостью Рихтмайера—Мешкова, а значительное увеличение скорости роста амплитуды после отражения вызвано неустойчивостью Кельвина—Гельмгольца.

В настоящей работе неустойчивость границы раздела исследуется прямым численным моделированием задачи из работы [14], включая стадию образования и распространения безударной волны. Исследование ограничено двумерными возмущениями границы. Рассматривается эволюция как задаваемых начальных возмущений, так и спонтанных возмущений, которые самопроизвольно возникают при расчете неустойчивых течений (см., например, [20], где спонтанные возмущения используются для анализа неустойчивости детонационной волны). Важный вопрос об устойчивости волны горения выходит за рамки настоящей работы.

Приводятся также результаты расчетов тестовой задачи, которая получена упрощением исходной задачи и позволяет, в частности, тестировать “гидродинамическую” часть численного метода на известных формулах скорости роста малых возмущений для тех разностных сеток, которые применяются для расчета исходной задачи.

Используется подвижная регулярная сетка, одна из линий которой является границей раздела. Такая вычислительная технология не позволяет моделировать турбулентное перемешивание веществ на поздней стадии развития неустойчивости. Тем не менее изучение неустойчивости на ее ранней стадии может давать результаты, применимые и к стадии турбулентного перемешивания. В качестве примера приведем формулу для изменения скорости роста амплитуды немалого (отношение начальной амплитуды к длине волны возмущения лежит примерно между 0.5 и 1)

$$\rho \frac{d\epsilon_i}{dt} + p_i \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{q}_i + Q_{ei} = D_i + W_i, \quad (2)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \nabla$ — лагранжева производная по времени; ρ — плотность; $\mathbf{u} = (u_z, u_r)$ — скорость; p_e и p_i — электронное и ионное давления, из которых складывается полное давление $p = p_e + p_i$; ϵ_e и ϵ_i — внутренняя энергия электронов и ионов; $\mathbf{q}_e$ и $\mathbf{q}_i$ — тепловые потоки электронов и ионов; Q_{ei} определяет обмен энергией между электронами и ионами. Последние члены в уравнениях (1) и (2) определяют нагрев электронов и ионов пучком протонов (D_e и D_i) и α -частицами (W_e и W_i), а также обмен энергией между электронами и излучением (S).

При описании ДТ-смеси мы опускаем стадию ударной ионизации (см. [24]) атомов смеси протонами зажигающего пучка, полагая степень ионизации смеси равной единице.

Для ДТ-смеси используются уравнения состояния электронной и ионной компонент, полученные из широкодиапазонного полуэмпирического однотемпературного ($T_e = T_i = T$) уравнения состояния водорода $p = p_H(\rho, T)$, $\epsilon = \epsilon_H(\rho, T)$, основанного на модели [25]. Такое уравнение состояния удовлетворительно описывает сильно сжатый водород как при низких, так и при высоких температурах. Однотемпературное уравнение состояния для ДТ-смеси берется в виде

$$p = p(\rho, T) = p_H(A^{-1}\rho, T), \quad \epsilon = \epsilon(\rho, T) = A^{-1}\epsilon_H(A^{-1}\rho, T),$$

где $A = 2.5$ — атомный вес смеси. Двухтемпературные уравнения состояния смеси определяются формулами

$$p_e = \beta p(\rho, T_e), \quad \epsilon_e = \beta \epsilon(\rho, T_e), \quad \beta = \xi/(1 + \xi), \quad (3)$$

$$p_i = (1 - \beta)p(\rho, T_i), \quad \epsilon_i = (1 - \beta)\epsilon(\rho, T_i), \quad (4)$$

где $\xi = 1$ — степень ионизации. Для холодной смеси с $T_e = T_i = T$ получаем

$$p = p_e + p_i = p(\rho, T), \quad \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_i = \epsilon(\rho, T),$$

а для высокотемпературной плазмы, когда $p(\rho, T)$ и $\epsilon(\rho, T)$ являются уравнениями состояния совершенного однотемпературного газа при $T = T_e$ и $T = T_i$, формулы (3), (4) дают двухтемпературные уравнения состояния совершенного газа с заданной степенью ионизации.

Ранее мы провели контрольные расчеты одномерной задачи с двухтемпературными уравнениями состояния (3), (4) и с некоторыми разумными формулами для уравнения состояния электронной компоненты (см. [26]). Разница в результатах была несущественная.

Оболочка описывается теми же уравнениями, но без правых частей уравнений (1) и (2). Как и в работах [9–11], в качестве материала оболочки выбрано золото. Уравнения состояния получены по формулам (3), (4) из однотемпературных уравнений состояния по модели Томаса—Ферми с квантовыми и обменными поправками (см. [27], [28]), которая позволяет определять и степень ионизации. Так как модель Томаса—Ферми не может правильно описать сильно сжатое холодное вещество, начальные значения давления и плотности оболочки вычисляются по уравнению состояния [29] (см. ниже), а начальное значение температуры определяется из уравнения состояния Томаса—Ферми.

Перенос излучения описывается многогрупповым по частоте ν и диффузионным по телесному углу приближением стационарного уравнения переноса. Многогрупповое приближение строится делением интервала $0 < \nu < \infty$ на N групп $\nu_{l-1} < \nu < \nu_l$, $l = 1, \dots, N$, $\nu_0 = 0$, $\nu_N = \infty$.

По сравнению с работой [14] изменена модель переноса α -частиц. Вместо стационарного кинетического уравнения в приближении Фоккера—Планка используется его диффузионное приближение из [30], что позволило значительно уменьшить объем вычислений. Чтобы получить решение с временем выхода на квазистационарный режим, близким к работе [14], была несколько уменьшена интенсивность J_0 зажигающего пучка протонов.

Заметим, что в силу условия Чепмена—Жуге возмущения из области зажигания не могут достигать квазистационарную волну горения, и поэтому параметр J_0 , как и время действия зажигающего пучка $\Delta t_{\text{пр}}$, влияют только на сам факт зажигания и на время появления квазистационарной волны. Параметры квазистационарной волны зависят только от начальной плотности горючего, радиуса цилиндра, толщины и материала оболочки.

Горючее полагается предварительно сжатым изэнтропически из состояния при температуре 4 К, давлении 0.1 МПа и плотности $\rho_a \approx 0.22 \text{ г/см}^3$ до плотности $\rho_0 = 500\rho_a$, что дает давление $p_0 \approx 400 \text{ ТПа}$. Оболочка также предполагается предварительно сжатой изэнтропически (использовалось уравнение состояния золота из [29]) до давления p_0 , что дает плотность сжатой оболочки примерно 300 г/см^3 .

Более подробное описание постановки задачи приведено в [14].

Для уравнений гидродинамики используется двухэтапная схема типа [31], [32]. На лагранжевом этапе используется схема второго порядка точности [33]. На этапе пересчета искоемых функций на эйлерову сетку используется схема третьего порядка точности [34].

