

Том 63, Номер 7

ISSN 0044-4669

Июль 2023



ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 63, номер 7, 2023 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Индикаторы устойчивости неотрицательных матриц.
Параметрический и разреженный случаи

В. Н. Разжевайкин

1061

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Достаточные условия разрешимости задачи преследования
при импульсном воздействии

Г. М. Абдуалимова, Н. А. Мамадалиев, М. Тухтасинов

1073

О существовании оптимального управления в задаче оптимизации
младшего коэффициента полулинейного эволюционного уравнения

А. В. Чернов

1084

Метод условного градиента для экстремальных задач с ограничением
в виде пересечения выпуклой гладкой поверхности и выпуклого компакта

Ю. А. Черняев

1100

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Four Classes of Definite Integrals about Hyperbolic and Trigonometric Functions

C. Li, W. Chu

1108

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений
некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме.
III. Задачи Коши

М. О. Корпусов, Е. А. Овсянников

1109

“Паразитные” собственные значения спектральных задач
для оператора Лапласа с краевыми условиями третьего типа

С. А. Назаров

1128

Обратные задачи для уравнения Гельмгольца по отысканию
правой части с нелокальным интегральным наблюдением

К. Б. Сабитов

1145

Об одном методе решения смешанной краевой задачи для уравнения
параболического типа с помощью модифицированных операторов
синк-приближений

А. Ю. Трынин

1156

Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения
умеренно длинных продольных волн в вязкоупругом стержне

Х. Г. Умаров

1177

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Laser-Induced Thermoelastic Response in AN Isotropic Medium
Having Variable Material Moduli

Aktar Seikh, Soumen Shaw, Smita Pal (Sarkar)

1192

Квазигазодинамическая модель и численный алгоритм для описания смесей разнородных флюидов	
<i>Т. Г. Елизарова, Е. В. Шильников</i>	1193
Модифицированный метод секущих для энтропийных решеточных уравнений Больцмана	
<i>О. В. Ильин</i>	1206
О точности схем сквозного счета при численном моделировании газодинамических ударных волн	
<i>В. А. Колотиллов, А. А. Курганов, В. В. Остапенко, Н. А. Хандеева, Ш. Чу</i>	1216
Метод двойственности для решения 3D контактной задачи с трением	
<i>Р. В. Намм, Г. И. Цой</i>	1225
A Modified Runge–Kutta Scheme for the Generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers’ Equation	
<i>Qiubin Xu, Yan Liuy</i>	1238

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 519.614.2

ИНДИКАТОРЫ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ И РАЗРЕЖЕННЫЙ СЛУЧАИ

© 2023 г. В. Н. Разжевайкин^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: razzh@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.
Переработанный вариант 06.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Излагаются методы алгоритмического построения и обсуждаются возможности использования индикаторов устойчивости неотрицательных матриц в прикладных задачах, возникающих в современной математической биологии и эпидемиологии. Указываются специфические особенности таких индикаторов при их применении в рамках задач о параметрической потере устойчивости тривиальных равновесных состояний дискретных динамических систем. Приводятся оценки эффективности алгоритмов, основанных на предложенных методах, в случае систем, задаваемых разреженными матрицами. Обсуждаются отдельные примеры использования построенных алгоритмов для таких систем. Библ. 16.

Ключевые слова: неотрицательная матрица, индикатор устойчивости, дискретная динамическая система, параметрическая система, разреженная матрица.

DOI: 10.31857/S004446692307013X, **EDN:** ZXWNEA

1. ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость неотрицательной квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$, понимается в настоящей работе в смысле локализации ее спектра внутри единичного круга. Индикаторы устойчивости — это сравнительно простые конструкции, сводящиеся к конечному числу арифметических действий над элементами матрицы, позволяющие дать ответ на вопрос о такой локализации. В случае матриц малого порядка, т.е. при не очень больших n , эти конструкции могут иметь вид вполне обозримых формул, что позволяет использовать их для решения задач как теоретического, так и практического характера. Подавляющая их часть относится к области математической биологии.

Вот некоторые из них.

Первая — построение биологического потенциала популяции. Содержательный смысл этого потенциала — среднее число потомков, приходящихся на одну особь в течение всей ее жизни. Здесь следует уточнить, что принимаются в расчет только те потомки, которым удастся не только дожить до возраста родителя, при котором они появились на свет, но и занять его место в репродуктивной структуре популяции. При этом ни сам возраст, ни это место значения не имеют. По умолчанию для живородящих двуполых видов принято считать таким возрастом возраст плода, при котором он покидает утробу матери, ограничиваясь только той частью популяции, которая принимает непосредственное участие в деторождении, т.е. самками.

Для моделей с дискретным временем наиболее характерным примером биологического потенциала является построенный в модели Лесли [1], которая описывает линейную динамику структурированной по возрасту популяции. В этой модели состояния популяции на двух последовательных моментах времени связаны посредством неотрицательной матрицы перехода (матрицы Лесли). При этом экспоненциальный рост или убывание общей численности популяции определяются локализацией по отношению к единице спектрального радиуса этой матрицы. Но они также могут определяться такой же локализацией биологического потенциала популяции, представляемого в виде полинома от элементов этой матрицы, который может быть сконструирован на основе ее характеристического полинома. Другие задачи (например, в эпидемиологии роль биологического потенциала выполняет коэффициент распространения эпидемии, т.е.

среднее число вновь зараженных от одного заболевшего) приводят к необходимости рассмотрения произвольного набора параметров структурированности (стадии развития, местообитание и т.п.). Биологический потенциал при этом приходится строить уже для моделей с более общими, чем в модели Лесли, неотрицательными матрицами перехода.

Вторая проблема — построение функционалов отбора в задачах эволюционной оптимальности. О постановке задач такого рода см. [2]. В этих уже нелинейных задачах устойчивость установившегося положения равновесия возможна только в случае экстремальности спектральных характеристик для ограничений вычисленного в этом положении равновесия якобиана правой части модельной дискретной динамической системы на ненулевые компоненты этого положения равновесия, соответствующие выжившим видам. Вместо этих характеристик можно использовать монотонно связанные с ними функции. В частности, на эту роль годятся биологические потенциалы популяций и другие индикаторы устойчивости матриц перехода. Отметим, что задачи эволюционной оптимальности изначально требуют аналитического задания функционалов отбора, не привязанных к каким-либо конкретным значениям элементов матрицы, поскольку эти функционалы фигурируют в задачах оптимизации по параметрам отбора. При этом существенное значение приобретает возможность решения оптимизационных задач с учетом доступных для них способов построения уравнений, учитывающих производные построенных функционалов по этим параметрам.

Отдельные результаты по построению индикаторов устойчивости в работах, ориентированных на приложения в области биологии, называемых наряду с биологическими потенциалами также индикаторами потенциального роста (см. [3]), были получены в рамках обобщений модели Лесли, таких как модели Лефковича [4] и Логофета (см. [5], [6], гл. 9). К числу таких результатов относятся теоремы о связи индикатора суммы двух матриц с индикатором произведения одной из них на вычисленную в единице резольвенту другой (см. [7], [8]), об одноранговых возмущениях неотрицательных матриц [9] и т.п. Обсуждение вопросов конструирования и анализа неотрицательных матриц, применяемых в дискретных популяционных моделях, можно найти в [10].

Один из вариантов использования индикаторов устойчивости в задачах моделирования динамики развития видов, механизм размножения которых не ограничивается единственной стадией, продемонстрирован на примере исследования прохождения жизненных стадий для одного из растительных видов (точнее для травянистого вида *Eritrichium caucasicum*), см. [11].

Решение задачи о построении индикаторов устойчивости попутно позволяет отвечать и на более утилитарные вопросы об устойчивости численно заданных неотрицательных матриц. Здесь уже отпадает необходимость ограничиваться малыми порядками, поскольку исчезает требование в явных формулах от элементов матрицы. При этом для расчетов в большинстве случаев можно воспользоваться весьма обширным набором устанавливающих такую устойчивость критериев, включающих критерии невырожденности M -матриц (см., например, [12]). Многие из этих критериев вполне пригодны для построения индикаторов устойчивости в обозначенном выше смысле. Однако в ряде вырожденных случаев, которые регулярным образом могут встречаться только в системах с параметрами, подходы, основанные на этих критериях, могут давать осечку. Так, например, критерии, базирующиеся на положительности ведущих главных миноров, в вырожденных случаях могут породить функцию, не пригодную для роли индикатора (см. пример в [13]).

В настоящее время имеется большое число статей, монографий, работающих вычислительных программ, так или иначе связанных с решением линейных задач, включая исследование спектральных свойств матриц. В рамках стандартных постановок представленных в них методов вполне достаточно, чтобы ответить на конкретные вопросы, возникающие в процессе изучения сложных систем, включающих биологические сообщества и учитывающих взаимодействие между ними. Технику конструирования прямых численных алгоритмов за конечное число итераций, дающих точный ответ на вопрос об устойчивости конкретной матрицы, можно без особых затруднений воспроизвести, базируясь на апробированных пакетах в системе MATLAB, если предварительно вооружиться лежащей в их основе теоретической базой, изложенной, например, в монографиях [14] и [15]. Последняя из перечисленных представляется наиболее свежей как с точки зрения ориентации на новейший вычислительный инструментарий, так и по охвату фигурирующей в ней библиографии.

Ключевой особенностью представленного в настоящей работе подхода являются простота и универсальность при решении конкретной задачи об устойчивости неотрицательной матрицы, задаваемой как численно, так и параметрически. Возможность такого задания означает допусти-

мость вырождений, неприемлемых с точки зрения непосредственного использования стандартных алгоритмов. Этот подход базируется на алгоритме, обоснование которого можно найти в [13]. Он будет весьма полезным в качестве альтернативы также для тех ученых, которые сталкиваются в своей деятельности со сложными линейными задачами лишь эпизодически, уделяя основное внимание не техническим, а содержательным аспектам своих исследований.

Особенно эффективным обозначенный алгоритм оказывается в случае разреженных матриц, причем эффективность быстро возрастает по мере сокращения доли ненулевых элементов. Более того, по мере такого сокращения снижается необходимость точного задания все большего числа элементов матрицы. Формулы, задающие индикаторы устойчивости для разреженных матриц, могут оказаться сравнительно простыми даже в случае больших порядков. При этом следует придавать значение только тем элементам, которые фигурируют в таких формулах. На этом пути весьма полезными могут оказаться методы предварительной перенумерации в матрице с заданной симметричной структурой разреженности, широко представленные в монографии [16].

Целью настоящей работы, помимо изложения основных методов построения индикаторов устойчивости неотрицательных матриц, ориентированного преимущественно на цельность изложения, является исследование вопросов, касающихся свойств непрерывности этих индикаторов в задачах о параметрической потере устойчивости тривиальных равновесных состояний динамических систем и вопросов сложности построения индикаторов разреженных матриц, довольно часто встречающихся при решении задач популяционной динамики в условиях распределения по множеству ареалов, имеющих между собой редкие связи. В частности, это относится и к задачам распространения эпидемий между локализованными местообитаниями населения, взаимные перемещения между которыми крайне незначительны.

2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть M_n — множество вещественных $n \times n$ матриц $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n$, $M_n^+ = \{A \in M_n : A \geq 0\}$ (последнее неравенство означает выполнение совокупности неравенств $a_{ij} \geq 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$), $I = (\delta_{ij})$ — единичная матрица, $\sigma(A)$ — спектр матрицы $A \in M_n$, $n = \dim A$ — ее порядок, $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ — спектральный радиус, $P(\lambda, A) = \det(\lambda I - A)$ — характеристический полином матрицы A , $\|\cdot\|$ — норма (вектора, оператора).

Под *перенумерацией* в матрице $A \in M_n$ мы понимаем одновременную перенумерацию ее строк и столбцов. Главная $k \times k$ подматрица J для $n \times n$ матрицы A с $k \leq n$ (пишем $J \subseteq A$) — это подматрица матрицы A , занимающая верхнюю левую позицию после подходящей перенумерации в последней.

Граф матрицы $A \in M_n^+$ — это ориентированный граф $\Gamma(A)$ с множеством из n вершин $W = \{1, \dots, n\}$ и направленными звеньями $j \rightarrow i$ между ними, соответствующими ненулевым элементам a_{ij} матрицы A . Перенумерации в матрице A соответствует перенумерация множества вершин W графа $\Gamma(A)$. *Структура графа* $\Gamma(A)$ — это класс эквивалентности по отношению к такой перенумерации. В число свойств, относящихся к структуре графа $\Gamma(A)$, входят такие, как наличие и свойства циклов у графа, структура фактор-графа при отождествлении вершин графа $\Gamma(A)$, расположенных на циклах, число и характер несвязных между собой кластеров такого фактор-графа, представляющих собой цепочки, элементы которых соответствуют неразложимым главным подматрицам матрицы A . В число таких свойств входит и свойство неразложимости матрицы A , заключающееся в существовании на ее графе замкнутого пути, обходящего все его вершины. Подходящей перенумерацией в матрице A ее можно привести к блочно-треугольному виду с квадратными неразложимыми блоками на главной диагонали.

Матрицу $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ с $\hat{a}_{ij} = \text{sign } a_{ij}(\lambda)$ мы будем называть *структурой разреженности* матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n^+$. Семейство матриц $A(\lambda) \subset M_n^+$, имеющих общую структуру разреженности, имеет и общий граф $\Gamma(\hat{A}) = \Gamma(A(\lambda))$, и наоборот, так что звену $j \rightarrow i$ графа матрицы $\Gamma(A(\lambda))$ соответствует элемент структуры разреженности $\hat{a}_{ij} = 1$. Заметим, что отношение эквивалентности матриц, заключающееся в наличии общей структуры разреженности, является более сильным, чем общность структур их графов, различаясь возможностью для последних перестановок в матрице. Матрица $A = (a_{ij})$ с *симметричной структурой разреженности* определяется условием: $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$.

3. ИНДИКАТОРЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Две функции $f_1 : \Omega \rightarrow M_{n_1}$ и $f_2 : \Omega \rightarrow M_{n_2}$ с одной и той же областью определения Ω такие, что для любого $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\text{sign}(r(f_1(\omega)) - 1) = \text{sign}(r(f_2(\omega)) - 1)$$

мы назовем r -эквивалентными (символ r здесь означает, что отношение эквивалентности определяется свойствами спектрального радиуса значений этих функций). В случае $n_2 = 1$ функцию f_2 , r -эквивалентную функции f_1 с областью определения Ω , назовем ее *индикатором устойчивости* (или с учетом области значений последней – матрицы f_1 на множестве Ω). Имеет место следующая (см. [13])

Теорема 1. Тождественная функция $f_k : A_k \rightarrow A_k \in M_k^+$, $A_k = (a_{ij}^k)$, с областью определения $M_k^+ \cap \{A_k : a_{kk}^k < 1\}$ r -эквивалентна функции $f_{k-1} : A_k \rightarrow A_{k-1} \in M_{k-1}^+$ с $A_{k-1} = (a_{ij}^{k-1}) \in M_{k-1}^+$ и

$$a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^k + \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{1 - a_{kk}^k}. \quad (1)$$

Переход от матрицы A_k порядка k к матрице A_{k-1} порядка $k-1$, описанный в формулировке теоремы 1, мы будем называть процедурой *сокращения порядка* (или *СП-методом*).

Замечание 1. Процедура сокращения порядка имеет очень простой и наглядный смысл. От матрицы отрезаются последние строка и столбец, а к каждому из оставшихся элементов прибавляется произведение отрезанных, имеющих с ним общую строку или столбец, деленное на разницу между единицей и отрезанным диагональным элементом матрицы. Элементы матрицы A_k , используемые в формуле (1) для вычисления элемента a_{ij}^{k-1} матрицы A_{k-1} , выделены в ее представлении вида:

$$A_k = \left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij}^k & \dots & a_{ik}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{kj}^k & \dots & a_{kk}^k \end{array} \right).$$

В терминах графа $\Gamma_k = \Gamma(A_k)$ матрицы A_k описанная процедура в случае $a_{kk}^k < 1$ сводится к удалению k -й вершины с заменой каждой проходящей через нее цепочки $j \rightarrow k \rightarrow i$ с $i, j < k$, на звено $j \rightarrow i$ и удалению повторных звеньев, так что звено $j \rightarrow i$ принадлежит графу Γ_{k-1} тогда и только тогда, когда либо оно принадлежало графу Γ_k , либо последнему принадлежали оба звена $j \rightarrow k$ и $k \rightarrow i$. Последовательное $(n-1)$ кратное повторение процедуры построения по матрице A_k матрицы A_{k-1} с элементами из (1), если таковое возможно, позволяет получить индикатор устойчивости исходной матрицы $A = A_n = (a_{ij}^n)$. Препятствиями для выполнения очередного шага могут быть следующие.

1. Очередное $a_{kk}^k > 1$. В этом случае $r(A_k) > 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) > 1$.
2. Очередное $a_{kk}^k = 1$ и для некоторого номера $i < k$ $a_{ii}^k \neq 1$. В этом случае подходящей перенумерацией в матрице A_k , переводящей такой элемент матрицы в нижний правый угол, можно добиться либо возможности продолжения процедуры (в случае $a_{ii}^k < 1$), либо выполнения условия 1 (в случае $a_{ii}^k > 1$).
3. Все $a_{ii}^k = 1$, $i \leq k$. В этом случае возможны два варианта.
 - 3.1. Существует неразложимая главная подматрица $J \subseteq A_k$ порядка, большего единицы. В этом случае $r(A_k) \geq r(J) > 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) > 1$.
 - 3.2. Подходящей перенумерацией в матрице A_k можно привести ее к треугольному виду с единицами на главной диагонали. В этом случае $r(A_k) = 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) = 1$.

Замечание 2. Приведенных здесь результатов достаточно для проверки устойчивости неотрицательной матрицы в случае численного задания ее элементов. При этом необходимость в перенумерациях, как правило, отпадает из-за отсутствия в реальных задачах точных попаданий элементов исходной матрицы на значения, обеспечивающие выполнение условий типа равенства, при которых такая потребность может возникнуть. Поскольку эти значения отличны от нуля, то от подобных условий можно избавиться сколь угодно малым возмущением положительных элементов матрицы, сохраняя тем самым ее структуру разреженности.

Выражения для индикатора устойчивости матрицы в виде формулы от ее элементов без привязки к их конкретным значениям можно получить путем многократного применения подстановки (1), сокращая последовательно порядок матрицы вплоть до единичного, т.е. выстраивая в соответствии с теоремой 1 цепочку

$$A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_1 = (a_{11}^1). \quad (2)$$

Получаемое в результате выражение a_{11}^1 вполне пригодно на роль индикатора устойчивости исходной матрицы с двумя оговорками.

Первая. Выражение a_{11}^1 представляет собой многоэтажную дробь от элементов матрицы, которая уже при сравнительно небольших порядках становится необозримой.

Вторая. На каждой итерации при построении цепочки (2) требуется оговаривать в качестве дополнительного условия выполнение неравенства $a_{kk}^k < 1$ для $k = 2, \dots, n$.

Последние условия можно ослабить до условий $a_{kk}^k \neq 1$. Точнее имеет место следующая (см. [13])

Теорема 2. Функция $F(A_n) = \max_{k=1, \dots, n} \{a_{kk}^k\}$, вычисленная последовательным применением подстановок (1) при $k = n, \dots, 1$ начиная с $A_n = (a_{ij}^n) \in M_n^+$, является индикатором устойчивости матрицы A_n на подмножестве M_n^+ , неявно задаваемом посредством указанных подстановок неравенствами $a_{kk}^k \neq 1$, $k = n, \dots, 2$.

Замечание 3. Неравенства $a_{kk}^k \neq 1$ в теореме 2 можно проигнорировать, если допустить бесконечные значения для элементов матриц A_k с использованием следующих договоренностей: 1)

для матрицы $A \geq 0$ с бесконечными элементами $r(A) = \sup_{0 \leq A' \leq A, \|A'\| < \infty} r(A') \cdot \frac{0}{0} = 0 \cdot \infty = 0$.

4. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ

Функция $F(A)$ матрицы $A \geq 0$, построенная в предыдущем разделе, хотя и является решением задачи о конструировании индикатора устойчивости, но не обладает гладкостью, позволяющей эффективно использовать ее в задачах практического характера. К числу таковых относится задача о потере устойчивости тривиального положения равновесия системы

$$u(t+1) = A(\lambda)u(t) \quad (3)$$

при непрерывном изменении параметра λ . В системе (3) $u \geq 0$ есть n -мерный вектор, λ — набор параметров, принадлежащих некоторому топологическому пространству Λ , $A(\lambda) \in M_n^+$ при каждом λ . В случае нормированного Λ и гладкого отображения $A : \Lambda \rightarrow M_n^+$, $\lambda \mapsto A(\lambda)$, при изменении λ все выражения $a_{kk}^k(\lambda) = a_{kk}^k$, $k = 1, \dots, n$, вычисленные согласно (1), будут гладко изменяться, если все они, кроме, быть может, $a_{11}^1(\lambda)$, остаются меньшими единицы. В этом случае $a_{11}^1(\lambda)$ является гладкой функцией от λ , и знак ее отклонения от единицы совпадает с аналогичным знаком для спектрального радиуса $r(A)$, т.е. при указанном дополнительном ограничении функция $a_{11}^1(\lambda)$ может выполнять роль индикатора устойчивости матрицы $A(\lambda) \geq 0$, причем уже достаточно гладкого для оперирования с ним в задачах, требующих учета производных.

Приводимая ниже теорема предназначена для выявления свойств непрерывности индикаторов устойчивости матрицы по входным параметрам, так что $\Lambda = \{\lambda\}$ — некоторое топологическое пространство.

Теорема 3. Пусть семейство матриц $A(\lambda) \in M_n^+$, имеет общую неразложимую структуру разреженности $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, непрерывно зависит от λ , и все ненулевые элементы равномерно по λ ограничены снизу: $a_{ij}(\lambda) > a > 0$. Предположим, что для некоторой последовательности $\{\lambda_p\}$ выполнены следующие условия:

- 1) $\lambda_p \rightarrow \lambda_0$ при $p \rightarrow \infty$;
- 2) $r(A(\lambda_p)) < 1$ при всех $p \in \mathbb{N}$;
- 3) $r(A(\lambda_0)) = 1$.

Тогда $a_{11}^1(\lambda_0) = 1$ для a_{11}^1 , вычисленного СП-методом (1).

Лемма. Итерационная процедура (1) в случае положительности знаменателей сохраняет неразложимость матриц.

Доказательство леммы следует из сохранения возможности построения пути из одной произвольной вершины в другую вдоль графа неразложимой матрицы. Так, если путь в графе $\Gamma_k = \Gamma(A_k)$ проходил через выкидываемую в процессе применения алгоритма (1) вершину с номером k , т.е. имел некоторые звенья $j \xrightarrow{k} k$ и $k \xrightarrow{k} i$ (индекс k над звеном — это индекс графа Γ_k), соответствующие положительным элементам a_{kj}^k и a_{ik}^k , то согласно (1) будет выполнено неравенство $a_{ij}^{k-1} > 0$, т.е. цепочка $j \xrightarrow{k} k \xrightarrow{k} i$ в графе Γ_k после применения очередного шага алгоритма заменится на стягивающее звено $j \xrightarrow{k-1} i$ в графе Γ_{k-1} . Таким образом, для любых двух вершин графа Γ_{k-1} может быть построен соединяющий их путь. Это либо старый путь вдоль графа Γ_k в случае, если он не проходил через вершину с номером k , либо путь со стягивающим звеном вместо двузвенной цепочки в случае, если эта вершина встречается на пути вдоль графа Γ_k .

Доказательство теоремы. В условиях теоремы для всех конечных p выполняются неравенства $r(A(\lambda_p)) < 1$, так что $F(A(\lambda_p)) < 1$, и в силу положительности знаменателей в (1) все матрицы $A_l(\lambda_p)$, $l = 1, \dots, n$, неотрицательны и с учетом леммы неразложимы. Более того, все они имеют общую структуру разреженности $\hat{A}$, а стало быть, и граф $\Gamma_l = \Gamma(\hat{A}_l)$. Из непрерывности спектрального радиуса по параметрам в условиях теоремы получаем сходимость $r(A(\lambda_p)) \rightarrow 1 - 0$ при $p \rightarrow \infty$, а значит, и сходимость $F(A(\lambda_p)) \rightarrow 1 - 0$, имеющую в свою очередь следствием сходимость $a_{kk}^k(\lambda_p) \rightarrow 1 - 0$, по крайней мере, для одного $k \geq 1$ на некоторой подпоследовательности последовательности $\{p\}$. Выберем минимальное k из числа тех, для которых такая подпоследовательность существует и будем без ограничения общности считать эту подпоследовательность совпадающей с самой последовательностью $\{p\}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k = 1$.

Предположим, что построенное выше $k > 1$, так что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $l = 1, \dots, k - 1$ выполняются неравенства $0 \leq a_{ll}^l(\lambda_p) < 1 - \varepsilon$ при $p \rightarrow \infty$. Назовем звено $j \xrightarrow{l} i$ графа Γ_l *отмеченным*, если для любого $C > 0$ найдется $p \in \mathbb{N}$ такое, что $a_{ij}^l(\lambda_p) > C$. Оказывается, что если граф Γ_l имел отмеченное звено, то и граф Γ_{l-1} также будет иметь отмеченное звено. Действительно, в случае, если $l \neq j$ и $l \neq i$, то отмеченное звено $j \xrightarrow{l} i$ графа Γ_l будет служить также отмеченным звеном $j \xrightarrow{l-1} i$ графа Γ_{l-1} . В каждом из альтернативных случаев в качестве отмеченного звена можно использовать звено $h \xrightarrow{l-1} i$, стягивающее цепочку $h \xrightarrow{l} l \xrightarrow{l} i$ в случае $l = j$, и $j \xrightarrow{l-1} q$, стягивающее цепочку $j \xrightarrow{l} l \xrightarrow{l} q$ в случае $l = i$. То, что найдутся h с $a_{hh}^l(\lambda_p) > a > 0$ в первом из указанных случаев и q с $a_{qi}^l(\lambda_p) > a > 0$ во втором, следует из неразложимости матриц $A_l(\lambda)$ и их монотонности по убыванию l в случае положительности знаменателей в (1).

Пусть теперь, как и в доказательстве леммы, цепочка $j \xrightarrow{k} k \xrightarrow{k} i$ в графе Γ_k после применения очередного шага алгоритма (1) заменяется на стягивающее звено $j \xrightarrow{k-1} i$ в графе Γ_{k-1} . Поскольку при $p \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $a_{kk}^k(\lambda_p) \rightarrow 1 - 0$, то в силу (1) будет иметь место асимпто-

тика $a_{ij}^{k-1}(\lambda_p) \rightarrow \infty$, т.е. звено $j \xrightarrow{k-1} i$ оказывается отмеченным. Доказанное выше наследование отмеченных звеньев в графах цепочки $\Gamma_{k-1} \rightarrow \Gamma_{k-2} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_1$ с учетом наличия такового в начале цепочки влечет существование отмеченного звена и у Γ_1 . Но этот граф имеет единственную вершину $\{1\}$ и единственное звено $1 \rightarrow 1$, так что при сделанном предположении $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_{11}^1(\lambda_p) = \infty$, что противоречит условию 2) теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что для семейства матриц $A(\lambda) \geq 0$, имеющих общую структуру разреженности, потерю устойчивости, связанную с преодолением функцией $F(A(\lambda))$ единичного значения, можно отследить по единственной функции $a_{11}^1(\lambda)$.

В случае когда рассматривается семейство разложимых матриц $A(\lambda) \geq 0$, имеющих одинаковую структуру разреженности, для использования описанных соображений потребуются предварительное их разложение на неразложимые блоки с построением для каждого из них функции указанного выше вида и отслеживанием преодоления единичного значения их максимумом. При этом снова оказывается удобным оперировать на графах матриц, выстраивая циклы, соответствующие неразложимым блокам. Группировка вершин графа по кластерам, внутри которых возможны произвольные переходы вдоль графа из одной вершины в другую, т.е. соответствующих этим блокам, позволяет выстроить набор цепочек из этих кластеров, звенья в каждой из которых соответствуют наличию ненулевых элементов $a_{ij}(\lambda)$ с j -й вершиной, принадлежащей блоку, расположенному перед блоком, содержащим i -ю вершину. В случае, если такая группировка оказывается возможной в практических задачах (это не теоретический, а чисто технический вопрос), то потерю устойчивости неразложимых блоков следует отслеживать вдоль этой цепочки. В случае, если такая потеря при изменении параметра произошла впервые для какого-то из ее промежуточных звеньев одной из цепочек, то компоненты возмущения, соответствующие кластерам, определяющим предшествующие такому звену звенья, равно как и кластерам, принадлежащим другим цепочкам, можно не учитывать, т.е. считать соответствующие им возмущения нулевыми. Так, например, в задаче о распространении эпидемий в популяции, стратифицированной по каким-либо признакам, с возможными односторонними передачами инфекции между стратами (в этом случае страты — это вершины графа матрицы, а направления передачи — его направленные звенья) наличие пандемии, соответствующее потере устойчивости нулевого (с точки зрения присутствия инфекции) положения равновесия, может наблюдаться в стратах, соответствующих хвосту цепочки, содержащей очаг, т.е. страте, внутри которой наблюдалось первичное возникновение пандемии, и отсутствовать в стратах, соответствующих как ее началу, так и в других цепочках, не содержащих этого очага.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОКРАЩЕНИЯ ПОРЯДКА ДЛЯ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

В этом разделе исследуются вопросы эффективности алгоритмов вычисления индикаторов устойчивости неотрицательных матриц, основанных на методе понижения порядка для разреженных матриц. При этом предполагается, что распределение ненулевых элементов определяется исключительно вероятностью оказаться таковым с поправкой на возможность симметричности структуры разреженности матрицы (в этом случае свойства диагональных элементов могут в расчет не приниматься). Это означает, в частности, что никакая предварительная обработка, связанная с перенумерацией в исходной матрице, не производится, что позволяет использовать весьма простые алгоритмы для вычисления индикаторов устойчивости СП-методом. Альтернативные подходы, основанные на учете структуры графа матрицы и допускающие предварительную перенумерацию, могут не только существенным образом сократить объем вычислений, но и в значительной степени упростить формулы, выражающие зависимость индикатора устойчивости неотрицательных матриц, имеющих одинаковую структуру разреженности, от ее элементов. Для матриц с симметричной структурой разреженности ряд весьма эффективных методов предварительной перенумерации можно найти в монографии [16].

Из формулы (1) видно, что в случае нулевого значения для одного из элементов a_{ik}^k или a_{kj}^k будет $a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^k$, т.е. на $(n - k + 1)$ -м шаге элемент матрицы, занимающий (i, j) -ю позицию, не меняется. Это, в частности, относится и к нулевым элементам, что позволяет подсчитать изменение степени разреженности при очередной итерации.

Заметим, что общность содержательных результатов для матриц, графы которых имеют одинаковую структуру, т.е. инвариантность этих результатов по отношению к перенумерациям в матрице, влечет, по крайней мере с точки зрения теоретических конструкций, использование только таких распределений, которые сохраняются при этих перенумерациях. К числу таковых относятся равномерные распределения для внедиагональных элементов матрицы, а также просто равномерные, или, например, в качестве наиболее привлекательного с точки зрения приложений случая, имеющие симметричную структуру разреженности, т.е. парные (или, другими словами, включающими обратные связи) вхождения.

Рассмотрим случай матрицы A_k с равномерной распределенностью ее ненулевых элементов. Пусть S_k — число таковых, так что $p_k = \frac{S_k}{k^2} \leq 1$ — доля ненулевых, которую мы будем также называть *заполненностью* матрицы A_k . При этом можно рассматривать p_k как вероятность того, что для наперед произвольным образом выбранной позиции (i, j) будет $a_{ij}^k > 0$. В этом случае

$$S_{k-1} = S_k - p_k(2k-1) + (p_k(k-1))^2(1-p_k). \quad (4)$$

Здесь второй член в правой части соответствует числу убиваемых ненулевых элементов при переходе от матрицы A_k к матрице A_{k-1} за счет окаймления в последних строке и столбце. Действительно, общее число элементов в этом окаймлении равно $2k-1$, а доля ненулевых получается умножением этого числа на вероятность p_k . Третий член в (4) определяет количество добавляемых ненулевых элементов при указанном переходе. Сомножитель $p_k(k-1)$ — это число ненулевых внедиагональных элементов последней строки матрицы A_k , т.е. $a_{kj}^k > 0$ с $j < k$. Этой же величине равно и число ненулевых внедиагональных элементов последнего столбца матрицы A_k , т.е. $a_{ik}^k > 0$ с $i < k$. Множитель $1-p_k$ характеризует вероятность того, что конструируемый по формуле (1) ненулевой элемент действительно будет новым, т.е. что на этом же месте в матрице A_k стоял нулевой элемент.

Собирая все выражения в (4), находим

$$p_{k-1} = f(p_k) \quad (5)$$

с

$$f(p) = p + p^2(1-p). \quad (6)$$

Соотношение (5) с правой частью (6) не изменится, если предполагать вместо равномерной распределенности ненулевых элементов таковую лишь среди внедиагональных как при отсутствии, так и при наличии дополнительного условия симметричности структуры разреженности матрицы A_k . Нетрудно проверить, что переход $A_k \rightarrow A_{k-1}$ в соответствии с (1) сохраняет выполнимость этого дополнительного условия. Независимо от симметричности структуры разреженности матрицы A_k в случае равномерного распределения ее внедиагональных ненулевых элементов, если S_k — число таковых, а $p_k = \frac{S_k}{k^2 - k}$ — их доля, то

$$S_{k-1} = S_k - 2(k-1)p_k + p_k^2(k-1)(k-2)(1-p_k). \quad (7)$$

Интерпретация слагаемых в (7) такая же, как и в (4) с той оговоркой, что добавляемый ненулевой элемент является внедиагональным, так что если $p_k(k-1)$ — число ненулевых внедиагональных элементов последней строки матрицы A_k , то для ее последнего столбца число ненулевых внедиагональных элементов таких, что добавляемый ненулевой элемент также не будет диагональным, равно уже $p_k(k-2)$. Проведя необходимые сокращения в (7), мы снова получаем соотношение (5).

Функция (6) монотонна на отрезке $[0, 1]$, тождественна на его концах, так что сохраняет инвариантными этот отрезок и его внутреннюю часть $(0, 1)$, на которой она строго больше тождественной.

Итерационная процедура (5) с $0 < p_n < 1$ дает, как нетрудно проверить, монотонную последовательность

$$0 < p_n < p_{n-1} < \dots < p_{n-t} < \dots < 1. \quad (8)$$

Представляет интерес оценка времени заполнения t , определяемого как число итераций, необходимых для выхода этой последовательности на значения порядка единицы в зависимости от начального $p_n \ll 1$.

Разделив (5) на $p_k p_{k-1} > 0$, получим с учетом (8)

$$p_k^{-1} - p_{k-1}^{-1} = p_k p_{k-1}^{-1} (1 - p_k) < 1. \quad (9)$$

Для любого целого неотрицательного $t \leq n - 1$ суммирование неравенств (9) по k от $n - t + 1$ до n дает неравенство

$$p_n^{-1} - p_{n-t}^{-1} \leq t \quad (10)$$

(равенство имеет место в случае $t = 0$), так что для $0 \leq t < p_n^{-1}$ получим

$$p_{n-t} \leq \frac{p_n}{1 - p_n t}. \quad (11)$$

Пусть теперь $t = n - k$, где k — порядок матрицы A_k . Неравенство (10) обеспечивает в этом случае нижнюю оценку для числа итераций t , необходимых для достижения заполненностью $p_k = p_{n-t}$ матрицы A_k некоторого значения $\delta \in (p_n, 1)$. Действительно, из (10) следует, что в случае $t < p_n^{-1} - \delta^{-1}$ будет выполнено неравенство $p_{n-t} < \delta$.

Неравенство (11) задает верхнюю оценку заполненности p_k в зависимости от числа итераций в цепочке (2), равного t . В силу (8) это неравенство актуально лишь в случае, когда его правая часть меньше единицы, т.е. при $t \leq p^{-1} - 1$ с $p = p_n$. При $k \leq \hat{k} + 1$ с $\hat{k} = n - p^{-1}$ все матрицы A_k в цепочке (2) уже нельзя рассматривать как разреженные.

Число арифметических операций, необходимых в общем, т.е. неразрезанном, случае для вычисления индикатора устойчивости по формулам (1), оценивается для матрицы A_k сверху величиной $k^3 + C(k^2 + 1)$ с некоторой постоянной C порядка единицы. Действительно, число операций в одиночном (т.е. при фиксированных i и j) применении формулы (1) равно четырем, включая вычисление знаменателя, который является общим для всех пар (i, j) , что позволяет при оценках учитывать только три операции из четырех. Общее же число таких применений с учетом последовательного сокращения порядка пересчитываемых матриц равно сумме квадратов чисел от 1 до $k - 1$, т.е. $\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$. В частности, число арифметических операций, необходимых для вычисления индикатора устойчивости на этапе заполненности, т.е. при $k \leq \hat{k}$, оценивается сверху величиной $\Sigma_1 = \hat{k}^3 + C(\hat{k}^2 + 1)$.

Оценим теперь число арифметических операций, необходимых для достижения заполненности, т.е. для прохождения начального участка цепочки (2) при $k = n, \dots, [\hat{k}] + 1$ (для $r \in \mathbf{R}$ под $[r]$ понимается целая часть числа r). Для алгоритмов, основанных на описанной в настоящей работе схеме, адаптированных для разреженных матриц, т.е. имеющих дело только с ненулевыми элементами, переход $A_k \rightarrow A_{k-1}$ требует примерно $C(p_k k)^2$ операций, где $C = 3$ (при перемножении элементов крайних столбца и строки рассматриваются только ненулевые, все остальное как и выше). В силу (11) с $t = n - k$ общее число таких операций оценивается сверху величиной $C\Sigma_2$ с $\Sigma_2 = R + \Sigma$, $R = ([\hat{k}] + 1)^2$ (это — число элементов матрицы $A_{[\hat{k}]+1}$, замыкающей начальный участок цепочки (2); для нее применяется оценка $p_{[\hat{k}]+1} \leq 1$) и

$$\Sigma = \sum_{k=[\hat{k}]+2}^n \frac{k^2 p^2}{(1 - p(n - k))^2}.$$

В случае $\hat{k} = n - p^{-1} > 0$ выражение под знаком суммы в Σ является строго монотонно убывающим по k , что позволяет оценить ее сверху интегралом

$$I(\hat{k}) = \int_{\hat{k}+1}^n \frac{k^2 p^2 dk}{(1 - p(n - k))^2} = \int_1^{1/p} \frac{(\hat{k} + z)^2 dz}{z^2},$$

где $z = k - \hat{k}$. При фиксированном $0 < p < 1$ получаем $I(\hat{k}) = (\hat{k}^2 - p^{-1})(1 - p) + 2\hat{k} \ln p^{-1} < \hat{k}^2 + 2\hat{k} \ln n$ и с учетом R оценку $\Sigma_2 < 2(\hat{k}^2 + \hat{k} \ln n + \hat{k}) + 1$, так что при $\hat{k} \gg 1$ находим $C\Sigma_2 \ll \Sigma_1$.

Заметим, что большим параметром, по которому строятся приведенные выше оценки необходимого числа операций, фигурирующим как в Σ_1 , так и в Σ_2 , является не порядок n матрицы A_n , не доля $p = p_n$ ее (внедиагональных) ненулевых элементов, а порядок ее заполнения $\hat{K}(A_n) = [\hat{k}] = [n - p_n^{-1}]$, характеризующий порядок заполненной матрицы $A_{\hat{k}}$, получаемой в результате применения СП-метода.

В случае $\hat{K}(A_n) \sim 1$ вплоть до значений k порядка единицы заполнение будет отсутствовать, так что приведенные выше верхние кубические оценки необходимого числа арифметических операций следует заменить не превышающими квадратичных по n .

Напомним (см. [13]), что проверяемые на положительность в процессе применения СП-метода (1) выражения $(1 - a_{jj}^j)$ с точностью до обратной нумерации совпадают с диагональными элементами LU-разложения матрицы $I - A_n$. Для сравнения вычислительной эффективности СП-метода по сравнению с методом исключения Гаусса, используемым при построении LU-разложений (см., например, [15], гл. 1.7), заметим следующее.

1. Никакой проверки априорной невырожденности матрицы $I - A_n$ для применения СП-метода не требуется.

2. Метод исключения Гаусса задает почти экспоненциальный рост заполненности p с функцией роста, применяемой на каждом шаге метода $p' = f(p) = 2p - p^2$, так что для $\delta \ll 1$ соответствующее время заполнения, при котором итерируемая плотность p с начальным значением p_{init} будет достигать величины $\delta > 0$, близко к значению $\log_2 \delta + \log_2 p_{\text{init}}^{-1}$. Сопоставление линейной оценки с ростом p_n^{-1} при использовании СП-метода с логарифмической оценкой в методе Гаусса при $p_{\text{init}} = p_n$ свидетельствует о большей эффективности СП-метода при исследовании рассматриваемых в настоящей статье задач для разреженных матриц.

3. Для уже заполненной матрицы $A_{\hat{k}}$ метод Гаусса требует применения $\approx \frac{2}{3} \hat{k}^3$ операций (см., например, [15], гл. 1.7), что лишь на треть более эффективно, чем в случае использования СП-метода (оценка $\hat{k}^3$, см. выше).

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Во всех разбираемых ниже примерах рассматривается только нетривиальный случай с диагональными элементами матрицы $A = A_n$, меньшими единицы: $a_{ii} < 1$, $i = 1, \dots, n$. При этом S_n задает число ненулевых внедиагональных ее элементов.

1. Рассмотрим случай матрицы $A = A_n$ в варианте равномерного распределения ее внедиагональных ненулевых элементов с $n < S_n < n(1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Класс таких матриц A_n характеризуется тем, что среднее число звеньев, входящих (равно как и выходящих) в каждую из n вершин графа $\Gamma(A_n)$, не меньше 1 и не больше $(1 + \varepsilon)$. Этот класс включает в себя неразложимые матрицы, граф которых имеет более одного многозвенного цикла. Из последнего неравенства в цепочке

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < p_n = \frac{S_n}{n^2 - n} < \frac{1 + \varepsilon}{n-1}$$

получаем в случае $0 < \varepsilon < 1$ неравенство $p_n^{-1} > (n-1)(1-\varepsilon)$. Согласно приведенным оценкам к моменту заполнения матрицы ее порядок сократится до $\hat{K}(A_n) = \lceil n - p_n^{-1} \rceil + 1 < \varepsilon(n+1)$. Таким образом, реальное время, необходимое в этом случае для вычисления индикатора устойчивости, будет оцениваться сверху величиной $(\varepsilon n)^3 + C((\varepsilon n)^2 + \varepsilon n \ln n + 1)$ с некоторой постоянной C порядка единицы.

2. В случае $S_n < n$ матрица A является разложимой, что позволяет свести задачу о локализации ее спектрального радиуса к набору таких же задач для матриц меньшего порядка. Однако в рамках предложенной в настоящей работе методики построения индикаторов устойчивости необходимость в такой декомпозиции отсутствует. Тем не менее ее проведение на этапе предварительной обработки исходной информации, базирующееся на использовании стандартных алгоритмов перенумерации (см., например, в случае матриц с симметричной структурой разреженности [16]), не исключает возможности получения более эффективных результатов как с вычислительной, так и алгебраической (в смысле громоздкости формул, выражающих индикатор через ненулевые элементы матрицы с заданной структурой разреженности) точек зрения.