Для уравнений диффузии и теплопроводности используется схема второго порядка точности по пространственным переменным на 9-точечном шаблоне из [35]. Система линейных уравнений решается прямым методом разложения на треугольные множители для ленточной матрицы (см. [36]).

Методика расчета движения сеточных узлов, расположенных на границе раздела сред и свободной границе, взята из книги [37]. На одном шаге по времени узлы границы вначале движутся в соответствии с полем скорости. Затем вычисляются крайние узлы как точки пересечения границы и прямых линий на фиг. 1. На последнем этапе граница аппроксимируется дугами окружностей, проходящими через узлы, после чего находятся новые положения узлов, равномерно расставленных по длине границы.

Для построения регулярных криволинейных сеток с заданными граничными узлами используется метод [38], основанный на методе [39]. В настоящей работе метод [38] модифицирован в соответствии с работой [40]. Так как внутренние узлы начальной сетки для метода [38] берутся из предыдущего временного слоя, начальная сетка может оказаться невыпуклой (т.е. состоящей не только из выпуклых четырехугольников), что снижает возможность метода [38] генерировать выпуклые сетки. Указанная выше модификация позволила повысить надежность метода для невыпуклых начальных сеток.

Параметры разностной сетки, если это не оговорено особо, следующие. Шаг начальной сетки в основной расчетной области вдоль оси z $h_z = 0.25 \text{ мкм}$, число узлов сетки вдоль оси r $N_r = 40$ в горючем и 45 в оболочке. Проводились расчеты и на более подробных сетках с $h_z = 0.125 \text{ мкм}$ и $N_r = 80$.

2. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

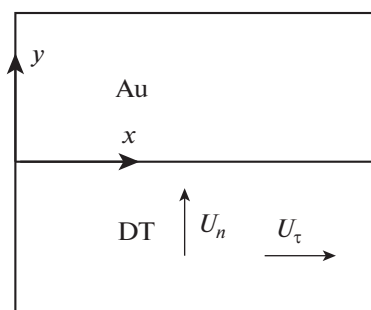
Имеются два плоских слоя: один из ДТ-смеси, другой из золота, которые касаются друг друга, как показано на фиг. 2. Рассматривается плоское течение, зависящее от двух пространственных переменных (x, y) , которое описывается уравнениями бездиссипативной однетемпературной гидродинамики. В начальный момент искоемые функции постоянны в каждом слое. Термодинамические функции в слое золота совпадают с начальными данными основной задачи, а в слое ДТ-смеси примерно соответствуют значениям в безударной волне основной задачи, $p_{\text{ДТ}} = 600 \text{ ППа}$, $\rho_{\text{ДТ}} \approx \rho_0$. Слой золота неподвижен, а слой ДТ-смеси имеет скорость U_n вдоль оси y и скорость U_τ вдоль оси x . Скорость U_τ задает разрыв касательной составляющей скорости на контактной поверхности, а скорость $U_n \approx 880 \text{ км/с}$ равна скорости за фронтом ударной волны из решения задачи о распаде разрыва для неподвижного слоя ДТ-смеси плотностью $1.5\rho_0$. Эта задача определяет также значение $p_{\text{ДТ}}$. При таком выборе U_n и $p_{\text{ДТ}}$ решение задачи о распаде разрыва для подвижного слоя ДТ-смеси содержит только ударную волну в слое золота, а значения искоемых функций в слое ДТ-смеси не меняются.

Рассмотрим начальное синусоидальное возмущение границы раздела

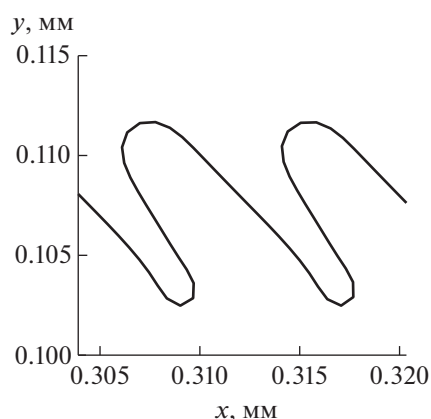
$$y = 0.5d_0 \sin(2\pi x/\lambda),$$

где d_0 — амплитуда возмущения, λ — длина волны. Возмущение предполагается малым ($d_0/\lambda \ll 1$). Зависимость амплитуды возмущения $d(t)$ определяется формулой

$$d(t) = d_0 (1 + \varphi U_n t), \quad \varphi = \frac{2\pi|\rho_1 - \rho_2|}{\lambda(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (5)$$



Фиг. 2. Тестовая задача.



Фиг. 3. Фрагмент границы раздела в тестовой задаче, $U_\tau = 400$ км/с, $t = 0.05$ нс, число разностных интервалов в одной волне $\Delta n = 32$, начальная относительная амплитуда $d_0/\lambda = 0.1$.

при $U_\tau = 0$ (неустойчивость Рихтмайера–Мешкова [18]), и формулой

$$d(t) = d_0 \exp(\psi U_\tau t), \quad \psi = \frac{2\pi(\rho_1 \rho_2)^{1/2}}{\lambda \rho_1 + \rho_2}, \quad (6)$$

при $U_n = 0$ (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца [19]). Здесь ρ_1 — плотность DT-смеси, ρ_2 — плотность золота после прохождения ударной волны (в соответствии с рекомендацией работы [41]).

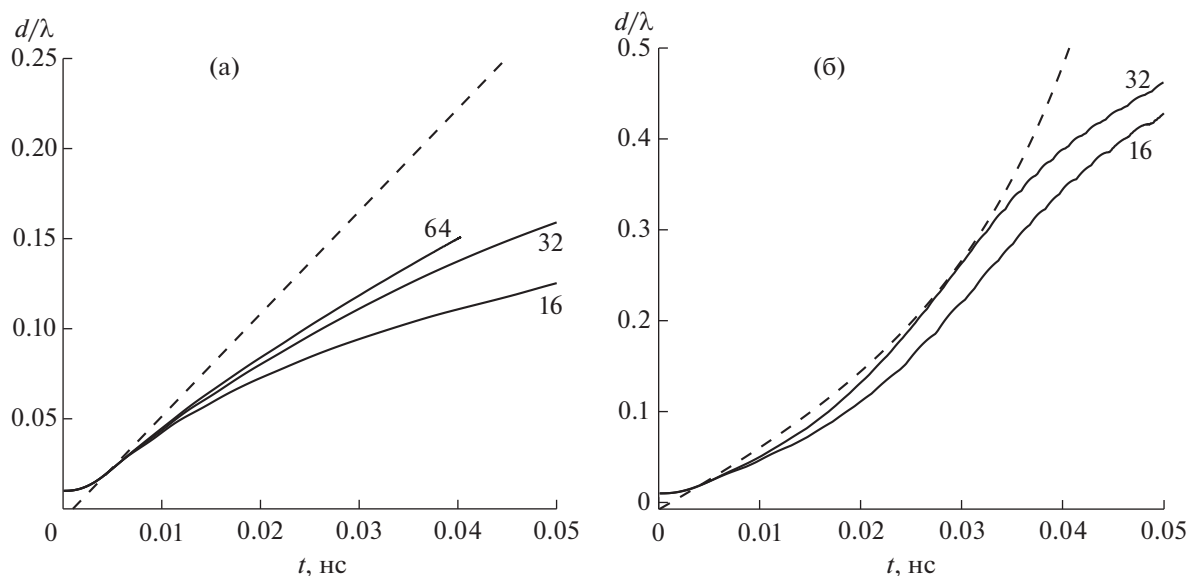
Для произвольных значений U_n и U_τ возьмем формулу

$$d(t) = d_0 (\varphi U_n t + \exp(\psi U_\tau t)), \quad (7)$$

для которой $d(0) = d_0$, а производная d'_t равна сумме производных от формул (5) и (6).