3. В случае $S_n = n$ неразложимая матрица A обязана представлять собой сумму циклической и диагональной матриц, так что ее граф содержит единственный цикл C , проходящий однократно через все его вершины, дополненный однозвенными циклами C_i , $i = 1, \dots, n$, соответствующими диагональным элементам матрицы. После перенумерации, соответствующей порядку прохождения циклом C вершин графа матрицы, в качестве ее индикатора устойчивости можно использовать произведение ее ненулевых внедиагональных элементов $a_{i,i-1}$, $i = 1, \dots, n$, $a_{10} = a_{1n}$, с поправкой на ненулевые диагональные элементы a_{ii} :

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_{i,i-1}}{1 - a_{ii}}, \quad a_{10} = a_{1n}. \quad (12)$$

Выражение (12) следует из (1) применением индукции по i .

Формулу (12) можно трактовать еще и следующим образом. Развитие процесса, задаваемого системой (3) с матрицей A , определяется произведением коэффициентов передачи $a_{i,i-1}$ по каждому из звеньев цикла C , умноженному на коэффициенты внутреннего развития для каждой из вершин $1 - a_{ii}$. Каждый из последних представляет собой сумму всевозможных итераций при вторных внутренних передачах на циклах C_i :

$$\frac{1}{1 - a_{ii}} = \sum_{l=0}^{\infty} (a_{ii})^l.$$

Выражение (12) можно использовать в качестве индикатора также и в случае произвольного S_n , если граф матрицы A имеет единственный неоднозвенный цикл C . При этом порядок матрицы можно сократить до размера этого цикла, оставив в качестве ее графа только цикл C , дополненный однозвенными циклами C_i на вершинах, входящих в цикл C . Все тупиковые, т.е. не дающие циклов ответвления, игнорируются, так что соответствующая им информация для построения индикатора интереса не представляет.

4. В терминах процесса распространения эпидемии симметричность структуры разреженности является вполне естественным требованием, поскольку, если два местообитания связаны между собой, то передача инфекции является обоюдной. Коэффициенты передачи a_{ij} , фигурирующие в матрице A , могут интерпретироваться как вероятности передачи инфекционного заболевания в паре (j, i) за один временной период (например, за год) при условии отсутствия других путей передачи, включая пути внутри отдельных местообитаний (т.е. обнуления всех элементов матрицы A , кроме рассматриваемого). Различие коэффициентов передачи на расположенных симметрично местах означает различие влияний соответствующих местообитаний друг на друга. Содержательно это может быть связано с различием в плотности населения, уровня медицинского обслуживания, природных условий и т.п. Разбиение на кластеры означает изоляцию их друг от друга, обеспечиваемую как естественными, так и искусственными факторами. Таковыми могут служить запрет на пересечение границ, карантин, самоизоляция.

5. Численные исследования проводились для разреженных матриц как в случае равномерного распределения их ненулевых элементов среди внедиагональных, так и в случае возможной симметричности их структуры разреженности. Программы, ориентированные на разреженные матрицы, были написаны для пакета Maple 7, и включали в себя возможность построения случайных матриц для обоих обозначенных выше случаев. Они оказались весьма эффективными с точки зрения незначительности ресурсов, востребованных для их выполнения. Так, например, в случае $n = 10^4$ расчеты индикатора для некоторых из матриц, описанных в примере 1, занимали на обычном персональном компьютере всего несколько минут. Разумеется, никакой предварительной обработки информации при этом не проводилось, так что получаемые на этом пути результаты можно рассматривать только с точки зрения возможности нахождения предварительных оценок в целях выяснения необходимости проведения более углубленного детального исследования факторов возникновения, развития и распространения изучаемых явлений, таких, как пандемия.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту, ряд полезных замечаний, рекомендаций и соображений которого был учтен при работе над настоящей статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leslie P.H.* On the use of matrices in certain population mathematics// *Biometrika*. 1945. V. 33. P. 183–212.
2. *Разжевайкин В.Н.* Функционалы отбора в автономных моделях биологических систем с непрерывной возрастной и пространственной структурой// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 2. С. 338–346.
3. *Логофет Д.О., Белова И.Н.* Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // *Фундаментальная и прикл. математика*. 2007. Т. 13. № 4. С. 145–164.
4. *Lefcovitch L.P.* The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrics*. 1965. V. 21. P. 1–18.
5. *Logofet D.O.* Convexity in projection matrices: projection to a calibration problem. *Ecological modeling*. 2008. V. 216. № 2. P. 217–228.
6. *Разжевайкин В.Н.* Анализ моделей динамики популяций. М.: МФТИ, 2010. С. 174.
7. *Cushing J.M., Yicang Z.* The Net Reproductive Value and Stability in Matrix Population Models. // *Nat. Res. Model*. 1994. V. 8. № 4. P. 297–333.
8. *Chi-Kwong Li, Hans Schneider.* Applications of Perron–Frobenius theory to population dynamics// *J. Math. Biol.* 2002. V. 44. P. 450–462.
9. *Protasov V.Ju., Logofet D.O.* Rank-one corrections of nonnegative matrices, with an applications to matrix population models// *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2014. V. 35. № 2. P. 749–764.
10. *Caswell H.* Matrix Population Models: Construction, Analysis and Interpretation, 2nd ed. Sinauer Associates: 629 Sunderland, Mass., USA, 2001. V. 8. № 4. Fall 1994.
11. *Logofet D.O., Razzhevaikin V.N.* Potential-Growth Indicators Revisited: Higher Generality and Wider Merit of Indication. *MATHEMATICS*, 2021. V. 9. № 14. 1649. eISSN: 2227–7390. <https://doi.org/10.3390/math9141649>
12. *Berman A., Plemmons R.J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Philadelphia: SIAM, 1994. P. 340.
13. *Разжевайкин В.Н., Тыртышников Е.Е.* О построении индикаторов устойчивости неотрицательных матриц // *Матем. заметки*. 2021. Т. 109. № 3. С. 407–418.
14. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. С. 548.
15. *Уоткинс Д.* Основы матричных вычислений. М., БИНОМ, Лаборатория знаний. 2017. С. 664.
16. *Джорж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. С. 336.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2023 г. Г. М. Абдуалимова^{1,*}, Н. А. Мамадалиев^{2,3,**}, М. Тухтасинов²

¹ 170100 Андижан, ул. Университетская, 129, Андижанский государственный университет, Узбекистан

² 100174 Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4,
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

³ 100174 Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 9, Институт математики им. В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан

* e-mail: abduolimova81@inbox.ru

** e-mail: m_numana59@mail.ru

Поступила в редакцию 30.07.2022 г.
Переработанный вариант 07.01.2023 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В статье рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования при условии, что на управление убегающего накладывается интегральное ограничение, а преследователь использует импульсное управление. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Изучаются линейные конфликты, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, траектории которых имеют скачки в определенных моментах времени. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в n -мерном евклидовом пространстве. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающей функции. Для доказательства достижения нижней грани используется теория опорных функций. Благодаря этому факту, вместо квазистратегии применяется почти стробоскопическая стратегия и указывается способ построения этой стратегии. Приведен пример нелинейной правой части. Библ. 20.

Ключевые слова: преследование, квазистратегия, почти стробоскопическая стратегия, преследователь, интегральное ограничение, терминальное множество, импульсное управление, опорная функция.

DOI: 10.31857/S0044466923070025, EDN: ZXGBVN

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории дифференциальных уравнений с аддитивно входящими обобщенными функциями, в частности, дельта-функцией Дирака, в значительной степени вызвано многочисленными приложениями в теории оптимального управления и дифференциальных игр [1–3]. К настоящему времени эта теория всесторонне разработана, а в монографии [4] доказаны важные теоремы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В работе [1] рассмотрены линейные дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и геометрическим ограничением на управление игроков и на их комбинации. Применяя метод разрешающих функций, доказаны теоремы завершения преследования за конечное время. В явном виде указаны условия нахождения гарантированного времени и построение управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты проиллюстрированы на конкретных контрольных примерах.

В работе [5] изучены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями на управление обоих игроков. Для решения поставленных задач использованы идеи метода разрешающих функций в обобщенном виде, а именно, в матричном. Это позволило, естественно, в отличие от других исследований, использовать возможности преследующего игрока и терминального множества более полно для достижения поставленной цели.

Разрешения конфликтов при интегральных ограничениях на управление игроков и управления импульсного характера представляет определенный интерес. Работа [6] продолжает изуче-

ние игры, рассмотренной в работе [1] при интегральном ограничении вместо геометрического. В вышеуказанной работе с помощью метода разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Полученные результаты иллюстрированы на конкретных примерах. Особенно следует отметить, что применение полученных результатов к игре, описываемой простыми уравнениями, дает альтернативу, т.е. все пространство разделяется на две части, из точек одной части гарантируется возможность окончания игры, а из точек другой — убегания.

Работа [7] посвящена изучению дифференциальных игр, описываемых квазилинейными дифференциальными уравнениями цилиндрическим терминальным множеством, с геометрическими ограничениями на управление игроков. Если в работах [1–3] для завершения преследования были использованы квазистратегии, то в этой, при тех же предположениях, применен более узкий класс стратегии, а именно стробоскопический. При этом следует отметить, что разрешающая функция не зависит от управления убегающего, что обуславливает не реагировать на воздействия убегающего игрока в ходе движения. В связи с чем представляется возможность убегающему игроку оттянуть время окончания игры.

Изучение процессов с импульсным управлением, движение которых описывается различными видами системы дифференциальных уравнений, представляет как теоретический, так и практический интерес. В работе [8] рассмотрена задача управления объектом, описываемая функционально-дифференциальной системой с последствием общего вида с целью доставления предписанного значения заданному векторному функционалу. При этом воздействие на объект осуществляется импульсно, в заранее заданных моментах времени, тем самым траектория терпит разрыв первого рода.

В работах [1, 5, 6] управление преследователя строилось в виде “контруправления”. Однако для определения τ_K — момента переключения с одного закона на другой, необходима была информация в момент t о всей предыстории управления убегающего. Поэтому, в целом, стратегию преследователя, реализующую окончание преследования, следует классифицировать как квазистратегию. В данной работе при тех же предположениях для завершения преследования использован более узкий класс, а именно, класс почти стробоскопических стратегий [7].

Работы [9, 10] посвящены изучению простых линейных дифференциальных игр преследования, в частности, контрольного примера Понтрягина для многих лиц при интегральных ограничениях на управления игроков. При этом существенно использован метод разрешающих функций А.А. Чикрия для обоснования правила параллельного сближения.

В работах [11–14] исследованы линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздывания. С помощью разрешающих функций установлены достаточные условия завершения игры за конечное время.

В статье [15] рассмотрены линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Преследователи стремятся перевести состояние системы в начало координат, у убегающего цель противоположна. Получены достаточные условия для окончания игры.

В данной работе рассмотрены конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом воздействии на объект управление игроков имеет характер импульсного или интегрального ограничения. Пользуясь идеями работ [1], доказываются теоремы с достаточными условиями для завершения преследования из заданной точки за конечное время. Одной из отличительных черт данной работы является то, что преследующий игрок применяет стратегии из более узкого класса, а именно, стробоскопического. В конце работы приведен пример с нелинейной правой частью для иллюстрации результата.

2. МИНИМИЗАЦИЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Прежде чем сформулировать результат по минимизации функционала приведем некоторые сведения и определения.

Определение 2.1 (см. [17, определение 11]). Функционал $J(v)$, заданный на некотором подмножестве V банахового пространства B , называется *слабополунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v при $n \rightarrow \infty$, имеет место соотношение

$$J(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n).$$

Функционал $J(v)$ слабополунепрерывен снизу на множестве V , если он слабополунепрерывен снизу в каждой точке $v \in V$.

Определение 2.2. Пусть V — подмножество банахового пространства B . Многозначное отображение $W : V \rightarrow \Omega(R^d)$ назовем *слабополунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v , имеет место неравенство

$$C(W(v), \psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C(W(v_n), \psi)$$

при каждом $\psi \in R^d$, где $\Omega(R^d)$ — пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства R^d .

Многозначное отображение $W(v)$ слабополунепрерывно снизу на множестве V , если оно слабополунепрерывно снизу в каждой точке $v \in V$.

Здесь $C(F, \cdot) : R^d \rightarrow R^1$ — опорная функция непустого компактного подмножества F пространства R^d [18, лекция 3].

Пример 2.1. Пусть $W(v) = S_{\|v\|}(0)$. Тогда имеем $C(W(v), \psi) = \|v\| \|\psi\|$. Известно, что функционал $J(v) = \|v\|$ слабополунепрерывен снизу на подмножестве V пространства B .

Теорема 2.1 (см. [17, теорема 1]). *Всякий слабополунепрерывный снизу функционал $J(v)$ на слабокомпактном множестве $V \subset B$ ограничен снизу и достигает на V своей нижней грани.*

Лемма 2.1. Пусть $M \in \Omega(R^d)$ — выпуклое множество, $W : V \rightarrow \Omega(R^d)$ — выпуклозначное слабополунепрерывное снизу многозначное отображение, кроме того $0 \in \text{int } W(v)$, $v \in V$, где V — слабокомпактное подмножество банахового пространства B . Тогда функционал $\alpha(v)$, $v \in V$, определяемый следующим образом:

$$\alpha(v) = \begin{cases} \max\{\alpha \geq 0 : \alpha M \cap W(v) \neq \emptyset\} & \text{при } 0 \notin M, \\ 1 & \text{при } 0 \in M, \end{cases} \quad (2.1)$$

слабополунепрерывен снизу на множестве V .

Доказательство. Так как при $0 \in M$ утверждение леммы очевидно, то далее предположим, что $0 \notin M$.

Пусть $v_* \in V$ и $\{v_n\}$ — произвольная последовательность из множества V , слабоходящаяся к элементу v_* . Введем следующее обозначение $\alpha_n = \alpha(v_n)$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена снизу, то нижний предел $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ существует и его обозначим через α_∞ . Выберем подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ последовательности $\{\alpha_n\}$, для которой верно равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha_\infty$. Покажем, что $\alpha(v_*) \leq \alpha_\infty$.

Пусть для каждого k , $k = 1, 2, \dots$

$$\min_{\|\psi\|=1} \{\alpha_{n_k} C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi)\} = \alpha_{n_k} C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) \geq 0.$$

Покажем, что для всех $k = 1, 2, \dots$ имеют место следующие равенства:

$$\alpha_{n_k} C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) = 0. \quad (2.2)$$

Действительно, если для некоторого k имеет место неравенство

$$\alpha_{n_k} C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) > 0,$$

то ясно, что $\alpha_{n_k} C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi) > 0$ для любого ψ , $\|\psi\| = 1$. Следовательно, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(\alpha_{n_k} + \varepsilon) C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi) > 0$$

для любого ψ , $\|\psi\| = 1$, это означает, что

$$(\alpha_{n_k} + \varepsilon)M \cap W(v_{n_k}) \neq \emptyset,$$

которое противоречит определению числа α_{n_k} (см. (2.1)).

Отсюда в силу неравенства $C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) > 0$, $\alpha_{n_k} > 0$, следует, что

$$C(M, \psi_{n_k}) < 0. \quad (2.3)$$

Так как сфера $\psi: \|\psi\| = 1$ является компактным множеством, то у последовательности $\{\psi_{n_k}\}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому элементу ψ_* , $\|\psi_*\| = 1$, не умаляя общности, можно считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\{\psi_{n_k}\}$. Из равенства (2.2) и неравенства

$$\alpha(v_*)C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k}) \geq 0$$

получим

$$(\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k}) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k}) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) \leq \\ &\leq (\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*) + C(W(v_*), -\psi_*) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}). \end{aligned}$$

Добавля и вычитая $C(W(v_{n_k}), -\psi_*)$ из последнего выражения, получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*) + C(W(v_*), -\psi_*) - \\ &- C(W(v_{n_k}), -\psi_*) + C(W(v_{n_k}), -\psi_*) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь, учитывая следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |C(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*)| &\leq \|W(v_*)\| \|\psi_{n_k} - \psi_*\|, \\ C(W(v_*), -\psi_*) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} C(W(v_{n_k}), -\psi_*), \\ |C(W(v_{n_k}), -\psi_*) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k})| &\leq \|W(v_{n_k})\| \|\psi_* - \psi_{n_k}\| \end{aligned}$$

и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, из неравенства (2.4) имеем $0 \leq (\alpha(v_*) - \alpha_\infty)C(M, \psi_*)$.

Покажем, что при $k \rightarrow \infty$ строгое неравенство $C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) > 0$ остается. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} 0 &< C(W(v_*), -\psi_*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C(W(v_{n_k}), -\psi_*) \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} [C(W(v_{n_k}), \psi_{n_k} - \psi_*) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k})] = \lim_{k \rightarrow \infty} C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (2.2) следует, что $\alpha_\infty \geq \alpha(v_*)$, т.е. слабополу непрерывность снизу функционала $\alpha(v)$ на элементе v_* . Этим лемма доказана.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz + u - \lim_{k \rightarrow \infty}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

где z — фазовый вектор, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, C — постоянная матрица порядка $d \times d$, U — непустое компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$, терминальное множество представляется бесконечным цилиндром вида $M = M^0 + M^1$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^d$, M^1 — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^d$ на L , а через e^{tC} — фундаментальную матрицу однородной части системы (3.1). Тогда, понятно, что $z \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi z \in M^1$. В дальнейшем, этим фактом полностью воспользуемся. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^\infty$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения, т.е. любой отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности, положим $\tau_0 = 0$. Тогда, например, импульсное воздействие преследователя в моментах τ_i времени представляется с помощью функции Дирака $\delta(t - \tau_i)$, т.е. его управление представляется в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad t \geq 0,$$

где $u_i \in U$.

Через $B(i, \sigma)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $v(\cdot) : [0, \tau_{i+1} - \tau_i] \rightarrow R^d$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2.$$

После подстановки в правую часть уравнения (3.1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно [4, п. 1] эта система имеет решение при любом начальном условии

$$z(0) = z^0,$$

причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах (τ_i, τ_{i+1}) , где $i \in N$, $\tau_0 = 0$. А решения в моментах времени τ_i могут иметь разрывы первого рода.

Определение 3.1 (см. [19]). *Стратегией преследователя* назовем отображение $\mathbb{P}$, состоящее из совокупности отображений:

$$\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot) : R^d \times B(i, \sigma) \rightarrow U.$$

Определение 3.2. *Стратегией убегающего* назовем отображение $\mathbb{E}$, состоящее из совокупности отображений:

$$\mathbb{E}_i(\cdot) : R^d \rightarrow B(i, \sigma).$$

Заданные начальная точка z^0 и пара стратегий $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ порождают единственную траекторию

$$z(t) = z(t; z^0, \mathbb{P}, \mathbb{E}), \quad t \geq 0.$$

Траектория $z(t)$ на полуинтервале $[0, \tau_1)$ определяется как решение задачи

$$\dot{z} = Cz - u_0 \delta(t) + v_0(t), \quad z(0) = z^0,$$

где $v_0(\cdot) = \mathbb{E}_0(z^0)$, $u_0 = \mathbb{P}_0(z^0, v_0(\cdot))$.

Далее, траектория $z(t)$ из отрезка $[0, \tau_k]$ на полуинтервал $[\tau_k, \tau_{k+1})$ продолжается как решение следующей задачи:

$$\dot{z} = Cz - u_k \delta(t - \tau_k) + v_k(t), \quad z(\tau_k) = z(\tau_k - 0),$$

где $v_k(t) = \bar{v}(t - \tau_k)$, $\bar{v}(\cdot) = \mathbb{E}_k(z(\tau_k))$ и

$$u_k(t) = P_k(z(\tau_k), \bar{v}(\cdot))(t - \tau_k), \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определение 3.3. Игра (3.1), начинающаяся из начальной точки z^0 , завершается к моменту τ_K , если существует стратегия $\mathbb{P}$ преследующего игрока так, что $z(\tau_K; z^0, \mathbb{P}, \mathbb{E}) \in M$ для любой стратегии $\mathbb{E}$ убегающего игрока.

Постановка задачи. Определить условия, при выполнении которых для данной начальной точки $z^0 \notin M$ можно завершить преследования.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается игра (3.1) при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t)$, $t \geq 0$, с условием:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2,$$

где σ — неотрицательное фиксированное число.

Пусть $v(\cdot) \in B(i, \sigma)$ — допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} W_i(n, v(\cdot)) &= \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U - \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau, \\ W_i(n) &= \bigcap_{v(\cdot) \in B(i, \sigma)} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U \overset{*}{=} G(n, \tau_i, \tau_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$G(n, \tau_i, \tau_{i+1}) = \left\{ x \in L : x = \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau, v(\cdot) \in B(i, \sigma) \right\},$$

где $n \in N$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. А через

$$A \overset{*}{=} B = \{x : x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$$

будем обозначать геометрическую разность (разность Минковского) множеств A и B .

Лемма 4.1. Множества $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ являются выпуклыми компактными подмножествами подпространства L .

Доказательство. Вначале покажем выпуклость множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$. Пусть $x_1, x_2 \in G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогда по определению множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ существуют функции $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in B(i, \sigma)$ такие, что:

$$x_k = \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|\lambda v_1(\tau) + (1 - \lambda)v_2(\tau)\|^2 d\tau &= \lambda^2 \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|v_1(\tau)\|^2 d\tau + 2\lambda(1 - \lambda) \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} v_1(\tau)v_2(\tau) d\tau + \\ &+ (1 - \lambda)^2 \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|v_2(\tau)\|^2 d\tau \leq \lambda^2 \sigma^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sigma^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma^2 = \sigma^2, \end{aligned}$$

и

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} (\lambda v_1(\tau) + (1 - \lambda)v_2(\tau)) d\tau,$$

то

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in G(n, \tau_i, \tau_{i+1}).$$

В силу теоремы [20, теорема 6.4.3], замкнутый шар S радиусом σ с центром в нуле пространства $L_2[\tau_i, \tau_{i+1}]$ слабокомпактен. Отсюда легко получить компактность множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$. Лемма 4.1 доказана.

Предположение 4.1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех $n, i, n \in N, i = 0, 1, \dots, n$.

В силу предположения 1 каждое из множеств $W_i(n)$ имеет внутренний элемент для всех $n, i, n \in N, i = 0, 1, \dots, n$, которые обозначим через $w_i(n)$. Пусть $w = w(n) = \{w_i(n)\}_{i=1}^n$, и положим

$$\xi(n, z, w) = \pi e^{(\tau_n - \tau_0)C} z + \sum_{i=0}^n w_i(n).$$

Зафиксируем его. Определим следующую функцию:

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \alpha \left[M^1 - \xi(n, z, w) \right] \cap \left[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n) \right] \neq \emptyset \right\}. \quad (4.2)$$

Применяя результаты леммы 4.1 к функционалу $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w), v(\cdot) \in B(i, \sigma)$, получим, что существует функция $v_i^*(\cdot) \in B(i, \sigma)$, удовлетворяющая равенству:

$$\inf_{v(\cdot) \in B(i, \sigma)} \alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w).$$

Предположение 4.2. Пусть выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1$$

при всех $n, i, n \in N, i = 0, 1, \dots, n$.

Введем следующее обозначение:

$$K = K(z, w) = \min \left\{ j \in \{0, \dots, n\} : \sum_{i=0}^j \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1 \right\}. \quad (4.3)$$

Если $\xi(n, z, w) \in M^1$, то $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = +\infty$ для $i, v \in B(i, \sigma)$, и в этом случае значение интеграла в соотношении (4.3) соответственно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (4.3) не выполняется ни при одном $j, j \in \{0, \dots, n\}$, то положим $k = n + 1$.

Определим разрешающие функции [6]

$$\Lambda_i(n, z, w) = \begin{cases} \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w), & i = 0, 1, \dots, K-1, \\ 1 - \sum_{j=0}^{K-1} \alpha_j(n, z, v_j^*(\cdot), w), & i = K, \\ 0, & i = K+1, K+2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Справедлива следующая

Лемма 4.2. Пусть выполнены предположения 4.1 и 4.2, множества M^1 и U выпуклы. Тогда

$$\Lambda_i(n, z, w) \left[M^1 - \xi(n, z, w) \right] \cap \left[W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n) \right] \neq \emptyset$$

для $i, i = 0, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $i = 0, 1, \dots, K-1$, тогда из (4.4) получим $\Lambda_i(n, z, w) = \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w)$ и поэтому согласно (4.2) следует верность (4.5). При $i = K+1, \dots, n$ имеем $\Lambda_i(n, z, w) = 0$, значит, условие (4.5) будет выполнено, поскольку множества $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ содержат нулевой элемент в качестве внутреннего.

Теперь рассмотрим случай $i = K$. Покажем, что множество

$$\Gamma = \left\{ \alpha \geq 0 : \alpha \left[M^1 - \xi(n, z, w) \right] \cap \left[W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n) \right] \right\} \neq \emptyset$$

выпукло. По условию леммы множества $M^1 - \xi(n, z, w)$ и $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы. Допустим $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} x_1 &\in \alpha_1 [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)], \\ x_2 &\in \alpha_2 [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)]. \end{aligned}$$

Так как $M^1 - \xi(n, z, w)$ и $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2) [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)],$$

из которого следует, что $\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2 \in \Gamma$, значит, Γ выпукло. Отсюда очевидно, что

$$\alpha [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)] \neq \emptyset$$

для всех $\alpha: 0 \leq \alpha \leq \alpha_K$. Но по (4.3), (4.4) $\Lambda_K(n, z, w) \leq \alpha_K(n, z, v_i^*(\cdot), w)$, т.е. утверждение леммы справедливо и при $i = K$. Лемма 4.2 доказана.

Теорема 4.1. Если для системы (3.1) выполнены предположения 4.1 и 4.2, множества M^1, U выпуклы и $K = K(z, w) < \infty$ для начального положения $z = z^0$ и вышеуказанного набора w , то траекторию $z(t)$ системы (3.1) можно вывести на терминальное множество M к моменту времени $t = \tau_K$.

Доказательство. Для доказательства теоремы надо построить соответствующую стратегию преследователя $\mathbb{P}$, состоящую из совокупности отображений: $\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot): R^d \times B(i, \sigma) \rightarrow U$. Рассмотрим вначале случай, когда $\xi(K, z^0, w) \notin M$.

При $i = 0, 1, \dots, K$ отображение $\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot)$ определим следующим образом: $\mathbb{P}_i(z^0, v(\cdot)) = u_i$, где u_i удовлетворяет следующему включению:

$$\pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_K - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau - w_i(K) \in \Lambda_i(K, z^0, w) (M^1 - \xi(K, z^0, w)). \quad (4.6)$$

Заметим, что в силу соотношений (4.1), (4.2), предположения 4.1 и леммы 4.2 включение (4.6) выполняется при некотором $u_i \in U$.

Для $i = K + 1, \dots, n$ в качестве u_i выбираем решения уравнения

$$\pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_K - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau = w_i(K). \quad (4.7)$$

Это уравнение в силу предположения имеет решение $u_i \in U$.

Из формулы Коши с начальным условием $z(0) = z^0$ и свойств дельта-функции следует представление решения системы (3.1)

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_K) &= \pi e^{(\tau_K - \tau_0)C} z^0 + \int_{\tau_0}^{\tau_K} \pi e^{(\tau_K - \tau)C} (u(\tau) - v(\tau)) d\tau = \\ &= \pi e^{(\tau_K - \tau_0)C} z^0 + \sum_{i=1}^K \pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_{\tau_0}^{\tau_K} \pi e^{(\tau_K - \tau)C} v(\tau) d\tau = \\ &= \pi e^{(\tau_K - \tau_0)C} z^0 + \sum_{i=1}^K \left[\pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_K - \tau)C} v(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (4.8) величину $\sum_{i=1}^K w_i(K)$. Учитывая выпуклость множества M^1 и выбор управления $u(t)$, $t \geq 0$ (4.6), (4.7) получим

$$\pi z(\tau_K) \in \xi(K, z^0, w) \left[1 - \sum_{i=1}^K \Lambda_i(K, z^0, v(\cdot), w) \right] + \sum_{i=1}^K \Lambda_i(K, z^0, v(\cdot), w) M^1 = M^1.$$

А это означает $z(\tau_K) \in M$, т.е. игра преследования завершена.

Пусть теперь $\xi(K, z^0, w) \in M$. Тогда в качестве векторов скачков u_i для всех $i = 1, 2, \dots, K$ выберем решения уравнения (4.7). В этом случае из представления (4.8) следует включение $\pi z(\tau_K) \in M^1$.

5. ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим следующую конфликтно-управляемую задачу

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (|v|^2 + 1) z_2 + v, \\ \dot{z}_2 &= u, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $z_1, z_2, v, u \in R^d$.

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (5.1) только в моменты $\{\tau_i\}$, $i = 0, 1, \dots$, $\tau_0 = 0$ и его воздействие в эти моменты имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad (5.2)$$

где вектор скачков u_i выбирается из единичного шара $S_1(0)$ с центром в нуле пространства R^d .

Управлением убегающего игрока являются d – мерные измеримые вектор функции $v(\cdot)$, которые при каждом $i, i = 0, 1, \dots$, удовлетворяют интегральному ограничению

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq \sigma^2. \quad (5.3)$$

Задача преследователя состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая управления $u_i \in U$, за конечное время вывести траекторию системы (5.1) на цилиндрическое терминальное множество M , которое имеет вид

$$M = M^0 + M^1,$$

где $M^0 = \{(0, z_2) : z_2 \in R^d\}$, M^1 – подмножество подпространства $M^{0\perp}$.

Утверждение 5.1. Если $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n \rightarrow \infty$ (без конечных точек сгущения) и M^1 – выпуклое компактное множество, то в игре (5.1) возможно завершение преследования из любой начальной точки $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in R^{2d}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим начальные точки вида $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, где $z_2^0 = 0$. Через π обозначим оператор ортогонального проектирования и по определению, положим $\pi(z_1, z_2) \doteq z_1$. Легко показать, что

$$W_i(v(\cdot)) = S_{\|v(\cdot)\|^2 + \tau_{i+1} - \tau_i} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} v(\theta) d\theta \right).$$

Так как

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} v(\theta) d\theta \right| \leq \|v(\cdot)\| \sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}$$

отсюда

$$\|v(\cdot)\| \sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} < \|v(\cdot)\|^2 + \tau_{i+1} - \tau_i,$$

то $0 \in \text{int } W_i(v(\cdot))$.

Кроме того, многозначное отображение $W_i(v(\cdot))$ является слабополунепрерывно снизу на слабокомпактном множестве (5.3).

Пусть $\|h_0\| = \min_{h \in M - z_i^0} \|h\|$. Очевидно, минимум функционала $\alpha_i(v(\cdot))$ достигается при

$$v(\vartheta) = -x \frac{\overline{h_0}}{\|h_0\|}, \quad 0 \leq x \leq \sigma,$$

где x пока неопределенное число. Тогда имеем

$$\alpha_i(v(\cdot)) = \frac{x^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - x\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}}{\|h_0\|},$$

$$\min \alpha_i(v(\cdot)) = \min_{0 \leq x \leq \sigma} \frac{x^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - x\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}}{\|h_0\|}.$$

Легко показать, что

$$\min \alpha_i(v(\cdot)) = \begin{cases} \frac{3(\tau_{i+1} - \tau_i)}{4\|h_0\|} & \text{при } \tau_{i+1} - \tau_i \leq 2\sigma, \\ \frac{\sigma^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - \sigma\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}}{\|h_0\|} & \text{при } \tau_{i+1} - \tau_i > 2\sigma. \end{cases}$$

В силу $\tau_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$ и

$$\sigma^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - \sigma\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} = (\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} - \sigma)^2 + \sigma\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} > \sqrt{2}\sigma\sigma$$

следует, что существует натуральное число K :

$$\sum_{i=1}^{K-1} \min \alpha_i(v(\cdot)) < 1, \quad \sum_{i=1}^K \min \alpha_i(v(\cdot)) \geq 1.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены. Значит, в рассматриваемом случае утверждение доказано.

Теперь рассмотрим случай $z_2^0 \neq 0$. Пусть $[a]$ означает целую часть, а $\{a\}$ — дробную часть действительного числа a . Введем обозначения:

$$m = \left\lceil \left[\frac{z_2^0}{z_2^0} \right] \right\rceil, \quad u_i^0 = -\frac{z_2^0}{\left\lceil \frac{z_2^0}{z_2^0} \right\rceil}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad u_m^0 = -\left\lceil \frac{z_2^0}{z_2^0} \right\rceil \frac{z_2^0}{\left\lceil \frac{z_2^0}{z_2^0} \right\rceil}.$$

Стратегии преследователя $\mathbb{P}$ построим следующим образом:

$$u_i = \mathbb{P}_i(z^0, v(\cdot))(t - \tau_i), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m.$$

Тогда получается $z_2(\tau_{m+1} - 0) = 0$. Теперь исходя из полученного начального положения $z^0 = (z_1(\tau_{m+1} - 0), 0)$ построим далее $\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot)$, $i = m+1, \dots$ и, из предыдущих рассуждений следует, что существует натуральное число K , что: $z(\tau_K) \in M$. Этим утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 212–224.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
4. Филиппов А.В. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
5. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 290–301.
6. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2016. Т. 22. № 3. С. 273–282.
7. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения в классе стробоскопических стратегий // Теория оптимальных решений. 2005. № 4. С. 49–55.
8. Максимов В.П. Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Изв. вузов. Матем. 2013. № 9. С. 70–74.
9. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. I // Cybernetics and Systems Analysis. 2013. V. 49. № 5. P. 756–767.
10. Samatov B.T. The Resolving Functions Method for the Pursuit Problem with Integral Constraints on Controls // J. of Automation and Information Sciences. USA: Begell House Inc. 2013. V. 45. № 8. P. 41–58.
11. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Изв. вузов. Матем. 2020. № 3. С. 12–28.
12. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
13. Мамадалиев Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний // Матем. заметки. 2012. Т. 5. С. 750–760.
14. Мамадалиев Н. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков // Дифференц. ур-ния 2012. Т. 48. № 6. С. 860–873.
15. Ibragimov G.I. On a Multiperson pursuit problem with integral constraints on the controls of the players // Math. N. 2001. V. 70. № 2. P. 181–191.
16. Чикрий А.А., Чикрий Г.П. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 324–333.
17. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во Московского университета. 1974.
18. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высш. школа, 2001.
19. Азамов А. Двойственность линейных дифференциальных игр преследования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 4. С. 777–779.
20. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.97

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА
ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ© 2023 г. А. В. Чернов^{1,*}¹ 603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, Россия

*e-mail: chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 23.05.2022 г.
Переработанный вариант 25.01.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Исследуется задача оптимизации младшего коэффициента, понимаемого как функция со значениями в банаховом пространстве, линейно входящего в абстрактное полулинейное эволюционное дифференциальное уравнение псевдопараболического типа в банаховом пространстве. Для этой задачи доказывается теорема существования оптимального управления. В связи с нелинейностью изучаемого уравнения используются ранее полученные автором результаты о тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости (о тотальной глобальной разрешимости) и об оценке решений для подобных уравнений. Указанная оценка оказывается существенной при проведении исследования. В качестве примера рассматривается гидродинамическая система уравнений Осколкова. Библ. 27.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение в банаховом пространстве, система уравнений Осколкова, существование оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0044466923070037, EDN: VSUHMU

ВВЕДЕНИЕ

Задачи определения коэффициентов различных уравнений с частными производными достаточно актуальны в связи с потребностями, возникающими из приложений. С физической точки зрения, эти коэффициенты характеризуют важные параметры той или иной динамической или стационарной системы такие, как коэффициент поглощения вещества или коэффициент скорости распада химических примесей, коэффициент диффузии, вязкое сопротивление среды, скорость ветра, электрический потенциал и т.д. Одним из эффективных методов решения коэффициентных обратных задач является метод минимизации регуляризованного функционала невязки между состоянием управляемой системы $\varphi[u]$ и данными наблюдений $\bar{\varphi}$, см., например, [1, 2]:

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{\alpha}{2} \|u\|^2, \quad J_0[u] = \kappa \|\varphi[u] - \bar{\varphi}\|^q, \quad \kappa > 0, \quad \alpha > 0, \quad q > 1.$$

При этом искомые (неизвестные) коэффициенты трактуются как управление u , и таким образом, получаем специфическую задачу оптимального управления. Отметим, что до сих пор коэффициентные обратные задачи изучались, в основном, для линейных уравнений с частными производными. Обзор некоторых результатов в этом направлении за последние 15 лет к моменту написания см. в [3].

При исследовании задач оптимального управления зачастую рассматривается случай, когда уравнение состояния имеет вид операторного дифференциального уравнения (либо представимо им), в частности, первого порядка по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (G\varphi)(t) = z(t), \quad t \in (0; T]; \quad \varphi(0) = a, \quad (1)$$

где на оператор G накладываются специальные условия (типа параболичности, монотонности, коэрцитивности, липшицевости, либо, скажем, линейности и ограниченности, и т.д. и т.п.), обеспечивающие разрешимость этого уравнения для любых z из заданного пространства, см.,

например, [2], [4, гл. 3], [5, гл. 5], [6]. При замене z на нелинейность вида $f(., \varphi)$ (не удовлетворяющей специальным требованиям типа тех, которые были отнесены выше к оператору G) разрешимость управляемой системы становится негарантированной. В этом случае, как правило, переходят к рассмотрению пар “управление—состояние” (как, например, [7, 8]), а управляемую систему рассматривают как ограничение специального вида. При этом на функционал приходится накладывать так называемое условие коэрцитивности (см., например, [8, гл. 1, § 2, условие 2.2, с. 14]). В отношении конкретных задач это выливается в то, что приходится рассматривать лишь функционалы того или иного специального вида (как правило, это суммы q -степеней L_q -норм), см., например, [4, 8]. Кроме того, предполагается априори, что множество допустимых пар непусто, см., например, [8, условие 7.1, с. 52; условие 8.1, с. 63].

В связи с обсуждаемой проблематикой представляет интерес следующее свойство. *Тотальное сохранение глобальной разрешимости* (ТСГР), или *тотально глобальная разрешимость* (ТГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Понятие ТСГР было введено в работе [9] (Глобальную разрешимость эволюционной системы мы понимаем в смысле, характерном для теории оптимального управления, т.е. на фиксированном промежутке времени).

При наличии теорем о ТСГР и единственности глобального решения и выполнении их условий можно использовать альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций, зависящих только от управлений, опираясь на соответствующие теоремы функционального анализа или их обобщения. Это, в свою очередь, позволяет упрощать исследование и/или получать достаточно сильные результаты. В ряде работ автора были получены признаки ТСГР для различного вида управляемых уравнений, в том числе операторных дифференциальных уравнений и абстрактных операторных уравнений второго и первого рода, см., например, [10–14]. Некоторые из них можно понимать как аналог известной классической теоремы Уинтнера [15, гл. III, теорема 5.1, с. 43–44]. Один из таких признаков используется и в этой статье.

Если обратиться к вопросу о проблеме существования оптимального управления, то для нелинейных управляемых систем, как правило, доказывался лишь факт существования оптимального управления, при этом рассматривались функционалы упомянутого выше специального вида. О свойствах множества оптимальных управлений речь не шла. Упомянем в связи с этим [8, гл. 1, §§ 7, 8; гл. 4, § 1], где рассматривались нелинейные параболические и гиперболические уравнения и система Навье—Стокса с правой частью в качестве управления, а также [4, гл. 3, § 15; гл. 4, § 10], где рассматривались параболические уравнения и уравнения второго порядка по времени, [5, §§ 4.4, 5.3] — эллиптические и параболические уравнения; см. также [6]. Упомянем здесь отдельно работу [16], где тоже доказывалось существование оптимального управления, но функционал (на парах “управление—состояние”) рассматривался общего вида в предположении ограниченности снизу и слабой полунепрерывности сверху; управление понималось как многозначное отображение состояния (т.е. как управление с обратной связью). В [17] рассматривался функционал Больца общего вида.

Отметим, что при рассмотрении пар “управление—состояние” свойства функционала как лишь функции управления не требуются и не изучаются. А между тем они могут представлять и самостоятельный интерес.

Отдельно упомянем работу [2], где изучалось нелинейное волновое уравнение (с липшицевой по переменной состояния правой частью) с линейно входящей управляющей функцией в качестве младшего коэффициента. Для множества U_* оптимальных управлений было доказано, что оно непусто и слабо компактно в пространстве управлений, и что всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к этому множеству. Отметим, наконец, что при доказательстве существования оптимального управления в случае полулинейных управляемых распределенных систем на правые части накладывают зачастую либо требование (глобальной) липшицевости [2, 17], либо условия, обеспечивающие монотонность нелинейного оператора [5, гл. 4, 5], за счет чего, в частности, удается обосновать существование и единственность решения управляемой системы для каждого допустимого управления. В [17], помимо существования оптимального управления, доказывались ограниченность и относительная слабая компактность множества допустимых траекторий (управления были из класса L_∞). В некоторых случаях налагают также условия, обеспечивающие строгую выпуклость целевого функционала как функции, зависящей только от управления, см., например, [6].

В данной работе мы исследуем задачу оптимизации младшего коэффициента, понимаемого как функция со значениями в банаховом пространстве, линейно входящего в абстрактное полулинейное эволюционное уравнение псевдопараболического типа в банаховом пространстве. Для этой задачи доказывается теорема существования оптимального управления и устанавливаются свойства множества оптимальных управлений U_* , аналогичные упомянутым выше. При этом используются и развиваются некоторые приемы из [2], где рассматривалось полулинейное волновое уравнение с правой частью, удовлетворяющей (глобальному) условию Липшица. Случай нелинейного вхождения заслуживает, разумеется, отдельного рассмотрения ввиду дополнительных возникающих трудностей. В связи с нелинейностью изучаемого уравнения используются ранее полученные автором результаты о тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости (о тотальной глобальной разрешимости) и об оценке решений для подобных уравнений. Указанная оценка оказывается существенной при проведении исследования. В качестве примера в разд. 5 рассматривается гидродинамическая система уравнений Осколкова.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СОГЛАШЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть V — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, непрерывно и компактно вложенное в гильбертово пространство H и плотное в нем. Если отождествить H с H^* , а H^* — с подпространством сопряженного к V пространства V^* , то [18, гл. VI] справедливы непрерывные включения

$$V \subset H \subset V^*.$$

Поясним, зачем требуется плотность вложения $V \subset H$, [18, гл. I, § 5, замечание 5.14, с. 24]. На самом деле сужение любого функционала $\psi \in H^*$ на V и без этого требования будет принадлежать V^* . В этом смысле есть вложение множеств $H^* \subset V^*$, но это нельзя понимать как обычное вложение. Действительно, два (и более) различных функционала из H^* могут иметь одинаковое сужение на V . В итоге получается, что два различных элемента H^* совпадают как элемент V^* . Чтобы исключить подобную ситуацию, как раз и требуется плотность вложения, поскольку в этом случае всякий функционал из H^* однозначно восстанавливается по своим значениям на V . Более того, в этом случае H^* можно рассматривать как плотное подпространство в V^* . Что касается непрерывности вложения $H^* \subset V^*$, она легко получается непосредственно из определения нормы линейного непрерывного функционала и непрерывности вложения $V \subset H$.

Пусть $C(0, T; V)$ — пространство функций со значениями в V , непрерывных на отрезке $[0; T]$; $L_p(0, T; V)$ — пространство функций со значениями в V , интегрируемых по Бохнеру со степенью p на отрезке $[0; T]$; $C[0; T] = C(0, T; \mathbb{R})$, $L_p[0; T] = L_p(0, T; \mathbb{R})$.

Будем предполагать заданными числа $T > 0$, $q \in (2; +\infty)$, $p = \frac{2q}{q-2}$ и сепарабельное рефлексивное банахово пространство $\tilde{V}$. Пусть, кроме того, заданы $U \subset L_p(0, T; \tilde{V})$ — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, понимаемое как множество допустимых управлений, также линейные ограниченные операторы $\Phi : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$, $\Psi : V \rightarrow V^*$. Оператор Φ будем предполагать вольтерровым для п.в. $t \in [0; T]$ и всех $x, y \in L_2(0, T; V)$ таких, что $x(s) = y(s)$ при $s \in [0; t]$, имеем $\Phi[x](s) = \Phi[y](s)$ при $s \in [0; t]$. Относительно оператора Ψ предполагаем, что он обратим, т.е. существует линейный ограниченный оператор $\Psi^{-1} : V^* \rightarrow V$. Определим пространство

$$W = \left\{ \varphi \in C(0, T; V) : \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L_2(0, T; V) \right\},$$

где производная по времени t понимается в смысле распределений, с нормой:

$$\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_{C(0, T; V)} + \|\varphi'\|_{L_2(0, T; V)}.$$

Отметим, что пространство W не является рефлексивным, но оно непрерывно вложено в рефлексивное банахово пространство

$$\tilde{W} = \left\{ \varphi \in L_q(0, T; V) : \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L_2(0, T; V) \right\}$$

с нормой $\|\phi\|_{\tilde{V}} = \|\phi\|_{L_q(0,T;V)} + \|\phi'\|_{L_2(0,T;V)}$. Далее будем предполагать, что задана функция $f(.,.) : [0;T] \times H \rightarrow V^*$, обладающая следующими свойствами.

F₁) Оператор суперпозиции $f(.,x(.))$ осуществляет непрерывное отображение $L_q(0,T;H) \rightarrow L_2(0,T;V^*)$, ограниченное на ограниченных множествах.

F₂) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая и локально-липшицева по r и суммируемая с квадратом по t такая, что

$$\|f(t,\xi)\|_{V^*} \leq \mathcal{N}_1(t,M)$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\|_V \leq M$.

F₃) Существует функция $\mathcal{N}_2(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что

$$\|f(t,\xi) - f(t,\eta)\|_{V^*} \leq \mathcal{N}_2(t,M) \|\xi - \eta\|_V$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $M > 0$, $\xi, \eta \in V$, $\|\xi\|_V, \|\eta\|_V \leq M$.

Замечание 1.1. Если пространство V компактно вложено в банахово пространство $Z \subset H$, то условие **F₁)** можно ослабить следующим образом.

F'₁) Оператор суперпозиции $f(.,x(.))$ осуществляет непрерывное отображение $L_q(0,T;Z) \rightarrow L_2(0,T;V^*)$, ограниченное на ограниченных множествах.

Пусть, наконец, задана функция $b(t,v,x) : [0;T] \times \tilde{V} \times H \rightarrow V^*$, измеримая по $t \in [0;T]$, билинейная по $(v,x) \in \tilde{V} \times H$ и удовлетворяющая следующим условиям.

B₁) При каждом $u \in U$ оператор суперпозиции $b(.,u(.),x(.))$ осуществляет отображение $L_q(0,T;H) \rightarrow L_2(0,T;V^*)$, билинейное по (u,x) .

B₂) Существуют функции $\gamma(.) \in L_\infty[0;T]$, $\nu(.) \in L_p[0;T]$ такие, что при п.в. $t \in [0;T]$ выполняются оценки:

$$\sup_{u \in U} \|u(t)\|_{\tilde{V}} \leq \nu(t); \quad \|b(t,v,x)\|_{V^*} \leq \gamma(t) \|v\|_{\tilde{V}} \|x\|_H \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad x \in H.$$

Замечание 1.2. На самом деле условие **B₁)** следует из условия **B₂)** – см. оценку функционала ψ_1 в доказательстве леммы 3.13, разд. 3.

При заданном $a \in V$ будем рассматривать эволюционное полулинейное уравнение:

$$\Psi \frac{d\phi}{dt} + (\Phi\phi)(t) = f(t,\phi(t)) + b(t,u(t),\phi(t)), \quad t \in (0;T], \quad (2)$$

при начальном условии

$$\phi(0) = a. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) понимаем в смысле тождества

$$(\Psi\phi' + (\Phi\phi)(t) - f(t,\phi(t)) - b(t,u(t),\phi(t)), \omega) = 0 \quad \forall \omega \in V$$

при п.в. $t \in [0;T]$.

Пусть γ_0 – константа непрерывного вложения $V \subset H$. Положим

$$\tilde{\mathcal{N}}_1(t,M) = \|\Psi^{-1}\| \mathcal{N}_1(t,M) + \gamma_0 \gamma(t) \nu(t) M, \quad L = \|\Psi^{-1}\| \|\Phi\|, \quad \mu = \sqrt{2} e^{L^2 T^2}.$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема 1.1. Пусть выполнены сделанные выше предположения. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) существует $T_0 \in (0;+\infty]$ такое, что при всех $T \in (0;T_0)$ задача Коши

$$\frac{d\beta}{dt} = \mu \tilde{\mathcal{N}}_1(t,\beta(t)), \quad t \in (0;T]; \quad \beta(0) = \mu \|a\|_V, \quad (4)$$

имеет абсолютно непрерывное решение $\beta \in \mathbf{AC}[0;T]$, понимаемое в смысле п.в.;

(б) при всех $T \in (0; T_0)$ и любом $u \in U$ задача (2), (3) имеет решение $\Phi[u] \in W$, удовлетворяющее оценке $\|\Phi[u](t)\|_V \leq \beta(t) \forall t \in [0; T]$, и это решение единственно.

Доказательство теоремы 1.1 см. разд. 2.

Теорема 1.1 гарантирует, что управляемая задача (2), (3) разрешима для всех допустимых управлений на *одном и том же* отрезке $[0; T]$, т.е. на данном отрезке спокойно можно рассматривать задачу оптимального управления. В этом и есть смысл теоремы 1.1. При отсутствии теоремы 1.1 горизонт существования решения будет зависеть от выбора конкретного управления, и будет непонятно, как выбирать общий для всех управлений отрезок существования решения $[0; T]$.

Замечание 1.3. Если просто постулировать разрешимость задачи (4) для любого $T \in (0; T_0)$, то требование локальной липшицевости функции $N_1(t, \xi)$ по $\xi \in \mathbb{R}_+$ в условии F_2) можно опустить. Указанную разрешимость можно устанавливать различными способами. Во-первых, иногда удается доказать ее непосредственно (см. заключительную часть разд. 5). Во-вторых, можно использовать классическую теорему Уинтнера [15, гл. III, теорема 5.1, с. 43, 44] (да и сама теорема 1.1 — это и есть аналог теоремы Уинтнера). В-третьих, наличие аккуратного построенного численного решения задачи (4) на заданном отрезке с высокой долей вероятности позволяет надеяться, что существует точное решение.

Далее везде будем считать условия теоремы 1.1 выполненными. Поставим задачу оптимизации. Пусть задан непрерывный функционал $I_0 : L_q(0; T; H) \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченный на ограниченных множествах, $J_0[u] = I_0(\Phi[u])$, $u \in U$. Для произвольно заданного $\alpha \geq 0$ будем исследовать задачу

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{1}{2} \alpha \|u\|_{L_p(0; T; \tilde{V})}^2 \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Обозначим $J_\alpha^* = \inf_{u \in U} J_\alpha[u]$, $U_* = \{u \in U : J_\alpha[u] = J_\alpha^*\}$.

Теорема 1.2. Множество U слабо компактно в $L_p(0; T; \tilde{V})$.

Доказательство теоремы 1.2 см. в разд. 4.

Теорема 1.3. Функционал $J_0[u]$, а следовательно, и $J_\alpha[u]$, ограничен на множестве U .

Доказательство теоремы 1.3 см. в разд. 4.

Теорема 1.4. Функционал $J_0[u]$ слабо непрерывен на множестве U . Функционал $J_\alpha[u]$ слабо полунепрерывен снизу на множестве U .

Доказательство теоремы 1.4 см. в разд. 4.

Определение [19, глава 1, § 1, определение 6, с. 49]. Пусть E — банахово пространство. Говорят, что последовательность $\{u_m\} \subset E$ сходится к множеству U слабо в E , если $\{u_m\}$ имеет хотя бы одну слабо сходящуюся подпоследовательность, причем все точки v , являющиеся слабым пределом какой-либо подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, принадлежат U .

Непосредственно из теорем 1.1–1.4 и [19, гл. 1, § 1, теорема 2, с. 49] вытекает

Следствие. Множество U_* непусто и слабо компактно в пространстве $L_p(0; T; \tilde{V})$, и более того, всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к множеству U_* в $L_p(0; T; \tilde{V})$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

При сделанных предположениях уравнение (2) равносильно следующему:

$$\frac{d\Phi}{dt} + (G\Phi)(t) = g[u](t, \Phi(t)), \quad t \in (0; T], \quad (5)$$

где

$$(G\Phi)(t) = \Psi^{-1}[(\Phi\Phi)(t)], \quad g[u](t, \Phi(t)) = \Psi^{-1}[f(t, \Phi(t)) + b(t, u(t), \Phi(t))].$$

Проблема *тотальной* (по всем допустимым управлениям) *сохранения глобальной разрешимости* такого уравнения изучалась в [10]. Отметим, что в случае установленного факта однозначной разрешимости соответствующего уравнения (1) его решение можно обозначить как $\mathcal{F}[z]$, и тем

самым, соответствующая начальная задача для уравнения (5) переписывается в виде операторного уравнения второго рода:

$$\varphi = \mathcal{F}[g[u](\cdot, \varphi)].$$

Аналогичные [10] результаты для операторного уравнения второго рода см., например, в [11, 12]. Но результаты [10] максимально адаптированы к рассматриваемой ситуации и здесь их применение наиболее удобно. В [11–14] см. также дальнейшую литературу по проблеме тотальной глобальной разрешимости.

Для уравнений вида (1) при $z(t) = g[u](t)$ проблема глобальной разрешимости, разумеется, изучалась и другими авторами, см., например, [8, 18, 20]. При этом на оператор G накладывались специальные условия типа монотонности, коэрцитивности, липшицевости, либо, скажем, линейности и ограниченности, и т.д. и т.п. При наличии нелинейной зависимости g от φ , т.е. для уравнения (5), разрешимость уже никак не гарантирована. Естественные предположения типа **F**) и наличие результата о разрешимости уравнения (1) для этого недостаточны. Поэтому и приходится доказывать теоремы сравнения типа теоремы Уинтнера. В нашем случае это теорема 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Что касается утверждения (а), отметим, что при сделанных предположениях относительно функции $\mathcal{N}_1(t, \xi)$ задача (4) разрешима локально (это хорошо известный классический факт; в [13, теорема 5] он доказывается даже в более общей постановке, когда речь идет об абсолютно непрерывных функциях со значениями в банаховом пространстве).

Займемся далее доказательством утверждения (б) при произвольно фиксированном $T \in (0; T_0)$. С учетом [10, теоремы 1.1, 1.2], нам достаточно лишь проверить выполнение следующих условий.

A₁) Оператор $G : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V)$ вольтерров.

A₂) Оператор $G : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V)$ удовлетворяет условию Липшица.

G₁) Для каждого $u \in U$ оператор суперпозиции $g[u](\cdot, x(\cdot))$ осуществляет отображение $C(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$.

G₂) Существует функция $\tilde{\mathcal{N}}_1(t, r) : [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что $\|g[u](t, \xi) - (G0)(t)\|_V \leq \tilde{\mathcal{N}}_1(t, M)$ для п.в. $t \in [0; T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\|_V \leq M$.

G₃) Существует функция $\tilde{\mathcal{N}}_2(t, r) : [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что

$$\|g[u](t, \xi) - g[u](t, \eta)\|_V \leq \tilde{\mathcal{N}}_2(t, M) \|\xi - \eta\|_V$$

для п.в. $t \in [0; T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi, \eta \in V$, $\|\xi\|_V, \|\eta\|_V \leq M$.

Выполнение условия **A₁)** очевидно в силу вольтерровости оператора Φ . Из линейности и ограниченности операторов Ψ^{-1} , Φ получаем

$$\|(Gx)(t) - (Gy)(t)\|_V \leq \|\Psi^{-1}\| \|\Phi[x - y](t)\|_{V^*},$$

откуда

$$\|Gx - Gy\|_{L_2(0, T; V)} \leq \|\Psi^{-1}\| \|\Phi[x - y]\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq L \|x - y\|_{L_2(0, T; V)},$$

где $L = \|\Psi^{-1}\| \|\Phi\|$ для всех $x, y \in L_2(0, T; V)$. Таким образом, условие **A₂)** выполнено. Условие **G₁)**, с учетом вложения $C(0, T; V) \subset L_q(0, T; H)$, очевидным образом вытекает из условий **F₁)**, **B₁)**. Проверим условие **G₂)**. Учитывая, что $G(0) = 0$, и принимая во внимание условия **F₂)**, **B₂)**, оценим

$$\|g[u](t, \xi)\|_V \leq \|\Psi^{-1}\| \{\|f(t, \xi)\|_{V^*} + \|b(t, u(t), \xi)\|_{V^*}\} \leq \|\Psi^{-1}\| \{\mathcal{N}_1(t, M) + \gamma_0 \gamma(t) v(t) M\} \equiv \tilde{\mathcal{N}}_1(t, M)$$

для п.в. $t \in [0; T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\|_V \leq M$. Таким образом, условие **G₂)** выполнено.

Проверим условие **G₃)**. Учитывая условия **F₃)**, **B₂)**, оценим

$$\begin{aligned} \|g[u](t, \xi) - g[u](t, \eta)\|_V &\leq \|\Psi^{-1}\| \{\|f(t, \xi) - f(t, \eta)\|_{V^*} + \|b(t, u(t), \xi - \eta)\|_{V^*}\} \leq \tilde{\mathcal{N}}_2(t, M) \|\xi - \eta\|_V, \\ \tilde{\mathcal{N}}_2(t, M) &\equiv \|\Psi^{-1}\| \{\mathcal{N}_2(t, M) + \gamma_0 \gamma(t) v(t)\}, \end{aligned}$$

для п.в. $t \in [0; T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi, \eta \in V$, $\|\xi\|_V, \|\eta\|_V \leq M$. Таким образом, условие G_3) выполнено. Теорема 1.1 доказана.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Начнем с достаточно очевидных утверждений, которые многими используются как само собой разумеющееся, см., например, [21, гл. 2, § 2, доказательство теоремы 2.4, с. 30, [20, гл. 1, § 5, доказательство теоремы 5.1, с. 70].

Лемма 3.1. Пусть E, F — рефлексивные банаховы пространства. Тогда $E \times F$ рефлексивно.

Доказательство легко следует из известного равенства $(E \times F)^* = E^* \times F^*$ [22, гл. I, § 4, п. 6, с. 48].

Лемма 3.2. Пространство $\tilde{W}$ является банаховым.

Доказательство достаточно стандартным образом проводится на основе [18, гл. IV, § 1, замечания 1.14, 1.15, с. 168–169].

Лемма 3.3. Банахово пространство $\tilde{W}$ является рефлексивным.

Доказательство достаточно легко получается из леммы 3.1 и рефлексивности и сепарабельности пространства V , см. также [18, гл. IV, § 1, замечание 1.11, с. 163, 23, гл. V, § 7, следствие 1, с. 163].

Лемма 3.4. Если банахово пространство V рефлексивно и сепарабельно, то сопряженное пространство V^* также рефлексивно и сепарабельно.

Доказательство достаточно очевидным образом следует из [25, лемма 2.24, с. 18, 23, гл. V, § 7, следствие 2, с. 237].

Напомним, что оператор $A : V \rightarrow V^*$ называется *деминеprывным*, если из сходимости $x_n \rightarrow x$ в V вытекает слабая сходимость $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в V^* . Ясно, что всякий непрерывный оператор деминеprывен.

Лемма 3.5. Пусть банахово пространство V рефлексивно и сепарабельно, а $\{A(t)\}$, $t \in [0; T]$, — семейство деминеprывных операторов $V \rightarrow V^*$ таких, что функция $(A(t)x, u)$ измерима на $[0; T]$ при любых фиксированных $x, u \in V$. Тогда для любой измеримой (по Бохнеру) функции $\varphi : [0; T] \rightarrow V$ функция $A(t)\varphi(t)$ измерима на $[0; T]$. Более того, если при $p, q \in (1; +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполняется оценка

$$\|A(t)x\|_{V^*} \leq c \|x\|_V^{p-1} + d \text{ для любых } x \in V, \text{ то } A(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_q(0, T; V^*) \text{ для всех } \varphi \in L_p(0, T; V).$$

Доказательство. С учетом [18, гл. IV, § 1, теорема 1.4, с. 153] и сепарабельности V , функция $\varphi : [0; T] \rightarrow V$ измерима по Бохнеру тогда и только тогда, когда для любых $\omega \in V^*$ функция $(\omega, \varphi(\cdot)) : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. По лемме 3.4 пространство V^* сепарабельно. Поэтому нам достаточно доказать, что для всех $\omega \in V^{**} = V$ функция $(A(t)\varphi(t), \omega)$ измерима по Лебегу на $[0; T]$. Поскольку функция $\varphi(t)$ измерима по Бохнеру, то по определению, существует последовательность простых функций $\varphi_n(t)$ такая, что $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ при п.в. $t \in [0; T]$. Зафиксируем произвольно $\omega \in V$ и номер $n \in \mathbb{N}$. Так как функция $\varphi_n(t)$ простая, то существует дизъюнктное разбиение $[0; T] = \bigcup_{k=1}^{m_n} E_{n,k}$ на конечное число непересекающихся измеримых множеств $E_{n,k}$, на каждом из которых функция $\varphi_n(t) \equiv \varphi_{n,k} = \text{const}$. Тогда по условию леммы на каждом таком множестве $E_{n,k}$ функция $(A(t)\varphi_n(t), \omega) = (A(t)\varphi_{n,k}, \omega)$ измерима. Стало быть, функция $(A(t)\varphi_n(t), \omega)$ измерима на всем отрезке $[0; T]$. При этом, в силу деминеprывности операторов, $A(t)\varphi_n(t) \rightharpoonup A(t)\varphi(t)$ при п.в. $t \in [0; T]$. В частности, $(A(t)\varphi_n(t), \omega) \rightarrow (A(t)\varphi(t), \omega)$ при $n \rightarrow \infty$ для п.в. $t \in [0; T]$. Таким образом, функция $(A(t)\varphi(t), \omega)$ есть п.в.-предел последовательности измеримых функций, а следовательно, она измерима на $[0; T]$. Отсюда вытекает измеримость по Бохнеру функции $A(t)\varphi(t)$. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Пользуясь соответствующим неравенством (ясно, что $d \geq 0$), оценим

$$\|A(t)\varphi(t)\|_{V^*}^q \leq \left\{ c \|\varphi(t)\|_V^{p-1} + d \right\}^q.$$

Положим

$$E_- = \{t \in [0; T] : c \|\varphi(t)\|_V^{p-1} \leq d\}, \quad E_+ = \{t \in [0; T] : c \|\varphi(t)\|_V^{p-1} > d\}.$$

Тогда можем оценить:

$$\begin{aligned} \|A(\cdot)\varphi(\cdot)\|_{L_q(0,T;V^*)}^q &\leq \int_0^T \{c \|\varphi(t)\|_V^{p-1} + d\}^q dt \leq \int_{E_-} (2d)^q dt + \int_{E_+} (2c)^q \|\varphi(t)\|_V^{q(p-1)} dt \leq \\ &\leq T(2d)^q + (2c)^q \|\varphi\|_{L_p(0,T;V)}^p < \infty. \end{aligned}$$

Стало быть, $A(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_q(0,T;V^*)$. Лемма доказана.

Замечание 3.1. Аналогичное утверждение для семейства монотонных радиально непрерывных операторов сформулировано без доказательства в [18, гл. IV, § 1, п. 3, с. 257]. Однако для монотонных операторов радиальная непрерывность равносильна деминепрерывности [18, лемма 1.3, с. 85]. Таким образом, мы доказали прямое обобщение этого утверждения на немонотонный случай.

Замечание 3.2. Лемма 3.5 позволяет обосновать корректность выражений $\Psi\varphi'$ и $\Psi^{-1}[(\Phi\varphi)(t)]$, $\Psi^{-1}[f(t, \varphi(t))]$, $\Psi^{-1}[b(t, u(t), \varphi(t))]$ в уравнениях (2) и (5) соответственно. Кроме того, она может оказаться полезной при задании конкретного выражения для оператора Φ .

Лемма 3.6. Пусть функция $g \in L_2(0, T; V^*)$ такова, что для всех $\omega \in L_2(0, T; V)$ имеем $\int_0^T (g(t), \omega(t)) dt = 0$. Тогда при п.в. $t \in [0; T]$ справедливо тождество $(g(t), \omega) = 0$ для всех $\omega \in V$.

Доказательство легко следует из известного равенства

$$(L_p(0, T; V))^* = L_{p'}(0, T; V^*)$$

для сепарабельного и рефлексивного банахова пространства V и того, что представление функционала дается соответствующим интегралом, см. [24, теорема 2.55].

Далее мы везде предполагаем, что выполнены условия теоремы 1.1. Тем самым, определено множество решений $S = \{\varphi[u] : u \in U\}$.

Лемма 3.7. Множество S ограничено в пространстве W .

Доказательство. Выберем произвольно $u \in U$ и положим $\varphi = \varphi[u]$. Непосредственно из теоремы 1.1 получаем оценку

$$\|\varphi(t)\|_V \leq \beta(t) \quad \forall t \in [0; T].$$

Следовательно, $\|\varphi\|_{C(0,T;V)} \leq \|\beta\|_{C[0;T]} \equiv M_1$. При этом из уравнения (5) вытекает представление (мы используем здесь обозначения из разд. 2):

$$\varphi'(t) = g[u](t, \varphi(t)) - \Psi^{-1}[(\Phi\varphi)(t)],$$

откуда

$$\|\varphi'(t)\|_V \leq \|g[u](t, \varphi(t))\|_V + \|\Psi^{-1}\| \|(\Phi\varphi)(t)\|_{V^*} \leq \tilde{N}_1(t, M_1) + \|\Psi^{-1}\| \|(\Phi\varphi)(t)\|_{V^*}.$$

Стало быть,

$$\|\varphi\|_{L_2(0,T;V)} \leq \|\tilde{N}_1(\cdot, M_1)\|_{L_2[0;T]} + \|\Psi^{-1}\| \|\Phi\varphi\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq \|\tilde{N}_1(\cdot, M_1)\|_{L_2[0;T]} + \|\Psi^{-1}\| \|\Phi\| M_1 \sqrt{T} \equiv M_2.$$

Таким образом, $\|\varphi\|_W \leq M_1 + M_2 \equiv M$. Лемма доказана.

Следующее утверждение — это известная теорема Лионса—Темама (J.L. Lions—R. Temam), см., например, [20, гл. 1, теорема 5.1, с. 70, включая ее доказательство].

Лемма 3.8. Пусть V, V' — рефлексивные банаховы пространства, H — банахово пространство, $V \subset H$ компактно, $H \subset V'$ непрерывно, $p, q \in (1; +\infty)$. Тогда пространство

$$W = \{z \in L_q(0, T; V) : z' \in L_p(0, T; V')\}$$

с нормой $\|z\|_W = \|z\|_{L_q(0, T; V)} + \|z'\|_{L_p(0, T; V')}$ является рефлексивным банаховым пространством, непрерывно вложенным в $C(0, T; V')$ и компактно вложенным в $L_q(0, T; H)$.

Лемма 3.9. Пространство $\tilde{W}$ непрерывно вложено в $C(0, T; H)$ и компактно вложено в $L_q(0, T; H)$.

Доказательство легко следует из леммы 3.8 при $p = 2, V' = H$.

При проверке рефлексивности, сепарабельности и компактного вложения конкретных пространств полезны следующие две леммы. Первая — это один из вариантов теоремы Реллиха—Кондрашова, [26, § 1.11.5, с. 106].

Лемма 3.10. Если $1 < p < \infty, n \geq \ell p, q < \frac{np}{n - \ell p}$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ представляет объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара, то вложение $W_p^\ell(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно.

О других вариантах см., например, [18, гл. II, § 1, лемма 1.28, 21, § 3.5, с. 82]. Во втором собраны известные свойства пространств Соболева [21, § 2.2, теорема 2.4, с. 30].

Лемма 3.11. Пространство $W_p^\ell(\Omega)$ банахово при $1 \leq p \leq \infty$, рефлексивно при $1 < p < \infty$, сепарабельно при $1 \leq p < \infty$ и гильбертово при $p = 2$ относительно скалярного произведения $(x, y) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq \ell} (D^\alpha x, D^\alpha y)$.

Лемма 3.12. Пусть $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в пространстве $\tilde{W}$. Тогда для любого $\omega \in L_2(0, T; V)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T (\Psi \varphi'_m, \omega(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (\Psi \varphi', \omega(t)) dt, \\ \int_0^T ((\Phi \varphi_m)(t), \omega(t)) dt &\rightarrow \int_0^T ((\Phi \varphi)(t), \omega(t)) dt. \end{aligned}$$

Доказательство легко следует из леммы 3.5 (при $p = q = 2$) и неравенства Гёльдера.

Лемма 3.13. Пусть $\varphi_m \rightarrow \varphi$ в пространстве $L_q(0, T; H)$, $u_m \rightharpoonup u$ в пространстве $L_p(0, T; \tilde{V})$, $\{u_m\} \subset U$. Тогда для любого $\omega \in L_2(0, T; V)$ имеем

$$\int_0^T (b(t, u_m(t), \varphi_m(t)), \omega(t)) dt \rightarrow \int_0^T (b(t, u(t), \varphi(t)), \omega(t)) dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\omega \in L_2(0, T; V)$. Используя стандартный прием “добавим и вычтем” (знак “ $\pm$ ”), а также индексирование скобок для сокращения записи, преобразуем разность

$$\begin{aligned} b(., u_m, \varphi_m) - b(., u, \varphi) &= b(., u_m, \varphi_m) - b(., u, \varphi) \pm b(., u_m, \varphi) = \\ &= \{b(., u_m - u, \varphi)\}_1 + \{b(., u_m, \varphi_m - \varphi)\}_2. \end{aligned}$$

Нам достаточно доказать, что

$$P_{j,m} = \int_0^T (\{b(., u_m - u, \varphi)\}_j(t), \omega(t)) dt \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

1. Исследуем $P_{1,m}$. Определим функционал $\psi_1 : L_p(0, T; \tilde{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью формулы:

$$\psi_1[v] = \int_0^T (b(t, v(t), \varphi(t)), \omega(t)) dt, \quad v \in L_p(0, T; \tilde{V}).$$

Так как функция $b(., v, x)$ билинейна по (v, x) , это линейный функционал. Докажем его непрерывность. Обозначим $\bar{\gamma} = \|\gamma\|_{L_\infty[0;T]}$, см. условие $\mathbf{B}_2$). Выберем произвольно $v \in L_p(0, T; \tilde{V})$ и, пользуясь неравенством Гёльдера, оценим

$$\begin{aligned} |\psi_1[v]| &\leq \int_0^T \|b(t, v(t), \varphi(t))\|_{V^*} \|\omega(t)\|_V dt \leq \bar{\gamma} \int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}} \|\varphi(t)\|_H \|\omega(t)\|_V dt \leq \\ &\leq \bar{\gamma} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}}^2 \|\varphi(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma = \frac{q}{2}$, $\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} = \frac{q}{q-2}$. Стало быть, $2\sigma' = p$. Пользуясь опять неравенством Гёльдера, получаем

$$\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}}^2 \|\varphi(t)\|_H^2 dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}}^{2\sigma'} dt \right)^{1/\sigma'} \left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_H^{2\sigma} dt \right)^{1/\sigma}.$$

Таким образом,

$$|\psi_1[v]| \leq \bar{\gamma} \|\varphi\|_{L_q(0,T;H)} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \|v\|_{L_p(0,T;\tilde{V})}.$$

Следовательно, $\psi_1 \in (L_p(0, T; \tilde{V}))^*$. С учетом слабой сходимости $u_m \rightharpoonup u$, заключаем, что $\psi_1[u_m] \rightarrow \psi_1[u]$, т.е. $P_{1,m} = \psi_1[u_m] - \psi_1[u] \rightarrow 0$.

2. Аналогично п. 1, получаем оценку

$$\begin{aligned} |P_{2,m}| &\leq \bar{\gamma} \|u_m\|_{L_p(0,T;\tilde{V})} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \leq \\ &\leq \bar{\gamma} \|v\|_{L_p[0;T]} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.14. Пусть $\varphi_m \rightarrow \varphi$ в пространстве $L_q(0, T; H)$. Тогда для любого $\omega \in L_2(0, T; V)$ имеем

$$\int_0^T (f(t, \varphi_m(t)) - f(t, \varphi(t)), \omega(t)) dt \rightarrow 0.$$

Доказательство. Пользуясь неравенством Гёльдера, а также условием $\mathbf{F}_1$), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (f(t, \varphi_m(t)) - f(t, \varphi(t)), \omega(t)) dt \right| &\leq \int_0^T \|f(t, \varphi_m(t)) - f(t, \varphi(t))\|_{V^*} \|\omega(t)\|_V dt \leq \\ &\leq \|f(., \varphi_m(.)) - f(., \varphi(.))\|_{L_2(0,T;V^*)} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $\|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.15. Пусть $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в пространстве $\tilde{W} \subset C(0, T; H)$, причем $\varphi_m(0) = a \in V$ (достаточно $a \in H$). Тогда $\varphi(0) = a$.

Доказательство. По лемме 3.9 имеет место непрерывное вложение $\tilde{W} \subset C(0, T; H)$. Поэтому утверждение леммы сформулировано корректно. Выберем произвольно функционал $\psi \in H^* = H$ и соответственно, на пространстве $C(0, T; H)$ определим функционал $\bar{\psi}[x] = \psi[x(0)]$. Очевидно, что $\bar{\psi}$ — линейный функционал. При этом

$$|\bar{\psi}[x]| \leq \|\psi\| \|x(0)\|_H \leq \|\psi\| \|x\|_{C(0,T;H)} \quad \forall x \in C(0,T;H).$$

Следовательно, $\bar{\psi} \in (C(0, T; H))^* \subset \tilde{W}^*$. Тогда, с учетом слабой сходимости $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$, получаем

$$\bar{\psi}[\varphi_m] \rightarrow \bar{\psi}[\varphi] \Leftrightarrow \psi[\varphi_m(0)] \rightarrow \psi[\varphi(0)].$$

В силу произвольности выбора функционала $\psi \in H^*$, это означает, что $\varphi_m(0) \rightharpoonup \varphi(0)$ в пространстве H .

Определим на пространстве H функционал $h[x] = \|x - a\|_H$. Очевидно, что он является выпуклым и непрерывным. Следовательно, слабо полунепрерывен снизу [19, гл. 1, § 3, теорема 5, с. 52]. Поэтому, с учетом слабой сходимости $\varphi_m(0) \rightharpoonup \varphi(0)$ в H , получаем

$$0 \leq h[\varphi(0)] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} h[\varphi_m(0)] = 0.$$

Таким образом, $h[\varphi(0)] = 0$, т.е. $\|\varphi(0) - a\|_H = 0$. Это означает, что $\varphi(0) = a$. Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Доказательство теоремы 1.2. По условию, $\tilde{V}$ — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Следовательно, пространство $L_p(0, T; \tilde{V})$ рефлексивно [18, гл. IV, § 1, замечание 1.11, с. 163]. Тогда, поскольку множество U по условию ограничено, замкнуто и выпукло, то оно слабо компактно в пространстве $L_p(0, T; \tilde{V})$ [19, гл. 1, § 3, теорема 4, с. 51].

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3. По лемме 3.7, множество

$$S = \{\varphi[u] : u \in U\}$$

ограничено в пространстве W . По лемме 3.9, пространство $\tilde{W}$ компактно вложено в $L_q(0, T; H)$. Поскольку $W \subset \tilde{W}$, то ясно, что и пространство W компактно вложено в $L_q(0, T; H)$. Так как множество S ограничено в $W \subset L_q(0, T; H)$, то оно ограничено и в $L_q(0, T; H)$. Тогда, в силу ограниченности функционала I_0 на ограниченных множествах в $L_q(0, T; H)$, получаем, что функционал $J_0[u] = I_0[\varphi[u]]$ ограничен на множестве U . В таком случае и функционал $J_\alpha[u]$ ограничен на множестве U .

Теорема 1.3 доказана.

Лемма 4.1. Пусть $\{u_m\} \subset U$ — слабосходящаяся в $L_p(0, T; \tilde{V})$ последовательность: $u_m \rightharpoonup u$, и по теореме 1.2, $u \in U$. Тогда существует подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$ такая, что $J_0[u_{m_k}] \rightarrow J_0[u]$.

Доказательство. Поскольку слабый предел определяется однозначно [25, утверждение 2.22, с. 17], $u_{m_k} \rightharpoonup u$. Дальнейшие рассуждения проведем в несколько этапов.

1. Как уже было показано при доказательстве теоремы 1.2, имеет место компактное вложение $W \subset L_q(0, T; H)$.

2. Обозначим $\varphi_m = \varphi[u_m] \in S$, $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что с точностью до перехода к подпоследовательности, $\varphi_m \rightharpoonup \varphi \in \tilde{W}$ в пространстве $\tilde{W}$ и при этом $\varphi \in L_q(0, T; H)$, $\varphi_m \rightarrow \varphi$ (сильно) в пространстве $L_q(0, T; H)$.

Ясно, что $S \subset W \subset \tilde{W}$, а по лемме 3.3, пространство $\tilde{W}$ рефлексивно. Поэтому всякий замкнутый шар в $\tilde{W}$ слабо компактен [19, гл. 1, § 3, теорема 4, с. 51]. Отсюда и из леммы 3.7 получаем, что из последовательности $\{\varphi_m\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому $\varphi \in \tilde{W}$, $\|\varphi\|_{\tilde{W}} \leq M$, причем $\|\varphi_m\|_{\tilde{W}} \leq M$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности рассуждений, будем считать, что сама последовательность $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в пространстве $\tilde{W}$. С другой стороны, в силу п. 1, пространство W компактно вложено в $L_q(0, T; H)$. Поэтому у последовательности $\{\varphi_m\}$ существует подпоследовательность, сходящаяся (сильно) в пространстве $L_q(0, T; H)$. Опять же, без ограничения общности рассуждений (с точностью до перехода к подпоследовательности) будем считать, что $\varphi_m \rightarrow \bar{\varphi} \in L_q(0, T; H)$. Ясно, что из сильной сходимости вытекает слабая. Поэтому $\varphi_m \rightharpoonup \bar{\varphi}$ в $L_q(0, T; H)$. При этом (за счет плотного вложения $V \subset H$) $(L_q(0, T; H))^* = L_q(0, T; H^* = H) \subset \tilde{W}^*$, и стало быть, $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в $L_q(0, T; H)$. Поскольку слабый предел определяется однозначно [25, утверждение 2.22, с. 17], заключаем, что $\bar{\varphi} = \varphi$.

3. Пусть $\varphi_m \rightharpoonup \varphi \in \tilde{W}$ в пространстве $\tilde{W}$ и при этом $\varphi \in L_q(0, T; H)$, $\varphi_m \rightarrow \varphi$ (сильно) в пространстве $L_q(0, T; H)$. Докажем, что $\varphi = \varphi[u]$.

В соответствии с леммой 3.6 для этого достаточно доказать, что для всякого $\omega \in L_2(0, T; V)$ выполняется равенство

$$\int_0^T (\Psi \varphi'(t) + (\Phi \varphi)(t) - f(t, \varphi(t)) - b(t, u(t), \varphi(t)), \omega(t)) dt = 0, \quad (6)$$

а также начальное условие $\varphi(0) = a$. Поскольку функция $\varphi_m = \varphi|_{u_m}$, то для нее аналогичное подынтегральное выражение равно нулю для п.в. $t \in [0; T]$. Стало быть, зануляется также и интеграл. Поэтому, пользуясь леммами 3.12–3.15, заключаем, что функция φ удовлетворяет тождеству (6) и начальному условию. Однако по построению, $\varphi \in \tilde{W}$. Строго говоря, надо еще доказать, что $\varphi \in W$. Для этого заметим, что φ является решением соответствующего линейного уравнения

$$\Psi \varphi'(t) + (\Phi \varphi)(t) = z(t), \quad t \in [0; T],$$

с правой частью $z = f(\cdot, \varphi(\cdot)) + b(\cdot, u(\cdot), \varphi(\cdot)) \in L_2(0, T; V^*)$, при начальном условии $\varphi(0) = a$, а стало быть, и решением задачи

$$\varphi'(t) + (G\varphi)(t) = \Psi^{-1}z(t), \quad t \in [0; T]; \quad \varphi(0) = a,$$

при $(G\varphi)(t) = \Psi^{-1}[(\Phi \varphi)(t)]$ – вольтерровом линейном ограниченном операторе $L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V)$ и $\Psi^{-1}z \in L_2(0, T; V)$. Отсюда, см. [18, гл. V, § 1.3, теорема 1.3], вытекает, что $\varphi \in W$. Следовательно, $\varphi = \varphi|u$.

4. В силу п.п. 2 и 3, с точностью до перехода к подпоследовательности, имеем $\varphi_m \rightarrow \varphi|u$ в пространстве $L_q(0, T; H)$. Поэтому, в силу непрерывности функционала I_0 на пространстве $L_q(0, T; H)$, получаем

$$J_0[u_m] = I_0[\varphi_m] \rightarrow I_0[\varphi|u] = J_0[u].$$

Лемма 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Прежде всего, исследуем функционал $J_0[u]$. Выберем произвольно слабосходящуюся в $L_p(0, T; \tilde{V})$ последовательность $\{u_m\} \subset U$, $u_m \rightharpoonup u$ и покажем, что $J_0[u_m] \rightarrow J_0[u]$. Пусть $\bar{J}$ – произвольная предельная точка (ограниченной в силу теоремы 1.3) числовой последовательности $J_0[u_m]$. Это означает, что существует подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$ такая, что $J_0[u_{m_k}] \rightarrow \bar{J}$. Поскольку слабый предел определяется однозначно [25, утверждение 2.22, с. 17], $u_{m_k} \rightharpoonup u$. А так как предел любой подпоследовательности $\lim_{k \rightarrow \infty} J_0[u_{m_k}] = \bar{J}$, то нам достаточно убедиться, что существует такая подпоследовательность $u_{m_{k_\ell}}$, для которой

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} J_0[u_{m_{k_\ell}}] = J_0[u].$$

Но этот факт следует непосредственно из леммы 4.1. А он, в свою очередь, означает, что $\bar{J} = J_0[u]$.

Стало быть, все предельные точки последовательности $J_0[u_m]$ совпадают с $J_0[u]$, т.е. существует $\lim_{m \rightarrow \infty} J_0[u_m] = J_0[u]$. Иначе говоря, функционал J_0 слабо непрерывен на U .

Остается заметить, что функционал $K[u] = \|u\|_{L_p(0, T; \tilde{V})}^2$ является выпуклым и непрерывным на U , а следовательно, слабополунепрерывен снизу на U [19, гл. 1, § 3, теорема 5, с. 52]. Теорема 1.4 доказана.

5. ПРИМЕР: СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА С ДОБАВЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с локально липшицевой границей $\partial\Omega$, удовлетворяющая условиям леммы 3.10; $T > 0$, $\Gamma = [0; T] \times \partial\Omega$, $\Pi_T = [0; T] \times \Omega$. Обозначим через $\mathcal{D}(\Omega)^n$ – пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем в

Ω ; $H_0^1(\Omega)^n$ — замыкание $\mathcal{D}(\Omega)^n$ в норме пространства $H^1(\Omega)^n$; $\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n : \operatorname{div} \varphi = 0\}$ — множество соленоидальных функций; H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2^n(\Omega)$; V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w \, dx, \quad \nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

Соответствующая норма $\|\cdot\|_V$ эквивалентна норме пространства $H^1(\Omega)^n$. Согласно [18], имеют место непрерывные и плотные вложения

$$V \subset H, \quad H^* \subset V^*,$$

причем H допускает отождествление с H^* . При данном выборе пространств V, H пространство W определяется так, как указано в разд. 1. Отметим, что по леммам 3.1, 3.11 банахово пространство $H^1(\Omega)^n$ рефлексивно и сепарабельно. Замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивно [23, гл. V, § 7, следствие 1, с. 237]. Кроме того, метрическое пространство, содержащееся в сепарабельном метрическом пространстве, сепарабельно [23, гл. I, § 4, с. 39]. Таким образом, пространство V рефлексивно и сепарабельно. Очевидно, что пространство H гильбертово. В соответствии с леммой 3.10 пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в лебегово пространство $L_r(\Omega)$ при любом

$$1 < r < \frac{3 \times 2}{3 - 2 \times 1} = 6.$$

В частности, $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно. Отсюда вытекает компактное вложение $V \subset H$. Далее мы опишем один из возможных способов (но, разумеется, не единственный способ) выбора функции $b(t, u, \varphi)$ и соответственно, пространства $\tilde{V}$, обеспечивающих выполнение условия **B**₂), а тем самым, и условия **B**₁), см. замечание 1.2. Пусть $\gamma(\cdot) \in L_{\infty}^+[0; T]$, $\bar{\gamma} = \|\gamma\|_{L_{\infty}[0; T]}$. Определим функцию $b(t, u, \varphi) : [0; T] \times \tilde{V} \times H \rightarrow V^*$ как отображение, которое при $t \in [0; T]$ каждой паре $u \in \tilde{V}$, $\varphi \in H$ ставит в соответствие функционал, определяемый формулой

$$(b(t, u, \varphi), \omega) = \gamma(t) \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \cdot \omega(x) \, dx, \quad \omega \in V.$$

Здесь (для простоты, но это не единственная возможность) $u(x)$ понимается как скалярная функция; “ $\cdot$ ” — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пока это — формальное определение. Чтобы оно стало корректным, нужно обеспечить существование и конечность этого интеграла за счет выбора подходящего пространства $\tilde{V}$. Для этого, в свою очередь, достаточно существования и конечности интеграла от каждого слагаемого $u \varphi \omega_i$, $i = \overline{1, n}$. Как уже было сказано выше, имеет место компактное вложение $H^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ при $r \in (2; 6)$. Зафиксируем произвольно $r \in (2; 6)$. В соответствии с неравенством Гёльдера, нам достаточно, чтобы $u \xi \in L_{r'}(\Omega)$ для всякого $\xi \in L_2(\Omega)$, при $r' = \frac{r}{r-1}$. Подберем число σ , исходя из равенства

$$\sigma r' = 2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2(r-1)}{r} \quad \Rightarrow \quad \sigma - 1 = 1 - \frac{2}{r} = \frac{r-2}{r}.$$

Сопряженное число

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma - 1} = \frac{2(r-1)}{r-2} \quad \Rightarrow \quad \sigma' r' = \frac{2r}{r-2}.$$

По неравенству Гёльдера, можно взять $\tilde{V} = L_{\kappa}(\Omega)$, $\kappa = \frac{2r}{r-2} \in (3; \infty)$. При этом

$$|(b(t, u, \varphi), \omega)| \leq \gamma(t) \|u\|_{\tilde{V}} \|\varphi\|_H \|\omega\|_{L_r(\Omega)^n} \leq \gamma(t) C_r \|u\|_{\tilde{V}} \|\varphi\|_H \|\omega\|_V,$$

где C_r — константа непрерывного вложения $V \subset L_r(\Omega)^n$. Таким образом,

$$\|b(t, u, \varphi)\|_{V^*} \leq \gamma(t) C_r \|u\|_{\tilde{V}} \|\varphi\|_H,$$

т.е. условие $\mathbf{B}_2$) выполнено.