Фигура 3 демонстрирует возможность моделирования нелинейной стадии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца ($d/\lambda > 1$) с характерными наклонными гребнями (см., например, [19]).

На фиг. 4 показаны некоторые результаты расчета тестовой задачи в сравнении с формулой (7). Так как в расчете имеется небольшой начальный интервал времени, в течение которого формируется ударная волна, формула (7) показана с небольшим сдвигом по времени. В случае неустойчивости Рихтмайера–Мешкова ($U_\tau = 0$, фиг. 4а) расчет дает качественно верную зависимость скорости роста амплитуды от времени — вначале линейный рост, а затем его постепенное уменьшение (см., например, [1]). Расчеты на разных сетках по x имеют тенденцию к сходимости: расчет с 32 разностными интервалами в одной волне отличается от расчета с 64 интервалами заметно меньше, чем от расчета с 16 интервалами. Удвоение числа узлов сетки поперек границы раздела не влияло заметно на скорость роста амплитуды.



Фиг. 4. Относительная амплитуда возмущения от времени: сплошные линии — расчет, цифры указывают число разностных интервалов в одной волне фиксированной длины λ ; штриховые линии — формула (8) с небольшим сдвигом по времени; начальная амплитуда $d_0/\lambda = 0.01$, $U_\tau = 0$ (а) и 400 км/с (б).

На фиг. 4б приведен результат расчета для скорости скольжения $U_\tau = 400$ км/с, примерно равной скорости скольжения в безударной волне основной задачи. Видно, что при той же начальной амплитуде точность воспроизведения формулы (7) намного выше. При увеличении начальной амплитуды точность воспроизведения формулы (7) уменьшается, что, скорее всего, связано с уменьшением точности самой формулы (7) относительно решения уравнений гидродинамики.

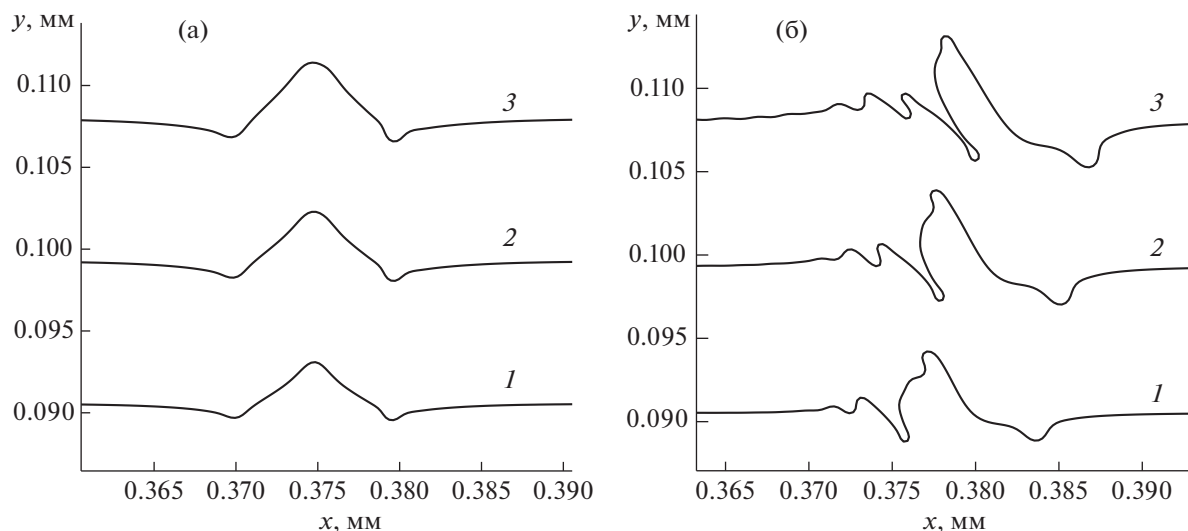
В заключение этого раздела приведем результаты расчета локального начального возмущения в виде равнобедренного треугольника, основание которого назовем длиной волны λ , а высоту — амплитудой возмущения d_0 , $d_0/\lambda = 0.1$. На фиг. 5а для случая неустойчивости Рихтмайера–Мешкова ($U_\tau = 0$) приведены профили границы раздела в три момента времени. Точки излома начального возмущения немного размазаны, но возмущение в целом остается почти прямолинейным.

При наличии скольжения ($U_\tau = 400$ км/с, фиг. 5б) возмущение разрушается на более коротковолновые возмущения разной амплитуды и характерными для неустойчивости Кельвина–Гельмгольца наклонными гребнями. Скорость роста максимальной амплитуды (разница между максимальным и минимальным значениями y), как и в случае синусоидальных возмущений, заметно выше, чем в случае $U_\tau = 0$.

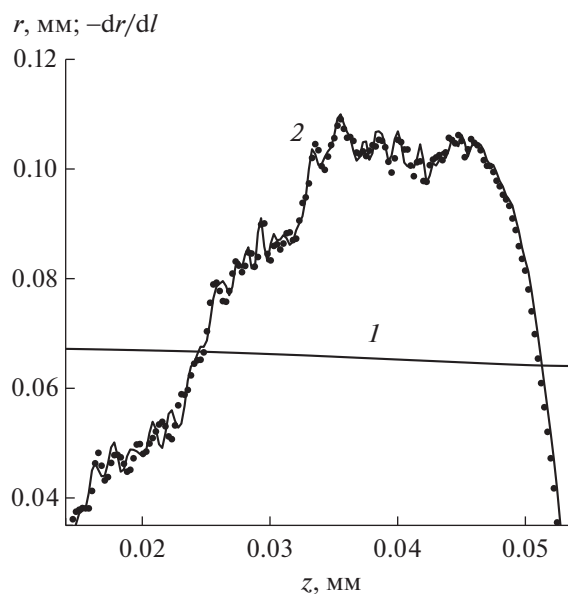
3. СПОНТАННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Спонтанные возмущения границы раздела возникают сразу, когда она начинает двигаться под действием растущего давления горячего, нагреваемого пучком протонов. На фиг. 6 приведен фрагмент границы раздела в момент прекращения действия пучка $t = 0.016$ нс. Граница заметно сдвинулась относительно начального положения $r = 0.064$ мм. Профиль границы имеет вид почти прямой линии, на котором возмущений не видно. Чтобы увидеть их, на фиг. 6 показан профиль по координате z производной $-dr/dl$, где l — длина профиля (отсчитываемая от точки В на фиг. 1) в сторону возрастания z , профиль границы раздела предполагается заданным в параметрическом виде $r = r(l)$, $z = z(l)$.