Следуя [27, гл. 2, с. 16–37], рассмотрим в цилиндре Π_T систему

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_1 \Delta \varphi + \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \mu_2 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} - \int_0^t h(s, t) \Delta \varphi(s) ds + \nabla p = g; \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \varphi = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T; \quad (8)$$

$$\varphi(0, x) = a(x), \quad x \in \Omega; \quad (9)$$

$$\varphi|_{\Gamma} = 0. \quad (10)$$

Система уравнений (7), (8) называется системой уравнений Осколкова, или интегродифференциальной системой Кельвина—Фойгта. Она является модельной для описания движения неньютоновской жидкости, которой требуется время для того, чтобы среагировать на действие внезапно приложенной силы (в рамках модели Кельвина—Фойгта). Здесь $\varphi(t, x)$ — вектор скорости частицы жидкости, расположенной в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0; T]$; $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — компоненты вектора φ ; $p = p(t, x)$ — давление жидкости; $g = g(t, x)$ — вектор внешних сил, действующих на жидкость (их также называют объемными); μ_1, μ_2 ($\mu_2 > 0$) — константы; $h \in L_\infty((0, T) \times (0, T))$. С физической точки зрения число μ_1 также должно быть положительным (поскольку это вязкость жидкости), однако с математической точки зрения это не важно.

Следуя [27, определение 2.2.1], слабым решением задачи (7)–(10) назовем функцию $\varphi \in W$, удовлетворяющую для всех $\omega \in V$ и п.в. $t \in [0; T]$ тождеству

$$\langle J\varphi'(t), \omega \rangle + \langle \mu_2 A\varphi'(t), \omega \rangle + \langle \mu_1 A\varphi(t), \omega \rangle + \langle (N\varphi)(t), \omega \rangle - \langle B\varphi(t), \omega \rangle = \langle g, \omega \rangle, \quad (11)$$

с начальным условием

$$\varphi(0) = a. \quad (12)$$

(Давление p здесь отсутствует, поскольку $\int_{\Omega} \nabla p \cdot \omega dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \omega dx = 0$.)

Здесь предполагается, что $a \in V$, $g \in L_2(0, T; V^*)$ и используются следующие операторы

$$J : V \rightarrow V^*, \quad \langle J\varphi, \omega \rangle = \int_{\Omega} \varphi \cdot \omega dx, \quad \varphi, \omega \in V;$$

$$A : V \rightarrow V^*, \quad \langle A\varphi, \omega \rangle = \int_{\Omega} \nabla \varphi : \nabla \omega dx, \quad \varphi, \omega \in V;$$

$$N : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*),$$

$$\langle (N\varphi)(t), \omega \rangle = \int_{\Omega} \int_0^t h(s, t) \nabla \varphi(s) : \nabla \omega dx, \quad \varphi \in L_2(0, T; V), \quad \omega \in V;$$

$$B : L_4^n(\Omega) \rightarrow V^*, \quad \langle B\varphi, \omega \rangle = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx, \quad \varphi \in L_4^n(\Omega), \quad \omega \in V.$$

В силу произвольности выбора $\omega \in V$ тождество (11) эквивалентно операторному дифференциальному уравнению

$$(\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi - B\varphi = g, \quad \varphi \in W. \quad (13)$$

В [27, теорема 2.2.1] уже было установлено, что для любых $a \in V$, $g \in L_2(0, T; V^*)$ существует единственное слабое решение исходной задачи, т.е., иначе говоря, решение задачи Коши (12), (13).

В отличие от [27, гл. 2], мы далее будем рассматривать управляемый полулинейный аналог уравнения (13) вида

$$(\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi = F[u](\cdot, \varphi), \quad \varphi \in W, \quad (14)$$

где $u \in U$ — управление, $F[u](\cdot, \varphi) = f(\cdot, \varphi) + B\varphi + b(\cdot, u, \varphi)$, $\varphi \in W$.

Касательно структуры правой части $F[u](\cdot, \varphi)$ заметим следующее. Даже если убрать слагаемое $f(\cdot, \varphi)$, все равно останется нелинейность $B\varphi$, которая перешла сюда из системы Осколкова классического вида (13). Поэтому нелинейность тут присутствует по существу задачи. Что касается слагаемого $b(\cdot, u, \varphi)$, его можно трактовать как управляющую внешнюю силу в форме линейной обратной связи (а если скорость жидкости φ априори должна быть мала, то эта структура возникает как результат линеаризации управления с обратной связью по состоянию). Наконец, слагаемое $f(\cdot, \varphi)$ тоже не лишено смысла, поскольку физически трактуется как внешняя сила, зависящая от скорости жидкости — возникает при наличии упругого препятствия движению жидкости.

Здесь предполагается, что функция $f(t, \xi) : [0; T] \times V \rightarrow V^*$, обладает свойствами $F_1) - F_3)$. Что касается оператора B , то в [10, лемма 3.6] уже было показано, что он удовлетворяет условиям $F_1')$ (при $Z = L_4''(\Omega)$, см. замечание 1.1), $F_2)$, $F_3)$. Там же было показано, что оператор $\Phi = \mu_1 A + N$ действует как отображение $L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ и является вольтерровым, линейным и ограниченным [10, леммы 3.1, 3.5], а оператор $\Psi = \mu_2 A + J$ является линейным ограниченным $V \rightarrow V^*$ и имеет обратный оператор, удовлетворяющий оценке [10, леммы 3.1, 3.2], [27, леммы 2.3.1, 2.3.2]:

$$\|\Psi^{-1}v - \Psi^{-1}w\|_V \leq \frac{1}{\mu_2} \|v - w\|_{V^*}$$

для всех $v, w \in V^*$. Оператор, обратный к линейному, обязан быть линейным. Таким образом, $\Psi^{-1} : V^* \rightarrow V$ — линейный ограниченный оператор. Стало быть, все предположения разд. 1 выполнены. Поэтому применимы теоремы 1.1–1.4 и их следствие.

Поскольку теорема 1.1 носит условный характер, рассмотрим вопрос о разрешимости задачи Коши для функции $\beta(t)$ из ее формулировки.

В [10] была получена оценка

$$\|B\varphi\|_{V^*} \leq K^2 M^2 \quad \forall \varphi \in V, \quad \|\varphi\|_V \leq M.$$

Как уже было сказано выше, $\gamma(\cdot) \in L_\infty^+[0; T]$. Таким образом, если, допустим для определенности, функция $f(t, \xi)$ имеет не более, чем квадратичный порядок роста по $\xi \in V$, и такова, что $f(t, 0) = 0$, то можно считать, что оценочная функция $\tilde{N}_1(t, M)$ представляется в виде:

$$\tilde{N}_1(t, M) = \frac{1}{\mu} \{\mu_1 M^2 + \mu_2 M\},$$

при некоторых константах $\mu_1, \mu_2 > 0$. Соответственно, задача относительно функции $\beta(t)$ из формулировки теоремы 1.1 принимает вид:

$$\frac{d\beta}{dt} = \mu_1 \beta^2 + \mu_2 \beta, \quad \beta(0) = \beta_0 = \mu \|a\|_V.$$

Решение такой задачи легко найти непосредственно:

$$\beta(t) = \frac{\mu_2}{C e^{-\mu_2 t} - \mu_1}, \quad C = \mu_1 + \frac{\mu_2}{\beta_0}.$$

Очевидно, что это решение существует на любом отрезке $[0; T] \subset [0; T_0)$, где T_0 определяется из условия:

$$\mu_1 e^{\mu_2 T_0} = C \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = \frac{1}{\mu_2} \ln \left(1 + \frac{\mu_2}{\beta_0 \mu_1} \right).$$

Заметим, что если $\|a\|_V \rightarrow +0$, то $\beta_0 \rightarrow +0$, а значит, $T_0 \rightarrow +\infty$. Таким образом, для всех достаточно малых $a \in V$ решение существует на сколь угодно большом промежутке.

Если же наоборот, $\|a\|_V \rightarrow +\infty$, то $T_0 \rightarrow +0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахитов И.С.* Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневосточный матем. журнал. 2010. Т. 10. № 2. С. 93–105.
2. *Ismayilova G.G.* The problem of the optimal control with a lower coefficient for weakly nonlinear wave equation in the mixed problem // European journal of pure and applied mathematics 2020. V. 13. № 2. P. 314–322.
3. *Приленко А.И., Костин А.Б., Соловьев В.В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева // Сиб. журн. вычисл. и прикл. матем. 2017. Т. 17. Вып. 3. С. 67–85.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
5. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010. xv+399 p.
6. *Bewley T., Temam R., Ziane M.* Existence and uniqueness of optimal control to the Navier-Stokes equations // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math. 2000. V. 330. № 11. P. 1007–1011.
7. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
8. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. xii+352 с.
9. *Чернов А.В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 3. С. 95–107.
10. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении глобальной разрешимости операторного дифференциального уравнения: L_2 -теория // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017). Пермь: Изд-во Пермского нац. исслед. политех. ун-та, 2018. С. 263–276.
11. *Чернов А.В.* О тотальной глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.
12. *Чернов А.В.* О тотальной глобальной разрешимости эволюционного вольтеррова уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 593–614.
13. *Чернов А.В.* Операторные уравнения II рода: теоремы о существовании и единственности решения и о сохранении разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 656–668.
14. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 60–74.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 721 с.
16. *Plotnikov P.I., Turbin M.V., Ustiuzhaninova A.S.* Existence theorem for a weak solution of the optimal feedback control problem for the modified Kelvin-Voigt model of weakly concentrated aqueous polymer solutions // Dokl. Math. 2019. V. 100. № 2. P. 433–435.
17. *Idczak D., Walczak S.* Existence of optimal control for an integro-differential Bolza problem // Optim. Control Appl. Methods. 2020. V. 41. № 5. P. 1604–1615.
18. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
19. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
20. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
21. *Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р.* Пространства Соболева (теоремы вложения). Казань: КГУ, 2010. 123 с.
22. *Функциональный анализ* / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
23. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
24. *Фаминский А.В.* Функциональные пространства эволюционного типа. М.: Изд-во РУДН, 2016. 146 с.
25. *Рыжиков В.В.* Курс лекций по функциональному анализу. М.: МГУ, 2004. 24 с.
26. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
27. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.658

МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

© 2023 г. Ю. А. Черняев^{1,*}

¹ 420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

*e-mail: chernyuri@mail.ru

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.
Переработанный вариант 06.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Предлагается обобщение метода условного градиента на случай невыпуклых множеств ограничений, представляющих собой теоретико-множественное пересечение выпуклой гладкой поверхности и выпуклого компакта. Исследуются необходимые условия экстремума и вопросы сходимости метода. Библ. 13.

Ключевые слова: выпуклая гладкая поверхность, выпуклое компактное множество, минимизация гладкой функции, метод условного градиента.

DOI: 10.31857/S0044466923070049, **EDN:** ZXHUGJ

ВВЕДЕНИЕ

Один из подходов к решению задачи $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in X \subset E^n$, где X выпукло и компактно и $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$, состоит в построении итерационного процесса по правилу

$$x_0 \in X, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k (z(x_k) - x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $z(x_k)$ — одно из решений вспомогательной задачи

$$\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

а числа $\alpha_k \in (0; 1]$, $k = 0, 1, \dots$, могут выбираться различными способами. В силу компактности множества X , задача минимизации линейной функции на нем всегда имеет хотя бы одно решение. Если X имеет простую геометрическую структуру и представляет собой, например, шар или выпуклый многогранник, заданный координатами своих вершин или с помощью линейных неравенств, то нахождение этого решения осуществляется достаточно просто, и данный метод решения исходной задачи, называемый методом условного градиента, может оказаться вполне эффективным.

Описанный подход к решению задачи $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in X \subset E^n$, впервые был предложен в [1] для поиска точки минимума выпуклой квадратичной функции $\varphi(x)$. Позднее было разработано обобщение метода условного градиента на случай, когда $\varphi(x)$ — произвольная гладкая функция (при изучении некоторых вариантов метода она предполагается выпуклой), градиент которой удовлетворяет условию Липшица, и получены различные его модификации. В [2–4] и в ряде других работ для некоторых способов выбора чисел α_k , $k = 0, 1, \dots$, характеризующих величину итерационного шага, доказаны утверждения о сходимости $\{x_k\}$ ко множеству точек, удовлетворяющих необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X . Для случая, когда $\varphi(x)$ выпукла на X , доказаны также утверждения о скорости сходимости $\{x_k\}$ к точке глобального минимума $\varphi(x)$ на X , а для случая сильно выпуклой функции $\varphi(x)$ или сильно выпуклого множества X получены дополнительные оценки скорости сходимости, представляющие практический интерес. Кроме того, в [3] предложен вариант метода для задачи минимизации на выпуклом замкнутом множестве, не являющемся ограниченным.

Среди работ, посвященных модификациям метода условного градиента, можно отметить статью [5], где рассмотрен часто встречающийся на практике случай, когда целевая функция $\varphi(x)$ и допустимое множество X , представимое с помощью функциональных ограничений, задаются с погрешностями. Из работ, опубликованных в последние годы, отметим [6], где предложен вариант метода, который не требует для нахождения чисел $\alpha_k \in (0; 1]$, $k = 0, 1, \dots$, решения вспомогательных задач одномерной оптимизации, но при этом в процессе своей реализации учитывает результаты предыдущих вычислений и гарантирует монотонное убывание $\{\varphi(x_k)\}$. Предложенный в [6] алгоритм позволяет уменьшить объем вычислений на итерации и в то же время добиться более быстрой сходимости $\{x_k\}$, чем при априорном задании α_k из условий $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$.

К настоящему времени разработаны различные обобщения метода условного градиента для решения более сложных задач оптимизации. Например, в [7] изучен случай, когда допустимое множество X в конечномерном евклидовом пространстве имеет непустую внутренность и представляет собой теоретико-множественную разность двух выпуклых множеств. Идея предлагаемого в [7] алгоритма состоит в том, что вспомогательная задача минимизации линейной функции $\varphi_k(x)$ на каждой итерации решается не на самом допустимом множестве X , а на некотором его выпуклом подмножестве, содержащем точку x_k . В [8] изучается применение метода для приближенного нахождения точек минимума функционалов, определенных на ограниченных замкнутых подмножествах рефлексивного пространства: устанавливаются достаточные условия сходимости метода и разрабатываются приложения полученных результатов к задачам оптимального управления. В [9] рассмотрен вопрос о сходимости метода для задачи оптимизации функционала, зависящего от решений нелинейного управляемого функционально-операторно-го управления в банаховом пространстве.

Среди работ, опубликованных в последние годы, следует отметить статью [10], где изучается конечномерное евклидово пространство и предлагается обобщение метода условного градиента на случай, когда допустимое множество X невыпукло и представляет собой границу сильно выпуклого множества A , которая в общем случае не является гладким многообразием. При реализации алгоритма из [10] на каждой итерации осуществляется поиск решения вспомогательной задачи минимизации линейной функции $\varphi_k(x)$ на множестве A . Это решение единственно, совпадает с решением задачи минимизации $\varphi_k(x)$ на X и принимается в качестве следующего приближения x_{k+1} ; при выполнении ряда дополнительных условий доказывается сходимость $\{x_k\}$ к точке строгого глобального минимума $\varphi(x)$ на X .

В настоящей статье предлагается обобщение метода условного градиента на случай множеств ограничений, представимых в виде пересечения выпуклой гладкой поверхности S и выпуклого компактного множества F . Эта задача представляет собой важный частный случай задачи, изученной в [11], где вместо выпуклой гладкой поверхности рассматривается гладкая поверхность S общего вида, а выпуклое замкнутое множество F не предполагается ограниченным. При использовании алгоритма метода проекции градиента из [11] на каждой итерации требуется решение двух вспомогательных задач проектирования: сначала ищется проекция точки на пересечение множества F с касательной гиперплоскостью к поверхности S , а затем — проекция на пересечение F с самой поверхностью S . Вторая из этих задач, вообще говоря, является сложной даже в случае, когда поверхность S является выпуклой: для ее решения приходится либо привлекать трудоемкие итерационные процедуры, о которых упоминается в [11], либо разрабатывать специфические алгоритмы, учитывающие особенности поверхности S и множества F , рассматриваемых в конкретной задаче.

Алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, вместо решения двух вспомогательных задач проектирования включает в себя решение вспомогательной задачи минимизации линейной функции на пересечении множества F с касательной гиперплоскостью к поверхности S и задачи нахождения точки пересечения отрезка, концы которого расположены по разные стороны от поверхности S , с этой поверхностью. Задача минимизации линейной функции на пересечении выпуклого компакта F с гиперплоскостью нередко оказывается проще задачи поиска проекции на это пересечение, а задача нахождения точки пересечения отрезка с поверхностью S — проще задачи поиска проекции на пересечение F и S . Данное обстоятельство позволяет снизить трудоемкость вычислений при рассмотрении некоторых классов компактных множеств и выпуклых гладких поверхностей, поэтому для соответствующих задач минимизации на $F \cap S$ предлагаемый алгоритм становится более эффективным по сравнению с изученным в [11].

Если, например, F представляет собой многогранник, заданный координатами своих вершин, то первая из двух вспомогательных задач сводится к нахождению точек пересечения его ребер с гиперплоскостью (когда F имеет небольшое число вершин, поиск таких точек осуществляется просто) и сравнению значений линейной функции в найденных точках. Если же F задано с помощью линейных неравенств, то соответствующая задача представляет собой задачу линейного программирования, решаемую с помощью конечношаговых алгоритмов симплекс-метода.

В силу выпуклости поверхности S , точка пересечения с ней любого отрезка, концы которого расположены по разные стороны от S , единственна, и задача ее нахождения сводится к поиску одного из корней некоторого уравнения с одним неизвестным. Если уравнение с n неизвестными, задающее поверхность S в пространстве E^n , имеет достаточно простой вид, то и вид уравнения для нахождения точки пересечения также становится простым и не зависит от структуры множества F . Наиболее легко эта вспомогательная задача решается в случае, когда S задана уравнением второго порядка. Например, если S в трехмерном пространстве представляет собой эллипсоид, эллиптический параболоид или одну из половин двуполостного гиперboloида, то задача нахождения точки пересечения отрезка с такой поверхностью сводится к поиску одного из корней квадратного уравнения, решаемого элементарно.

Следует отметить, что подход, основанный на поиске точки пересечения поверхности с отрезком, концы которого заведомо лежат по разные стороны от нее, используется также при реализации одного из алгоритмов, рассмотренного в [10]. В указанной работе рассмотрена, в частности, задача минимизации $\varphi(x)$ на поверхности S , задаваемой равенством вида $g(x) = 0$, где $\varphi(x)$ и $g(x)$ являются гладкими, и их градиенты удовлетворяют условию Липшица. Для решения поставленной задачи предлагается использовать обобщенный метод проекции градиента, при реализации которого на каждой итерации приходится осуществлять поиск точки пересечения поверхности S с некоторым отрезком. Этот отрезок перпендикулярен касательной гиперплоскости к поверхности S , построенной в точке x_k , и лежит на прямой, проходящей через точку, полученную в результате перемещения из x_k в направлении антиградиента функции $\varphi(x)$. Соответствующий алгоритм из [10] для своей реализации требует, однако, знания ряда констант или их оценок (данное обстоятельство существенно ограничивает возможность его использования на практике) и, кроме того, он не предназначен для задач, где в качестве допустимого множества рассматривается не вся поверхность, а какая-либо ее часть. Достоинство метода, предлагаемого в настоящей работе, состоит в том, что при его использовании не требуется знание каких-либо констант или их оценок, а также в возможности его использования для допустимых множеств, представляющих собой пересечение поверхности $g(x) = 0$ (предполагается, что $g(x)$ является выпуклой и гладкой, и ее градиент удовлетворяет условию Липшица) с выпуклым компактом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ МЕТОДА

Рассмотрим задачу вида $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in X \subset E^n$, в которой X представляет собой теоретико-множественное пересечение выпуклого компактного множества F , имеющего непустую внутренность, и множества $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$, где $g(x)$ является выпуклой и гладкой на E^n и $g(x) < 0$ при некотором $x \in E^n$. Предполагается, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$. В силу наложенных на $g(x)$ условий, множество S представляет собой выпуклую гладкую поверхность.

Введем следующие обозначения: $n(x) = g'(x) \|g'(x)\|^{-1}$ — орт нормали касательной гиперплоскости к поверхности S в точке $x \in S$; $G = \{x \in E^n : g(x) \leq 0\}$ — выпуклая оболочка поверхности S ; $\Lambda(x) = \{y \in E^n : \langle n(x), y - x \rangle = 0\}$ — касательная гиперплоскость к S и G в точке $x \in S$. В силу гладкости $g(x)$, гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in S$ и вектор-функция $n(x)$ непрерывна на S .

В силу компактности F и замкнутости S , вытекающей из гладкости $g(x)$, множество $X = F \cap S$ компактно. Считая $x \in X$, обозначим через $z(x)$ произвольное из решений задачи $\langle \varphi'(x), y - x \rangle \rightarrow \min, y \in F \cap \Lambda(x)$. В силу замкнутости $\Lambda(x)$, компактности F и непрерывности линейной функции эта задача имеет хотя бы одно решение, при этом $\langle \varphi'(x), z(x) - x \rangle \leq 0$, так как

$x \in F \cap \Lambda(x)$. Если $\langle \varphi'(x), z(x) - x \rangle = 0$, то обе точки x и $z(x)$ являются решением задачи $\langle \varphi'(x), y - x \rangle \rightarrow \min, y \in F \cap \Lambda(x)$.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Задается точка $c \in F \cap \text{int } G$ и полагается $k = 0$.

Шаг 1. Пусть $x_k \in X$ есть k -е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$ и определяется точка $z(x_k)$ — решение задачи $\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \rightarrow \min, x \in F \cap \Lambda(x_k)$.

Шаг 3. Если $\varphi_k(z(x_k)) = 0$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 4.

Шаг 4. Задается $\alpha_k \in (0; 1]$.

Шаг 5. Пусть x_{k+1} — точка пересечения отрезка $[c, x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)]$ с поверхностью S .

Шаг 6. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Множество G в силу выпуклости $g(x)$ является выпуклым, поэтому точка $x_k + \alpha(z(x_k) - x_k)$ при любом α не лежит в $\text{int } G$, а значит, точка пересечения отрезка $[c, x_k + \alpha(z(x_k) - x_k)]$ с поверхностью S обязательно существует.

В силу компактности F существует $d_0 = \max_{x, y \in F} \|x - y\| < \infty$, а поскольку $x, z(x) \in F$, то при любом $x \in X$ имеем $\|x - z(x)\| \leq d_0$. Пусть $D(x) = \{y \in E^n : \|x - y\| \leq d_0\}$ — шар радиуса d_0 с центром в точке x , а Y — такое выпуклое компактное множество, что $c \in Y$ и для любого $x \in X$ справедливо включение $D(x) \subset Y$. В силу наложенных на $g(x)$ условий имеем $\|g'(x)\| \neq 0$ при любом $x \in S$. В силу компактности Y и замкнутости, пересечение этих множеств является компактным, поэтому существует $K = \min_{x \in S \cap Y} \|g'(x)\| > 0$. Кроме этого, в силу выпуклости Y при $\alpha \in (0; 1]$ точка пересечения отрезка $[c, x + \alpha(z(x) - x)]$ с поверхностью S лежит в Y , так как $x, z(x), c \in Y$.

Будем полагать, что $g(x) \in C^{1,1}(Y)$, т.е. существует такая положительная константа M , что для всех $x, y \in Y$ справедливо неравенство $\|g'(x) - g'(y)\| \leq M \|x - y\|$. Тогда из показанного в [12] следует, что при $N = M/K$ для всех $x, y \in S \cap Y$ имеет место $\|n(x) - n(y)\| \leq N \|x - y\|$.

Из непрерывности $n(x)$ вытекает непрерывность $\psi(x) = \langle n(x), c - x \rangle$ на S , поэтому, в силу замкнутости S и компактности Y , существует $\varepsilon = \min_{x \in S \cap Y} |\psi(x)|$ при этом $\varepsilon > 0$, так как G выпукло и $c \in \text{int } G$.

Обозначив через c_x проекцию точки c на гиперплоскость $\Lambda(x)$, $x \in S$, получим $\langle n(x), c - x \rangle = \langle n(x), c - c_x \rangle + \langle n(x), c_x - x \rangle$, где второе слагаемое равно нулю, так как $x, c_x \in \Lambda(x)$ и $n(x)$ ортогонален $\Lambda(x)$, а первое слагаемое с точностью до знака равно расстоянию от c_x до $\Lambda(x)$, так как векторы $n(x)$ и $c - c_x$ коллинеарны и $\|n(x)\| = 1$. Это означает, что расстояние от точки $c \in E^n$ до гиперплоскости $\Lambda(x)$, $x \in S$, равно $|\psi(x)|$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В силу компактности Y существует $d = \max_{x \in Y} \|x - c\| < \infty$. Считая $x \in X$, введем обозначения: $y_s(x) = x + 2^{-s}(z(x) - x)$, $s = 0, 1, \dots$; $u_s(x)$ — проекция точки $y_s(x)$ на выпуклое замкнутое множество G ; $p_s(x)$ — проекция точки $y_s(x)$ на множество X . Поскольку $x, z(x) \in F \cap \Lambda(x)$, при этом F и $\Lambda(x)$ выпуклы, то $y_s(x)$, $s = 1, 2, \dots$, тоже лежат в $F \cap \Lambda(x)$.

Пусть x_* — произвольная точка множества X , для которой $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle < 0$. Введем обозначения: $L_s(x_*)$ — прямая, проходящая через точку $y_s(x_*)$ перпендикулярно $\Lambda(u_s(x_*))$ (в силу показанного в [12] она проходит и через точку $u_s(x_*)$); $\tilde{L}_s(x_*)$ — луч, начинающийся в точке $y_s(x_*)$ и проходящий через точку c . С целью сокращения записи в дальнейших рассуждениях вместо $y_s(x_*)$, $u_s(x_*)$, $L_s(x_*)$, $\tilde{L}_s(x_*)$ при фиксированном s будем записывать $y, u, L, \tilde{L}$ соответственно.

Отметим, что введенные здесь и ранее обозначения, кроме c, d, d_0, ε и $\tilde{L}_s(x_*)$, совпадают с теми, что были введены в [11]. Различие в некоторых обозначениях связано с тем, что при исследовании задачи, поставленной в настоящей работе, существенно учитываются выпуклость поверхности S и ограниченность множества F . Кроме этого, в настоящей статье вместо множества $M(x_0) = \{x \in X : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$, введенного в [11] и предполагаемого там ограниченным, всюду рассматривается ограниченное множество X .

Лемма 1. Пусть $x_* \in X, s \in \{0, 1, \dots\}, v$ — произвольная точка множества Y , а δ и $\bar{\delta}$ — расстояния от точки v соответственно до гиперплоскости $\Lambda(u_s(x_*))$ и до прямой $L_s(x_*)$. Тогда, если v лежит на поверхности S , то при $0 < \delta < 2K/M$ имеет место $\bar{\delta} \geq \sqrt{\delta(2K/M - \delta)}$.

Доказательство данного утверждения приводится в [11], где изучен случай гладкой поверхности S без предположения об ее выпуклости.

Замечание. Если u и v лежат по одну сторону от $\Lambda(u)$, то в силу выпуклости G значения $g(u)$ и $g(v)$ имеют один знак. Если же u и v лежат по разные стороны от $\Lambda(u)$, то из показанного в [11] следует, что при $0 < \delta < \frac{2K}{M}$ и $\bar{\delta} < \sqrt{\delta(2K/M - \delta)}$ значения $g(u)$ и $g(v)$ имеют разные знаки.

Лемма 2. Если $x_* \in X$ и $\varepsilon \geq K/M$, то при всех целых $s \geq \bar{s}_1$, где $\bar{s}_1$ — некоторый номер из множества $\{0, 1, \dots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S , то на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \geq K/M, x_* \in X$ и $s \in \{0, 1, \dots\}$. В силу выпуклости множества G , векторы $y_s(x_*) - u_s(x_*)$ и $n(u_s(x_*))$ одинаково направлены. Обозначим через $\bar{c}$ проекцию точки c на прямую L . Прямая L перпендикулярна гиперплоскости $\Lambda(u)$, а поскольку $\bar{c}$ — проекция c на L , то расстояния от точек c и $\bar{c}$ до $\Lambda(u)$ совпадают и по величине не меньше ε . Заметим, что $\|c - \bar{c}\| \leq \|c - y\| \leq d$, так как $y \in F \cap Y$ и $\bar{c}$ — проекция точки c на прямую L , содержащую y . Из определения множества Y следует, что $[y; c] \subset Y$.

Пусть $\bar{s}_1$ — наименьший из номеров $s = 0, 1, \dots$, удовлетворяющий неравенству $s \geq \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$. Тогда, учитывая справедливость утверждения леммы 1 и повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [11], получим, что при целых $s \geq \bar{s}_1$ на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$. В силу произвольности числа $\varepsilon \geq K/M$ и точки $x_* \in M(x_0)$, утверждение леммы доказано.

Лемма 3. Если $x_* \in X$ и $\varepsilon < K/M$, то при всех целых $s \geq \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, где $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ — некоторые номера из множества $\{0, 1, \dots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S , то на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой значение $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon < K/M, x_* \in X$ и $s \in \{0, 1, \dots\}$. В силу выпуклости множества G , векторы $y_s(x_*) - u_s(x_*)$ и $n(u_s(x_*))$ одинаково направлены. Пусть $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ — наименьшие из номеров $s = 0, 1, \dots$, удовлетворяющие соответственно неравенствам

$$s \geq \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad s \geq \log_2 2d_0 \sqrt{\frac{N(K - M\varepsilon)}{K\varepsilon}}.$$

Тогда, повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [11], получим, что при целых $s \geq \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$. В силу произвольности числа $\varepsilon < K/M$ и точки $x_* \in X$, утверждение леммы доказано.

Обозначим через $v_s(x_*)$ (или сокращенно v) точку пересечения отрезка $[y_s(x_*); c]$ с поверхностью S . При всех $s \in \{0, 1, \dots\}$ точка $v_s(x_*)$ лежит в X , так как $v_s(x_*) \in S$ и $v_s(x_*) \in [y_s(x_*); c]$, где $y_s(x_*), c \in F$ и F выпукло.

Лемма 4. Если $x_* \in X$ и $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle < 0$, то существует такая положительная константа M_0 , что при всех целых $s \geq \bar{s}$, где $\bar{s}$ – некоторый номер из множества $\{0, 1, \dots\}$, имеет место $\|y_s(x_*) - v_s(x_*)\| \leq M_0 \|y_s(x_*) - u_s(x_*)\|$.

Доказательство. Пусть $x_* \in X$ и $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle < 0$, т.е. вектор $h_* = z(x_*) - x_*$ является направлением убывания $\varphi(x)$ в точке x_* . Если при некотором s точка u лежит на поверхности S , то точки u и v , очевидно, совпадают с u , и тогда обе части требуемого нестрогого неравенства равны нулю, т.е. оно справедливо при любом M_0 . Пусть теперь u не лежит на S . Положим $\bar{s} = \bar{s}_1$, если $\varepsilon \geq K/M$, и $\bar{s} = \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, если $\varepsilon < K/M$. В силу утверждений лемм 2 и 3, при $s \geq \bar{s}$ на отрезке $[y; c]$ существует точка v_0 , в которой $g(v_0) < 0$. Поскольку в силу наложенных на $g(x)$ условий и определения точки u имеет место $g(u) > 0$, то точка v лежит на отрезке $[u, v_0]$. В силу выпуклости $g(x)$, точки v и u лежат по разные стороны от гиперплоскости $\Lambda(u)$ или (в частном случае) v лежит в $\Lambda(u)$.

Повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [11], получим, что при всех целых $s \geq \bar{s}$ справедливо неравенство $\|y - v\| \leq M_0 \|y - u\|$, где $M_0 = \frac{3}{\varepsilon} \sqrt{\frac{K(\varepsilon^2 + d^2)}{M}}$. В силу произвольности рассмотренной точки $x_* \in X$, для которой $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle < 0$, утверждение леммы доказано.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

В этом разделе будут получены необходимые условия локального минимума гладкой функции $\varphi(x)$ на множестве X рассматриваемого вида и доказано утверждение о сходимости алгоритма.

Лемма 5. Если $x_* \in X$ – точка локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X , то $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x_* \in X$, доставляющей локальный минимум $\varphi(x)$ на X , имеет место $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle < 0$, т.е. вектор $h_* = z(x_*) - x_*$ является направлением убывания $\varphi(x)$ в точке x_* . Тогда, проведя рассуждения, аналогичные доказательству соответствующей леммы из [11] с заменой $p_s(x_*)$ на $v_s(x_*)$ и с учетом справедливости утверждения леммы 4 и того, что $v_s(x_*)$ при всех $s \in \{0, 1, \dots\}$ лежит в X , получим, что выдвинутое предположение неверно, откуда вытекает справедливость данной леммы.

Следует отметить, что равенство $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$ выражает лишь необходимое условие локального минимума, т.е. его выполнение для произвольной точки $x_* \in X$ в общем случае не означает, что x_* доставляет локальный (а тем более, глобальный) минимум $\varphi(x)$ на X .

Из утверждения леммы 5 следует, что при выполнении равенства $\langle \varphi'(x_k), z(x_k) - x_k \rangle = 0$ при некотором k точка $x_k \in X$ удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X . Это равенство может не выполняться ни при каком k , тогда алгоритм становится итерационным.

Заметим, что множество F может быть задано с помощью функциональных ограничений в форме $F = \{x \in R^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, l\}$, где и $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l$, являются выпуклыми и гладкими на E^n .

Лемма 6. Если $x_* \in X$, при этом $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$ или $\text{int } F \cap \Lambda(x_*)$ пусто, то x_* стационарна в смысле Лагранжа.

Доказательство. Из определения точки $z(x_*)$ и выпуклости $F \cap \Lambda(x_*)$ следует, что для всех $F \cap \Lambda(x_*)$ имеет место $\langle \varphi'(x_*), x - x_* \rangle \geq 0$. Учитывая этот факт и повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [13], где в качестве поверхности S рассматривается сфера, получим справедливость утверждения данной леммы.

Будем считать, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$, тогда существует константа $L = \max_{x \in Y} \|\varphi'(x)\| < \infty$. Отсюда следует, что для любых $x, y \in Y$ при некотором $\theta \in [0; 1]$ имеет место $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\varphi'(x + \theta(y - x))\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$, т.е. $\varphi(x)$ является липшицевой на Y .

Введем обозначения: $z_k = z(x_k)$, $\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle$, $y_{k,s} = y_s(x_k)$, $v_{k,s} = v_s(x_k)$. Будем считать, что величина α_k при каждом k полагается равной 2^{-s_k} , где s_k — первый из номеров $s = 0, 1, \dots$, при котором справедливо неравенство $\varphi(x_k) - \varphi(v_{k,s}) \geq 0.25 \times 2^{-s} |\varphi_k(z_k)|$. Повторяя рассуждения, проведенные при изучении выбора α_k в задаче из [11], с заменой $p_s(x)$ на $v_s(x)$, получим, что выполнения данного неравенства удастся добиться при конечном s , при этом

$$s_k \leq \max \left\{ \bar{s}, \log_2 \frac{32M_0 L N d_0^2}{|\varphi_k(z_k)|} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, \text{ где } \bar{s} < 1 + \log_2 \frac{2\sqrt{3} N d d_0}{\varepsilon} = \log_2 \frac{4\sqrt{3} N d d_0}{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \geq K/M \text{ и}$$

$$\bar{s} < 1 + \log_2 \max \left\{ \frac{2\sqrt{3} N d d_0}{\varepsilon}, \frac{2d_0 \sqrt{N(K - M\varepsilon)}}{\sqrt{K\varepsilon}} \right\} = \log_2 \max \left\{ \frac{4\sqrt{3} N d d_0}{\varepsilon}, \frac{4d_0 \sqrt{N(K - M\varepsilon)}}{\sqrt{K\varepsilon}} \right\}$$

при $\varepsilon < K/M$. Это означает, что при каждом k имеет место

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geq 0.25 \times \min \left\{ \frac{\varepsilon |\varphi_k(z_k)|}{4\sqrt{3} N d d_0}, \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{32M_0 L N d_0^2} \right\},$$

если $\varepsilon \geq K/M$, и

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geq 0.25 \times \min \left\{ \frac{\varepsilon |\varphi_k(z_k)|}{4\sqrt{3} N d d_0}, \frac{\sqrt{K\varepsilon} |\varphi_k(z_k)|}{4d_0 \sqrt{N(K - M\varepsilon)}}, \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{32M_0 L N d_0^2} \right\},$$

если $\varepsilon < K/M$. Поскольку все константы в правых частях полученных неравенств положительны, то при отличных от нуля значениях $\varphi_k(z_k)$, $k = 0, 1, \dots$, последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ монотонно убывает.

Лемма 7. При выборе чисел α_k , $k = 0, 1, \dots$, согласно указанному способу имеет место $\varphi_k(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [11] с заменой $p_s(x)$ на $v_s(x)$.

Из утверждения леммы 7 и приведенных выше неравенств вытекает

Теорема 1. Если последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму при выборе α_k , $k = 0, 1, \dots$, согласно указанному способу, то при всех целых $k \geq \bar{k}$, где $\bar{k}$ — некоторый номер из множества $\{0, 1, \dots\}$, имеет место неравенство

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geq \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{128M_0 L N d_0^2}.$$

Справедливо следующее утверждение о сходимости алгоритма.

Теорема 2. Если последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму при выборе α_k , $k = 0, 1, \dots$, согласно указанному способу, то любая ее предельная точка x_* , для которой $\text{int } F \cap \Lambda(x_*)$ непусто, удовлетворяет условию $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$.

Доказательство. Поскольку $\{x_k\} \subset X$ и X ограничено, то $\{x_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть x_* — произвольная предельная точка $\{x_k\}$, для которой $\text{int } F \cap \Lambda(x_*)$ непусто, а $\{x_{k_m}\}$ — соответствующая ей подпоследовательность.

Предположим, что $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = -2\eta < 0$. Тогда существуют такие окрестности $U_\delta(x_*)$ и $U_\varepsilon(z(x_*))$, что для любых $x \in U_\delta(x_*)$ и $y \in U_\varepsilon(z(x_*))$ имеет место $\langle \varphi'(x), y - x \rangle < -\eta < 0$. Пусть $\bar{x} -$

произвольная точка из $\text{int } F \cap \Lambda(x_*)$, тогда $[\bar{x}, z(x_*)] \subset \text{int } F \cap \Lambda(x_*)$, так как множества F и $\Lambda(x_*)$ выпуклы и по построению $z(x_*) \in F \cap \Lambda(x_*)$. Возьмем произвольную точку $h \in [\bar{x}, z(x_*)] \cap U_\varepsilon(z(x_*))$, тогда $h \in \text{int } F \cap \Lambda(x_*)$ и $\langle \varphi'(x), h - x \rangle < -\eta < 0$ для любого $x \in U_\delta(x_*)$. Обозначив через h_k проекцию точки h на гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, получим

$$\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \rangle = \langle n(x_{k_m}), h - h_{k_m} \rangle + \langle n(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \rangle,$$

где второе слагаемое справа равно нулю, так как $h_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m})$, а модуль первого слагаемого есть расстояние от точки h до гиперплоскости $\Lambda(x_{k_m})$, так как векторы $n(x_{k_m})$ и $h - x_{k_m}$ имеют одинаковое или противоположное направления и $\|n(x_{k_m})\| = 1$. Поскольку $\langle n(x_*), h - x_* \rangle = 0$, так как $h \in \Lambda(x_*)$, и $\{x_{k_m}\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$, а $n(x)$ является непрерывной вектор-функцией на S , то отсюда следует, что $\|h - h_{k_m}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Кроме того, существует окрестность $U_\gamma(h)$, целиком лежащая в $U_\varepsilon(z(x_*)) \cap F$, так как $h \in \text{int } U_\varepsilon(z(x_*))$ и $h \in \text{int } F$. Это означает, что найдется такое $m_1 \in N$, что при всех $m \geq m_1$ имеет место $h_{k_m} \in U_\gamma(h) \subset F$. Поскольку $\{x_{k_m}\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$, то найдется такое $m_2 \in N$, что при всех $m \geq m_2$ имеет место $x_{k_m} \in U_\delta(x_*)$. Следовательно, при $m \geq \max\{m_1, m_2\}$ точки $h_{k_m} \in F \cap \Lambda(x_{k_m})$ удовлетворяют условию $\langle \varphi'(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \rangle < -\eta < 0$. Но из леммы 7 имеем $\varphi_k(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, где z_k — решение задачи $\langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \rightarrow \min, x \in F \cap \Lambda(x_k)$. Из полученного противоречия следует, что $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$. В силу произвольности рассмотренной предельной точки x_* , утверждение теоремы доказано.

Из теоремы 2 и леммы 6 следует, что если X задано с помощью функциональных ограничений, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, построенной по изложенному алгоритму при указанных способах выбора α_k , $k = 0, 1, \dots$, стационарна в смысле Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Т. 3. Вып. 1–2. С. 95–110.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.
5. Васильев Ф.П., Ячимович М. Об итеративной регуляризации метода условного градиента и метода Ньютона при неточно заданных исходных данных // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 2. С. 265–269.
6. Коннов И.В. Метод условного градиента без линейного поиска // Известия вузов. Математика. 2018. № 1. С. 93–96.
7. Черняев Ю.А. Метод условного градиента для экстремальных задач с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1910–1913.
8. Климов В.С. О сходимости метода условного градиента // Известия вузов. Математика. 2005. № 12. С. 27–34.
9. Черняев А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
10. Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A. Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020. V. 41. P. 822–849.
11. Черняев Ю.А. Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 37–49.
12. Черняев Ю.А. Обобщение метода проекции градиента и метода Ньютона на экстремальные задачи с ограничением в виде гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1493–1502.
13. Черняев Ю.А. Сходимость метода проекции градиента и метода Ньютона для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения сферической поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1733–1749.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

УДК 517.38

FOUR CLASSES OF DEFINITE INTEGRALS ABOUT HYPERBOLIC
AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS¹⁾

© 2023 г. C. Li^{1,*}, W. Chu^{1,2,**}

¹*School of Mathematics and Statistics Zhoukou Normal University, Henan, China*

²*73100, Lecce, Department of Mathematics and Physics University of Salento, Italy*

**e-mail: lichunlizk@outlook.com,*

***e-mail: chu.wenchang@unisalento.it*

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.

Переработанный вариант 12.12.2022 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Четыре класса определенных интегралов с гиперболическими и тригонометрическими функциями. Установлены рекуррентные соотношения для четырех классов определенных интегралов от степенных функций со множителями вида тригонометрических и гиперболических функций в знаменателе. Соотношения получены в терминах логарифмической функции, дзета-функции Римана и ее вариантов, а также бета-функции и функции Лежандра.

Ключевые слова: гиперболические функции, тригонометрические функции, дзета-функция Римана, бета-функция, функция Лежандра.