Чтобы оценить роль ошибки округления компьютера (которая определяется количеством двоичных разрядов для хранения мантиссы числа) в формировании спонтанных возмущений, расчет проводился как для обычного формата чисел типа `double` на языке C, так и для расширенного формата “`long double`” с увеличенной на 11 разрядов мантиссой (т.е. с ошибкой округления,



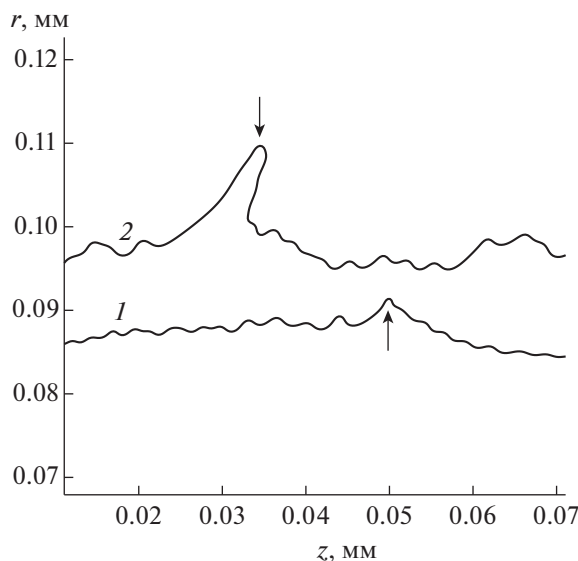
Фиг. 5. Граница раздела для начального локального треугольного возмущения, начальная относительная амплитуда $d_0/\lambda = 0.1$, при $t = 0.03$ (1), 0.04 (2) и 0.05 нс (3); $U_\tau = 0$ (а) и 400 км/с (б).



Фиг. 6. Фрагмент границы раздела (1) и взятая с обратным знаком производная от координаты r по длине границы l (2) при $t = 0.016$ нс; точки — расчет для чисел типа “double”, сплошная линия — для чисел типа “long double” с уменьшенной примерно в 2000 раз ошибкой округления.

уменьшенной в $2^{11} \approx 2000$ раз). Видно, что погрешность округления не играет заметной роли. Амплитуда спонтанных возмущений, как и расположение трех очагов возмущений, изменились незначительно.

При формировании детонационной волны ($t \approx 0.03$ нс) возникает локальное возмущение, которое анализировалось нами в работе [17] применительно к задаче с отражением детонационной волны от плоскости симметрии. В настоящей работе мы ограничимся демонстрацией этого возмущения на фиг. 7 через достаточно большой временной интервал после его возникновения. Профили локального возмущения похожи на профили треугольного локального возмущения для тестовой задачи на фиг. 5.



Фиг. 7. Фрагменты границы раздела при $t = 0.1$ (1) и 0.14 нс (2), содержащие ярко выраженное локальное возмущение (отмечены стрелками), сдвигающееся налево в волне разрежения, которая примыкает к волне горения.

На фиг. 8 показана граница раздела при $t = 0.08$ нс. Превращение нестационарной детонационной волны в квазистационарную безударную волну еще не завершилось (безударная волна присутствует в качестве предвестника детонационной волны, подробнее см. [14]). Профиль границы раздела $r(z)$ имеет волнообразный характер вплоть до $z \approx 0.13$ мм (точка с максимальным давлением, которую естественно рассматривать в качестве положения волны горения, находится заметно правее $z_w \approx 0.165$ мм). На фиг. 8а показан фрагмент границы раздела с волнообразным профилем при $0.1 \leq z \leq 0.128$ мм, что достаточно далеко от локального возмущения на фиг. 7.

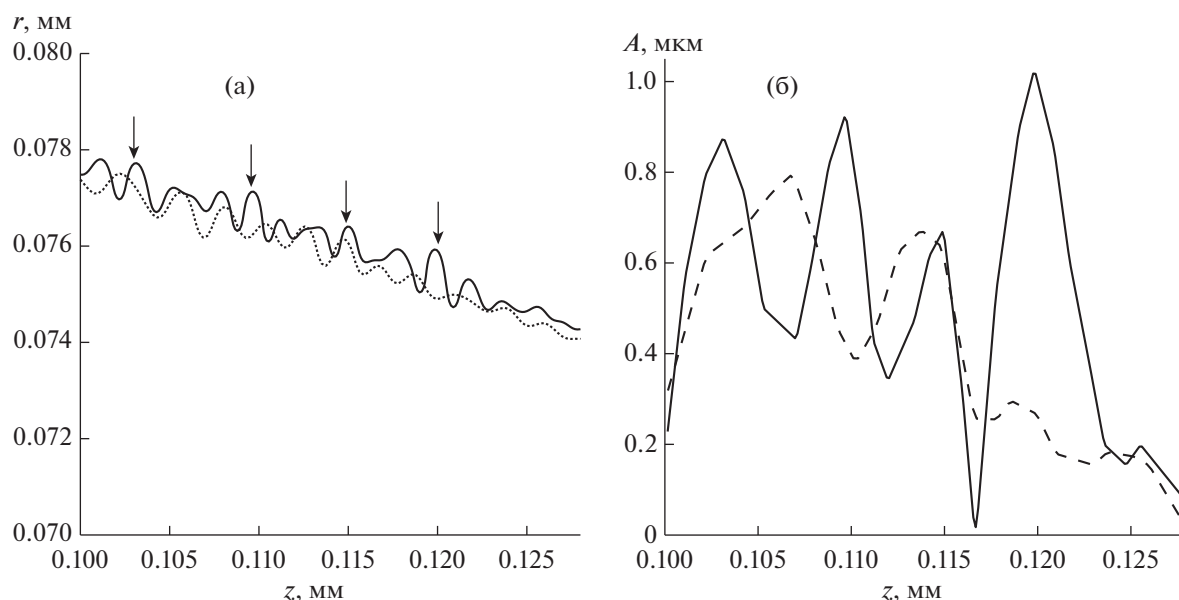
Отсутствие характерных для неустойчивости Кельвина–Гельмгольца наклонных гребней объясняется достаточно быстрым падением скорости горючего за волной горения: в данном случае скорость горючего обращается в нуль при $z \approx 0.1$ мм (см., также, [17]).