DOI: 10.31857/S0044466923070086, **EDN:** ZXSPUW

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. III. ЗАДАЧИ КОШИ¹⁾

© 2023 г. М. О. Корпусов^{1,*}, Е. А. Овсянников^{1,2,**}¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия² 115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ «МИФИ», Россия

* e-mail: korpusov@gmail.com

** e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
Переработанный вариант 03.03.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматриваются три задачи Коши для уравнений соболевского типа из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, объединенных общей линейной частью. Данные задачи сводятся к эквивалентным интегральным уравнениям. Для двух задач доказывается существование непродолжаемых решений, а для третьей – существование локального во времени решения. Для одной из задач модифицированным методом Х.А. Левина получены достаточные условия разрушения решения за конечное время и найдена оценка сверху на время разрушения решения. Для другой задачи методом нелинейной емкости С.И. Похожаева получен результат о разрушении решения за конечное время и два результата об отсутствии даже локальных решений, а также получена оценка сверху для времени разрушения решения. Библ. 5.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923070074, EDN: VSVMLH

1. ЗАДАЧА КОШИ 1

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работах [1] и [2], и является их логическим продолжением. В этом разделе мы рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.2)$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Определение 1. Функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]\right)$ при $\beta_1 \geq 0$, удовлетворяющая задаче (1.1), (1.2) поточечно, называется *классическим решением задачи Коши*.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial u^2(y, \tau)}{\partial \tau} dy d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} [\Delta_y u_0(y) - u_0(y)] dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) [\Delta_y u_1(y) - u_1(y)] dy. \quad (1.3)$$

Сделаем в этом интегральном уравнении замену

$$v(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t), \quad \beta_1 \geq 0. \quad (1.4)$$

Тогда интегральное уравнение (3) примет следующий вид:

$$v(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) v(y) dy, \quad (1.5)$$

$$G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{2\beta_1/2}} \mathcal{E}(x - y, t - \tau), \quad \beta_1 \geq 0,$$

$$G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0,$$

$$G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_3/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_3 \geq \beta_1 \geq 0,$$

$$\rho(x, t) = \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial t}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} [\Delta_x u_0(x) - u_0(x)],$$

$$v(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} [\Delta_x u_1(x) - u_1(x)].$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Если $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$, то $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_2(x, t) - \rho_1(x, t)|_\alpha \leq h(R) \|v_2 - v_1\|_{1, \alpha, T}, \quad (1.6)$$

$$\|w\|_{1, \alpha, T} := \sup_{t \in [0, T]} \left[|w(x, t)|_\alpha + \left| \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha \right],$$

$$h(R) = 4R, \quad R = \max \{ \|v_1\|_{1, \alpha, T}, \|v_2\|_{1, \alpha, T} \}, \quad (1.7)$$

$$\rho_j(x, t) = \frac{\partial v_j^2(x, t)}{\partial t}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала докажем, что при условиях леммы $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$. Действительно, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\rho(x, t) = 2v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$|\rho(x, t)|_\alpha \leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v(x, t)|_\alpha \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha < +\infty.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) = 2v(x, t_2) \left(\frac{\partial v(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} [v(x, t_2) - v(x, t_1)],$$

из которой вытекает неравенство

$$\begin{aligned} |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v(x, t)|_\alpha \left| \frac{\partial v(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} \right|_\alpha + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha |v(x, t_2) - v(x, t_1)|_\alpha \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$. Из (1.8) и (1.9) вытекает, что $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Докажем неравенство (1.6). Действительно, справедливо равенство

$$\rho_2(x, t) - \rho_1(x, t) = 2v_2(x, t) \left(\frac{\partial v_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} [v_2(x, t) - v_1(x, t)],$$

из которого вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |\rho_2(x, t) - \rho_1(x, t)|_\alpha &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v_2(x, t)|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} |v_2(x, t) - v_1(x, t)|_\alpha. \end{aligned} \quad (1.10)$$

С учетом определения нормы (1.7) из (1.10) вытекает оценка (1.6).

Справедлива следующая

Лемма 2. В классе функций $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ при условии, что $\mu(x), v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$, правая часть интегрального уравнения (1.5) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$. Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial H[v](x, t)}{\partial t} &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t^2} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t)}{\partial t} v(y) dy, \\ H[v](x, t) &:= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) v(y) dy. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Доказательство основано на теоремах 1 и 2 статьи [2], а также на лемме 1.

Наконец, справедлива

Теорема 1. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то для любых $\mu(x), v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(\mu, v) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (1.5) в классе $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|v\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$v(x, t) = H[v](x, t),$$

где оператор $H[v](x, t)$ определен равенством (1.11) и в силу результата леммы 2 действует следующим образом:

$$H[v](x, t) : \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)). \quad (1.12)$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (1.4) теоремы 1 статьи [2] и оценки (1.6) леммы 1 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|H[v_1](x, t) - H[v_2](x, t)\|_{1, \alpha, T} &\leq Td_0(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_\alpha \leq Td_0(T)h(R)\|v_1 - v_2\|_{1, \alpha, T}, \\ h(R) &= 4R, \quad R = \max\{\|v_1\|_{1, \alpha, T}, \|v_2\|_{1, \alpha, T}\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \{w(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{1, \alpha, T} \leq R\}.$$

Пусть $\mu(x), v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ — произвольные фиксированные. Тогда найдется настолько большое $R > 0$, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f_0(x, t)\|_{1, \alpha, T} &\leq \frac{R}{2}, \\ f_0(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) v(y) dy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Положим в оценке (1.13) $v_1(x, t) = v(x, t) \in B_R$ и $v_2(x, t) = 0$. Тогда получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|H[v](x, t)\|_{1, \alpha, T} &\leq Td_0(T)4\|v(x, t)\|_{1, \alpha, T}^2 \leq Td_0(T)4R^2 \leq \frac{R}{2}, \\ H[v](x, t) &:= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, (q+1)\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau \end{aligned} \quad (1.15)$$

при достаточно малом $T > 0$ таком, что выполнено неравенство

$$Td_0(T)4R \leq \frac{1}{2}. \quad (1.16)$$

Из (1.14) и (1.15) при выполнении условия (1.16) с учетом (1.12) вытекает, что

$$H[v](x, t) : B_R \rightarrow B_R.$$

Наконец, из оценки (1.13) при выполнении условия (1.16) получаем неравенство

$$\|H[v_1](x, t) - H[v_2](x, t)\|_{1, \alpha, T} \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{1, \alpha, T}$$

для любых $v_1(x, t), v_2(x, t) \in B_R$, т.е. оператор $H[v](x, t)$ является сжимающим на шаре B_R . Отсюда вытекает существование единственного решения $v(x, t)$ интегрального уравнения (1.5) в шаре $B_R \subset \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при достаточно большом $R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (1.5) в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ (см., например, [3]), приходим к утверждению теоремы.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то для любых $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3\right)$ и $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3\right)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (1.3) в классе

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0, T]; \mathbb{C}^\alpha\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3\right)\right),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \left\| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Наконец, справедлива следующая

Теорема 3. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то для любых $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ и $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)} \left((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T] \right) \cap \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \left\| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что, с одной стороны, всякое классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в силу третьей формулы Грина (9.1) из [1] удовлетворяет интегральному уравнению (1.3). С другой стороны, решение интегрального уравнения единственно при указанных условиях на начальные функции в классе, сформулированном в условиях теоремы 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t},$$

где $u(x, t)$ — решение интегрального уравнения (1.3). Поэтому в силу (1.4) справедливо равенство

$$\rho_0(x, t) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta_1}} \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta_1}} \rho(x, t),$$

причем для функции $\rho(x, t)$ справедливо утверждение леммы 1. Очевидно, что справедливо неравенство

$$2\beta_1 \geq \beta_1 \geq 0.$$

С учетом обозначений (1.90), (1.91) статьи [1] интегральное уравнение (1.3) можно представить в виде

$$u(x, t) = L(x, t),$$

где функция $L(x, t)$ определена равенством (1.106) из [1]. Но тогда в силу теоремы 5 статьи [2] приходим к выводу о том, что $u(x, t)$ является классическим решением задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1. Из той же теоремы 5 из [2] найденное единственное классическое решение задачи Коши принадлежит к указанному в формулировке теоремы классу гладкости.

Теперь изучим вопрос о достаточных условиях, при которых в теореме 3 $T_0 < +\infty$, т.е. классическое решение рассматриваемой задачи Коши разрушается за конечное время. Справедлива следующая вспомогательная

Лемма 3. Если $\alpha \in (0, 1)$ и

$$f(x) \in \mathbb{C}^\alpha \left((1 + |x|^2)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3 \right), \quad u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha \left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$$

при условиях

$$2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq 0, \tag{1.17}$$

существует единственное решение линейного уравнения

$$\Delta u_1(x) - u_1(x) = -u_0^2(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.18}$$

в классе $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1+|x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$|u_0^2(x_1) - u_0^2(x_2)| \leq 2 \max\{|u_0(x_1)|, |u_0(x_2)|\} |u_0(x_1) - u_0(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3,$$

из которого и того, что $u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$, получаем

$$u_0^2(x), \quad f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Поэтому в рассматриваемом классе дифференциальное уравнение (1.18) эквивалентно интегральному уравнению

$$u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} [u_0^2(y) - f(y)] dy. \quad (1.19)$$

Интегральное уравнение (1.19) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^{\beta_3/2} u_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|) (1+|x|^2)^{\beta_3/2}}{4\pi|x-y| (1+|y|^2)^{\beta_4/2}} \left[(1+|y|^2)^{\beta_4/2} u_0^2(y) - (1+|y|^2)^{\beta_4/2} f(y) \right] dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|) (1+|x|^2)^{\beta_3/2}}{4\pi|x-y| (1+|y|^2)^{\beta_4/2}} \left[v_0^2(y) - (1+|y|^2)^{\beta_4/2} f(y) \right] dy, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$v_0(x) = (1+|x|^2)^{\beta_4/4} u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3),$$

поскольку

$$\beta_2 \geq \frac{\beta_4}{2}.$$

Поэтому

$$v_0^2(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Кроме того,

$$(1+|x|^2)^{\beta_4/2} f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

В силу результата теоремы 9 статьи [2] из равенства (1.20) приходим к выводу о том, что при условиях (1.17) выполнено соотношение

$$(1+|x|^2)^{\beta_3/2} u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1),$$

т.е. справедливо утверждение леммы.

Теперь сделаем важное предположение для дальнейших рассуждений. Пусть выполнены неравенства

$$\beta_2 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}. \quad (1.21)$$

Нетрудно заметить, что такие $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ существуют. Действительно, можно взять, например, следующий набор этих чисел:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 > \frac{3}{2} \Rightarrow 2\beta_2 > \beta_4 = \beta_3 = \beta_1.$$

Пусть выполнены все условия теоремы 3 при условиях (1.21). Тогда, в частности, существует классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 в классе

$$u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T] \right), \quad T \in (0, T_0), \quad \beta_1 > \frac{3}{2}. \quad (1.22)$$

Тогда в этом классе можно проинтегрировать уравнение (1.1) по времени и с учетом того, что начальное условие $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ определяется по начальному условию $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ и произвольной функции $f(x) \in \mathbb{C}^\alpha \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ как единственное решение уравнения (1.18), в результате получим следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_j^2} d\tau + u^2(x, t) = f(x). \quad (1.23)$$

В классе (1.22) определены функционалы

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \|D_x u(x, t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u(x, t)\|_2^2, \quad J(t) = \|D_x u'(x, t)\|_2^2 + \|u'(x, t)\|_2^2, \quad (1.24)$$

где

$$\|w(x, t)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w(x, t)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Справедлива следующая (см., например, [4])

Лемма 4. Если функция $u(x, t)$ принадлежит классу (1.22), то для функционалов (1.24) справедливо обыкновенное дифференциальное неравенство

$$(\Phi'(t))^2 \leq 2\Phi(t)J(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (1.25)$$

В классе (1.22) функций $u(x, t)$ умножим уравнение (1.23) на $u(x, t)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^3$. После интегрирования по частям получим равенство

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, \tau) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx. \quad (1.26)$$

Теперь в том же классе функций $u(x, t)$ умножим уравнение (1.23) на функцию $u'(x, t)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^3$. После интегрирования по частям получим равенство

$$J(t) + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u(x, t) dx + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, \tau) u'_{x_j}(x, \tau) dx d\tau = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx. \quad (1.27)$$

Подставим выражение для

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx$$

из (1.26) в равенство (1.27) и в результате получим равенство

$$J(t) = \frac{1}{3} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \|D_{x_j} u\|_2^2 - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x, \tau) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau - \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u'(x, t) dx. \quad (1.28)$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \|D_{x_j} u\|_2^2 \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \Phi(t), \quad \omega_0^2 = \sum_{j=1}^3 \omega_j^2, \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x, t) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \int_0^t \|D_x u\|_2(\tau) \|D_x u'\|_2(t) d\tau \leq \\
& \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \left(\int_0^t \|D_x u\|_2^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|D_x u'\|_2^2(t) d\tau \right)^{1/2} \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} t^{1/2} J^{1/2}(t) \left(2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \delta J(t) + \frac{1}{4\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 2T \int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \delta J(t) + T \frac{1}{2\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau, \\
& -\frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u'(x, t) dx \leq \frac{2}{3} \|u'\|_2 \|f\|_2 \leq \delta J(t) + \frac{1}{4\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \|f\|_2^2.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Таким образом, из равенства (1.28) с учетом оценок (1.29), (1.30) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
(1 - 2\delta)J(t) & \leq \frac{1}{3} \Phi''(t) + \omega_0^2 \frac{2}{3} \Phi(t) + \\
& + T \frac{1}{2\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \frac{1}{4\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \|f\|_2^2 \quad \text{при } \delta \in (0, 1/2).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Из неравенств (1.25) и (1.31) при $\delta \in (0, 1/2)$ вытекает неравенство

$$\frac{3}{2} (1 - 2\delta) (\Phi'(t))^2 \leq \Phi(t) \Phi''(t) + 2\omega_0^2 \Phi^2(t) + T \frac{1}{\delta} \omega_0^4 \frac{2}{3} \Phi(t) \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \frac{1}{\delta 3} \|f\|^2 \Phi(t). \tag{1.32}$$

Перепишем интегродифференциальное неравенство (1.32) в следующем общем виде:

$$\Phi(t) \Phi''(t) - \alpha (\Phi'(t))^2 + \beta \Phi^2(t) + \gamma_1 \Phi(t) + \gamma_2 T \Phi(t) \int_0^t \Phi(s) ds \geq 0, \quad t \in [0, T], \tag{1.33}$$

где

$$\alpha = \frac{3}{2} (1 - 2\delta), \quad \beta = 2\omega_0^2, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\delta 3} \|f\|^2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\delta} \omega_0^4 \frac{2}{3}.$$

Потребуем выполнения неравенства

$$\alpha > 1 \Rightarrow \delta \in \left(0, \frac{1}{6} \right).$$

В коэффициенты интегродифференциального неравенства (1.33) входит параметр δ , который нам нужно выбрать оптимальным. Выберем его таким образом, чтобы коэффициент

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1}$$

принял минимальное значение. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1} = \frac{2}{9} \|f\|_2^2 \frac{1}{\delta(1 - 2\delta)}.$$

Отметим, что минимальное значение функции

$$g(x) = \frac{1}{x(1 - 2x)}$$

достигается в точке $x = 1/4$. Итак, выберем $\delta > 0$ следующим образом:

$$\delta = \frac{1}{6} - \delta_1,$$

где $\delta_1 \in (0, 1/6)$ — сколь угодно мало. Потребуем выполнения неравенств

$$\Phi_0 := \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2] dx > 0, \quad (1.34)$$

$$\Phi_1 := \Phi'(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x)u_1(x) + (D_x u_0(x), D_x u_1(x))] dx > 0. \quad (1.35)$$

Неравенство (1.34) выполнено для нетривиальной функции

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right). \quad (1.36)$$

Более детально рассмотрим неравенство (1.35). В классе начальных функций (1.36) и

$$u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\lambda} \left((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right), \quad \lambda \in (0, \alpha),$$

при выполнении неравенств (1.21) и уравнения (1.17) справедливы равенства

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) [-\Delta u_1(x) + u_1(x)] dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) [u_0^2(x) - f(x)] dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^3(x) - f(x)u_0(x)] dx > 0$$

при достаточно “большой” нетривиальной функции $u_0(x)$. Заметим, что в [4] доказана

Теорема 4. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0)$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству (1.33) и

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \alpha > 1,$$

причем начальные условия $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ таковы, что существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2} (\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1} (\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} \Phi(0). \quad (1.37)$$

Тогда $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}t]^{1/(\alpha-1)}},$$

для всех $t \in [0, T_0)$ и $T_0 \leq T_1 < +\infty$, где

$$A := (\alpha-1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1} (\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} \Phi(0) \right] > 0.$$

Чтобы воспользоваться результатом теоремы 4, необходимо убедиться, что уравнение (1.37) имеет единственное положительное решение $x = T_1^2$. С учетом обозначения $x = T_1^2$ уравнение (1.37) из теоремы 4 можно переписать в виде

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1.38)$$

$$a = \frac{\gamma_2}{\alpha-1} \Phi_0^2, \quad b = \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} \Phi_0 + \frac{\beta}{\alpha-1} \Phi_0^2 - \Phi_1^2, \quad c = \frac{1}{(\alpha-1)^2} \Phi_0^2.$$

Нужно доказать, что квадратное уравнение (1.38) имеет положительное решение. Действительно, с этой целью возьмем вместо нетривиальной функции $u_0(x)$ функцию $Ru_0(x)$ при $R > 0$. Тогда при достаточно большом $R > 0$ имеем

$$\Phi_1 \sim R^3, \quad \Phi_0 \sim R^2.$$

Поэтому

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac > 0 \quad \text{и} \quad b < 0$$

при достаточно большом $R > 0$. Итак, квадратное уравнение (1.38) имеет положительное решение. Значит, выполнены все условия теоремы 4. Таким образом, доказана

Теорема 5. Если $\alpha \in (0, 1)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$, а функция $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ является единственным решением уравнения (1.18) для произвольной функции $f(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ при выполнении условий

$$\beta_2 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}$$

и при достаточно большой начальной функции $u_0(x)$, в частности, при такой, что

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2 \right] dx > 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0^3(x) - f(x)u_0(x) \right] dx > 0,$$

решение $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T] \right) \cap \mathbb{C}^{(2)} \left([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \right)$ задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 не существует глобально во времени, и поэтому время $T_0 = T_0(u_0, f) > 0$ из теоремы 3 конечно, и справедливо предельное равенство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2} u(x, t) \right\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

2. ЗАДАЧА КОШИ 2

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

Дадим

Определение 2. Классическим решением задачи Коши (2.1), (2.2) называется функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, которая удовлетворяет равенствам (2.1), (2.2) поточечно.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} v(y) dy,$$

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad v(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).$$

Справедлива следующая

Лемма 5. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, то $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t)|_\alpha \leq 12 \max \{ \|u_1\|_{1, 1+\alpha, T}, \|u_2\|_{1, 1+\alpha, T} \} \|u_2 - u_1\|_{1, 1+\alpha, T},$$

$$\|w\|_{1, 1+\alpha, T} := \sup_{t \in [0, T]} [\|w(x, t)\|_{1+\alpha} + |w_t(x, t)|_{1+\alpha}], \quad (2.4)$$

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial |D_x u_k(x, t)|^2}{\partial t}, \quad u_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что при условиях леммы справедливо равенство

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial |z(x, t)|^2}{\partial t} = 2(z_t(x, t), z(x, t)), \quad z(x, t) = D_x u(x, t). \quad (2.5)$$

Пусть $t \in [0, T]$ – произвольное. Тогда верно равенство

$$\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t) = 2(z_t(x_2, t), z(x_2, t) - z(x_1, t)) + 2(z(x_1, t), z_t(x_2, t) - z_t(x_1, t)),$$

из которого вытекает неравенство

$$|\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t)| \leq 2|z_t(x_2, t)| |z(x_2, t) - z(x_1, t)| + 2|z(x_1, t)| |z_t(x_2, t) - z_t(x_1, t)|. \quad (2.6)$$

Из (2.6) вытекает оценка

$$\begin{aligned} [\rho(x, t)]_\alpha &= \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t)|}{|x_2 - x_1|^\alpha} \leq 2|z_t(x, t)|_0 |z(x, t)|_\alpha + \\ &+ 2|z(x, t)|_0 |z_t(x, t)|_\alpha = 2|D_x u_t(x, t)|_0 |D_x u(x, t)|_\alpha + 2|D_x u(x, t)|_0 |D_x u_t(x, t)|_\alpha < +\infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.5) получаем оценку

$$|\rho_0(x, t)|_0 \leq 2|D_x u_t(x, t)|_0 |D_x u(x, t)|_0 < +\infty. \quad (2.8)$$

Таким образом, из (2.7) и (2.8) приходим к выводу о том, что

$$|\rho_0(x, t)|_\alpha < +\infty \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Из равенства (2.5) вытекает следующая цепочка равенств для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\begin{aligned} &[\rho_0(x_2, t_2) - \rho_0(x_1, t_2)] - [\rho_0(x_2, t_1) - \rho_0(x_1, t_1)] = \\ &= 2(z_t(x_2, t_2), z(x_2, t_2) - z(x_1, t_2)) + 2(z(x_1, t_2), z_t(x_2, t_2) - z_t(x_1, t_2)) - \\ &- 2(z_t(x_2, t_1), z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)) - 2(z(x_1, t_1), z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)) = \\ &= 2(z_t(x_2, t_2), [z(x_2, t_2) - z(x_1, t_2)] - [z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)]) + \\ &\quad + 2(z_t(x_2, t_2) - z_t(x_2, t_1), z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)) + \\ &\quad + 2(z(x_1, t_2), [z_t(x_2, t_2) - z_t(x_1, t_2)] - [z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)]) + \\ &\quad + 2(z(x_1, t_2) - z(x_1, t_1), z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)), \end{aligned}$$

из которой вытекает оценка

$$\begin{aligned} |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha &\leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_{jt}(x, t)|_\alpha |z_j(x, t_2) - z_j(x, t_1)|_\alpha + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_j(x, t)|_\alpha |z_{jt}(x, t_2) - z_{jt}(x, t_1)|_\alpha + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_j(x, t)|_\alpha |z_{jt}(x, t_2) - z_{jt}(x, t_1)|_\alpha + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_{jt}(x, t)|_\alpha |z_j(x, t_2) - z_j(x, t_1)|_\alpha = 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u(x, t_2) - D_{x_j} u(x, t_1)|_\alpha + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u_t(x, t_2) - D_{x_j} u_t(x, t_1)|_\alpha + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u_t(x, t_2) - D_{x_j} u_t(x, t_1)|_\alpha + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u(x, t_2) - D_{x_j} u(x, t_1)|_\alpha \leq \\ &\leq 24 \|u\|_{1, 1+\alpha, T} [|u(x, t_2) - u(x, t_1)|_{1+\alpha} + |u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)|_{1+\alpha}]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С другой стороны, несложно доказать неравенство

$$\begin{aligned} |\rho_0(x, t_2) - \rho_0(x, t_1)|_0 &\leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(x, t)|_0 |D_{x_j} u(x, t_2) - D_{x_j} u(x, t_1)|_0 + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(x, t)|_0 |D_{x_j} u_t(x, t_2) - D_{x_j} u_t(x, t_1)|_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.10) и из (2.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha &\leq c_0 \|u\|_{1, 1+\alpha, T} [|u(x, t_2) - u(x, t_1)|_{1+\alpha} + \\ &+ |u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)|_{1+\alpha}] \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_2 - t_1| \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, из (2.9) и (2.12) приходим к выводу о том, что $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Пусть

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial |D_{x_k} u_k(x, t)|^2}{\partial t}, \quad u_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

при $k = 1, 2$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t) &= 2 \sum_{j=1}^3 D_{x_j} u_{2t}(x, t) [D_{x_j} u_2(x, t) - D_{x_j} u_1(x, t)] + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 D_{x_j} u_1(x, t) [D_{x_j} u_{2t}(x, t) - D_{x_j} u_{1t}(x, t)], \end{aligned}$$

из которого вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |\rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t)|_\alpha &\leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_{2t}(x, t)|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_2(x, t) - D_{x_j} u_1(x, t)|_\alpha + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_1(x, t)|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_{2t}(x, t) - D_{x_j} u_{1t}(x, t)|_\alpha \leq 12 \max \{ \|u_1\|_{1, 1+\alpha, T}, \|u_2\|_{1, 1+\alpha, T} \} \|u_2 - u_1\|_{1, 1+\alpha, T}. \end{aligned}$$

Наконец, справедлива

Теорема 6. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любых $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.3) в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{1, 1+\alpha, T} = +\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$u(x, t) = H[u](x, t),$$

где оператор $H[u](x, t)$ определен равенством

$$H[u](x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} v(y) dy$$

и в силу результата теоремы 5 статьи [2] действует следующим образом:

$$H[u](x, t) : \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (1.4) теоремы 1 статьи [2] и оценки (2.4) леммы 5 справедлива следующая оценка:

$$\|H[u_1](x, t) - H[u_2](x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq Td_0(T) \sup_{t \in [0,T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_\alpha \leq Td_0(T)h(R)\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T},$$

$$h(R) = 12R, \quad R = \max\{\|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T}\}.$$
(2.13)

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \{w(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{1,1+\alpha,T} \leq R\}.$$

Пусть $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ — произвольные фиксированные. Тогда найдется настолько большое $R > 0$, что справедливо неравенство

$$\|f_1(x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq \frac{R}{2},$$

$$f_1(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \nu(y) dy.$$

Положим в оценке (2.13) $u_1(x, t) = u(x, t) \in B_R$ и $u_2(x, t) = 0$. Тогда получим цепочку неравенств

$$\|H_1[u](x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq 12\|u(x, t)\|_{1,1+\alpha,T}^2 \leq Td_0(T)12R^2 \leq \frac{R}{2},$$

$$H_1[u](x, t) := - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau$$
(2.14)

при достаточно малом $T > 0$ таком, что выполнено неравенство

$$12Td_0(T)R \leq \frac{1}{2}.$$
(2.15)

Из (2.13) и (2.14) вытекает, что

$$H[u](x, t) : B_R \rightarrow B_R.$$

Наконец, из оценки (2.13) при выполнении условия (2.15) получаем неравенство

$$\|H[u_1](x, t) - H[u_2](x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T}$$

для любых $u_1(x, t), u_2(x, t) \in B_R$, т.е. оператор $H[u](x, t)$ является сжимающим на шаре B_R . Отсюда вытекает существование единственного решения $u(x, t)$ интегрального уравнения (2.3) в шаре $B_R \subset \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ при достаточно большом $R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (2.3) в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ (см., например, [3]), приходим к утверждению теоремы.

Справедлива следующая

Теорема 7. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любых $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) в смысле определения 2 в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{1,1+\alpha,T} = +\infty.$$

Из третьей формулы Грина (9.1) из [1] вытекает, что всякое классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет интегральному уравнению (2.3), а всякое решение этого интегрального уравнения в силу теоремы 6 единственно в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ для любого

$T \in (0, T_0)$. С учетом результата леммы 5 осталось воспользоваться теоремой 5 статьи [2] при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

3. ЗАДАЧА КОШИ 3

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x). \quad (3.2)$$

Дадим

Определение 3. Классическим решением задачи Коши (3.1), (3.2) называется функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, удовлетворяющая равенствам (3.1), (3.2) поточечно.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} v(y) dy, \quad (3.3)$$

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2},$$

$$\mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad v(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).$$

Справедлива следующая

Лемма 6. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_{01}(x, t) - \rho_{02}(x, t)|_\alpha \leq c_0 \max \{ \|u_1\|_{2, \alpha, T}, \|u_2\|_{2, \alpha, T} \} \|u_1 - u_2\|_{2, \alpha, T},$$

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial^2 u_k^2(x, t)}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$\|w\|_{2, \alpha, T} = \sup_{t \in [0, T]} [|w(x, t)|_\alpha + |w_t(x, t)|_\alpha + |w_{tt}(x, t)|_\alpha].$$

Доказательство. Несложное доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Справедлива следующая

Теорема 8. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R > 0$, $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, что для любых $u_0(x) \in B_R \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ существует единственное решение $u(x, t) \in B_R \subset \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ интегрального уравнения (3.3), где

$$B_{R_k} = \{w(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) : |w(x)|_{2+\alpha} \leq R_k\}, \quad k = 1, 2,$$

$$B_R = \{w(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{2, \alpha, T} \leq R\}.$$

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и оценок (1.4) из [2] и (3.4).

Справедлива следующая

Теорема 9. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, что для любых $u_0(x) \in B_{R_1} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (3.1), (3.2) $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ в смысле определения 3.

Доказательство основано на третьей формуле Грина (9.1) из [1], теореме 5 статьи [2] при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и теореме 8.

Теперь мы рассмотрим вопрос об отсутствии локального во времени и глобального во времени классических решений задачи Коши (3.1), (3.2).

С этой целью перепишем уравнение (3.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \left(u(x, t) + \frac{1}{2} \right) - \left(u(x, t) + \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 (u(x, t) + 1/2)}{\partial x_j^2} = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ и проинтегрируем в рамках классических решений $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ по частям, тогда получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi''(x, t) + (u(x, t) + 1/2) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [(u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi'(x, 0) - u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0)] dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2(u_0(x) + 1/2) u_1(x) \phi(x, 0) - (u_0(x) + 1/2)^2 \phi'(x, 0)] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 \phi''(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дадим

Определение 4. Будем говорить, что функция $u_1(x)$ принадлежит классу B , если найдется такая ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей, что $u_1(x) \in H^2(\Omega)$ и $\Delta_x u_1(x) \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ и

$$\Delta_x u_1(x) \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Справедлива следующая

Теорема 10. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u_1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ и $u_0(x) + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, то при выполнении условия

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx < 0$$

время существования классического решения задачи Коши (3.1), (3.2) конечно, и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2)^2 dx}{-\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx}.$$

Если же $u_0(x) = -1/2$ и $u_1(x) \in B$, то классическое решение задачи Коши (3.1), (3.2) отсутствует даже локально во времени.

Доказательство этой теоремы основано на методе нелинейной емкости С.И. Похожаева из [5]. Нужно с помощью неравенства Гёльдера оценить слагаемые в равенстве (3.5). Возьмем в качестве функции $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ следующую:

$$\phi(x, t) = \phi_R(x) \phi_T(t),$$

$$\phi_R(x) = \phi_0 \left(\frac{|x|^2}{R^2} \right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases}$$

$$\phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, +\infty), \quad \phi_T(t) = \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2.$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi''(x, t) dx dt \right| = \left| \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi_R(x) dx dt \right| \leq \\
 & \leq \frac{2T^{1/2}}{T^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \quad I_R := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 \phi_R(x) dx dt, \\
 & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) dx dt \right| \leq \\
 & \leq \left(\int_0^T \phi_R^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{R x_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2} = \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{R x_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \quad (3.6) \\
 & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi'(x, 0) dx \right| \leq \frac{2}{T} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi_R(x) dx \right| \leq \\
 & \leq \frac{2}{T} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x) + 1/2|^2 dx \right)^{1/2}, \\
 & \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi_R(x) dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $u_0(x) + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то согласно теореме Лебега справедливо следующее предельное свойство:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \left[2(u_0(x) + 1/2) u_1(x) \phi(x, 0) - (u_0(x) + 1/2)^2 \phi'(x, 0) \right] dx = \\
 & = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] \phi_R(x) dx \rightarrow \\
 & \rightarrow 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

при $R \rightarrow +\infty$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)} dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \\
 & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{R x_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{0 \xi_j \xi_j}(|\xi|^2) \right|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \quad (3.7) \\
 & \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Из равенства (3.5) и оценок (3.6), (3.7) вытекает неравенство

$$\frac{2T^{1/2}}{T^2} c_1 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \left(\frac{T}{5}\right)^{1/2} c_2 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \frac{2}{T} a_1 R^{-1/2} + a_2 R^{-1/2} + J_R \geq \frac{2}{T^2} I_R, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \Phi_0(|\xi|^2)|^2}{\Phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ c_2 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \Phi_{0\xi_j \xi_j}(|\xi|^2) \right|^2}{\Phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ a_1 &:= \|u_0(x) + 1/2\|_2 \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \Phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ a_2 &:= \|u_1(x)\|_2 \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \Phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ J_R &:= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] \Phi_R(x) dx. \end{aligned}$$

Далее, из (3.8) с помощью теоремы Беппо Леви приходим в пределе при $R = N \in \mathbb{N} \rightarrow +\infty$ к следующей априорной оценке:

$$T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] dx \geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 dx dt,$$

из которой уже стандартным образом выводим утверждения теоремы. В частности, при $u_0(x) = -1/2$ имеем

$$u(x, t) = -1/2 \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T].$$

После подстановки этих равенств в равенство (3.5) приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \Phi(x, 0) dx = 0$$

для любых пробных функций $\Phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Возьмем

$$\Phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega),$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям определения 4 класса B начальных функций $u_1(x)$. Тогда получим равенство

$$\int_{\Omega} u_1(x) \Delta_x \phi_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \Delta_x u_1(x) \phi_1(x) dx = 0 \Rightarrow \Delta_x u_1(x) = 0$$

для всех $x \in \Omega$, что противоречит определению класса B .

Теперь умножим уравнение (3.1) на функцию $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, проинтегрируем по частям и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) [\Delta_x \phi'(x, 0) - \phi'(x, 0)] - u_1(x) [\Delta_x \phi(x, 0) - \phi(x, 0)]] dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x)u_1(x)\phi(x, 0) - u_0^2(x)\phi'(x, 0)] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x, t) \phi''(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Положим

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad \phi_1(x) \geq 0.$$

Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt \right| \leq c_1^{1/2} J^{1/2} \leq \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} c_1, \quad (3.9)$$

$$c_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right|^2}{\phi''(x, t)} dx dt, \quad (3.10)$$

$$J = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi''(x, t) u^2(x, t) dx dt.$$

Заметим, что в [5] доказано существование такой нетривиальной функции $\phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, что конечна емкость c_1 . При этом справедливо выражение

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) [\Delta_x \phi'(x, 0) - \phi'(x, 0)] - u_1(x) [\Delta_x \phi(x, 0) - \phi(x, 0)]] dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x)u_1(x)\phi(x, 0) - u_0^2(x)\phi'(x, 0)] dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)\phi_1(x) dx < 0. \quad (3.12)$$

Тогда при этом условии найдется такое достаточно большое $T > 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx < 0. \quad (3.13)$$

Фиксируем такое $T > 0$. Теперь сделаем следующую замену в равенстве (3.11):

$$u_0(x) \mapsto Ru_0(x), \quad u_1(x) \mapsto Ru_1(x) \quad \text{при} \quad R > 0,$$

и в результате получим равенство

$$I = -R \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + 2R^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx. \quad (3.14)$$

Поскольку при выбранном и фиксированном $T > 0$ справедливо неравенство (3.13), то при достаточно большом $R > 0$ получаем из (3.14) неравенство

$$\frac{1}{2}c_1 + I < 0. \quad (3.15)$$

Теперь фиксируем такое $R > 0$. С учетом неравенства (3.9) и выражения (3.14) получим неравенство

$$\frac{1}{2}c_1 - R \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + 2R^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x) u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx \geq \frac{1}{2} J \geq 0. \quad (3.16)$$

Неравенства (3.15) и (3.16) противоречат друг другу. Следовательно, нами доказана

Теорема 11. Если нетривиальная функция $\phi_1(x) \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ такова, что конечна нелинейная емкость (3.10), в которой

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2,$$

то при выполнении неравенства (3.12) и при начальных функциях $Ru_0(x)$ и $Ru_1(x)$ при достаточно большом $R > 0$ классическое решение задачи Коши (3.1), (3.2) не существует глобально во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
2. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 96–130.
3. Панин А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
4. Корпусов М.О. Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
5. Похожаев С.И., Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

“ПАРАЗИТНЫЕ” СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

© 2023 г. С. А. Назаров^{1,*}¹ 199178 Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61, ИПМаш РАН, Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.
Переработанный вариант 28.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматриваются спектральные задачи для оператора Лапласа с условиями Робэна и Стеклова (третьими краевыми) на гладкой границе плоской области. Эти условия содержат малый параметр и коэффициент “неправильного” знака, вызывающий появление отрицательных собственных значений. Подобные задачи и собственные значения, называемые “паразитными”, возникают в вычислительных схемах при моделировании регулярной вариации границ (малых неравномерных сдвигов вдоль нормали) посредством возмущений дифференциальных операторов в краевых условиях. Построена и обоснована асимптотика некоторых паразитных собственных значений и получены априорные оценки, способствующие выяснению их положения на вещественной оси и влияния на погрешности моделирования. Библ. 47.

Ключевые слова: спектральная задача для оператора Лапласа, краевые условия Робэна и Стеклова с малым параметром, асимптотика отрицательных собственных значений, пограничный слой, моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466923070116, EDN: VTBLRY

1. МОТИВИРОВКА

Известная формула Адамара (см. [1]), используемая в вычислительных схемах и при качественном анализе задач математической физики, например, в процедурах оптимизации формы (см. [2], [3]), описывает возмущение собственных значений (СЗ) при регулярной вариации границы области, в которой поставлена спектральная краевая задача. Опубликовано множество исследований, обобщающих указанный классический результат (см. [4–7]), а также приведенные там списки литературы). В [8] предложен иной подход, основанный на имитации сдвига границы с условиями Дирихле или Неймана посредством постановки соответственно условий Робэна или Стеклова на исходной границе и приемлемый, например, в теории упругости для тел с поврежденными или армированными поверхностями (ср. [9], [10]). Поясним такой способ моделирования на примере простейших, потому малосодержательных, но совершенно понятных граничных задач для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 U^\varepsilon(t) &= \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon(t), \quad t \in (\varepsilon\ell, L), \quad U^\varepsilon(L) = 0, \\ U^\varepsilon(\varepsilon\ell) &= 0 \quad (\text{или } \partial_t U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = 0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\ell \neq 0$, $L > 0$ и $\varepsilon > 0$ — фиксированные и малый параметры соответственно, а $\partial_t = \partial/\partial t$. Также рассмотрим следующие задачи на предельном ($\varepsilon = 0$) интервале $(0, L)$:

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 u^\varepsilon(t) &= \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(t), \quad t \in (0, L), \quad u^\varepsilon(L) = 0, \\ u^\varepsilon(0) &= -\varepsilon\ell \partial_t u^\varepsilon(0) \quad (\text{или } \partial_t u^\varepsilon(0) = \varepsilon\ell \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(0)). \end{aligned} \quad (2)$$

В них граничные условия в точке $t = 0$ поставлены при учете формул Тейлора

$$U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = U^\varepsilon(0) + \varepsilon\ell\partial_t U^\varepsilon(0) + O(\varepsilon^2),$$

$$\partial_t U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = \partial_t U^\varepsilon(0) + \varepsilon\ell\partial_t^2 U^\varepsilon(0) + O(\varepsilon^2) = \partial_t U^\varepsilon(0) - \varepsilon\ell\Lambda^\varepsilon U^\varepsilon(0) + O(\varepsilon^2),$$

и образованы так, чтобы обратить в нуль главные члены этих формул. Именно в замене вариации границы возмущением граничных условий и заключается предложенный в [8] способ моделирования.

Поскольку собственные пары {значение ; функция} всех сформулированных задач доступны в явном виде, нетрудно убедиться в том, что положительные СЗ задач (1) и (2) находятся в отношении (ср. материал разд. 7)

$$|\Lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^\varepsilon| \leq c_k \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_k], \quad (3)$$

где $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, а $c_k > 0$ и $\varepsilon_k > 0$ — некоторые величины. Кроме того, тривиальный вариант формулы Адамара (см. [1]) дает соотношение

$$|\Lambda_k^\varepsilon - \Lambda^0 - \varepsilon\Lambda_k'| \leq c_k' \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_k'], \quad (4)$$

причем Λ^0 — СЗ предельной ($\varepsilon = 0$) задачи (2), $\Lambda' \neq 0$ — основная асимптотическая поправка, а ε_k' и c_k' — положительные величины. Сравнивая формулы (3) и (4), видим, что задача (2) представляет двучленную асимптотику собственных пар (СП) задачи (1). Иными словами, модель с условиями Робэна (или Стеклова) дает ту же точность приближения, что и классическая формула Адамара.

При $\ell < 0$ спектр $\wp^\varepsilon$ задачи (2) располагается на замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$. В то же время при $\ell > 0$ (предельный интервал шире исходного) у задачи (2) появляется СП $\{\lambda_{-1}^\varepsilon, u_{-1}^\varepsilon\}$, удовлетворяющая при некотором $\delta > 0$ соотношениям

$$\lambda_{-1}^\varepsilon = -\varepsilon^{-2}\ell^{-2} + O(e^{-\delta/\varepsilon}), \quad u_{-1}^\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon\ell} + O(e^{-\delta/\varepsilon}). \quad (5)$$

Большие отрицательные СЗ $\lambda_{-k}^\varepsilon < 0$ принято называть паразитными. Их возникновение — частый побочный эффект моделирования задач с сингулярными возмущениями границы дифференциальными операторами с малым параметром или их самосопряженными расширениями (ср. [11], [12] и др.). Для таких СЗ нередко верны явные формулы, показывающие, в частности, их значительную удаленность (ср. множитель ε^{-2} в первом выражении (5)) от области действия модели — ограниченной части положительной полуоси. В результате подобные паразитные СП без особого труда исключаются из анализа, например, при использовании максиминимального принципа или при разработке вычислительных схем — именно в численных экспериментах для уменьшения затрат их реализации полезна подмена сингулярных возмущений регулярными при контроле сопутствующих погрешностей.

В настоящей работе путем построения асимптотики устанавливается существование паразитных СЗ для нескольких краевых задач в плоских областях, для которых асимптотические структуры оказываются значительно более сложными, чем выражения (5) для одномерных задач (2), и выясняется, при каких ограничениях гарантированно сохраняется упомянутая удаленность отрицательной части спектра $\wp_-^\varepsilon = \{\lambda^\varepsilon \in \wp^\varepsilon : \lambda^\varepsilon < 0\}$ от точки $\lambda^\varepsilon = 0$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть Ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым гладким (класса C^∞ ; ср. п. 6.1) связным замкнутым контуром $\Gamma = \partial\Omega$, длина которого масштабированием сведена к 2π . Пусть еще $H \in C^\infty(\Gamma)$ — строго положительная функция, и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, причем $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим спектральную задачу

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon H(s) \partial_n u^\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma, \quad (7)$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа, $\nabla = \text{grad}$, и ∂_n — производная вдоль внешней нормали. Кроме того, в окрестности $\mathcal{V}$ контура Γ введены криволинейные координаты (n, s) , где n — ориентированное расстояние до Γ , $n < 0$ в $\mathcal{V} \cap \Omega$, а s — длина дуги, измеренная против часовой стрелки вдоль контура от точки $\mathcal{O}$, начала декартовых координат $x = (x_1, x_2)$. В локальных координатах оператор Лапласа принимает вид

$$-\Delta = J(n, s)^{-1} \partial_n J(n, s) \partial_n + J(n, s)^{-1} \partial_s J(n, s)^{-1} \partial_s. \quad (8)$$

Здесь $\partial_n = \partial/\partial n$, $\partial_s = \partial/\partial s$ и $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ — якобиан, а $\kappa(s)$ — кривизна в точке $s \in \Gamma$ (вообще говоря, знакопеременная, т.е. отрицательная на вогнутых участках контура Γ).

Вариационная формулировка задачи (6), (7) апеллирует к интегральному тождеству (см. [13])

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, \psi) := (\nabla u^\varepsilon, \nabla \psi)_\Omega - \varepsilon^{-1} (H^{-1} u^\varepsilon, \psi)_\Gamma = \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon, \psi)_\Omega \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (9)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, и $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева. В силу элементарного следового неравенства (см., например, [13], гл. 1)

$$\|\psi; L^2(\Gamma)\| \leq K_\Omega \|\psi; H^1(\Omega)\| \|\psi; L^2(\Omega)\| \quad (10)$$

билинейная форма a^ε полуограничена снизу и, более того, спектр $\mathcal{J}^\varepsilon$ задачи (9) располагается на луче $[-\varepsilon^{-1} \mu_+, +\infty)$ с некоторым $\mu_+ > 0$ (см. далее выкладку (74)) и состоит из монотонной неограниченной последовательности нормальных СЗ.