Профиль $r(z)$ на фиг. 8а для сетки с $h_z = 0.125$ мкм (сплошная линия) имеет любопытную структуру. Стрелками показаны четыре точки, где профиль имеет локальные максимумы, в промежутках между которыми имеются небольшие области, где локальная амплитуда возмущения близка к нулю, что можно трактовать как пропуск одной волны. Для наглядности этот профиль был обработан так, чтобы получить локальную амплитуду $A(z)$. Точки локального экстремума профиля $r(z)$ соединялись прямыми, что давало две ломаные линии: одну, построенную по точкам максимума, и другую, построенную по точкам минимума. Амплитуда $A(z)$ определяется как расстояние между ломаными по оси r в точке z .

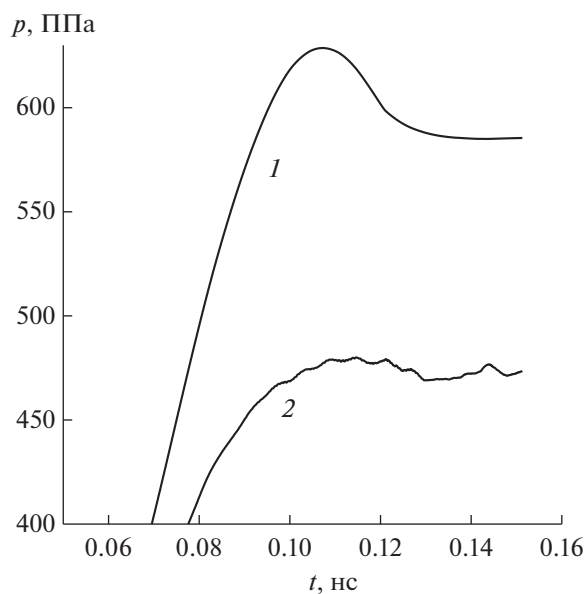
На фиг. 8б приведены функции $A(z)$, полученные обработкой профилей на фиг. 8а для двух сеток с $h_z = 0.125$ (сплошная линия) и 0.25 мкм (штриховая линия). Для сетки с $h_z = 0.125$ мкм видны четыре максимума и три минимума между ними, которые упоминались выше в связи с фиг. 8а. Укажем на близость максимальных значений $A(z)$ и расстояний между ними для разных сеток в левой части приведенного фрагмента.

Выполнить расчет для больших значений t на сетке с шагом $h_z = 0.125$ мкм не удастся из-за уменьшения шага по времени, вызванного искривлением сетки в окрестности локального возмущения. Приводимые ниже результаты получены на сетке с $h_z = 0.25$ мкм.

Рассмотрим процесс превращения нестационарной волны горения, имеющей вид детонационной волны с безударным предвестником, в квазистационарную безударную волну (см. [14]). На фиг. 9 показаны зависимости от времени максимального давления вдоль оси симметрии $p_{ax}(t)$ и вдоль границы раздела $p_b(t)$. Так как оба максимума расположены внутри волны горения, эти функции можно рассматривать как давления в волне горения.



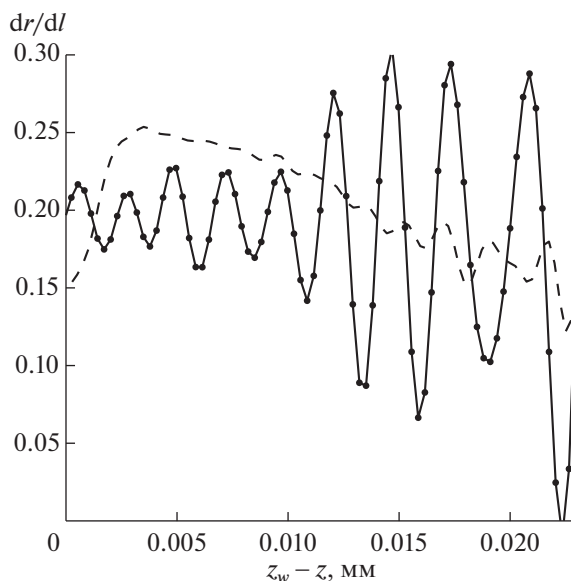
Фиг. 8. Фрагмент профилей границы раздела (стрелками показаны максимумы амплитуды) (а) и амплитуда возмущений $A(z)$ (б), полученная в результате обработки профилей при $t = 0.08$ нс, шаг сетки $h_z = 0.125$ (сплошная линия) и 0.25 мкм (штриховая линия).



Фиг. 9. Превращение нестационарной волны горения в квазистационарную: максимальное давление вдоль оси симметрии (1) и вдоль границы раздела (2) от времени.

Функции $p_{ax}(t)$ и $p_b(t)$ вначале растут, что указывает на нестационарность волны горения, а при $t \approx 0.1$ нс начинается переход обеих функций к примерно постоянным значениям, соответствующим квазистационарной волне горения.

Укажем на колебательный характер функции $p_b(t)$ при $t \geq 0.1$ нс, что скорее всего связано с неустойчивостью стационарной волны Чепмена–Жуге (см., например, [20]). Как показано в [14], в квазистационарной безударной волне с хорошей точностью выполняется условие Чепмена–Жуге.



Фиг. 10. Производная от координаты r по длине границы раздела l вблизи волны горения (координата $z = z_w$) при $t = 0.08$ (штриховая линия) и 0.15 нс (сплошная линия, точками указаны значения в узлах сетки).

Естественно предположить, что неустойчивость волны горения является источником дополнительных спонтанных возмущений границы раздела вблизи волны горения. Чтобы увидеть эти возмущения, надо использовать профиль производной от координаты r по длине границы раздела, как и в случае начальной стадии движения границы раздела (см. фиг. 6).

На фиг. 10 показаны соответствующие профили вблизи волны горения, координату которой z_w определим как z -координату точки с максимальным давлением на границе раздела. Один профиль при $t = 0.08$ нс, когда неустойчивость волны горения еще не проявляется в виде колебательного режима функции $p_b(t)$, и другой профиль при $t = 0.15$ нс, когда колебательный режим функции $p_b(t)$ имеет место уже на достаточно большом интервале времени. Видно, что при $t = 0.08$ нс спонтанных возмущений вблизи волны горения нет, а при $t = 0.15$ нс спонтанные возмущения присутствуют.

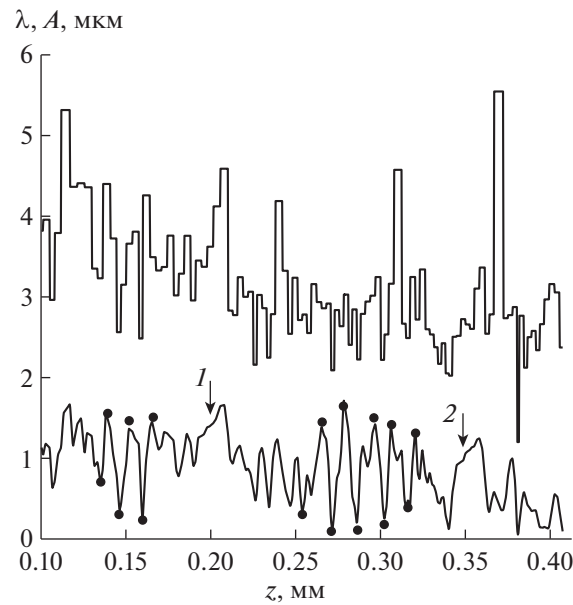
На фиг. 11 показан результат описанной выше обработки профиля $r(z)$ при $t = 0.15$ нс. Интервал $0 < z < 0.1$, где располагается локальное возмущение большой амплитуды (см. фиг. 7), исключен из обработки. При $z > 0.41$ колебания настолько малы, что локальные экстремумы функции $r(z)$ не определяются (тем не менее эти колебания можно увидеть на профиле $dr/dl(z)$, см. фиг. 10).

На фиг. 11 показаны как амплитуда $A(z)$ (нижняя линия), так и длина волны $\lambda(z)$ (верхняя линия), под которой понимается расстояние между соседними локальными максимумами профиля $r(z)$. При замене локальных максимумов на локальные минимумы функция $\lambda(z)$ меняется незначительно.

На фоне чередующихся максимумов и минимумов функции $A(z)$ выделяются два достаточно больших интервала, не имеющих минимумов $A(z)$. На фиг. 11 эти интервалы отмечены стрелками и цифрами. Если отбросить пики профиля $\lambda(z)$, то длина волны в области между двумя интервалами заметно меньше, чем в области левее интервала 1. Укажем также на наличие областей, где локальные экстремумы амплитуды, отмеченные на фиг. 11 точками, располагаются на примерно одинаковом расстоянии друг от друга.

4. ЗАДАВАЕМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Ограничимся рассмотрением взаимодействия задаваемых возмущений границы раздела с квазистационарной волной горения, которая состоит из головной части с линейным профилем давления и скорости (см. [14]), и основной части, включающей в себя точку с максимальным



Фиг. 11. Длина волны $\lambda(z)$ (вверху) и амплитуда $A(z)$ (внизу) при $t = 0.15$ нс; стрелками отмечены два похожих друг на друга участка без минимума амплитуды при $z \approx 0.2$ (1) и 0.35 мм (2); точками отмечены локальные экстремумы амплитуды, расположенные на примерно одинаковом расстоянии друг от друга.

давлением вдоль границы раздела. В головную часть спонтанные возмущения не проникают из-за условия Чепмена–Жуге, а в основной части они слишком малы (их можно увидеть только на профиле dr/dl , см. фиг. 10), чтобы повлиять на развитие задаваемых возмущений.

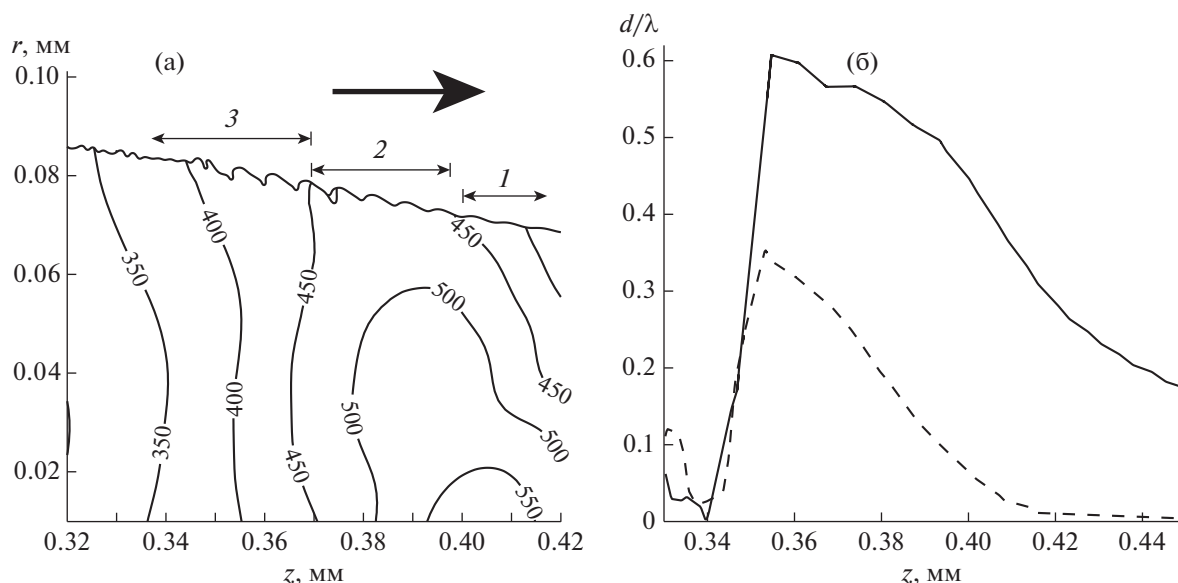
Начальное возмущение задавалось перед уже сформировавшейся квазистационарной волной при $t = 0.1$ нс, начиная с точки $z_0 \approx 0.33$ мм, расположенной на небольшом расстоянии от головной части волны в области радиационного предвестника, где все функции, включая r -координату границы раздела, незначительно отличаются от своих значений при $t = 0$. Для всех узлов i вдоль границы раздела, начиная с ближайшего к z_0 , r -координата мгновенно изменяется на величину $\Delta r_i = 0.5d_0 \sin(2\pi z_i/\lambda)$, где d_0 – амплитуда, λ – длина волны начального возмущения.

Длина волны выбирается равной 8 мкм, что для сетки с начальным шагом $h_z = 0.25$ мкм дает $\Delta n = 32$ разностных интервала на длине волны, как и в расчетах для тестовой задачи из разд. 2. Если учесть, что шаг сетки вдоль длины границы раздела при $t = 0.1$ нс несколько больше h_z , получается немного меньшее значение $\Delta n \approx 30.5$.

Результаты расчета при $t = 0.14$ нс представлены на фиг. 12 для двух значений начальной относительной амплитуды d_0/λ . На фиг. 12а для $d_0/\lambda = 0.01$ показаны профиль $r(z)$ границы раздела и поле давления в горючем. Упомянувшиеся выше области течения показаны стрелками и цифрами: головная часть волны горения (область 1) при $0.4 \leq z \leq 0.48$ мм (правая граница области располагается правее показанного фрагмента течения), основная часть волны горения при $0.37 \leq z \leq 0.4$ мм (область 2) и волна разрежения при $z \leq 0.37$ мм (область 3).

Точка начала колебаний сместилась вправо относительно исходного значения z_0 , что связано с движением горючего по направлению движения волны горения в самой волне и сразу за ней в волне разрежения. В головной части волны горения амплитуда возмущения практически не растет. Ее рост начинается в основной части волны горения, где скорость скольжения максимальна. Наличие характерных наклонных гребней указывает на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца как на основной механизм развития неустойчивости на нелинейной стадии.