Условия Робэна (7) появились в результате асимптотического переноса на “неподвижный” контур $\Gamma = \Gamma^0$ условий Дирихле с возмущенного контура

$$\Gamma^\varepsilon = \{x \in \mathcal{V} : n = -\varepsilon H(s), s \in \Gamma\}, \quad (11)$$

охватывающего область Ω^ε , согласно формуле Тейлора

$$U^\varepsilon(-\varepsilon H(s), s) = U^\varepsilon(0, s) - \varepsilon H(s) \partial_n U^\varepsilon(0, s) + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

(ср. рассуждения из [8]). При моделировании аналогичной задачи Неймана в регулярно возмущенной области Ω^ε возникают краевые условия Стеклова (ср. разд. 1). Поэтому далее изучается еще одна задача, состоящая из дифференциального уравнения (6) и краевого условия

$$\partial_n u^\varepsilon(x) = -\varepsilon \lambda^\varepsilon H(s) u^\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma. \quad (13)$$

Называем ее задачей Стеклова, несмотря на то что спектральный параметр присутствует и в дифференциальном уравнении, и в краевом условии. Вариационная постановка задачи (6), (13) выглядит так:

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla \psi)_\Omega = \lambda^\varepsilon b^\varepsilon(u^\varepsilon, \psi) := \lambda^\varepsilon((u^\varepsilon, \psi)_\Omega - \varepsilon (Hu^\varepsilon, \psi)_\Gamma) \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (14)$$

Теперь билинейная форма b^ε из правой части интегрального тождества, остающаяся компактной в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, перестает быть положительной, т.е. в спектре $\mathcal{J}^\varepsilon$ задачи (14) опять-таки появляются отрицательные СЗ на луче $(-\infty, -\varepsilon^{-2} \mu_-]$ (см. ниже (73)).

В отличие от задачи (6), (13) с условием Стеклова исследованию задачи (6), (7) с условием Робэна в различных формулировках посвящено большое количество статей (см. [14–19] и др.), где, в частности, найдены главные члены асимптотики первого (минимального) СЗ в плоской и многомерных областях, но также уточненные и даже полные асимптотические разложения в нижней части спектра в предположении о существовании единственного глобального строгого максимума кривизны границы γ области $\omega \subset \mathbb{R}^2$. В настоящей работе для обеих задач используется подход, связанный с анализом явления разномасштабных пограничных слоев, и в разнообразных ситуациях, как обычно, находятся несколько членов (три или два) формальных асимптотик СП так, чтобы обеспечить асимптотическое расщепление СЗ, т.е. вывести дополнительную

предельную задачу, бесконечный набор СЗ которой порождает основную серию СЗ исходной задачи. Для задачи с условием Робэна в целом повторены результаты [18], [20], [21] (соответственно в пунктах 3.1–3.3), однако убедиться в удаленности паразитных СЗ от начала координат не удастся, в частности, из-за того, что помимо основной – расположенной в нижнем диапазоне спектра – асимптотической серии СЗ могут существовать и другие серии (см. п. 6.2). Для задачи с условием Стеклова асимптотические конструкции являются новыми во всех ситуациях и основной результат, полученный в п. 6.3, показывает, что при некотором $\mu_* > 0$ интервал $(-\varepsilon^{-2}\mu_*, 0)$ заведомо свободен от СЗ, т.е. в спектре наблюдается та же картина, что и в случае конечномерных возмущений.

Упомянем еще статьи [22–24], посвященные изучению асимптотик отрицательных СЗ в сингулярно возмущенных задачах иных типов.

Построение асимптотических представлений СП задач (9) и (14) представлено в разд. 3 и 4 соответственно. Используемые в двух задачах асимптотические процедуры оказываются весьма похожими, хотя в целом свойства отрицательных частей их дискретных спектров оказываются совершенно разными (см. п. 6.3). Асимптотический анализ требует разбора нескольких несхожих ситуаций, но общим моментом для них становится локализация “паразитных” собственных функций (СФ). В простейшем случае (Ω – круг, H – постоянная) СФ u_{-k}^ε , отвечающая “большим” отрицательным СЗ, приобретает характер пограничного слоя, распределенного вдоль всей границы, но быстро, с экспоненциальной скоростью, затухающего при удалении от нее. Подобные эффекты обычны в методе Вишика–Люстерника (см. [25–27]). В других случаях (кривизна κ или множитель H имеет экстремум, например, в начале координат $\mathbb{O}$) локализация усугубляется: СФ становится исчезающе малой соответственно вне $c_\kappa \varepsilon^{1/4}$ - или $c_H \varepsilon^{1/2}$ -окрестности точки $\mathbb{O}$. Такое поведение СФ встречалось и в других задачах математической физики, преимущественно в задачах Дирихле в тонких областях (см. [20], [21], [28–31] по поводу схожих способов локализации).

Другие последствия постановки третьих краевых условий в областях с нерегулярными точками на границе были исследованы в [32–34] и др. в случае сохранения липшидовости и [35–40] и др. при ее потере.

Асимптотические конструкции, представленные в разд. 3 и 4, не описывают все возможные способы локализации (ср. п. 6.2), а поиск иных устойчивых асимптотик паразитных СФ остался за рамками работы. Разные легкодоступные обобщения обсуждаются в п. 6.1, где также сформулирован ряд открытых вопросов, а в разд. 7 кратко пояснено построение асимптотик положительных СЗ. Обоснование асимптотических формул обсуждается в разд. 5.

3. АСИМПТОТИКА В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ РОБЭНА

В этом разделе приводим явные асимптотические конструкции, различая три случая: постоянные H и κ , переменная H и любая κ , а также постоянная функция H , но переменная кривизна κ . Применяется некоторая модификация асимптотических конструкций из [18], [20], [21].

3.1. Первый случай

Пусть Ω – единичный круг, и множитель H в краевом условии (7) – постоянная, т.е.

$$\kappa(s) := R^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad H(s) = h^{-1}, \quad h > 0. \quad (15)$$

При этом $s = \varphi \in [-\pi, \pi]$ – угловая переменная на единичной окружности $\Gamma = \mathbb{S}$. Введем растянутую нормальную (радиальную) координату с обратным знаком

$$t = -\varepsilon^{-1}n \in \mathbb{R}_+ \quad (16)$$

и получим следующие представления для якобиана и дифференциального оператора (8):

$$J(n, s) = 1 - \varepsilon t \kappa(s), \quad \Delta = \varepsilon^{-2} \partial_t^2 - \varepsilon^{-1} \kappa(s) \partial_t - t \kappa(s)^2 \partial_t + \partial_s^2 + \dots \quad (17)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа, а равенства $\kappa = 1$ и $R = 1$ не конкретизируются для использования формул в других случаях.

Следуя методу Вишика–Люстерника (см. [25]), зададим простейшие асимптотические разложения СП задачи (6), (7)

$$\lambda_{-k}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\lambda^0 + \varepsilon^{-1}\lambda' + \lambda_{-k}'' + \dots, \quad (18)$$

$$u_{-k}^\varepsilon(x) = \Phi_k(\varphi) \left(w^0(t) + \varepsilon w'(t) + \varepsilon^2 w_{-k}''(t) \right) + \dots, \quad (19)$$

в которых пара

$$\lambda^0 = -h^2, \quad w^0(t) = e^{-ht} \quad (20)$$

представляет собой отрицательное СЗ и затухающую при $t \rightarrow +\infty$ (т.е. на расстоянии от границы Г) СФ первой предельной задачи о пограничном слое

$$-\partial_t^2 w^0(t) - \lambda^0 w^0(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (21)$$

$$w^0(0) + h^{-1} \partial_t w^0(0) = 0. \quad (22)$$

Остальные ингредиенты разложений подлежат определению. Приняв во внимание вращательную симметрию области Ω , предугадаем формулы для первого сомножителя в правой части (19):

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \quad \Phi_p(\varphi) = \cos(p\varphi), \quad \Phi_{-p}(\varphi) = \sin(p\varphi), \quad p \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Подставим анзацы (18), (19) в дифференциальное уравнение (6) и краевое условие (7), а затем соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Благодаря соотношениям (20)–(22) и (17), (15) основные члены невязок обращаются в нуль, а на первом шаге итерационного процесса получим задачу

$$-\partial_t^2 w'(t) + h^2 w'(t) = f'(t) := (\lambda' - R^{-1} \partial_t) w^0(t) = (\lambda' + h R^{-1}) w^0(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (24)$$

$$w'(0) + h^{-1} \partial_t w'(0) = 0. \quad (25)$$

Условие разрешимости этой задачи в классе функций, исчезающих на бесконечности, приводит к равенствам

$$0 = \int_0^\infty e^{-ht} f(t) dt = \frac{1}{2h} \left(\lambda' + \frac{h}{R} \right) \Leftrightarrow \lambda' = -\frac{h}{R}. \quad (26)$$

При этом решение задачи (24), (25) определено с точностью до слагаемого $c w^0$, и потому можно считать, что

$$w'(t) = 0. \quad (27)$$

На втором шаге возникает задача

$$-\partial_t^2 w_{-k}''(t) + h^2 w_{-k}''(t) = f_k''(t) := (\lambda_{-k}'' - k^2 - t \partial_t) w^0(t) + (\lambda' - \partial_t) w'(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (28)$$

$$w_{-k}''(0) + h^{-1} \partial_t w_{-k}''(0) = 0. \quad (29)$$

При этом учтены равенство $R = 1$ и соотношение $\partial_s^2 \Phi_k = -k^2 R^{-2} \Phi_k$ для СФ (17) второй предельной задачи

$$-\partial_\varphi^2 \Phi(\varphi) = \mu \Phi(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{S}, \quad (30)$$

которая по обыкновению возникает как условие разрешимости, но благодаря вращательной симметрии области Ω предсказана заранее.

В силу выбора (27) последнее слагаемое в уравнении (28) равно нулю. Таким образом, условие разрешимости задачи (28), (29) выглядит так:

$$0 = \int_0^\infty e^{-ht} f''(t) dt = \frac{1}{2h} \left(\lambda_{-k}'' - k^2 \right) + \frac{1}{4h} \Leftrightarrow \lambda_{-k}'' = \mu_k - \frac{1}{2} := k^2 - \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Здесь μ_k — СЗ дифференциального уравнения (30) на единичной окружности.

Равенства (20), (26) и (31), (23) указывают отделенные члены асимптотических анзацев (18) и (19). СФ приобретает характер пограничного слоя, локализованного около окружности $\mathbb{S} = \partial\Omega$.

3.2. Второй случай

Пусть Ω — произвольная область, но (непостоянная) функция H имеет строгий глобальный минимум в точке $\mathbb{O}$, т.е.

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= R^{-1} + O(|s|) \quad \text{и} \quad H(s) = h^{-1} + ms^2 + O(|s|^3), \\ m &> 0, \quad H(s) > h^{-1} \quad \text{при} \quad s \in \Gamma \setminus \mathbb{O}, \quad h > 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично [21], [29], [31] в дополнение к растянутой нормальной переменной (16) выполним замену

$$s \mapsto \eta = \varepsilon^{-1/2}s \in \mathbb{R} \quad (33)$$

и примем такие асимптотические анзацы для СП:

$$\lambda_{-k}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\lambda^0 + \varepsilon^{-1}\lambda'_{-k} + \dots, \quad (34)$$

$$u_{-k}^\varepsilon(x) = \Psi_k(\eta)w^0(t, s) + \varepsilon w'_{-k}(t, \eta) + \dots. \quad (35)$$

В отличие от формул (20) положим

$$\lambda^0 = -h^2, \quad w^0(t, s) = e^{-t/H(s)}. \quad (36)$$

Согласно второй группе допущений (32) имеем

$$-\partial_t^2 w^0(t, s) + h^2 w^0(t, s) = e^{-t/H(s)} \left(H(0)^{-2} - H(s)^{-2} \right) = 2h^3 ms^2 + O(|s|^3). \quad (37)$$

В силу определения (33) верны равенства $s^2 = \varepsilon\eta^2$ и $\partial_s^2 = \varepsilon^{-1}\partial_\eta^2$. Таким образом, на следующем шаге итерационного процесса после сбора множителей при ε^{-1} в дифференциальном уравнении возникает задача

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 w'_{-k}(t, \eta) + h^2 w'_{-k}(t, \eta) &= f'(t, \eta) := \Psi_k(\eta) \left(\lambda'_{-k} + hR^{-1} \right) w^0(t, 0) + \\ &+ \left(\partial_\eta^2 \Psi_k(\eta) - 2h^3 m \eta^2 \Psi_k(\eta) \right) w^0(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (38)$$

$$w'_{-k}(0, \eta) + h^{-1} \partial_t w'_{-k}(0, \eta) = 0. \quad (39)$$

Подчеркнем, что функция w^0 из списка (36) полностью удовлетворяет краевому условию (7), и поэтому правая часть соотношения (39) — нуль. Кроме того, если точка $\mathbb{O}$ попала на вогнутый участок контура Γ , то нужна замена $R \mapsto -R = \kappa(0)^{-1}$.

Анализируя условие разрешимости задачи (38), (39), приходим к соотношениям

$$\lambda'_{-k} = -\frac{h}{R} + \mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (40)$$

где $\{\mu_k = A(2k-1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — упорядоченная последовательность СЗ уравнения гармонического осциллятора (см., например, [41])

$$-\partial_\xi^2 \Psi(\xi) + A^2 \xi^2 \Psi(\xi) = \mu \Psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

с параметром

$$A^2 = 2h^3 m > 0. \quad (42)$$

Дифференциальное уравнение (41) на вещественной оси — вторая предельная задача.

Формулы (36) и (40), а также известные выражения (см., например, [41]) для СФ $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \Psi_k(\eta)$ уравнения (41), обеспечивающие экспоненциальную скорость $o(|\eta|^{k-1} e^{-A\eta^2/2})$ их

затухания, конкретизируют отделенные члены асимптотических анзацев (34) и (35). Указанное поведение величин $w^0(t, s)$ при $t \rightarrow +\infty$ и $\Psi_k(\eta)$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$ обеспечивает сугубую локализацию СФ (35) в малой окрестности точки $\mathbb{O}$, где функция H достигает своего минимума.

3.3. Третий случай

Пусть функция H постоянна, а кривизна κ контура Γ имеет строгий глобальный (обязательно положительный) максимум в точке $\mathbb{O}$, т.е.

$$\begin{aligned} H(s) &= h^{-1}, \quad h > 0 \quad \text{и} \quad \kappa(s) = R^{-1} - ms^2 + O(|s|^3), \\ m &> 0, \quad \kappa(s) < R^{-1} \quad \text{при} \quad s \in \Gamma \setminus \mathbb{O}, \quad R > 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Сохраним замену (16) для нормальной координаты, но длине дуги около точки $\mathbb{O}$ аналогично [18], [20] предпишем такое растяжение:

$$\zeta = \varepsilon^{-1/4} s. \quad (44)$$

Соответствующим образом изменим анзацы для СЗ и СФ:

$$\lambda_{-k}^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \lambda^0 + \varepsilon^{-1} \lambda' + \varepsilon^{-1/2} \lambda''_{-k} + \dots \quad (45)$$

и

$$u_{-k}^\varepsilon(x) = \Psi_k(\zeta) \left(w^0(t) + \varepsilon w'(t) \right) + \varepsilon^{3/2} w''_{-k}(t, \zeta) + \dots \quad (46)$$

Появление дробных показателей степеней малого параметра обусловлено равенствами $s^2 = \varepsilon^{1/2} \eta^2$ и $\partial_s^2 = \varepsilon^{-1/2} \partial_\eta^2$. Начальные и первые поправочные асимптотические члены находятся по формулам (21) и (26), (27). Наконец, следующие поправки удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-\partial_t^2 w''_{-k}(t, \zeta) + h^2 w''_{-k}(t, \zeta) = \left(\lambda''_{-k} \Psi_k(\zeta) - h R^{-1} m \zeta^2 \Psi_k(\zeta) + \partial_\zeta^2 \Psi_k(\zeta) \right) w^0(t), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (47)$$

и граничному условию (29). В итоге обнаруживаем, что затухающее решение w''_{-k} задачи (47), (29) существует при условии

$$\lambda''_k = \mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (48)$$

где $\{\mu_k; \Psi_k\}$ – СП уравнения гармонического осциллятора (41) (вторая предельная задача) с переменной (44) и параметром

$$A^2 = h R^{-1} m > 0. \quad (49)$$

Отделенные члены анзацев (45) и (46) построены, причем для СФ характерна локализация около начала координат $\mathbb{O}$, точки максимума кривизны контура Γ .

4. АСИМПТОТИКА В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ СТЕКЛОВА

При построении асимптотики СП задачи (6), (13) разберем несколько ситуаций, используя в значительной степени те же асимптотические конструкции, что и в разд. 3.

4.1. Первый случай

Пусть Ω – единичный круг, и множитель H в условии Стеклова (13) – постоянная, т.е. выполнены соотношения (15). Сохраняем растяжение (16) радиальной координаты и асимптотические анзацы (18), (19), но СП (20) ищем из уравнения (21) и проистекающего от (13) граничного условия

$$\partial_t w^0(0) - h^{-1} \lambda^0 w^0(0) = 0, \quad (50)$$

которое в итоге не отличается от (22). На первом шаге итерационного процесса возникает дифференциальное уравнение (24) с граничным условием

$$\partial_t w'(0) + hw'(0) = g' := h^{-1} \lambda' w^0(0) = h^{-1} \lambda'. \quad (51)$$

Аналогично п. 3.1, из условия разрешимости задачи (24), (51)

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-ht} dt = g'$$

выводим, что

$$\lambda' = h, \quad w'(t) = te^{-ht}. \quad (52)$$

Учитывая формулы (23) для множителя Φ_k в анзаце (19), на втором шаге процесса получаем уравнение (28) с граничным условием

$$\partial_t w''_{-k}(0) + hw''_{-k}(0) = h^{-1}(\lambda''_{-k} w^0(0) + \lambda' w'(0)) = h^{-1} \lambda''_{-k}. \quad (53)$$

Задача (28), (53) имеет затухающее на бесконечности решение тогда и только тогда, когда

$$\lambda''_{-k} = \frac{1}{2} - k^2. \quad (54)$$

При ограничении (15) построение отделенных членов анзацев (18) и (19) для СП задачи (6), (13) закончено. По-прежнему во второй поправке (54) фигурирует СЗ второй предельной задачи (30), однако с обратным знаком (ср. формулу (31)). Величины λ' из (26) и (52) также приобрели разные знаки. Напомним, что в упомянутых формулах $R = 1$.

4.2. Второй случай

Пусть справедливы требования (32), т.е. в частности, функция H имеет строгий глобальный максимум в точке $\mathbb{O} \in \Gamma$. Сохраним определения (33) и (36). Тогда поправочные члены анзацев (34) и (35) находятся из задачи (38), (51), условие разрешимости которой приводит к формуле

$$\lambda'_{-k} = \frac{h}{R} - \mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (55)$$

где μ_k — СЗ уравнения гармонического осциллятора (41) с параметром (42), а в случае вогнутости контура нужна замена $R \mapsto -R$. Как и в п. 3.2, СЗ второй предельной задачи появилось в обеих формулах (40) и (55), обслуживающих краевые условия Робэна и Стеклова, однако с разными знаками.

4.3. Третий случай

При ограничении (43) вводятся растянутые координаты (16) и (44), а асимптотики СЗ и СФ задачи (6), (13) ищутся в виде (45) и (46). Первые пары членов анзаев находятся из задач (21), (50) и (24), (51), т.е. заданы равенствами (20) и (52) соответственно. Для третьих членов получаем дифференциальное уравнение (47) и граничное условие

$$\partial_t w''_{-k}(0) + hw''_{-k}(0) = h^{-1} \lambda''_{-k} \Psi_k(\zeta) w^0(0).$$

В итоге условие разрешимости указанной задачи дает соотношение

$$\lambda''_{-k} = -\mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (56)$$

в котором μ_k — СЗ второй предельной задачи (41) с параметром (49). Как и в других пунктах этого раздела, правые части формул (56) и (48) содержат разные знаки.

5. ЧАСТИЧНОЕ ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Убедимся в том, что найденные асимптотики в самом деле присущи некоторым СЗ. В пространстве Соболева $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega)$ введем норму

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \left(\alpha a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \beta \varepsilon^{-2} b^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \right)^{1/2} \quad (57)$$

и порожденное ею скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$. В случае краевого условия (7) форма a^ε взята из тождества (9) и

$$b^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2, \quad \alpha = 1, \quad \beta \geq K_\Omega^2 \left(\min_{s \in \Gamma} \{H(s)\} \right)^{-2} + 1, \quad (58)$$

но в случае краевого условия (13) форма b^ε взята из тождества (14) и

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2, \quad \beta = 1, \quad \alpha \geq K_\Omega^2 \left(\max_{s \in \Gamma} \{H(s)\} \right)^2 + 1. \quad (59)$$

При $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$ соотношение

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geq \frac{1}{2} \left(\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \right) \quad (60)$$

получается применением следового неравенства (10) и алгебраического неравенства Коши $2fg \leq f^2 + g^2$. Действительно, в случае (58) при $\varepsilon \in (0, 1]$ находим

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 &\geq \|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \beta \varepsilon^{-2} \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon^{-1} \left(\min_{s \in \Gamma} \{H(s)\} \right)^{-1} \|u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 \geq \\ &\geq \|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \beta \varepsilon^{-2} \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon^{-1} \left(\min_{s \in \Gamma} \{H(s)\} \right)^{-1} K_\Omega \left(\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \right) \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \right) + \left(\frac{\beta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2} K_\Omega^2 \left(\min_{s \in \Gamma} \{H(s)\} \right)^{-2} - \frac{1}{\varepsilon} K_\Omega \left(\min_{s \in \Gamma} \{H(s)\} \right)^{-1} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Ограничения, наложенные на величины β и ε , гарантируют положительность последнего слагаемого. В ситуации (59) неравенство (60) проверяется похожей выкладкой (см. далее (73)).

Введем непрерывный и симметричный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = b^\varepsilon(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \quad \forall u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \quad (61)$$

Этот оператор компактный, т.е. его существенный спектр состоит из единственной точки $\tau = 0$, а на проколоте замкнутом сегменте

$$[-\|\mathcal{T}^\varepsilon\|, 0) \cup (0, \|\mathcal{T}^\varepsilon\|]$$

лежит дискретный спектр (см. [42], теорема 10.1.5); здесь $\|\mathcal{T}^\varepsilon\|$ — норма оператора. В случае (58)

оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$ положительный, т.е. его СЗ располагаются выше точки $\tau = 0$. Подчеркнем, что именно различное положение спектра введенного вспомогательного оператора предопределяет разные свойства отрицательной части спектра исходных задач (см. п. 6.3).

Сравнивая определения (57)–(59) с интегральными тождествами (9) и (14), обслуживающими рассматриваемые задачи, видим, что обе задачи эквивалентны абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon \text{ в пространстве } \mathcal{H}^\varepsilon$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = (\alpha \lambda^\varepsilon + \beta \varepsilon^{-2})^{-1}. \quad (62)$$

Следующее утверждение, известное как теорема о почти “собственных значениях” (см. [25]), является непосредственным следствием спектрального разложения резольвенты (см., например, [42], гл. 6), но формулируется в используемом далее укороченном варианте.

Теорема 1. Пусть $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $t^\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ таковы, что

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon - t^\varepsilon u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: \delta^\varepsilon \in (0, |\mathbf{b}^\varepsilon|). \quad (63)$$

Тогда у оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$ есть СЗ τ^ε , удовлетворяющее неравенству $|\tau^\varepsilon - t^\varepsilon| \leq \delta^\varepsilon$.

Обоснование всех найденных асимптотических конструкций в требуемом для целей настоящей работы объеме проводится по единой схеме. Остановимся на п. 3.2, который является представительным, но порождает самые короткие формулы. Кроме того, по причине, обсуждаемой ниже в разд. 6, ограничимся выводом только промежуточных оценок точности асимптотических приближений. В последующих выкладках выражения для членов анзацев (34) и (35) не конкретизируются, мы только пользуемся полученными задачами для них и свойствами затухания.

Зафиксируем номер $k \in \mathbb{N}$ и при учете формул (58), (62) в качестве “почти собственного” значения возьмем величину

$$t_k^\varepsilon = \varepsilon^2 \left(-h^2 + \varepsilon \lambda'_{-k} + \beta \right)^{-1}, \quad (64)$$

где λ'_{-k} — поправка (40). Подчеркнем, что число β взято достаточно большим положительным, т.е. $\beta + \varepsilon \lambda'_{-k} - h^2 > 0$ и $t_k^\varepsilon > 0$. Соответствующий “почти собственный” вектор зададим равенствами

$$u_k^\varepsilon = \|w_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} w_k^\varepsilon, \quad w_k^\varepsilon(x) = \chi(x) \Psi_k(\eta) \left(w^0(t, s) + \varepsilon w_{-k}'(t, s) \right), \quad (65)$$

где w^0 — экспонента из (36), w_{-k}' — какое-то решение задачи (38), (39), условие разрешимости которой выполнено по построению, а χ — гладкая срезающая функция, равная единице в окрестности начала координат $\mathbb{O}$ и нужная для продолжения пограничного слоя вовнутрь области Ω .

Ввиду экспоненциального затухания функций w^0 , w_{-k}' и Ψ_k справедливы неравенства

$$c\varepsilon^{-1/2} \leq \|w_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \leq C\varepsilon^{-1/2}, \quad c > 0. \quad (66)$$

Оценки (66) обусловлены вытекающими из (16) и (33) соотношениями

$$\partial_n = -\varepsilon^{-1} \partial_t, \quad \partial_s = \varepsilon^{-1/2} \partial_\eta, \quad dx = \varepsilon^{3/2} \left(1 + O(\varepsilon^{1/2}) \right) dt d\eta.$$

Обработаем величину δ_k^ε , вычисленную согласно формуле (63) по “почти собственной” паре (64), (65). В силу определений (57) и (61) имеем

$$\begin{aligned} \delta_k^\varepsilon &= \|\mathcal{T}^\varepsilon u_k^\varepsilon - t_k^\varepsilon u_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \sup \left| \left\langle \mathcal{T}^\varepsilon u_k^\varepsilon - t_k^\varepsilon u_k^\varepsilon, \psi \right\rangle_\varepsilon \right| = \\ &= t_k^\varepsilon \|w_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup \left| \left(\nabla w_k^\varepsilon, \nabla \psi \right)_\Omega - \varepsilon^{-1} \left(H^{-1} w_k^\varepsilon, \psi \right)_\Gamma - \left(\varepsilon^{-2} h^2 + \varepsilon^{-1} \lambda'_{-k} \right) \left(w_k^\varepsilon, \psi \right)_\Omega \right|. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$, т.е. $\|w; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq 1$, а значит, согласно неравенству (60) верна оценка

$$\|\nabla \psi; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-2} \|\psi; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\psi; L^2(\Gamma)\|^2 \leq c. \quad (68)$$

Обработаем выражение $I^\varepsilon(\psi)$ между последними знаками модуля в соотношении (67). Применим формулу интегрирования по частям и прокоммутируем дифференциальные операторы со срезающей функцией χ . В результате получим равенство

$$\begin{aligned} I^\varepsilon(\psi) = & -\left([\Delta, \chi]\left(\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right)\right), \psi\right)_\Omega + \left(\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right), \psi \partial_n \chi\right)_\Gamma - \\ & - \left(\Delta\left(\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right)\right) - \varepsilon^{-2}\left(h^2 - \varepsilon \lambda'_{-k}\right) \Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right), \chi \psi\right)_\Omega + \\ & + \left(\partial_n\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right) - \varepsilon^{-1} H^{-1}\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right), \Psi_k \chi \psi\right)_\Gamma =: I_\chi^\varepsilon(\psi) - I_\Omega^\varepsilon(\psi) + I_\Gamma^\varepsilon(\psi). \end{aligned} \quad (69)$$

Поскольку производная $\partial_n \chi$ и коэффициенты коммутатора $[\Delta, \chi] = 2\nabla \chi \cdot \nabla + \Delta \chi$ аннулируются в фиксированной окрестности точки $\mathbb{O}$, а функции w^0 , w'_{-k} и Ψ_k затухают с экспоненциальной скоростью соответственно при $t \rightarrow +\infty$ и $\eta \rightarrow \pm\infty$, имеем

$$|I_\chi^\varepsilon(\psi)| \leq c e^{-\delta/\varepsilon}, \quad \delta > 0.$$

Последнее скалярное произведение из (69) приводим к виду

$$\begin{aligned} I_\Gamma^\varepsilon(\psi) = & -\varepsilon^{-1}\left(H \partial_t w^0 + w^0, \Psi_k H^{-1} \psi \chi\right)_\Gamma - \left(h^{-1} \partial_t w' + w', \Psi_k H^{-1} \psi \chi\right)_\Gamma - \\ & - \left(\Psi_k\left(H - h^{-1}\right) \partial_n w'_{-k}, H^{-1} \psi \chi\right)_\Gamma. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых исчезают благодаря равенствам (36) и (39). В силу экспоненциального затухания множителя Ψ_k и формулы Тейлора для H , а также оценки (68) модуль последнего слагаемого не превосходит величины

$$c \left(\varepsilon^{3/2} \int_{\mathbb{R}} \eta^2 e^{-2\delta \eta^2} d\eta \right)^{1/2} \|\psi; L^2(\Gamma)\| \leq C \varepsilon^{5/4}.$$

Положив $w_0^0(t) = w^0(t, 0)$, преобразуем выражение $I_\Omega^\varepsilon(\psi)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} I_\Omega^\varepsilon(\psi) = & \varepsilon^{-2} \left(\partial_t^2 w^0 - H^{-2} w^0, \Psi_k \psi \chi \right)_\Omega + \\ & + \varepsilon^{-1} \left(\partial_t^2 w'_{-k} - h^2 w'_{-k} + \Psi_k \left(\lambda'_{-k} - R^{-1} \partial_t \right) w_0^0 + w_0^0 \left(\partial_\eta^2 - 2m\eta^2 \right) \Psi_k, \psi \chi \right)_\Omega + \\ & + \left(\left(\Delta - \left(\partial_n^2 + \left(R^{-1} + ms^2 + nR^{-2} \right) \partial_n - \partial_s^2 \right) \right) \left(\Psi_k w^0 \right), \psi \chi \right)_\Omega + \varepsilon \left(\left(\Delta - \partial_n^2 + \varepsilon^{-1} \lambda'_{-k} \right) w'_{-k}, \psi \chi \right)_\Omega + \\ & + \left(\left(H^{-2} - h^2 - 2h^3 ms^2 \right) w^0, \Psi_k \psi \chi \right)_\Omega + \\ & + \varepsilon^{-1} \left(\Psi_k \left(\lambda'_{-k} - R^{-1} \partial_t \right) \left(w^0 - w_0^0 \right) + \left(w^0 - w_0^0 \right) \left(\partial_\eta^2 - 2m\eta^2 \right) \Psi_k, \psi \chi \right)_\Omega. \end{aligned}$$

Первые два скалярных произведения в правой части обратились в нуль согласно формулам (36) и (38). При выводе мажоранты $c\varepsilon^{5/4}$ для модулей остальных четырех скалярных произведений нужно принять во внимание представления (8), (17) оператора Лапласа, растяжение координат (16) и (33), соотношения (37) и (68), экспоненциальное затухание функций w^0 , w'_{-k} и Ψ_k , а также простую оценку

$$|w^0(t, s) - w_0^0(t)| + |\partial_t w^0(t, s) - \partial_t w_0^0(t)| \leq c s e^{-ht}.$$

Итак, теорема 1 предоставляет СЗ τ^ε оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$, для которого выполнено неравенство

$$|\tau^\varepsilon - t_k^\varepsilon| \leq c \varepsilon^{5/4}.$$

При учете формул (62) и (64) приходим к соотношению

$$|\lambda'_{-k} + \beta \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-2} (\beta + \varepsilon \lambda'_{-k} - h^2)| \leq c \varepsilon^{5/4} (\lambda'_{-k} + \beta \varepsilon^{-2}) (\beta + \varepsilon \lambda'_{-k} - h^2)$$

откуда сначала выводим формулу

$$\lambda_{-k}^\varepsilon + \beta \varepsilon^{-2} \leq \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} (\beta + \varepsilon \lambda'_{-k} - h^2) \quad \text{при} \quad c \varepsilon^{5/4} (\lambda_{-k}^\varepsilon + \beta \varepsilon^{-2}) (\beta + \varepsilon \lambda'_{-k} - h^2) \leq \frac{1}{2},$$

а затем и окончательное неравенство

$$\left| \lambda_{-k}^\varepsilon + \varepsilon^{-2} (h^2 - \varepsilon \lambda'_{-k}) \right| \leq \frac{c_k}{2} \varepsilon^{-1/4} (\beta + \varepsilon \lambda'_{-k} - h^2)^2 \leq C_k \varepsilon^{-1/4} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{-k}] \quad (70)$$

с некоторыми подходящими величинами c_k , C_k и $\varepsilon_{-k} > 0$.

Сформулируем результат, полученный для задачи с условиями Робэна в одной из рассматриваемых ситуаций, — аналогичные результаты верны как и в других ситуациях, так и для задачи с условиями Стеклова.

Теорема 2. Пусть выполнены ограничения (32), а поправочное слагаемое λ'_{-k} в анзаце (34) имеет вид (38), где $k \in \mathbb{N}$ и μ_k — СЗ уравнения гармонического осциллятора (41) с параметром (42). Тогда найдется (отрицательное) собственное значение λ_{-k}^ε задачи (6), (7) (или (9) в вариационной формулировке), для которого выполнена асимптотическая формула (70).

Как и предполагалось, мы получили утверждение с несколькими изъянами. Во-первых, нижний индекс у СЗ λ_{-k}^ε не отражает номер элемента в упорядоченной по возрастанию последовательности СЗ задачи (9). Во-вторых, теорема не предоставляет информации о соответствующей СФ. Причина кроется в том, что осталось неизвестным, все ли собственные значения из отрицательной части спектра $\mathcal{J}^\varepsilon$ найдены в п. 3.2 (заведомо не все в случае множественности глобального максимума кривизны при разных коэффициентах m в представлениях (43)). Таким образом, СЗ λ_{-k}^ε может оказаться кратным, а асимптотическая формула для СФ — малосодержательной. Для краткости формулировать и тем более доказывать половинчатые результаты не будем. Подчеркнем, что их можно получить, дополнив приведенные выше выкладки вычислениями и рассуждениями из цитированных публикаций. К вопросу о расположении отрицательных СЗ вернемся в п. 6.3.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

6.1. О гладкости

Разумеется, требование бесконечной дифференцируемости кривизны к контура Γ и множителя H в краевых условиях избыточно. Поскольку в разд. 3 и 4 были использованы только трехчленные формулы Тейлора, достаточно функциям H и κ приписать класс C^3 . Кроме того, в случае глобальных и локальных экстремумов (ср. п. 6.2) такое требование нужно только в окрестностях точек их возникновения. Вместе с тем эффекты, происходящие от потери гладкости, не изучались.

При постоянном коэффициенте $H = h^{-1}$ обсудим задачи (6), (7) и (6), (13) в прямоугольнике $\Omega = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$ со сторонами $\ell_1 \geq \ell_2 > 0$. В этом случае кривизна κ постоянная — нулевая, и поэтому на каждой из сторон прямоугольника пригодны асимптотические конструкции из п. 3.1 и п. 4.1. Вместе с тем пограничные слои, например, около стороны $(0, \ell_1) \times \{0\}$ оставляют невязки в краевых условиях на перпендикулярных ей сторонах $\{0\} \times (0, \ell_2)$ и $\{\ell_1\} \times (0, \ell_2)$, которые согласно схеме из [43] (см. также [44], [45] по поводу общих краевых задач с малым параметром при старших производных в областях с угловыми и коническими точками на границе) следует компенсировать при помощи решений следующих задач в квадранте $\mathbb{K} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_i > 0, i = 1, 2\}$:

$$-\Delta v(\xi) + h^2 v(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{K}, \quad (71)$$

$$\left((v(\xi) + h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \xi_i}(\xi)) \right) \Big|_{x_i=0} g_i(\xi_{3-i}), \quad x_{i-1} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (72)$$

Подчеркнем, что для обеих задач краевые условия на сторонах квадранта одинаковы, а их правые части g_i — затухающие при $\xi_{3-i} \rightarrow +\infty$ экспоненты. К сожалению, автору не удалось убедиться в однозначной разрешимости или указать решение однородной задачи (71), (72) в пространстве Соболева $H^1(\mathbb{K})$. Таким образом, вопрос о построении асимптотики решений сформулированных задач в прямоугольнике и других многоугольниках остается открытым. Упомянем статьи [32], [33], где установлено, что существенный спектр задачи для уравнения Лапласа в квадранте $\mathbb{K}$ с условием Стеклова

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_i}(\xi) - \varrho v(\xi) \right) \Big|_{x_i=0} = g_i(\xi_{3-i}), \quad \xi_{3-i} > 0, \quad i = 1, 2,$$

занимает луч $[1, +\infty)$, а ниже него располагается непустой дискретный спектр.

Как известно (см. [35–39] и др.), при более сложном строении иррегулярности границы конечной области спектры задач Робэна и Стеклова могут перестать быть дискретными.

6.2. О качестве экстремумов

При формальном асимптотическом анализе локализации СФ около точек минимума функции H и максимума кривизны κ последние ограничения в списках (32) и (43) не нужны: асимптотические конструкции сохраняются полностью и в случае локальных экстремумов того же свойства. При этом для обоснования асимптотик достаточно утверждение, похожее на теорему 2, так как полученные новые серии СЗ располагаются ниже основной серии, порожденной глобальными минимумом или максимумом функций H или κ соответственно.

Если же упомянутые выше экстремумы становятся нестрогими, т.е. в формулах Тейлора из списков (32) и (43) выражение $\pm ms^2 + O(|s|^3)$ заменяется выражением $\pm ms^{2q} + O(|s|^{2q+1})$ с натуральным показателем $q \geq 2$, то вместо (33) или (44) требуется выполнить замены

$$s \mapsto \eta = \varepsilon^{-1/(q+1)} s \quad \text{или} \quad s \mapsto \zeta = \varepsilon^{-1/2(q+1)} s$$

и соответствующим образом изменить анзацы для СП. В результате повторения проведенного асимптотического анализа получается уравнение

$$-\partial_\xi^2 \Psi(\xi) + A^2 \xi^{2q} \Psi(\xi) = \mu \Psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

похожее на уравнение гармонического осциллятора и также имеющее положительный дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. При этом пограничные слои около точки $\mathbb{O}$ становятся более пологими в касательном к границе направлении.

6.3. О расположении спектра на отрицательной полуоси

В задачах из [11], [12] и, конечно, из разд. 1 операторы приобретают конечномерные отрицательные возмущения, т.е. согласно максиминимальному принципу (см., например, [42], теорема 10.2.2) возможное количество паразитных СЗ задач известно заранее (одно для задач (2) при $\ell > 0$). Именно поэтому найденные асимптотические формулы (5) вполне определяют положение отрицательной части дискретного спектра. Операторная постановка задач (6), (7) и (6), (13) включает бесконечномерную отрицательную компоненту, а значит, кратность дискретного спектра на полуоси $(-\infty, 0)$ может случиться любой. Неизвестно, все ли паразитные СЗ описываются асимптотическими формулами из разд. 3, 4 и п. 6.2, а значит, выяснение отрицательной части спектра — отдельный вопрос, ответ на который является основной целью настоящей работы, но получить его на основе асимптотического анализа нельзя.

Следующая выкладка показывает, что интервал $(-\varepsilon^{-2}\mu_*, 0)$ при некотором $\mu_* > 0$ свободен от спектра задачи (6), (13). В самом деле, пусть $\lambda^\varepsilon = -\varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon$ — ее СЗ при $\mu^\varepsilon \in (0, \mu_*)$, и u^ε — соответствующая СФ. Согласно интегральному тождеству (14) и следовому неравенству (10) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon \left(\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon \left(Hu^\varepsilon, u^\varepsilon \right)_\Gamma \right) \geq \|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \\ &+ \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon \left(\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon \max_{s \in \Gamma} H(s) \left(\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \right) \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \right) \geq \\ &\geq \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \left(1 - \varepsilon K_\Omega \max_{s \in \Gamma} H(s) - \frac{1}{4}\mu^\varepsilon K_\Omega^2 \left(\max_{s \in \Gamma} H(s) \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Посредством выбора чисел $\mu_* > 0$ и $\varepsilon_* > 0$ последний сомножитель при квадрате $L^2(\Omega)$ -нормы функции u^ε можно сделать положительным при $\mu^\varepsilon \in (0, \mu_*)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, и прийти тем самым к противоречию. В итоге видим, что паразитные СЗ удалены от положительной полуоси на заметное расстояние, превосходящее $\varepsilon^{-2}\mu_*$.

К сожалению, аналогичное утверждение о спектре задачи (6), (7) неверно, но автор не смог найти в ее спектре отрицательное СЗ порядка $\varepsilon^{-\gamma}$ при $\gamma \in [0, 2)$. Иными словами, асимптотическое поведение СЗ около верхнего конца интервала $(-\varepsilon^{-2}\mu_+, 0)$ осталось неизученным, хотя понятно, что ввиду неограниченного возрастания кратности отрицательной части спектра при уменьшении параметра ε происходит миграция СЗ с положительной полуоси вниз, и нуль становится СЗ бесконечное число раз при $\varepsilon \rightarrow +0$. Вместе с тем посредством аналогичной (73) выкладки для СФ u^ε уравнения (6) с условиями Робэна (7) нетрудно убедиться в отсутствии спектра на луче $(-\infty, -\varepsilon^{-2}\mu_+)$ с некоторым $\mu_+ > 0$. Для $\lambda^\varepsilon = -\varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon$ из интегрального тождества (9) выводим соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega) \right)^2 - \varepsilon^{-1} \left(H^{-1} u^\varepsilon, u^\varepsilon \right)_\Gamma + \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \geq \\ &\geq \varepsilon^{-2} \|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \left(\mu^\varepsilon - \frac{1}{4} K_\Omega^2 \left(\max_{s \in \Gamma} H(s) \right)^{-2} - \varepsilon K_\Omega \left(\max_{s \in \Gamma} H(s) \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

При подходящих $\mu_+ > 0$ и $\varepsilon_+ > 0$ правая часть формулы (74) становится положительной для $\mu^\varepsilon > \mu_+$ и $\varepsilon < \varepsilon_+$, что действительно невозможно.

Обнаруженное расхождение в строении отрицательных частей спектров задач Робэна и Стеклова вполне согласуется с обнаруженными в разд. 4 разным поведением при $\varepsilon \rightarrow +0$ членов анзацев (18), (34) и (45): асимптотические поправки в случае краевых условий (7) или (13) отличаются знаками, т.е. при возрастании номера k стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$ соответственно.

6.4. Многомерные области

В случае $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, известны главный (см. [14]) и поправочный (см. [17]) члены асимптотического разложения отрицательных СЗ уравнения (6) с условием Робэна (7), причем под R^{-1} в формуле (26) нужно понимать сумму главных кривизн поверхности. Для задачи Стеклова (6), (13) какие-либо результаты не публиковались. Впрочем, нетрудно предсказать, что асимптотические анзацы в целом сохраняются, но обыкновенное дифференциальное уравнение гармонического осциллятора (41) превращается в уравнение с частными производными

$$-\Delta_y \Psi(y) + Q(y) \Psi(y) = \mu \Psi(y), \quad y = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad (75)$$

в котором Q — положительно-определенная квадратичная форма, которая задается главными (положительными) кривизнами границы или строгим минимумом функции H нескольких переменных. Спектр уравнения (75) конечно же остается дискретным.

Приемы асимптотического анализа, представленные в разд. 3 и 4, предсказывают любопытные анзацы для СП в трехмерном эллипсоиде с двумя одинаковыми осями и одной меньшей или в тороидальном множестве с круговой направляющей и образующей в форме эллипса.

7. ДОПОЛНЕНИЕ: АСИМПТОТИКА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЗ

В области Ω^ε , ограниченной контуром (11), который есть не что иное как регулярное возмущение контура Γ , рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\Delta U^\varepsilon(x) = \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad (76)$$

с краевым условием Дирихле

$$U^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon, \quad (77)$$

или условием Неймана

$$\partial_n U^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon. \quad (78)$$

Вне зависимости от знака профильной функции H в определении (11) границы $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$ асимптотику положительных СЗ задач (76), (77) и (76), (78) ищем в виде

$$\Lambda^\varepsilon = \lambda^0(x) + \varepsilon\lambda' + \tilde{\Lambda}^\varepsilon, \quad (79)$$

а соответствующим СФ припишем разложение

$$U^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u'(x) + \tilde{U}^\varepsilon(x). \quad (80)$$

Здесь $\{\lambda^0, u^0\}$ – СП предельной ($\varepsilon = 0$) задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u^0(x) &= \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \Omega, \\ u^0(x) &= 0, \quad x \in \Gamma \quad (\text{или } \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma). \end{aligned} \quad (81)$$

Приведем асимптотические формулы для простого СЗ λ^0 , а соответствующую СФ нормируем равенством $\|u^0; L^2(\Omega)\| = 1$.