На фиг. 12б показан результат описанной выше обработки профилей $r(z)$ для $d_0/\lambda = 0.01$ и 0.1. Для $d_0/\lambda = 0.1$ амплитуда возмущения заметно больше, чем для 0.01, и начинает расти уже в головной части волны, где появляются характерные наклонные гребни неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.



Фиг. 12. Изолинии давления в горючем (числа у кривых показывают значения давления в МПа) и граница раздела (жирная линия) для начальной относительной амплитуды возмущения перед квазистационарной волной горения $d_0/\lambda = 0.01$ (а), а также профили относительной амплитуды для $d_0/\lambda = 0.1$ (сплошная линия) и 0.01 (штриховая линия) (б); жирная стрелка на фиг. (а) указывает направление движения волны; пронумерованные стрелки показывают характерные области течения: головную часть волны с линейным профилем давления (1), основную часть волны с максимальным давлением (2) и волну разрежения (3); $t = 0.14$ нс.

Введем в рассмотрение две z -координаты характерных точек на границе раздела: рассмотренную ранее координату z_w точки с максимальным давлением, которую можно выбрать в качестве координаты волны горения, и координату z_* , в которой заканчивается головная часть волны. Так как волна горения близка к стационарной, разность $z_* - z_w$ можно полагать не зависящей от времени.

Естественно предположить, что спонтанные возмущения не проникают в область $z_w \leq z \leq z_*$ из-за условия Чепмена–Жуге. Если предположить также, что спонтанные возмущения вдоль волны горения (см. [20]) не меняют ее структуру и квазистационарный режим движения, то приведенные на фиг. 12б функции $d(z)$ на интервале $z_w \leq z \leq z_*$ можно считать универсальными, т.е. функция $d(z_w + z')$ не зависит от t на интервале $0 \leq z' \leq z_* - z_w$. При необходимости можно приближенно вычислить скорость волны и получить универсальную функцию амплитуды возмущения от относительного времени $t - t_*$, где t_* — момент прохождения правой границы головной части волны через z_* .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование ограничено двумерными возмущениями границы раздела сред. Использовалась вычислительная технология, основанная на явном выделении границы раздела в виде одной из линий регулярной сетки. Для построения регулярных сеток в областях с криволинейными границами используется барьерный метод, надежно генерирующий сетки из выпуклых четырехугольников. Демонстрируется возможность применения технологии для расчета нелинейной стадии развития неустойчивости с отношением амплитуды возмущения к длине волны больше единицы. Возможность моделирования неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и Кельвина–Гельмгольца тестируется на упрощенной задаче с однородным вдоль границы раздела возмущением.

Предложен способ визуализации спонтанных возмущений на ранней стадии, когда их еще нельзя увидеть на профиле границы раздела. Показано, что ошибка округления компьютера играет незначительную роль в их формировании.

Для поздней стадии развития возмущений предложен способ получения профиля локальной амплитуды колебаний вдоль границы раздела. Спонтанное возмущение на поздней стадии своего развития имеет вид чередующихся участков с максимальной локальной амплитудой и участков с почти нулевой амплитудой, а на еще более поздней стадии появляются достаточно большие интервалы без минимума амплитуды.

Сравнение расчетов на основной сетке и сетке с удвоенным числом узлов вдоль границы раздела показало, что спонтанное возмущение имеет тенденцию к сходимости, по крайней мере, до начала процесса формирования квазистационарной волны.

Показано, что при формировании квазистационарной волны и ее последующем движении возникает дополнительное спонтанное возмущение, связанное, скорее всего, с неустойчивостью квазистационарной волны.

Изучено взаимодействие задаваемого синусоидального возмущения с квазистационарной безударной волной горения, которая состоит из головной части с линейным профилем давления и основной части, являющейся окрестностью точки с максимальным давлением на границе раздела. Рассмотрены возмущения с отношением начальной амплитуды к длине волны 0.01 и 0.1. В обоих случаях с ростом амплитуды возмущения возникают характерные наклонные гребни, что указывает на неустойчивость Кельвина—Гельмгольца как на основной механизм развития неустойчивости на нелинейной стадии. Волна горения не разрушается.

Если предположить, что спонтанные возмущения не проникают в область волны горения из-за условия Чепмена—Жуге, а возможные спонтанные возмущения вдоль волны горения не меняют структуры волны и ее квазистационарность, то из полученных профилей амплитуды колебаний можно выделить универсальную часть, не зависящую от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. М.: Физматлит, 2006.
2. Змитренко Н.В., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Моделирование развития неустойчивости Кельвина—Гельмгольца в задачах физики высоких плотностей энергии // Научная визуализация. 2020. Т. 12. № 1. С. 103–111.
<https://doi.org/10.26583/sv.12.1.09>
3. Бельков С.А., Бондаренко С.В., Вергунова Г.А. и др. Влияние пространственной неоднородности нагрева на сжатие и горение термоядерной мишени при прямом многопучковом облучении лазерным импульсом мегаджоульного уровня // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. № 2. С. 396–408.
<https://doi.org/10.7868/S0044451017020183>
4. Гуськов С.Ю., Демченко Н.Н., Змитренко Н.В. и др. Сжатие и горение термоядерной мишени при зажигании фокусирующейся ударной волной в условиях нарушения симметрии облучения лазерными пучками // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. № 5. С. 889–900.
<https://doi.org/10.31857/S0044451020050120>
5. Долголева Г.В., Лебо И.Г. К вопросу о разработке нейтронного источника для ядерно-термоядерного реактора с лазерным возбуждением // Квантовая электроника. 2019. Т. 49. № 8. С. 796–800.
6. Долголева Г.В., Лебо А.И., Лебо И.Г. Моделирование сжатия термоядерных мишеней на уровне энергии лазера порядка 1 МДж // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 1. С. 23–32.
7. Тишкин В.Ф., Гасилов В.А., Змитренко Н.В. и др. Современные методы математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей и турбулентного перемешивания // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 8. С. 57–90.
<https://doi.org/10.20948/mm-2020-08-05>
8. Аврорин Е.Н., Бунатян А.А., Гаджиев А.Д. и др. Численные расчеты термоядерной детонации в плотной плазме // Физика плазмы. 1984. Т. 10. Вып. 3. С. 514–521.
9. Basko M.M., Churazov M.D., Aksenov A.G. Prospects of heavy ion fusion in cylindrical geometry // Laser and Particle Beams. 2002. V. 20. P. 411–414.
<https://doi.org/10.1017/S0263034602203080>
10. Vatulin V.V., Vinokurov O. A. Fast ignition of the DT fuel in the cylindrical channel by heavy ion beams // Laser and Particle Beams. 2002. V. 20. P. 415–418.
<https://doi.org/10.1017/S0263034602203092>
11. Ramis R., Meyer-ter-Vehn J. On thermonuclear burn propagation in a pre-compressed cylindrical DT target ignited by a heavy ion beam pulse // Laser and Particle Beams. 2014. V. 32. P. 41–47.
<https://doi.org/10.1017/S0263034613000839>