7.1. Условие Дирихле

Благодаря аналогичной (12) формуле Тейлора для (гладкой) СФ

$$u^0(x) \Big|_{n=-\varepsilon H(s)} = 0 - \varepsilon H(s) \partial_n u^0(0, s) + O(\varepsilon^2)$$

получаем, что поправочные члены в анзацах (79) и (80) находятся из дифференциального уравнения

$$-\Delta u'(x) - \lambda^0 u'(x) = \lambda' u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (82)$$

с краевым условием

$$u'(x) = H(s) \partial_n u^0(0, s), \quad x \in \Gamma. \quad (83)$$

Условие разрешимости появившейся задачи превращается в равенство

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda' \|u^0; L^2(\Omega)\|^2 = - \int_{\Omega} u^0(x) (\Delta u'(x) + \lambda^0 u'(x)) dx = \\ &= \int_{\Gamma} \partial_n u^0(0, s) u'(0, s) ds_x = \int_{\Gamma} H(s) |\partial_n u^0(0, s)|^2 ds_x, \end{aligned} \quad (84)$$

а соотношение (79) с остатком $\tilde{\Lambda}^\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ – в формулу Адамара (см. [1]). Оценки остатков в разложениях (79) и (80) – классический результат (см., например, [46], гл. 7, § 6).

Асимптотика положительных СЗ задачи (6), (7) ищется в виде

$$\lambda^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon\lambda' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (85)$$

причем в соответствии с краевым условием Робэна поправка λ' определяется условием разрешимости (84) той же задачи (82), (83), а значит, отделенные члены асимптотик (79) и (85) совпадают.

7.2. Условие Неймана

При учете уравнения и второго краевого условия в задаче (81), а также соотношения (8) для оператора Лапласа формула Тейлора

$$\partial_n u^0(x) \Big|_{n=-\varepsilon H(s)} = 0 - \varepsilon H(s) \partial_n^2 u^0(0, s) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon H(s) \lambda^0 u^0(0, s) + O(\varepsilon^2)$$

замыкает уравнение (82) краевым условием

$$\partial_n u'(x) = -H(s) \lambda^0 u^0(0, s), \quad x \in \Gamma. \quad (86)$$

Условие разрешимости задачи (82), (86) принимает вид

$$\lambda' = \lambda' \|u^0; L^2(\Omega)\|^2 = \int_{\Gamma} u^0(0, s) \partial_n u'(0, s) ds_x = -\lambda^0 \int_{\Gamma} H(s) |u^0(0, s)|^2 ds_x.$$

Точно такая же формула для поправочного асимптотического члена в анзаце (79) получается в результате простого асимптотического анализа регулярно возмущенной задачи (6), (13) со спектральным условием Стеклова. Оценки остатков выводятся с помощью стандартных схем (см., например, [46], гл. 7, и [47], гл. 7).

Автор благодарен рецензенту за полезные советы, позволившие значительно улучшить изложение материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hadamard J.* Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées // 1968. Œuvres V. 2. P. 515–631.
2. *Sokolowski J., Zolésio J.-P.* Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis. Springer Ser. Comput. Math. V. 16. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
3. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Shapes and Geometries. Analysis, Differential Calculus, and Optimization. Adv. Design and Control, V. 4. Philadelphia: Soc. Indust. Appl. Math. (SIAM), 2001.
4. *Kawohl B.* Some nonconvex shape optimization problems. In: Optimal Shape Design (Tróia, 1998). Lect. Not. Math. V. 1740. Berlin: Springer, 2000. P. 7–46.
5. *Henrot A.* Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators. Front. Math. Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.
6. *Kozlov V.* On the Hadamard formula for nonsmooth domains // J. Diff. Equat. 2006. V. 230. P. 532–555.
7. *Kozlov V.A., Nazarov S.A.* On the Hadamard formula for second order systems in non-smooth domains // Comm. Part. Different. Equat. 2012. V. 37. P. 901–933.
8. *Назаров С.А.* Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 3. С. 291–320.
9. *Назаров С.А.* Асимптотическое моделирование упругих тел с поврежденными или упрочненными поверхностями // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 611–616.
10. *Назаров С.А.* Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72. № 3. С. 103–158.
11. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов // Тр. Санкт-Петербург. матем. общества. 1998. Т. 6. С. 151–212.
12. *Назаров С.А.* Моделирование сингулярно возмущенной спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач // Функци. анализ и его приложения. 2015. Т. 49. № 1. С. 31–48.
13. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. *Levitin M., Parnowski L.* On the principal eigenvalue of a Robin problem with a large parameter // Math. Nachr. 2008. V. 281. № 2. P. 272–281.
15. *Pankrashkin K.* On the asymptotics of the principal eigenvalue problem for a Robin problem with a large parameter in a planar domain // Nanosystems: Phys., Chem., Math. 2013. V. 4. № 4. P. 474–483.
16. *Exner P., Minakov A., Parnowski L.* Asymptotic eigenvalue estimates for a Robin problem with a large parameter // Port. Math. 2014. V. 71. № 2. P. 141–156.
17. *Pankrashkin K., Popoff N.* An effective Hamiltonian for the eigenvalue asymptotics of the Robin Laplacian with a large parameter // J. Math. Pures Appl. 2016. V. 106. P. 615–650.
18. *Helfffer B., Kachmar A.* Eigenvalues for the Robin Laplacian in domains with variable curvature // Trans. Am. Math. Soc. 2017. V. 369. P. 3253–3287.

19. Helffer B., Kachmar A. Semi-classical edge states for the Robin Laplacian // *Mathematika*. 2022. V. 68. P. 454–485.
20. Камоцкий И.В., Назаров С.А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // *Пробл. матем. анализа*. Вып. 19. Новосибирск: Науч. книга, 1999. С. 105–148.
21. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // *Israel J. Math.* 2009. V. 170. P. 337–354.
22. Назаров С.А. Асимптотика отрицательных собственных чисел задачи Дирихле при плотности переменного знака // *Тр. семинара им. И.Г. Петровского*. Вып. 27. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 235–275.
23. Nazarov S.A., Pankratova I.L., Piatnitski A.L. Homogenization of the spectral problem for periodic elliptic operators with sign-changing density function // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 2011. V. 200. № 3. P. 747–788.
24. Chesnel L., Claeys X., Nazarov S.A. Spectrum of a diffusion operator with coefficient changing sign over a small inclusion // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2015. V. 66. P. 2173–2196.
25. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи матем. наук*. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
26. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // *Успехи матем. наук*. 1960. Т. 15. № 3. С. 3–80.
27. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями // *Успехи матем. наук*. 1960. Т. 15. № 4. С. 27–95.
28. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of narrow periodic waveguides // *Russ. J. Math. Phys.* 2008. V. 15. № 2. P. 238–242.
29. Borisov D., Freitas P. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // *Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire*. 2009. V. 26. № 2. P. 547–560.
30. Borisov D., Freitas P. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // *J. Funct. Anal.* 2010. V. 258. № 3. P. 893–912.
31. Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J. Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2016. V. 368. № 7. P. 4787–4829.
32. Pankrashkin K. On the Robin eigenvalues of the Laplacian in the exterior of a convex polygon // *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 2015. V. 6. P. 46–56.
33. Pankrashkin K. On the discrete spectrum of Robin Laplacians in conical domains // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2016. V. 11. № 2. P. 100–110.
34. Khalile M., Ourmières-Bonafos T., Pankrashkin K. Effective operators for Robin eigenvalues in domains with corners // *Ann. Institut Fourier*. 2020. V. 70. P. 2215–2301.
35. Daners D. Robin boundary problems on arbitrary domains // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 352. № 9. P. 4207–4236.
36. Daners D. A Faber–Krahn inequality for Robin problems in any space dimension // *Math. Ann.* 2006. V. 335. № 4. P. 767–785.
37. Назаров С.А., Таскинен Я. О спектре задачи Стеклова в области с пиком // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2008. Вып. 1. С. 56–65.
38. Nazarov S.A., Taskinen J. Spectral anomalies of the Robin Laplacian in non-Lipschitz domains // *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*. 2013. V. 20. P. 27–90.
39. Nazarov S.A., Taskinen J. “Blinking eigenvalues” of the Steklov problem generate the continuous spectrum in a cuspidal domain // *J. Different. Equat.* 2020. V. 269. № 4, 5. P. 2774–2797.
40. Nazarov S.A., Popoff N., Taskinen J. Plummeting and blinking eigenvalues of the Robin Laplacian in a cuspidal domain // *Proceed. Royal Soc. Edinburgh: Sect. A Math.* 2019. P. 1–23.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974. 752 с.
42. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 264 с.
43. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения уравнения $\mu^2 \Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области // *Дифференц. уравнения*. 1973. Т. 9. № 9. С. 1654–1660.
44. Назаров С.А. Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 1. Задача в конусе // *Сиб. матем. журн.* 1981. Т. 22. № 4. С. 142–163.
45. Назаров С.А. Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 2. Задача в ограниченной области // *Сиб. матем. журн.* 1981. Т. 22. № 5. С. 132–152.
46. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
47. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

© 2023 г. К. Б. Сабитов^{1,2,*}¹ 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия² 453103 Стерлитамак, пр-т Ленина, 49, Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологии, Россия

*e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

Поступила в редакцию 07.01.2023 г.
Переработанный вариант 25.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Приводятся постановки обратных задач для уравнения Гельмгольца по отысканию его правой части с дополнительным интегральным условием типа Самарского–Ионкина и обоснование их корректности в смысле Адамара в классе регулярных решений. Единственность решений поставленных задач доказана на основании интегральных тождеств. Методами разделенных переменных и интегральных уравнений решения задач построены в явном виде. Библ. 19.

Ключевые слова: уравнение эллиптического типа, обратные задачи, интегральное условие, метод интегральных тождеств, единственность, существование, ряд, интегральное уравнение, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466923070141, EDN: VTCYGA

1. ВВЕДЕНИЕ

В области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, 0 < y < \beta\}$ рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$\mathcal{L}u(x, y) \equiv u_{xx} + u_{yy} - b(x, y)u = F(x, y) = f(x)g(y), \quad (1)$$

где $b(x, y)$ – заданная в области D функция, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти пару функций $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D), \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l), \quad (3)$$

$$\mathcal{L}u(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, \beta) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

$$\int_0^\beta u(x, y)g(y)dy = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h(0) = h(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, запись $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ означает, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(0, l)$ и интегрируема по модулю на $[0, l]$.

Задача 2. Найти функции $u(x, y)$ и $g(y)$, удовлетворяющие условиям (2), (4)–(6) и, кроме того,

$$g(y) \in C(0, \beta) \cap L(0, \beta), \quad (8)$$

$$\int_0^l u(x, y) f(x) dx = \chi(y), \quad 0 \leq y \leq \beta, \quad (9)$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ и $\chi(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h(0) = h(l) = \varphi(0) = \varphi(l) = 0$,

$$\int_0^l h(x) f(x) dx = \chi(\beta), \quad \int_0^l \varphi(x) f(x) dx = \chi(0). \quad (10)$$

Целью настоящей работы являются постановка обратных задач для эллиптического уравнения по определению его правой части в прямоугольной области и обоснование их корректности в классе классических решений. В известных монографиях [1–10] и других работах единственность решения обратных задач устанавливается исходя из построения явного решения прямой задачи с дальнейшим применением метода последовательных приближений или с применением теории прямых и обратных спектральных задач, или переходя к прямой задаче для более сложного дифференциального уравнения с нагруженными слагаемыми (см. [11]).

В настоящей статье, следуя работе [12], где впервые для эволюционных уравнений установлены теоремы единственности и устойчивости решений обратных задач определения правой части по финальному наблюдению, методом интегральных тождеств установлены теоремы единственности решения обратных задач 1 и 2 для уравнения (1) по определению правой части и в случае, когда $b(x, y) = \text{const}$, методами разделения переменных и интегральных уравнений Фредгольма решения поставленных задач построены в явном виде.

Отметим, что в [13] для операторного уравнения второго порядка

$$u''(t) - Au(t) = \Phi(t)p, \quad 0 < t < T, \quad (11)$$

что соответствует эллиптическому случаю, изучается обратная задача по определению пары $(u(t), p)$ по следующим граничным условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(T) = u_2, \quad (12)$$

где $u(t) \in C^2([0, T]; H)$, $p \in H$, H – банаховое пространство, A – оператор, который действует в H , линейен, замкнут и имеет плотную область определения $D(A)$, $\Phi(t)$ – известная функция. Здесь при условии, когда H – гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$, $\Phi(0) \neq 0$, и функция $\Phi(t)$ не меняет знака на $[0, T]$. Доказано, что обратная задача (11) и (12) имеет единственное решение в указанном выше классе.

В [14] изучена такая же обратная задача, где вместо $u(T) = u_2$ дополнительным условием является значение решения во внутренней точке интервала $(0, T)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

В [15], [16] изучена обратная задача для эллиптических уравнений по определению их правой части в более общей постановке, чем задача 1. Здесь в качестве дополнительного условия задан след решения прямой задачи на отрезке внутри прямоугольной области. В [15] для уравнения Пуассона доказаны теоремы существования и единственности при достаточно жестких ограничениях на заданные функции и прямоугольную область. В [16] для уравнения Гельмгольца показана справедливость альтернативы Фредгольма задачи типа 1. В указанных выше работах (и других) решения поставленных задач не построены в явном виде в классе функций (2) и (3).

Введение дополнительных интегральных условий в виде (7) и (9) типа Самарского–Ионкина (см. [17]) вместо финального условия позволяет установить напрямую единственность решения и построить решение в явном виде.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ 1 И 2

Теорема 1. Пусть $b(x, y) \in C(D) \cap L(D)$, $b(x, y) \geq 0$ в D и $g(y) \in C(0, \beta) \cap L(0, \beta)$ и $g(y) \neq 0$ на $(0, \beta)$. Тогда если существует решение обратной задачи (2)–(7), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ и $f(x)$ — решение однородной задачи 1, где $\varphi(x) = h(x) = \psi(x) \equiv 0$. В области D рассмотрим тождество

$$u\mathcal{L}u \equiv (uu_x)_x + (uu_y)_y - u_x^2 - u_y^2 - b(x, y)u^2 = uf(x)g(y). \quad (13)$$

Проинтегрируем тождество (13) по области $D_{\varepsilon, \delta} = \{(x, y) | \varepsilon < x < l - \varepsilon, \delta < y < \beta - \delta\}$, где ε и δ — достаточно малые положительные постоянные. Затем, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$, получим

$$\int_D (u_x^2 + u_y^2 + b(x, y)u^2) dx dy = - \int_D uf(x)g(y) dx dy = - \int_0^l f(x) \left(\int_0^\beta u(x, y)g(y) dy \right) dx = 0. \quad (14)$$

Отсюда при условии $b(x, y) \geq 0$ в D следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D . Тогда из уравнения (1) при $g(y) \neq 0$ уже вытекает, что $f(x) \equiv 0$.

Теорема 2. Пусть $b(x, y) \in C(D) \cap L(D)$, $b(x, y) \geq 0$ в D и $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ и $f(x) \neq 0$ на $(0, l)$. Тогда если существует решение обратной задачи 2, то оно единственно.

Справедливость данного утверждения следует из равенства (14), где правая часть имеет вид

$$- \int_D uf(x)g(y) dy = - \int_0^\beta g(y) \left(\int_0^l u(x, y)f(x) dx \right) dy = 0.$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В дальнейшем установим теоремы существования решений задач 1 и 2, когда $b(x, y) = \text{const} = b \geq 0$. В постановках обратных задач 1 и 2 прямой задачей является задача Дирихле, т.е. задача (2), (4)–(6). В [18] методом разделения переменных доказана следующая

Теорема 3. Если $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$, $\varphi(x)$, $h(x) \in C^3[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(l) = \varphi'(l) = 0$, $h(0) = h'(0) = h(l) = h'(l) = 0$, $F(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C_x^1(\bar{D})$, $F(0, y) = F(l, y) = 0$, $0 \leq y \leq \beta$, то существует единственное и устойчивое решение задачи (2), (4)–(6) и оно определяется формулой

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x), \quad (15)$$

где

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{1}{2\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} [F_{1k}(0) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + F_{2k}(\beta) \text{sh } \lambda_k y] - \frac{1}{2\lambda_k} (F_{1k}(y) + F_{2k}(y)), \quad (16)$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l},$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \quad h_k = \int_0^l h(x) X_k(x) dx,$$

$$F_{1k}(y) = \int_y^\beta F_k(t) e^{-\lambda_k(t-y)} dt, \quad F_{2k}(y) = \int_0^y F_k(t) e^{-\lambda_k(y-t)} dt,$$

$$F_k(y) = \int_0^l F(x, y) X_k(x) dx, \quad \lambda_k^2 = \mu_k^2 + b.$$

В дальнейшем будем считать, что $\mu_k^2 + b > 0$ при всех $k \geq 1$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторого номера k_0 , все $\mu_k^2 + b > 0$.

При $F(x, y) = f(x)g(y)$ функции $F_{1k}(y)$ и $F_{2k}(y)$ принимают вид

$$F_{1k}(y) = f_k g_{1k}(y), \quad F_{2k}(y) = f_k g_{2k}(y),$$

$$g_{1k}(y) = \int_y^\beta g(t) e^{-\lambda_k(t-y)} dt, \quad g_{2k}(y) = \int_0^y g(t) e^{-\lambda_k(y-t)} dt, \quad (17)$$

$$f_k = \int_0^l f(x) X_k(x) dx.$$

Теперь функцию (15) удовлетворим нелокальному условию (7):

$$\int_0^\beta \sum_{k=1}^\infty u_k(y) X_k(x) g(y) dy = \sum_{k=1}^\infty X_k(x) \int_0^\beta g(y) u_k(y) dy = \psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \psi_k X_k(x), \quad (18)$$

где

$$\psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx.$$

Тогда из равенства (18) получим равенство для нахождения коэффициентов f_k :

$$\int_0^\beta g(y) u_k(y) dy = \psi_k, \quad (19)$$

где функция (16) с учетом (17) примет вид

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{2\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} (g_{1k}(0) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + g_{2k}(\beta) \text{sh } \lambda_k y) -$$

$$- \frac{f_k}{2\lambda_k} (g_{1k}(y) + g_{2k}(y)). \quad (20)$$

Используя формулу (20), вычислим интеграл

$$\int_0^\beta g(y) u_k(y) dy = \frac{\varphi_k}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) dy + \frac{h_k}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k y dy +$$

$$+ \frac{f_k}{2\lambda_k} \left[\frac{g_{1k}(0)}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) dy + \frac{g_{2k}(\beta)}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k y dy - \int_0^\beta g(y) [g_{1k}(y) + g_{2k}(y)] dy \right]. \quad (21)$$

Если $g(y) \equiv 1$, то равенство (21) принимает вид

$$\int_0^\beta u_k(y) dy = \varphi_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} +$$

$$+ \frac{f_k}{2\lambda_k} \left[g_{1k}(0) \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + g_{2k}(\beta) \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} - \frac{2}{\lambda_k} \left(\beta - \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k} \right) \right] =$$

$$= \varphi_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k} \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k} - \beta \right] =$$

$$= \varphi_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \left[\frac{2(\text{ch } \lambda_k \beta - 1)}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} - \beta \right] =$$

$$= (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \left(\frac{2}{\lambda_k} \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{1 + e^{-\lambda_k \beta}} - \beta \right). \quad (22)$$

С учетом вычисленного интеграла (22) равенство (19) примет вид

$$\frac{f_k}{\lambda_k^2} \left(\frac{2}{\lambda_k} \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{1 + e^{-\lambda_k \beta}} - \beta \right) = \psi_k - (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})}. \quad (23)$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты

$$f_k = \frac{\lambda_k^2}{\Delta_k(\beta)} \left[\psi_k - (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right], \quad (24)$$

где

$$\Delta_k(\beta) = \frac{2}{\lambda_k} \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{1 + e^{-\lambda_k \beta}} - \beta. \quad (25)$$

В силу теоремы единственности выражение (25) не равно нулю при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $\varphi(x) \equiv h(x) = \psi(x) \equiv 0$. Тогда все $\varphi_k = h_k = \psi_k \equiv 0$. Если при некотором $k = m \in \mathbb{N}$ выражение $\Delta_m(\beta) = 0$, то из равенства (23) следует, что f_m — произвольная постоянная, вообще говоря, не равная нулю. Тогда обратная задача 1 с нулевыми граничными условиями при $g(y) = 1$ имеет ненулевое решение

$$f(x) = f_m \sin \frac{\pi m}{l} x,$$

$$u(x, y) = \frac{f_m}{2\lambda_m^2} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_m \beta}}{\text{sh } \lambda_m \beta} (\text{sh } \lambda_m (\beta - y) + \text{sh } \lambda_m y) + e^{-\lambda_m (\beta - y)} + e^{-\lambda_m y} - 2 \right] \sin \frac{\pi m}{l} x.$$

Далее, найденные значения f_k по формуле (24) подставим в (20). Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_k(y) = & \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k (\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{\lambda_k}{2\Delta_k(\beta)} \left[\psi_k - (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right] \times \\ & \times \left[g_{1k}(0) \frac{\text{sh } \lambda_k (\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + g_{2k}(\beta) \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} - g_{1k}(y) - g_{2k}(y) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку при $g(y) = 1$

$$g_{1k}(0) = g_{2k}(\beta) = \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k}, \quad g_{1k}(y) = \frac{1 - e^{-\lambda_k (\beta - y)}}{\lambda_k}, \quad g_{2k}(y) = \frac{1 - e^{-\lambda_k y}}{\lambda_k},$$

то равенство (26) примет вид

$$u_k(y) = \varphi_k \left[\frac{\text{sh } \lambda_k (\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} - \frac{\omega_k(y)}{\Delta_k(\beta) \lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right] + h_k \left[\frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} - \frac{\omega_k(y)}{2\Delta_k(\beta) \lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right] + \psi_k \frac{\omega_k(y)}{\Delta_k(\beta)}, \quad (27)$$

где

$$\omega_k(y) = \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\text{sh } \lambda_k \beta} (\text{sh } \lambda_k (\beta - y) + \text{sh } \lambda_k y) + e^{-\lambda_k (\beta - y)} + e^{-\lambda_k y} - 2. \quad (28)$$

При этом функция $\omega_k(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega_k(0) = \omega_k(\beta) = 0, \quad \int_0^\beta \omega_k(y) dy = 2\Delta_k(\beta), \quad \omega_k''(y) = \lambda_k^2 (\omega_k(y) + 2).$$

Теперь решение обратной задачи 1 определяется рядами

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x), \quad (29)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \quad (30)$$

где $u_k(y)$ и f_k определены соответственно формулами (27) и (24).

Для коэффициентов $u_k(y)$ и f_k справедливы следующие оценки.

Лемма 1. При любом $y \in [0, \beta]$ имеют место оценки

$$|u_k(y)| \leq C_1 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|), \quad (31)$$

$$|u_k''(y)| \leq C_2 \lambda_k^2 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|), \quad (32)$$

$$|f_k(y)| \leq C_3 \lambda_k^2 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|),$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (27) и (24) в силу ограниченности выражений (25) и (28):

$$0 < C_4 < |\Delta_k(\beta)| \leq C_5, \quad |\omega_k(y)| \leq C_6.$$

На основании леммы 1 ряд (29) и его производные до второго порядка включительно на замкнутой области $\bar{D}$ и ряд (30) на $[0, l]$ мажорируются числовым рядом

$$C_7 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|). \quad (33)$$

Теорема 4. Если $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$, $\varphi(x), h(x), \psi(x) \in C^3[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0$, $h(0) = h''(0) = h(l) = h''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi''(0) = \psi(l) = \psi''(l) = 0$, $g(y) \equiv 1$, то существует единственное решение обратной задачи (2)–(7) и оно определяется суммами рядов (29) и (30) при этом $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ и $f(x) \in C[0, l]$.

Доказательство. В силу наложенных на функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $\psi(x)$ условий коэффициенты φ_k , h_k и ψ_k их разложения в ряд Фурье по системе $X_k(x)$ на сегменте $[0, l]$ можно представить в виде

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad h_k = \frac{h_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(3)}}{\mu_k^3},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(3)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \mu_k x dx, & h_k^{(3)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h'''(x) \cos \mu_k x dx, \\ \psi_k^{(3)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'''(x) \cos \mu_k x dx, \end{aligned}$$

при этом справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 \leq \|\varphi'''\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |h_k^{(3)}|^2 \leq \|h'''\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 \leq \|\psi'''\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Тогда числовой ряд (33) мажорируется сходящимся рядом

$$C_8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(3)}| + |h_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}|).$$

В силу этого ряды (29) и (30) сходятся абсолютно и равномерно на $\bar{D}$ и $[0, l]$ соответственно, при этом ряд (29) допускает почленное дифференцирование дважды по x и y в $\bar{D}$. Покажем, что эти ряды удовлетворяют уравнению (4):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x, y) &\equiv u_{xx} + u_{yy} - bu = - \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 u_k(y) X_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k''(y) X_k(x) - b \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y) X_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[u_k''(y) - (\mu_k^2 + b) u_k(y) \right] X_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k X_k(x) = f(x), \end{aligned}$$

так как на основании формулы (20)

$$u_k''(y) - (\mu_k^2 + b)u_k(y) = f_k.$$

Устойчивость решения задачи 1 от заданных функций $\varphi(x)$, $h(x)$ и $\psi(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 5. Для решения задачи (2)–(7) при $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$ имеют место оценки

$$\|u(x, y)\|_{L_2(0, l)} \leq C_9 (\|\varphi\|_{L_2(0, l)} + \|h\|_{L_2(0, l)} + \|\psi\|_{L_2(0, l)}), \quad 0 \leq y \leq \beta, \quad (34)$$

$$\|f(x)\|_{L_2(0, l)} \leq C_{10} (\|\varphi''\|_{L_2(0, l)} + \|h''\|_{L_2(0, l)} + \|\psi''\|_{L_2(0, l)}), \quad (35)$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{11} (\|\varphi'\|_{C[0, l]} + \|h'\|_{C[0, l]} + \|\psi'\|_{C[0, l]}), \quad (36)$$

$$\|f(x)\|_{C[0, l]} \leq C_{12} (\|\varphi'''\|_{C[0, l]} + \|h'''\|_{C[0, l]} + \|\psi'''\|_{C[0, l]}). \quad (37)$$

Доказательство. В силу оценки (31) на основании формулы (29) имеем

$$\|u(x, y)\|_{L_2(0, l)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leq 3C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^2 + h_k^2 + \psi_k^2) \leq 3C_1^2 (\|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2 + \|h\|_{L_2(0, l)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0, l)}^2).$$

Отсюда следует оценка (34).

Пусть (x, y) — произвольная точка из области $\bar{D}$. Тогда из формулы (29) с учетом оценки (31) будем иметь

$$|u(x, y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|). \quad (38)$$

Далее, используя представления

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad h_k = \frac{h_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k},$$

где

$$\varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x) \cos \mu_k x dx, \quad h_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h'(x) \cos \mu_k x dx,$$

$$\psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x dx,$$

и неравенство Коши—Буняковского из (38), получим

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \tilde{C}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} |\varphi_k^{(1)}| + \frac{1}{k} |h_k^{(1)}| + \frac{1}{k} |\psi_k^{(1)}| \right) \leq \\ &\leq \tilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq \tilde{C}_2 (\|\varphi'\|_{L_2(0, l)} + \|h'\|_{L_2(0, l)} + \|\psi'\|_{L_2(0, l)}) \leq C_{11} (\|\varphi'\|_{C[0, l]} + \|h'\|_{C[0, l]} + \|\psi'\|_{C[0, l]}), \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_i$ — здесь и далее положительные постоянные. Тем самым установлена справедливость оценки (36).

Аналогично доказываются оценки (35) и (37).

Если $g(y) \not\equiv 1$, то в условиях теоремы 1 функция $g(y) \neq 0$ на $(0, \beta)$. Поэтому при $g(y) \in C[0, \beta]$ можно считать, что $g(y) \geq g_0 = \text{const} > 0$. В этом случае функции $g_{1k}(y)$ и $g_{2k}(y)$ можно представить в виде

$$g_{1k}(y) = g(\xi) \int_y^\beta e^{-\lambda_k(t-y)} dt = g(\xi) \frac{1 - e^{-\lambda_k(\beta-y)}}{\lambda_k},$$

$$g_{2k}(y) = g(\eta) \int_0^y e^{-\lambda_k(y-t)} dt = g(\eta) \frac{1 - e^{-\lambda_k y}}{\lambda_k},$$

где $y < \xi < \beta$, $0 < \eta < y$. Тогда аналогично устанавливается справедливость теорем 4 и 5.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Далее докажем существование и устойчивость решения задачи 2. Решение задачи Дирихле (15) удовлетворим нелокальному условию (9). В результате получим

$$\int_0^l u(x, y) f(x) dx = \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) f_k = \chi(y). \quad (39)$$

В равенство (39) подставим выражение (20). Предварительно его преобразуем к виду

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{2\lambda_k} \int_0^\beta g(t) E_k(t, y) dt, \quad (40)$$

где

$$E_k(t, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda_k t} \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + e^{-\lambda_k(\beta-t)} \text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} - e^{-\lambda_k(y-t)}, & 0 \leq t \leq y, \\ \frac{e^{-\lambda_k t} \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + e^{-\lambda_k(\beta-t)} \text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} - e^{-\lambda_k(t-y)}, & t \geq y. \end{cases}$$

Тогда равенство (39) принимает вид

$$\int_0^\beta g(t) H(t, y) dt = d(y), \quad (41)$$

где

$$H(t, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^2}{2\lambda_k} E_k(t, y),$$

$$d(y) = \chi(y) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} \right),$$

т.е. относительно неизвестной функции $g(y)$ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода (41), которое трудно разрешимо.

В силу наложенных условий относительно функций $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ в теореме 3 при исследовании прямой задачи Дирихле ядро $H(t, y)$ и правая часть $d(y)$ уравнения (39) дважды непрерывно дифференцируемы по y в областях определения.

Попытаемся получить относительно $g(y)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Для этого дважды продифференцируем равенство (20):

$$u_k''(y) = \lambda_k^2 \left(\varphi_k \frac{\operatorname{sh} \lambda_k(\beta - y)}{\operatorname{sh} \lambda_k \beta} + h_k \frac{\operatorname{sh} \lambda_k y}{\operatorname{sh} \lambda_k \beta} \right) + \frac{\lambda_k f_k}{2 \operatorname{sh} \lambda_k \beta} (g_{1k}(0) \operatorname{sh} \lambda_k(\beta - y) + g_{2k}(\beta) \operatorname{sh} \lambda_k y) - \frac{f_k}{2 \lambda_k} [-2 \lambda_k g(y) + \lambda_k^2 (g_{1k}(y) + g_{2k}(y))] = \lambda_k^2 u_k(y) + f_k g(y). \quad (42)$$

Тогда из равенства (39) с учетом (42) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(y) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^2 f_k u_k(y) + f_k^2 g(y)] = \chi''(y).$$

Отсюда с учетом (40) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 g(y) + \int_0^{\beta} K(t, y) g(t) dt = \chi''(y) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k \left(\varphi_k \frac{\operatorname{sh} \lambda_k(\beta - y)}{\operatorname{sh} \lambda_k \beta} + h_k \frac{\operatorname{sh} \lambda_k y}{\operatorname{sh} \lambda_k \beta} \right) = d''(y), \quad (43)$$

где

$$K(t, y) = \frac{\partial^2 H(t, y)}{\partial y^2} = \infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k f_k^2}{2} E_k(t, y).$$

По условию теоремы 2 функция $f(x) \neq 0$ на $(0, l)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \int_0^l f^2(x) dx = \|f\|_{L_2}^2 > 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение (43) является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Тогда поскольку в силу теоремы единственности 2 соответствующее однородное интегральное уравнение

$$g(y) + \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2} \int_0^l K(t, y) g(t) dt = 0$$

имеет только нулевое решение, то по альтернативе Фредгольма (см. [19], с. 479) интегральное уравнение (43) имеет единственное и непрерывное на $[0, \beta]$ решение.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. Если функции $b(x, y) \equiv \operatorname{const} = b \geq 0$ и $\varphi(x)$, $h(x)$ удовлетворяют теореме 3, функция $\chi(y) \in C^2[0, \beta]$, $f(x) \in C^1[0, l]$, $f(0) = f(l) = 0$, и выполнены условия (10), то существует единственное решение обратной задачи 2, при этом функция $g(y)$ определяется как решение интегрального уравнения (43), затем функция $u(x, y)$ — по формуле (15) как решение задачи Дирихле.

Теперь докажем следующее утверждение об устойчивости решения задачи 2.

Теорема 7. Для решения задачи 2 при $b(x, y) \equiv \operatorname{const} = b \geq 0$ справедливы оценки

$$\|g(y)\|_{C[0, \beta]} \leq C_{13} (\|\varphi''\|_{C[0, l]} + \|h''\|_{C[0, l]} + \|\chi''\|_{C[0, \beta]}), \quad (44)$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{14} (\|\varphi\|_{C^2[0, l]} + \|h\|_{C^2[0, l]} + \|\chi''\|_{C[0, \beta]}). \quad (45)$$

Доказательство. Решение интегрального уравнения (43) можно построить через резольвенту $R(y, t, \lambda)$ ядра $K(y, t)$ по формуле

$$g(y) = \bar{d}(y) + \lambda \int_0^{\beta} R(y, t, \lambda) \bar{d}(t) dt, \quad \lambda = \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2}, \quad \bar{d}(y) = \frac{d''(y)}{\|f\|_{L_2}^2}. \quad (46)$$

Поскольку λ не является характеристическим числом ядра $K(y, t)$, то резольвента $R(y, t, \lambda)$ при любом $\lambda > 0$ является непрерывной на квадрате $[0, \beta] \times [0, \beta]$ (см. [19], с. 460–469), поэтому она ограничена.

Предварительно при любом $y \in [0, \beta]$ с учетом представлений

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f'(x) \cos \mu_k x dx = \frac{1}{\mu_k} f_k^{(1)}, \\ \varphi_k &= -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l \varphi''(x) X_k(x) dx = -\frac{1}{\mu_k^2} \varphi_k^{(2)}, \\ h_k &= -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l h''(x) X_k(x) dx = -\frac{1}{\mu_k^2} h_k^{(2)} \end{aligned}$$

оценим функцию

$$\begin{aligned} |d''(y)| &\leq |\chi''(y)| + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k| (|\varphi_k| + |h_k|) \leq |\chi''(y)| + \tilde{C}_3 \sum_{k=1}^{\infty} k (|\varphi_k| + |h_k|) x \leq \\ &\leq |\chi''(y)| + \tilde{C}_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(2)}| + |h_k^{(2)}|) \leq |\chi''(y)| + \tilde{C}_5 (\|\varphi''\|_{L_2(0,l)} + \|h''\|_{L_2(0,l)}) \leq \\ &\leq \tilde{C}_6 (\|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}). \end{aligned} \quad (47)$$

Тогда из формулы (46) с учетом (47) имеем

$$|g(y)| \leq \tilde{C}_7 (\|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}).$$

Отсюда вытекает оценка (44).

Пусть $(x, y) \in \bar{D}$. Тогда из формул (15) и (20) будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k| + |h_k| + \frac{f_k}{2\lambda_k} (|g_{1k}(0)| + |g_{2k}(\beta)| + |g_{1k}(y) + g_{2k}(y)|) \right] \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k| + |h_k| + \frac{|f_k|}{2\lambda_k^2} \|g(y)\|_{C[0,\beta]} \right] \leq \tilde{C}_8 (\|\varphi'\|_{L_2(0,l)} + \|h'\|_{L_2(0,l)} + \|g(y)\|_{C[0,\beta]}) \leq \\ &\leq \tilde{C}_9 (\|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}), \end{aligned}$$

из которой уже получим оценку (45).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука СО, 1972. 164 с.
2. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.
6. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. New-York: Springer, 2006. 358 p.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с. (изд. 2).
8. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики. М.: Макс Пресс, 2012. 340 с.
9. Ягола А.Г., Янфей Ван, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. 216 с.
10. Ягола А.Г., Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А. Обратные задачи колебательной спектроскопии. М.: Изд-во "Курс", 2017. 336 с. (изд. 2).
11. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.
12. Romanov V., Hasanov A. Uniqueness and stability analysis of final data inverse source problems for evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30. № 3. P. 425–446.

13. Орловский Д.Г. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
14. Орловский Д.Г. Обратная задача Дирихле для уравнения эллиптического типа // Дифференц. ур-ния. 2008. Т. 44. № 1. С. 119–128.
15. Соловьев В.В. Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 5. С. 862–871.
16. Соловьев В.В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.
17. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнений парабола-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. ур-ния. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468–1478.
18. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца // Вестник Сам. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 269–292.
19. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высш. школа, 2005. 671 с.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.518.8

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОПЕРАТОРОВ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ

© 2023 г. А. Ю. Трынин^{1,*}

¹ 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского, Россия

*e-mail: atrynin@gmail.com, tayu@rambler.ru

Поступила в редакцию 08.12.2022 г.
Переработанный вариант 08.12.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Предложен новый метод получения обобщенного решения смешанной краевой задачи для уравнения параболического типа с граничными условиями третьего рода и непрерывным начальным условием. Обобщенные функции понимаются в смысле секвенциального подхода. В качестве промежуточного приближения используется модифицированный оператор синк-аппроксимаций. Решение получено в виде ряда, равномерно сходящегося внутри области определения решения. Библ. 49. Фиг. 1.

Ключевые слова: смешанная краевая задача, обобщенное решение, синк-аппроксимации, равномерная сходимость.

DOI: 10.31857/S0044466923050186, **EDN:** PKMNTJ

ВВЕДЕНИЕ

Оператор синк-приближений и его модификации, появившиеся в теореме отсчетов и ее обобщениях, нашли применение (см. [1–8]) в самых различных областях приложений конструктивной теории функций. Основательно разработанный аппарат рядов Фурье (см., например, [9–11]), метод характеристик, принцип сжимающих отображений и другие аналитические методы позволяют интенсивно изучать (см. [12–29]) самые тонкие вопросы в области решения смешанных краевых задач с линейными уравнениями второго порядка. Вместе с тем для реализации таких методов требуется использование вспомогательных задач, например, решение задачи Гурса или вычисление коэффициентов Фурье от функций, входящих в условия задачи. Нетривиальность аналитического представления решения задачи Гурса приводит к тому, что метод характеристик используется, как правило, для исследования корректности по Адамару смешанных краевых задач. Семейство методов Фурье, имеющих непреходящее значение в области фундаментальных исследований решений задач математической физики, требует возможности разложения в ряд Фурье функций, входящих в условия задачи. Это возможно сделать далеко не для всех непрерывных функций, даже удовлетворяющих краевым условиям. Кроме того, при подсчете коэффициентов Фурье в результате численного интегрирования быстро осциллирующих функций быстро нарастает вычислительная погрешность таких методов при их реализации в вычислительной математике, что делает затруднительным их применение в прикладных задачах компьютерных наук. Не менее основательно развита теория разностных схем (см., например, [30–36]). Этот подход к решению смешанных краевых задач для уравнения параболического типа очень хорошо зарекомендовал себя с точки зрения прикладной математики. Большинство успехов компьютерных наук в этой области связано именно с применением алгоритмов, основанных на разностных схемах. Но преимущества анализа Фурье, такие как возможность организации фильтрации сигналов, подавление помех в начальных условиях и т.п., остаются за рамками возможности этих алгоритмов.

В настоящей работе предложен метод решения смешанных краевых задач для уравнения параболического типа, сочетающий в себе достоинства обоих описанных подходов. С точки зрения фундаментальной математики здесь решена смешанная краевая задача с произвольными непрерывными, не обязательно удовлетворяющими граничным условиям, функциями в начальных

условиях и неоднородности уравнения. Вместо коэффициентов Фурье функций, входящих в условия задачи, используются их значения на счетном множестве равноотстоящих узлов. Предложенный метод относительно прост с точки зрения численной реализации нового способа получения обобщенного решения изучаемых задач математической физики. На каждом шаге выполнения алгоритма в качестве области определения его информационного оператора служит конечный набор значений непрерывных функций условий задачи. Единственное, что требуется для реализации предложенного метода в компьютерных науках, это обеспеченность сервисными средствами решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритм предусматривает возможность использовать заранее подсчитанные коэффициенты Фурье для счетного набора вспомогательных функций, что резко увеличивает скорость его работы, так как все решение сводится к вычислению линейной комбинации этих функций. В заключении работы предложен способ нахождения коэффициентов Фурье вспомогательных функций модельной задачи с помощью резольвенты одного дифференциального оператора Коши третьего порядка, исключающий необходимость использования квадратурных формул для быстро осциллирующих функций.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим смешанную краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) \cos \alpha + u_x(0, t) \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$u(\pi, t) \cos \beta + u_x(\pi, t) \sin \beta = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (4)$$

где $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ при $T > 0$, а функции f и φ являются непрерывными, каждая на своей области определения. Удовлетворение граничным условиям (2), (3) функциями f и φ не предполагается. Функция q имеет ограниченную вариацию.

Сначала сделаем ряд определений. В предположении $\rho_\lambda \geq 0$ при каждом неотрицательном λ считаем в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, что зависящая от параметра λ функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиуса $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. такая, что

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \quad (5)$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \quad (6)$$

или при дополнительном условии

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0 \quad (7)$$

задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \quad (8)$$

попадающие в $[0, \pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \dots < x_{n(\lambda),\lambda} \leq \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \quad (9)$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задач Коши (6) или (8) после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0, \pi]$ с сохранением ограниченности вариации.) Теорема осцилляции или метод контурного интегрирования при условии (5) или (7) обеспечивают неограниченное возрастание количества нулей (9) $n(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. В дальнейшем для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$.

Рассмотрим функции

$$s_{k,\lambda}(x) = \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})}, \quad (10)$$

где $y(x, \lambda)$ есть решения задач Коши (6) или (8) с нулями $x_{k,\lambda}$, перенумерованными согласно соотношению (9).

Определение 1. На пространстве непрерывных на $[0, \pi]$ функций f определим операторы

$$AT_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right\} (s_{k-1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0) \quad (11)$$

или, в другом виде,

$$\begin{aligned} AT_\lambda(f, x) &\equiv \widetilde{AT}_\lambda(f, x) + \left\{ \frac{f(x_{n,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0)) x_{n,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{n,\lambda}(x) - \\ &- \left\{ \frac{f(x_{0,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0)) x_{0,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{0,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{f(x_{k+1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})}{2} - \right. \\ &- \left. \frac{(f(\pi) - f(0)) (x_{k+1,\lambda} + x_{k,\lambda})}{\pi} - f(0) \right\} s_{k,\lambda}(x) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0) + \\ &+ \left\{ \frac{f(x_{n,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0)) x_{n,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{n,\lambda}(x) - \left\{ \frac{f(x_{0,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0)) x_{0,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{0,\lambda}(x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$AT_\lambda^{(1)}(f, x) = \frac{d}{dx} AT_\lambda(f, x), \quad (13)$$

$$AT_\lambda^{(2)}(f, x) = \frac{d^2}{dx^2} AT_\lambda(f, x). \quad (14)$$

Особо отметим, что значения операторов в определении 1 зависят только от значений функции $f(x_{k,\lambda})$ в нулях $x_{k,\lambda}$ функций $y(x, \lambda)$.