12. *Basov N.G., Gus'kov S.Yu., Feoktistov L.P.* Thermonuclear gain of ICF targets with direct heating of ignitor // *J. Sov. Laser Res.* 1992. V. 13. № 5. P. 396–399.
<https://doi.org/10.1007/BF01124892>
13. *Tabak M., Hammer J., Glinsky M.E., et al.* Ignition and high gain with ultrapowerful lasers // *Phys. Plasmas.* 1994. V. 1. № 5. P. 1626–1634.
<https://doi.org/10.1063/1.870664>
14. *Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчьян А.А.* Быстрое зажигание пучком протонов и горение цилиндрической оболочечной DT-мишени // *Физика плазмы.* 2019. Т. 45. № 9. С. 804–824.
<https://doi.org/10.1134/S0367292119080043>
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
16. *Феоктистов Л.П.* Термоядерная детонация // *УФН.* 1998. Т. 168. № 11. С. 1247–1255.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0168.199811f.1247>
17. *Хищенко К.В., Чарахчьян А.А.* Отражение детонационной волны от плоскости симметрии внутри цилиндрической мишени для управляемого термоядерного синтеза // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 10. С. 131–149.
<https://doi.org/10.31857/S0044466921100069>
18. *Richtmyer R.D.* Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 297–319.
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160130207>
19. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005.
20. *Васильев А.А., Троцюк А.В.* Экспериментальное исследование и численное моделирование расширяющейся многофронтной детонационной волны // *Физика горения и взрыва.* 2003. Т. 39. № 1. С. 92–103.
21. *Чарахчьян А.А.* Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова границы раздела сред при прохождении через нее двух последовательных ударных волн // *Приклад. мех. и техн. физ.* 2000. Т. 41. № 1. С. 28–37.
22. *Charakhch'yan A.A.* Reshocking at the non-linear stage of Richtmyer–Meshkov instability // *Plasma Phys. Controlled Fusion.* 2001. V. 43. P. 1169–1179.
<https://doi.org/10.1088/0741-3335/43/9/301>
23. *Schilling O., Latini M., Don M.S.* Erratum: Physics of reshock and mixing in single-mode Richtmyer–Meshkov instability [Phys. Rev. E 76, 026319 (2007)] // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 85. P. 049904(E).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.049904>
24. *Федоренко Н.В.* Ионизация при столкновениях ионов с атомами // *УФН.* 1959. Т. 68. № 8. С. 481–511.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0068.195907g.0481>
25. *Khishchenko K.V.* Equations of state for two alkali metals at high temperatures // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2008. V. 98. P. 032023.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/98/3/032023>
26. *Charakhch'yan A.A., Khishchenko K.V.* Plane thermonuclear detonation waves initiated by proton beams and quasi-one-dimensional model of fast ignition // *Laser and Particle Beams.* 2015. Vol. 33. P. 65–80.
<https://doi.org/10.1017/S0263034614000780>
27. *Калиткин Н.Н.* Модель атома Томаса–Ферми с квантовыми и обменными поправками // *ЖЭТФ.* 1960. Т. 38. № 5. С. 1534–1540.
28. *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В.* Таблицы термодинамических функций вещества при высокой концентрации энергии. Препринт ИПМ АН СССР 14., 1976.
29. *Holzappel W.B.* Equation of state for Cu, Ag, and Au and problems with shock wave reduced isotherms // *High Pressure Res.* 2010. V. 30. P. 372–394.
<https://doi.org/10.1080/08957959.2010.494845>
30. *Баско М.М.* Диффузионное описание переноса энергии заряженными продуктами термоядерных реакций // *Физика плазмы.* 1987. Т. 13. № 8. С. 967–973.
31. *Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L.* An arbitrary Lagrangian–Eulerian computing method for all flow speeds // *J. Comput. Phys.* 1974. V. 14. № 3. P. 227–253.
32. *Van Leer B.* A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
33. *Родионов А.В.* Повышение порядка аппроксимации схемы С. К. Годунова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
34. *Colella P., Woodward P.R.* The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // *J. Comput. Phys.* 1984. V. 54. P. 174–201.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8)
35. *Чарахчьян А.А.* Расчет сжатия дейтерия в конической мишени в рамках уравнений Навье–Стокса для двухтемпературной магнитной гидродинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 5. С. 766–784.
36. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.

37. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
38. Грынъ В.И., Фролова А.А., Чарахчян А.А. Сеточный генератор барьерного типа и его применение для расчета течений с подвижными границами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 6. С. 904–917.
39. Charakhch'yan A.A., Ivanenko S.A. A variational form of the Winslow grid generator // J. Comput. Phys. 1997. V. 136. P. 385–398.
<https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5750>
40. Иваненко С.А. Построение невырожденных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1498–1506.
41. Meyer K.A., Blewett P.J. Numerical investigation of the stability of a shock-accelerated interface between two fluids // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 5. P. 753–759.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

**TWO-GRID FINITE ELEMENT GALERKIN APPROXIMATION
OF EQUATIONS OF MOTION ARISING IN OLDROYD FLUIDS
OF ORDER ONE WITH NON-SMOOTH INITIAL DATA¹⁾**

© 2023 г. D. Goswami^{1,*}, P. D. Dam'azio^{2,**}, J. Yun Yuan^{2,***}, B. Bir^{1,****}

¹ Department of Mathematical Sciences, Tezpur University, Tezpur, Sonitpur, Assam-784028, India

² Department of Mathematics, Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico,
Curitiba, Cx.P: 19081, CEP: 81531-990, PR, Brazil

*e-mail: deepjyoti@tezu.ernet.in

**e-mail: pddamazio@ufpr.br

***e-mail: Jin@mat.ufpr.br

****e-mail: bikramb@tezu.ernet.in

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.
Переработанный вариант 01.08.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Двухсеточная конечно-элементная схема Галеркина для аппроксимации уравнений движения жидкости Олдройда первого порядка с негладкими начальными данными. Предложен численный метод решения уравнений движения жидкости с памятью (жидкость Олдройда). Алгоритм включает двухстадийное расщепление — нелинейная задача решается на грубой сетке, а затем нелинейные слагаемые, приближенные на грубой сетке, полагаются известными правыми частями для решения линейных уравнений на подробной сетке. Получены априорные оценки погрешности используемого метода конечных элементов, обосновывающие сходимость и устойчивость алгоритма.

Ключевые слова: метод конечных элементов, жидкость Олдройда, схема Галеркина, многосеточный метод.

DOI: 10.31857/S0044466923040063, **EDN:** IPDEXD

¹⁾ Полный текст статьи публикуется в английской версии журнала.