Обозначим последовательность действительных чисел $\phi = \{\phi_n\}_{n=1}^\infty$, $0 \leq \phi_n < \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_{k,\lambda_n} = k\pi/n + \phi_n$ при $0 \leq k \leq n - \text{sign}(\phi_n)$. Определим линейный оператор синк-аппроксимаций, ставящий каждой конечнозначной на множестве $\{x_{k,\lambda_n}\}_{k=0, n=1}^{n-\text{sign}(\phi_n), \infty}$ функции f целую функцию по правилу

$$\begin{aligned} L_n(\phi, f, x) &= \sum_{k=0}^{n-\text{sign}(\phi_n)} \frac{\sin(n(x - \phi_n) - k\pi)}{n(x - \phi_n) - k\pi} f(x_{k,\lambda_n}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-\text{sign}(\phi_n)} \frac{(-1)^k \sin n(x - \phi_n)}{n(x - \phi_n) - k\pi} f(x_{k,\lambda_n}) = \sum_{k=0}^{n-\text{sign}(\phi_n)} l_{k,n}(x - \phi_n) f(x_{k,\lambda_n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Необходимые и достаточные условия поточечной и равномерной сходимости значений таких операторов получены в [37]. А в [38] построен пример непрерывной функции, которую нельзя приблизить значениями такого оператора ни в одной точке интервала $(0, \pi)$.

Поэтому рассмотрим одну модификацию этого оператора, являющуюся частным случаем оператора (11), построенного по решениям задач (6), (8), когда $q_\lambda \equiv \text{const}$, $h(\lambda) \equiv 1$.

На множестве функций f , заданных в точках $\{x_{k,\lambda_n}\}_{k=0, n=1}^{n-\text{sign}(\phi_n), \infty}$, определим оператор

$$\begin{aligned} AT_n^\phi(f, x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-\text{sign}(\phi_n)} \left\{ f(x_{k,\lambda_n}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda_n} - f(0) \right\} \times \\ &\times (l_{k-1,n}(x - \phi_n) + l_{k,n}(x - \phi_n)) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0), \end{aligned} \quad (16)$$

где фундаментальные функции $l_{k,n}(x - \phi_n)$ определены в (15). В частном случае, когда потенциал задач Коши (6) или (8) $q_\lambda \equiv \text{const}$, а вместо непрерывно меняющегося параметра λ рассматриваем последовательность $\lambda = \lambda_n$ и $h(\lambda) \equiv 1$, получаем тождества

$$L_n(\phi, f, x) \equiv \sum_{k=0}^{n(\lambda)} f(x_{k,\lambda_n}) s_{k,\lambda_n}(x) = S_{\lambda_n}(f, x), \quad (17)$$

$$l_{k,n}(x - \phi_n) \equiv s_{k,\lambda_n}. \quad (18)$$

Наряду с теорией С.Л. Соболева, основы которой изложены в знаменитой монографии [39] (см. также [12–15]), в которой для введения понятия обобщенной функции используется сходимость основных функций в метрике пространства Лебега, достаточно давно применялся другой подход к построению теории обобщенных функций. Этот подход предусматривает использование равномерной сходимости основных функций для построения классов эквивалентных последовательностей, связанных с обобщенной функцией. Например, такая теория построена в [14], гл. 1, § 9, а авторы монографии [40] этот подход называют секвенциальным. Мы будем использовать частный случай определения обобщенной функции, понимаемой в смысле секвенциального подхода (см. [40], п. 1.3).

Определение 2. Класс эквивалентных последовательностей непрерывно дифференцируемых на компакте K функций, т.е. сходящихся к одной и той же непрерывной функции по норме чебышёвского пространства $\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|$, будем называть *обобщенной функцией, определенной на компакте K* .

Понятно, что непрерывно дифференцируемая функция f эквивалентна обобщенной функции, представляющей собой класс эквивалентных функциональных последовательностей, сходящихся к ней самой, так как стационарная последовательность $f_n \equiv f$ принадлежит этому классу. Мы будем считать решением смешанной краевой задачи (1)–(4) обобщенную функцию в терминах определения 2. Поэтому в случае, когда классическое решение существует, оно будет совпадать с нашим решением.

После замены $u(x, t) = U(x)V(t)$ в смешанной краевой задаче (1)–(4) и разделения переменных в однородном уравнении, соответствующем уравнению (1), получим систему уравнений, связанных между собой спектральным параметром $\hat{\lambda}$:

$$U'' + [\hat{\lambda} - q(x)]U = 0, \quad V' + \hat{\lambda}V = 0. \quad (19)$$

Добавив к уравнению (19) соответствующие условиям (2), (3) граничные условия для функции U , получим регулярную задачу Штурма–Лиувилля

$$U'' + [\hat{\lambda} - q(x)]U = 0, \quad U(0)\cos\alpha + U'(0)\sin\alpha = 0, \quad (20)$$

$$U(\pi)\cos\beta + U'(\pi)\sin\beta = 0. \quad (21)$$

Свойства таких задач хорошо изучены, например, в [41]. Обозначим собственные значения и соответствующие им ортонормированные собственные функции задачи (19)–(21) $\hat{\lambda}_m := \hat{\lambda}_m(q, \alpha, \beta)$ и $U_m := U_m(q, \alpha, \beta, x)$, $m = 0, 1, \dots$, соответственно.

Коэффициенты Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21) функций (18) и линейной функции обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{k,n,m} &= \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) l_{k,n}(\xi - \phi_n) d\xi, \\ \tau_m^{(0)} &= \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) d\xi, \quad \tau_m^{(1)} = \int_0^\pi \xi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Набор коэффициентов Фурье (22) не зависит ни от начального условия (4), ни от правой части уравнения (1). Он определяется только параметрами смешанной краевой задачи (потенциа-

лом и граничными условиями) и может быть определен заранее для каждой задачи вида (1)–(4). А через

$$\widehat{AT}_{n,m}^\phi[f] := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\tau_{k-1,n,m} + \tau_{k,n,m}) \left\{ f(x_{k,\lambda_n}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda_n} - f(0) \right\} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \tau_m^{(1)} + f(0) \tau_m^{(0)} \quad (23)$$

обозначим коэффициенты Фурье значения оператора (16) для произвольной функции $f \in C[0, \pi]$.

Положим

$$v_n = \begin{cases} -e^{-\lambda_n} (AT_n^\phi(f, 0) \operatorname{ctg} \alpha + AT_n^{\phi_1}(f, 0)) & \text{при } \alpha \neq \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ AT_n^\phi(f, 0) & \text{при } \alpha = \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} -e^{-\lambda_n} (AT_n^\phi(f, \pi) \operatorname{ctg} \beta + AT_n^{\phi_1}(f, \pi)) & \text{при } \beta \neq \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ AT_n^\phi(f, \pi) & \text{при } \beta = \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\mu_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\lambda_n}.$$

На множестве функций f заданных в точках $\{x_{k,\lambda_n}\}_{k=0,n=1}^{n-\operatorname{sign}(\phi_n), \infty}$ определим операторы

$$\eta(x, \lambda_n) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{3}} v_n \mu_n x & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{|\mu_n|} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right], \quad \alpha \neq \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ v_n \sin^3 \left(\mu_n \left(x + \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \right) & \text{при} \\ x \in \left[\frac{1}{|\mu_n|} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right], \quad \alpha \neq \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ v_n \left(\frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^{-3} \left(x - \frac{\pi}{|\mu_n|} + \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^3 & \\ \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right], \quad \alpha = \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi \right], \end{cases} \quad (24)$$

$$\tilde{\eta}(x, \lambda_n) = - \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{3}} \tilde{v}_n \mu_n (\pi - x) & \text{при } x \in \left[\pi - \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \pi \right], \quad \beta \neq \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{v}_n \sin^3 \left(\mu_n \left(\pi - x + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \right) & \text{при} \\ x \in \left[\pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi - \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \right], \quad \beta \neq \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{v}_n \left(\frac{\pi}{\mu_n} - \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^{-3} \left(\pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - x \right)^3 & \\ \text{при } x \in \left[\pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi \right], \quad \beta = \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{при } x \in \left[0, \pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right]. \end{cases} \quad (25)$$

Положим

$$\sigma_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } (\alpha = \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \wedge f(0) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (\alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \vee f(0) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } (\beta = \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \wedge f(\pi) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (\beta \neq \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \vee f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Обозначим коэффициенты Фурье значений операторов (24), (25) по собственным функциям задачи (19)–(21) как

$$\hat{\eta}_{\lambda_n, m} = \langle \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \cdot), \eta(\cdot, \lambda_n) \rangle = \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) \eta(\xi, \lambda_n) d\xi, \quad (27)$$

$$\tilde{\eta}_{\lambda_n, m} = \langle \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \cdot), \tilde{\eta}(\cdot, \lambda_n) \rangle = \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) \tilde{\eta}(\xi, \lambda_n) d\xi.$$

Операторы, ставящие в соответствие функции $f \in C[0, \pi]$ частичные суммы Фурье функции $AT_n^\phi(f, x) + \eta(x, \lambda_n) + \tilde{\eta}(x, \lambda_n)$, обозначим

$$\mathbb{A}T_{n, j}^\phi(f, x) = \sum_{m=0}^j \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f, \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, x), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f, \eta] := & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\tau_{k-1, n, m} + \tau_{k, n, m}) \left\{ f(x_{k, \lambda_n}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k, \lambda_n} - f(0) \right\} + \\ & + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \tau_m^{(1)} + f(0) \tau_m^{(0)} + \hat{\eta}_{\lambda_n, m} + \tilde{\eta}_{\lambda_n, m} \end{aligned} \quad (29)$$

являются ее коэффициентами Фурье. Функция $AT_n^\phi(f, x) + \eta(x, \lambda_n) + \tilde{\eta}(x, \lambda_n)$ имеет абсолютно непрерывную производную на отрезке $[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (20), (21). Здесь также обратим внимание на то, что значения операторов (28), как и функционалов (29), определяются только с помощью значений функции $f(x_{k, \lambda_n})$ в нулях x_{k, λ_n} .

Основным результатом работы служит

Теорема 1. Пусть $T > 0$, $\varepsilon > 0$, функции f , ϕ являются непрерывными каждая на своей области определения, и функция q имеет ограниченную вариацию, функция $j(n)$, принимающая целые значения или бесконечность, удовлетворяет соотношению

$$[n^{2(1+\varepsilon)}] + 1 \leq j(n) \leq \infty. \quad (30)$$

Тогда обобщенное решение смешанной краевой задачи (1)–(4) представимо в виде предела

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j(n)} \left(\widehat{AT}_{n, m}^\phi[\phi, \eta] e^{-\hat{\lambda}_m t} + \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau \right) U_m(q, \alpha, \beta, x). \quad (31)$$

Сходимость в (31) равномерная на прямоугольнике $[\sigma_1 \tilde{\varepsilon}, \pi - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\varepsilon}] \times [0, T]$, где функционалы $\widehat{AT}_{n, m}^\phi[\cdot, \eta]$ определены с помощью (29), а $\sigma_1, \tilde{\sigma}_1$ определяются в (26).

Замечание 1. Это неоднозначное представление единственного обобщенного решения смешанной краевой задачи (1)–(4), так как вместо интегралов в (31) в качестве частного решения соответствующего неоднородного обыкновенного уравнения с правой частью $\widehat{AT}_{n, m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta]$ может быть выбран любой другой представитель семейства общего решения уравнения, а не обязательно удовлетворяющий нулевым начальным условиям. Но в этом случае не следует забывать, что в коэффициенты, отвечающие за начальные условия в первом слагаемом суммы следует внести соответствующие корректировки.

Кроме того, выбирая различные последовательности $j(n)$, удовлетворяющие соотношению (30), получим различные представители класса эквивалентности, являющегося обобщенной функцией согласно определению 2.

Метод, предложенный в теореме 1, по сравнению с теорией разностных схем сохраняет преимущества анализа Фурье: позволяет организовывать фильтрацию, убирать помехи в условиях и т.п. В отличие же от классических методов Фурье и Крылова, алгоритм решения смешанной краевой задачи (1)–(4) в утверждении теоремы 1 не только расширяет множество допустимых наборов функций f, φ до пространств непрерывных функций на области своего определения, но и позволяет ограничиться данными об этих функциях только в равноотстоящих узловых точках x_{k,λ_n} , а не требовать информацию о функции на множестве полной меры. Для вычисления коэффициентов $\widehat{AT}_{\lambda,m}[\cdot, \eta]$ можно использовать не зависящий от функций f, φ набор коэффициентов Фурье $\tau_{k,n,m}$ (22) функций (18), который для каждой краевой задачи (1)–(4) может быть заготовлен заранее. В силу корректности по Адамару смешанной краевой задачи для уравнения параболического типа классическое решение задачи (1)–(4) с достаточно гладкими условиями, допускающими его существование, совпадает с решением, полученным с помощью теоремы 1. Чтобы не вычислять интегралы от быстро осциллирующих функций, для определения $\tau_{k,n,m}$ можно воспользоваться следующими утверждениями.

Предложение 1. В дифференциальных уравнениях задач Коши (6), (8) и уравнении задачи Штурма–Лиувилля (19) считаем $q \equiv 0$. Тогда коэффициенты Фурье (22) функций s_{k,λ_n} (10) по ортонормированным собственным функциям U_m задачи (19)–(21) можно вычислить с помощью интеграла Римана–Стилтьеса

$$\tau_{k,n,m} = \frac{1}{(\lambda_m - \lambda_n)} (s'_{k,\lambda_n}(\pi)U_m(\pi) - s_{k,\lambda_n}(\pi)U'_m(\pi) - (s'_{k,\lambda_n}(0)U_m(0) - s_{k,\lambda_n}(0)U'_m(0))) + \frac{2}{(\lambda_m - \lambda_n)} \int_0^\pi \frac{U_m(x)}{(x - x_{k,\lambda_n})} ds_{k,\lambda_n}(x). \quad (32)$$

Если потенциал смешанной краевой задачи (1)–(4) непрерывно дифференцируем, то коэффициенты Фурье функций s_{k,λ_n} по ортонормированным собственным функциям U_m задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21) можно получить с помощью резольвенты одного дифференциального оператора.

Предложение 2. В дифференциальных уравнениях задач Коши (6), (8) и уравнении задачи Штурма–Лиувилля (19) считаем потенциалы непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими соотношению $q(x) \equiv 0$. Тогда коэффициенты Фурье (22) функций s_{k,λ_n} по ортонормированным собственным функциям U_m задачи (19)–(21) можно вычислить с помощью резольвенты дифференциального оператора Коши

$$\Phi'''_{k,\lambda_n,m}(x) + (\lambda_n + \lambda_m)\Phi'_{k,\lambda_n,m}(x) = 2s'_{k,\lambda_n}(x) \left(\frac{U_m(x)}{(x - x_{k,\lambda_n})} \right) (x - x_{k,\lambda_n}), \quad (33)$$

$$\Phi_{k,\lambda_n,m}(x_{k,\lambda_n}) = 0, \quad \Phi'_{k,\lambda_n,m}(x_{k,\lambda_n}) = U_m(x_{k,\lambda_n}), \quad \Phi''_{k,\lambda_n,m}(x_{k,\lambda_n}) = U'_m(x_{k,\lambda_n})$$

следующим образом:

$$\tau_{k,n,m} = \Phi_{k,\lambda_n,m}(\pi) - \Phi_{k,\lambda_n,m}(0). \quad (34)$$

Замечание 2. В силу инвариантности дифференциального оператора задач Коши (6) или (8) относительно группы сдвигов спектрального параметра и потенциала $\tilde{q} = q + \text{const}$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \text{const}$ в предложениях 1 и 2 без потери общности можно считать $q = \text{const}$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Сначала приведем ряд вспомогательных утверждений.

2.1. Асимптотические формулы

Предложение 3 (см. [42, теорема 1], [43, предложение 2]). Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. для любого действительного λ

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \text{где} \quad \rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (6) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left| y(x, \lambda) - \gamma(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x - \beta(x, \lambda, h) \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\lambda} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \\ \left| y'(x, \lambda) + \sqrt{\lambda}\gamma(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda}x - \beta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\beta(x, \lambda, h) = h(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau, \quad \gamma(x, \lambda, h) = 1 - \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

Предложение 4 (см. [42, теорема 1'], [43, предложение 3]). Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (8) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left| y(x, \lambda) - \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \delta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda\sqrt{\lambda}}, \\ \left| y'(x, \lambda) - h(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda}\delta(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda}, \\ \left| y''(x, \lambda) + h(\lambda)\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x - \lambda\delta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\delta(x, \lambda, h) = \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

Предложение 5 (см. [42, теоремы 2, 2'], [43, предложение 4]). Пусть выполняется условие (5). Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для нулей решений задачи Коши (6), попадающих в $[0, \pi]$ и перенумерованных в порядке возрастания согласно (9), справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} x_{k,\lambda} &= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right), \\ y'(x_{k,\lambda}, \lambda) &= \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left((-1)^{(k+1)} + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$.

А для перенумерованных согласно (9) нулей решений задачи Коши (8) с $h(\lambda) \neq 0$ и q_λ , удовлетворяющими соотношению (7), справедливы асимптотические формулы вида

$$x_{k,\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

$$y'(x_{k,\lambda}, \lambda) = h(\lambda)\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Стремление к нулю в o -символике равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $k : 0 \leq k \leq n$.

Для того чтобы по свойствам нулей (9) восстановить условия задач (6), (8), можно воспользоваться результатами исследований в [44], [45].

Нам потребуется еще одно свойство фундаментальных функций $s_{k,\lambda}$.

Лемма 1 (см. [43, лемма 2]). Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$, при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (8) требуем еще выполнения условия $h(\lambda) \neq 0$). Тогда найдется такое значение λ_0 (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (5) или (7)), что для любых потенциалов $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и функции $h(\lambda)$, а также для всех $\lambda > \lambda_0$, функции $s_{k,\lambda}(x)$, построенные по решениям задач Коши (6) и (8) могут быть оценены таким образом

$$\max_{x \in [0, \pi]} |s_{k,\lambda}(x)| = \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \right| \leq 3 \quad \text{при } \lambda > \lambda_0.$$

2.2. Дифференциальное уравнение для функций $s_{k,\lambda}$

Предложение 6. Пусть функция q_λ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, \pi]$. Функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению задач (6), (8) и $y(x_{k,\lambda}, \lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $s_{k,\lambda}$ является ограниченным решением дифференциального уравнения вида

$$s''_{k,\lambda} + \frac{2}{(x - x_{k,\lambda})} s'_{k,\lambda} + (\lambda - q_\lambda(x)) s_{k,\lambda} = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Действительно, пусть функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению задач (6), (8). Тогда подстановкой получаем соотношение

$$\frac{1}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} (y''(x, \lambda) + (\lambda - q_\lambda(x)) y(x, \lambda)) \equiv 0.$$

Наоборот, пусть $s_{k,\lambda}$ есть ограниченное решение дифференциального уравнения вида (37) всюду на множестве $[0, x_{k,\lambda}) \cup (x_{k,\lambda}, \pi]$. Тогда подстановкой убеждаемся в том, что функция $y(x, \lambda) = y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})s_{k,\lambda}(x)$ удовлетворяет уравнению задач (6), (8). Учитывая, что $y(x_{k,\lambda}) = 0$, продолжаем это соотношение на весь отрезок $[0, \pi]$. Предложение 6 доказано.

2.3. Некоторые операторы теории приближения функций

Предложение 7 (см. [43, предложение 1]). Пусть $f \in C[0, \pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (5) в случае задачи Коши (6) или (7) — в случае задачи (8). Тогда равномерно по x на отрезке $[0, \pi]$ и по q_λ на шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} AT_\lambda(f, x) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \widetilde{AT}_\lambda(f, x) = f(x). \quad (38)$$

Предложение 8. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (8) требуем еще выполнения условия $h(\lambda) \neq 0$). Тогда существует такое значение λ_0 (зависящее только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (5) или (7)), что для любых потенциалов $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и функции $h(\lambda)$, а также для всех $\lambda > \lambda_0$, нормы операторов (13) и (14), действующих из пространства

ограниченных функций $M[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$ и построенных по решениям задач Коши (6) или (8), сверху оцениваются следующим образом:

$$AT_{\lambda}^{(1)} \leq \frac{17\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \lambda, \quad (39)$$

$$AT_{\lambda}^{(2)} \leq \frac{17\lambda}{\pi} \ln \lambda. \quad (40)$$

Доказательство. Сначала установим справедливость оценки (39) для оператора (13) в случае задачи Коши (8). В силу инвариантности оператора (12) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности полагаем $h(\lambda) \equiv 1$.

Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 — номер ближайшего к x узла (если таких узлов два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Из асимптотики нулей решений задачи Коши предложения 5 получаем оценку

$$|x - x_{k_0, \lambda}| = O\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (41)$$

Тогда норма функционала (будем рассматривать представление AT_{λ} в виде (12)), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ значение производной результата действия оператора (12) в точке $x \in [0, \pi]$, может быть оценена следующим образом:

$$AT_{\lambda}^{(1)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^n |s'_{k, \lambda}(x)| + \frac{2}{\pi} = 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} |s'_{k, \lambda}(x)| + 2 |s'_{k_0, \lambda}(x)| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n |s'_{k, \lambda}(x)| + \frac{2}{\pi}. \quad (42)$$

А норма оператора (13), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ непрерывную производную значения оператора (12), действующего из $M[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$, есть

$$AT_{\lambda}^{(1)} = \max_{x \in [0, \pi]} AT_{\lambda}^{(1)}(x). \quad (43)$$

Второе слагаемое в (42) оценивается с помощью формулы Лагранжа, (41) и асимптотических формул предложения 5:

$$2 |s'_{k_0, \lambda}(x)| = 2 \left| \frac{y'(x, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda}) - y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})^2} \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Отсюда и из (42) получаем оценку

$$AT_{\lambda}^{(1)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{y'(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{y'(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} \right| + 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})^2} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})^2} \right| + \frac{2}{\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (44)$$

Из асимптотических формул для нулей решения задач Коши предложения 5 для достаточно больших λ будут выполняться соотношения

$$\min_{1 \leq k \leq n} |x_{k, \lambda} - x_{k-1, \lambda}| \geq \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \min(|x - x_{k_0-1, \lambda}|, |x - x_{k_0+1, \lambda}|) \geq \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}. \quad (45)$$

В силу (44), (45) и асимптотических формул предложения 5 найдется значение λ_1 (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров в (5), (7)) такое, что для всех $\lambda > \lambda_1$ справедливо неравенство

$$AT_{\lambda}^{(1)}(x) \leq 2|y'(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right)(x - x_{k,\lambda})} \right| + \\ + 2|y(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right)(x - x_{k,\lambda})^2} \right| + \frac{2}{\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Здесь и далее штрих у суммы означает отсутствие слагаемого с индексом $k = k_0$. Если $k_0 = 0$, то в сумме отсутствует первое слагаемое, если же $k_0 = n$, то нет третьего. Отсюда получаем оценку

$$AT_{\lambda}^{(1)}(x) \leq 2|y'(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{t-x} \right] + \\ + 2|y(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} \right] + \frac{2}{\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (46)$$

Учитывая то, что при $x \in [0, \pi]$ $x(\pi - x) \geq 0$, и что при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$ в силу выбора номера k_0 первый интеграл в полученной оценке исчезает, а при $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]$ нет второго интеграла, оценка суммы интегралов распадается на два случая:

$$\int_0^{x - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{t-x} = -\ln(x-t)\Big|_0^{x - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} + \ln(t-x)\Big|_{x + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \leq \\ \leq \begin{cases} \ln(\lambda) + \ln 16 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{1}{2} \ln(\lambda) + \ln 8 & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]. \end{cases}$$

Теперь оценим сумму интегралов

$$\int_0^{x - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} = \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{\pi}{x(\pi-x)}.$$

Учитывая, что $x(\pi - x) \geq 0$ при $x \in [0, \pi]$, $x(\pi - x) > 0$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$, и что при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$ в силу выбора номера k_0 первый интеграл в полученной оценке исчезает, а при $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]$ нет второго интеграла, оценка суммы интегралов распадается на три случая:

$$\int_0^{x - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} \leq \begin{cases} \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{\pi}{x(\pi-x)} & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{1}{\pi-x} & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{1}{x} & \text{при } x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]. \end{cases}$$

Равномерная по $x \in [0, \pi]$ оценка нормы оператора (13) таким образом в силу (46) имеет вид

$$AT_{\lambda}^{(1)} \leq \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\ln(\lambda) + \frac{16 + \pi \ln 16}{\pi} \right] + o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right).$$

Отсюда следует существование $\lambda_0 \geq \lambda_1$ настолько большого, что для всех $\lambda > \lambda_0$ верна оценка (39) в случае задачи Коши (8).

Покажем, что неравенство (39) при достаточно больших λ справедливо для $s_{k,\lambda}$ ($0 \leq k \leq n$), построенных с помощью решений задачи Коши (6). Для этого продолжим функцию

$$q_{\lambda}(x) = \begin{cases} q_{\lambda}(x) & \text{при } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi]. \end{cases} \quad (47)$$

После чего сделаем замену независимой переменной

$$t = \frac{\pi \left(x\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)}{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}}, \quad (48)$$

Обозначим

$$\hat{y}(t, \hat{\lambda}) = y \left(\frac{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}}{\pi\sqrt{\lambda}} t - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}, \lambda \right) \quad (49)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t) &= \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)^2 \times \\ &\times q_{\lambda} \left(\frac{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}}{\pi\sqrt{\lambda}} t - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}, \right), \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\hat{\lambda} = \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)^2 \lambda.$$

После замены переменных (48) убеждаемся с помощью теоремы Пикара, что функции (49) есть одновременно решение задач Коши

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} &= 0, \quad \hat{y}(0, \hat{\lambda}) = y(0, \lambda) = 1, \\ \hat{y}'(0, \hat{\lambda}) &= \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right) h(\lambda) \end{aligned} \quad (51)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} &= 0, \quad \hat{y}(0, \hat{\lambda}) = y \left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right) = 0, \\ \hat{y}'(0, \hat{\lambda}) &= \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right) = \hat{h}(\hat{\lambda}). \end{aligned} \quad (52)$$

Кроме того, в силу (47) и (50) $\sqrt{\hat{\lambda}} - 1/2 \leq \sqrt{\lambda} \leq \sqrt{\hat{\lambda}} + 1/2$, т.е. $\sqrt{\hat{\lambda}} \simeq \sqrt{\lambda}$. Следовательно, соотношение (5) для задачи (52) сохраняется, так как из (47) и (50) получаем

$$q_{\hat{\lambda}}(0) = 0 \quad \text{и} \quad V_0^\pi[\hat{q}_{\hat{\lambda}}] \leq \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\hat{\lambda}}}\right)^2 V_0^\pi[q_{\lambda}] = o\left(\frac{\sqrt{\hat{\lambda}}}{\ln \hat{\lambda}}\right) = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \hat{\lambda}}\right). \quad (53)$$

Согласно (49) при $t \in [0, \pi]$ и $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}, \pi\right]$ имеем тождество

$$s_{k,\lambda}(x) \equiv \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \equiv \frac{\hat{y}(t, \hat{\lambda})}{\hat{y}'(t_{k,\hat{\lambda}}, \hat{\lambda})(t - t_{k,\hat{\lambda}})} \equiv \hat{s}_{k,\hat{\lambda}}(t). \quad (54)$$

Так как $\hat{s}_{k,\hat{\lambda}}(t)$ построены с помощью задачи Коши (52) вида (8), соотношение (39) доказано полностью.

Перейдем к доказательству оценки (40) нормы оператора (14).

Опять сначала рассуждения будем проводить в случае задачи Коши (8). В силу инвариантности оператора (12) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности полагаем $h(\lambda) \equiv 1$.

Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 — номер ближайшего к x узла (если таких узлов два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Из асимптотики нулей решений задачи Коши предложения 5 получаем оценку (41). Тогда норма функционала (будем рассматривать представление $\widetilde{AT}_\lambda$ в виде (12)), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ значение второй производной результата действия оператора (12) в точке $x \in [0, \pi]$, может быть оценена следующим образом:

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^n |s_{k,\lambda}''(x)| = 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} |s_{k,\lambda}''(x)| + 2 |s_{k_0,\lambda}''(x)| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n |s_{k,\lambda}''(x)|. \quad (55)$$

А норма оператора (14), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ непрерывную вторую производную значения оператора (12), действующего из $M[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$, есть

$$AT_\lambda^{(2)} = \max_{x \in [0, \pi]} AT_\lambda^{(2)}(x). \quad (56)$$

Второе слагаемое в (55) оценивается с помощью формулы Лагранжа, леммы 1 и асимптотических формул предложения 5.

Откуда следует существование констант $\lambda_1 > 0$ и C_1 таких, что для всех $\lambda > \lambda_1$ и $x \in [0, \pi]$ справедлива оценка

$$2 |s_{k_0,\lambda}''(x)| \leq C_1 \sqrt{\lambda}.$$

Отсюда и из (42) получаем оценку

$$\begin{aligned} AT_\lambda^{(2)}(x) &\leq 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y''(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y''(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|} \right| + 4 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y'(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|^2} \right| + \\ &+ 4 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y'(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|^2} \right| + 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|^3} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|^3} \right| + O(\sqrt{\lambda}). \end{aligned} \quad (57)$$

Из асимптотических формул для нулей решения задач Коши предложения 5 для достаточно больших λ будут выполняться соотношения (45).

В силу (45), (57) и асимптотических формул предложения 5 найдется значение $\lambda_2 \geq \lambda_1$ (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров в (5), (7)) такое, что для всех $\lambda > \lambda_2$ справедливо неравенство

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2|y''(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right)(x - x_{k,\lambda})} \right| + 4|y'(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right)(x - x_{k,\lambda})^2} \right| +$$

$$+ 2|y(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right)(x - x_{k,\lambda})^3} \right| + O(\sqrt{\lambda}).$$

Оценим суммы следующим образом:

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2|y''(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{t-x} \right] +$$

$$+ 4|y'(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} \right] +$$

$$+ 2|y(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^3} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^3} \right] + O(\sqrt{\lambda}).$$

При оценке учитываем, что $\max_{x \in [0, \pi]} x(\pi - x) = \pi^2/4$, $x(\pi - x) > 0$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$, и что при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$ в силу выбора номера k_0 первый интеграл в полученной оценке исчезает, а при $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]$ нет второго интеграла. Таким образом, получаем соотношение

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{t-x} = -\ln(x-t)\Big|_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} + \ln(t-x)\Big|_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \ln(\lambda) + \ln 16 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{1}{2} \ln(\lambda) + \ln 8 & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]. \end{cases}$$

Теперь оценим суммы интегралов

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} = \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{\pi}{x(\pi-x)}, \quad \int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^3} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^3} \leq \frac{8^2\lambda}{\pi^2}.$$

В итоге, с учетом асимптотических формул предложения 4 получаем равномерную по $x \in [0, \pi]$ оценку

$$AT_{\lambda}^{(2)}(x) \leq |y''(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} [\ln(\lambda) + \ln 16] + \\ + |y'(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \left[\frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi}\right]^2 + |y(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\frac{8^2 \lambda}{\pi^2}\right] + O(\sqrt{\lambda}).$$

Оценка нормы оператора таким образом имеет вид

$$AT_{\lambda}^{(2)} \leq \frac{16\lambda}{\pi} \ln(\lambda) + O(\lambda).$$

Отсюда следует существование $\lambda_0 \geq \lambda_2$ настолько большого, что для всех $\lambda > \lambda_0$ верна оценка (40) в случае задачи Коши (8).

Справедливость оценки (40) при достаточно больших λ для $s_{k,\lambda}$ ($0 \leq k \leq n$), построенных с помощью решений задачи Коши (6), устанавливается также, как справедливость соотношения (39) для $s_{k,\lambda}$, ($0 \leq k \leq n$), построенных с помощью решений задачи Коши (6). Предложение 8 доказано полностью.

3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Нам потребуется в дальнейшем следующее предложение в случае $\lambda = \lambda_n$.

Предложение 9. Функции $AT_{\lambda}(f, x) + \eta(x, \lambda) + \tilde{\eta}(x, \lambda)$ для любого положительного $\tilde{\epsilon}$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|AT_{\lambda}(f, \cdot) + \eta + \tilde{\eta} - f\|_{C[\sigma_1 \tilde{\epsilon}, \pi - \sigma_1 \tilde{\epsilon}]} = 0.$$

Доказательство. Функция $\eta(x, \lambda) + \tilde{\eta}(x, \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$. При этом ее носитель удовлетворяет соотношению

$$\text{supp}(\eta + \tilde{\eta}) \subset \left[0, \frac{\pi}{|\mu|} - \frac{1}{|\mu|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{|\tilde{\mu}|} + \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \pi\right]. \quad (58)$$

При $\lambda > \ln \frac{4}{\sqrt{3}}$ в силу предложения 8 выполняются соотношения

$$\left[0, \frac{\pi}{|\mu|} - \frac{1}{|\mu|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right] \cap \left[\pi - \frac{\pi}{|\tilde{\mu}|} + \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \pi\right] = \emptyset, \quad (59) \\ \|\eta + \tilde{\eta}\|_{C\left[\sigma_1 \left(\frac{\pi}{|\mu|} - \frac{1}{|\mu|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right), \pi - \sigma_1 \left(\frac{\pi}{|\tilde{\mu}|} + \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)\right]} \leq \max(v, \tilde{v}) = O(e^{-\lambda} \sqrt{\lambda} \ln \lambda)$$

для произвольных граничных условий третьего рода. В случае же граничных условий первого рода на всем отрезке $[0, \pi]$ справедлива оценка

$$\|\eta + \tilde{\eta}\|_{C[0, \pi]} \leq \max(v, \tilde{v}) = \max(|AT_{\lambda}(f, 0)|, |AT_{\lambda}(f, \pi)|) O(1). \quad (60)$$

Теперь утверждение предложения 9 следует из предложения 7.

3.1. Оценка коэффициентов Фурье $AT_{\lambda}(f, x)$ с помощью интегрирования по частям

В следующем предложении получена оценка погрешности равномерного приближения частичными суммами Фурье “подправленных” значений операторов $AT_n^{\phi}(f, \cdot)$ таким образом, чтобы выполнялись краевые условия.

Предложение 10. Пусть $\rho_{\lambda_n} \geq 0$, $\rho_{\lambda_n} = o(\sqrt{\lambda_n}/\ln \lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_{\lambda_n}}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_{λ_n} в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (8) требуем еще выполнения условия $h(\lambda_n) \neq 0$). Пусть также $0 < \epsilon < 1$, $j(n) := \left\lceil \lambda_n^{\left(1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\right)} \right\rceil + 1$, функция f является непрерывной на $x \in [0, \pi]$, и функция q имеет ограниченную вариацию. Тогда для погрешности равномерной аппроксимации значениями операторов (28) справедлива оценка

$$\left\| AT_n^\phi(f, \cdot) + \eta(\cdot) - \tilde{\eta}(\cdot) - \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f, \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \cdot) \right\|_{C[0, \pi]} = \|f\|_{C[0, \pi]} \frac{n^{-2\epsilon \left(1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\right)}}{\epsilon} O(1). \quad (61)$$

Доказательство. Из асимптотических формул (35), (36) следует оценка

$$\|U_m\|_{L^2[0, \pi]} = O(1) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty. \quad (62)$$

Сначала рассмотрим случай, когда левые краевые условия задачи Штурма—Лиувилля такие же, как в задаче Коши (6). В силу (35) с точностью до нормировки имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) \left(\gamma(x, \lambda_m, h) \cos \sqrt{\lambda_m} x + \beta(x, \lambda_m, h) \frac{\sin \sqrt{\lambda_m} x}{\sqrt{\lambda_m}} \right) dx \right| + \\ &+ \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) \frac{\rho_{\lambda_m} (1 + \pi \rho_{\lambda_m})}{2\lambda_m} \left(1 + \frac{|h(\lambda_m)|}{\sqrt{\lambda_m}} \right) dx \right| = \\ &= \sqrt{\gamma^2(x, \lambda_m, h) + \frac{\beta^2(x, \lambda_m, h)}{\lambda_m}} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) (\sin \phi_{\lambda_m} \cos \sqrt{\lambda_m} x + \cos \phi_{\lambda_m} \sin \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \\ &+ \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right), \end{aligned}$$

где $\sin \phi_{\lambda_m} = \gamma(x, \lambda_m, h)/\sqrt{\gamma^2(x, \lambda_m, h) + \beta^2(x, \lambda_m, h)/\lambda_m}$. Продолжим оценку, интегрируя по частям интеграл Стильеса (см. [46], гл. VIII, § 6, п. 5):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| &= \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) \sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right) = \\ &= \left| -AT_\lambda(f, x) \frac{\sin'(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x)}{\lambda_m} \right|_0^\pi + AT_\lambda'(f, x) \frac{\sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x)}{\lambda_m} \Big|_0^\pi - \\ &- \frac{1}{\lambda_m} \int_0^\pi AT_\lambda''(f, x) \sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x) dx \Big| + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right). \end{aligned}$$

Опять воспользуемся асимптотическими формулами предложения 3 и вернемся к собственным функциям в первых двух слагаемых с подстановками:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| &= \left| -AT_\lambda(f, x) \frac{U_m'(x)}{\lambda_m} \right|_0^\pi + AT_\lambda'(f, x) \frac{U_m(x)}{\lambda_m} \Big|_0^\pi + \\ &+ \left| -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^\pi AT_\lambda''(f, x) \sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right). \end{aligned}$$

В силу (40)

$$\left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| = \frac{17\pi\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} \|f\|_{C[0, \pi]} + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right) = \|f\|_{C[0, \pi]} \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} O(1).$$

Функция $\eta(x, \lambda) + \tilde{\eta}(x, \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$. Учитывая (59), (60) и оценку $\text{mes}(\text{supp}(\eta + \tilde{\eta})) = O(e^{-\lambda})$, аналогичными рассуждениями устанавливаем оценку

$$|\widehat{AT}_{\lambda, m}[f, \eta]| = \|f\|_{C[0, \pi]} \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} O(1). \quad (63)$$

Теперь перейдем к оценке погрешности частичных сумм рядов Фурье для $AT_\lambda(f, \cdot)$. Хорошо известна асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21) (см., например, [41], гл. 1, § 2, (2.12)). Поэтому, если мы будем для каждого $\lambda > 0$ брать номер собственного значения, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} \equiv \frac{\lambda \ln \lambda}{m^2} \leq m^{-1-\epsilon}$$

при некотором $0 < \epsilon < 1$, то погрешность аппроксимации каждой функции $AT_\lambda(f, \cdot)$ будет равномерно мажорироваться с помощью остатка сходящегося числового ряда $\sum_{m=1}^\infty m^{-1-\epsilon}$. Далее, продолжая оценку для достаточно больших λ и $0 < \epsilon < 1$.

Возьмем

$$j(\lambda) := \lceil \lambda^{1+\epsilon} \rceil + 1,$$

где $\epsilon := \frac{2\epsilon}{1-\epsilon} > 0$. В этом случае в силу (63), (62) найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$ справедлива оценка (61). Аналогично рассматривается случай левых краевых условий, как в задаче Коши (8). Предложение 10 доказано.

3.2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Выберем и зафиксируем некоторое $\epsilon > 0$. Определим $j(n)$ как в (30). В силу предложений 9 и 10 представим для любых $t \in [0, T]$ следующие функции с помощью оператора (28):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{A} \mathbb{T}_{n, j(n)}^\phi(f(\cdot, t), x) = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f(\cdot, t), \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, x) = f(x, t), \quad (64)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{A} \mathbb{T}_{n, j(n)}^\phi(\varphi, x) = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}_{n, m}^\phi[\varphi, \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, x) = \varphi(x). \quad (65)$$

Рассмотрим семейство смешанных задач, зависящих от параметра λ_n , вида

$$u_{\lambda_n t} - u_{\lambda_n x x} + q(x) u_{\lambda_n} = \mathbb{A} \mathbb{T}_{n, j(n)}^\phi(f(\cdot, t), x), \quad (66)$$

$$u_{\lambda_n}(0, t) \cos \alpha + u_{\lambda_n x}(0, t) \sin \alpha = 0, \quad (67)$$

$$u_{\lambda_n}(\pi, t) \cos \beta + u_{\lambda_n x}(\pi, t) \sin \beta = 0, \quad (68)$$

$$u_{\lambda_n}(x, 0) = \mathbb{A} \mathbb{T}_{n, j(n)}^\phi(\varphi, x). \quad (69)$$

Функция (69) и правая часть уравнения (66) имеют абсолютно непрерывную производную по x . Каждая задача (66)–(69) имеет единственное классическое решение, допускающее после удовлетворения начальным условиям согласно методу разделения переменных разложение в равно-

мерно сходящийся на прямоугольнике $[0, \pi] \times [0, T]$ ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (19)–(21), который в случае $j(n) < \infty$ превращается в конечную сумму:

$$u_{\lambda_n}(x, t) = \sum_{m=0}^{j(n)} \left(\widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[\varphi, \eta] e^{-\hat{\lambda}_m t} + \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau \right) U_m(q, \alpha, \beta, x). \quad (70)$$

В силу (29), (58)–(60) мера носителя ограниченной функции $\eta + \tilde{\eta}$ убывает, как $O(e^{-\lambda_n})$. Значит, каждое слагаемое $\int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau$ в коэффициенте функции $U_m(q, \alpha, \beta, x)$ обладает свойством

$$\int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[f(\cdot, \tau)] d\tau - \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau = O(e^{-\lambda_n}).$$

И в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда влияние “исправления” (29) краевых условий $\eta(x, \lambda_n) + \tilde{\eta}(x, \lambda_n)$ для правой части уравнения (1) в третьем слагаемом (70) можно оценить как $O\left(e^{\frac{-\lambda_n}{2}}\right)$. Поэтому в силу (24), (25), (58)–(60), предложений 9, 10 и [13, § 34] получаем

равномерную на прямоугольнике $[\sigma_1 \tilde{\epsilon}, \pi - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\epsilon}] \times [0, T]$ сходимость решений задач (66)–(69) к решению смешанной краевой задачи (1)–(4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\lambda_n}(x, t) = u(x, t).$$

Другими словами, любая подпоследовательность $u_{\lambda_{n_j}}(x, t)$ при $j \rightarrow \infty$ принадлежит классу эквивалентных последовательностей, представляющему собой согласно определению 2 обобщенную функцию, являющуюся обобщенным решением смешанной краевой задачи (1)–(4). Теорема 1 доказана.

Доказательство предложения 1. В окрестности любого из нулей $x_{k,n}$ имеем оценку

$$l'_{k,n}(x - \phi_n) = o(1).$$

Возьмем нормированную собственную функцию U_m задачи Штурма—Лиувилля (19)–(21), умножим ее на тождество (37), а тождество (19) на функцию $l_{k,n}(x - \phi_n)$:

$$l_{k,n}(x - \phi_n)''(x) U_m(x) + \frac{2}{(x - x_{k,n})} l'_{k,n}(x - \phi_n)(x) U_m(x) + (\lambda_n - q(x)) l_{k,n}(x - \phi_n) U_m(x) \equiv 0, \quad (71)$$

$$l_{k,n}(x - \phi_n) U_m''(x) + (\hat{\lambda}_m - q(x)) l_{k,n}(x - \phi_n) U_m(x) \equiv 0.$$

Вычтем из первого тождества второе:

$$(l'_{k,n}(x - \phi_n)(x) U_m(x) - l_{k,n}(x - \phi_n) U_m'(x))' + \frac{2}{(x - x_{k,n})} l_{k,n}(x - \phi_n)'(x) U_m(x) + (\lambda_n - \hat{\lambda}_m) l_{k,n}(x - \phi_n) U_m(x) \equiv 0.$$

Понимая все несобственные интегралы в смысле главного значения по Коши, проинтегрируем полученное тождество по x в пределах от 0 до π . Отсюда получаем (32). Предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Определим функцию

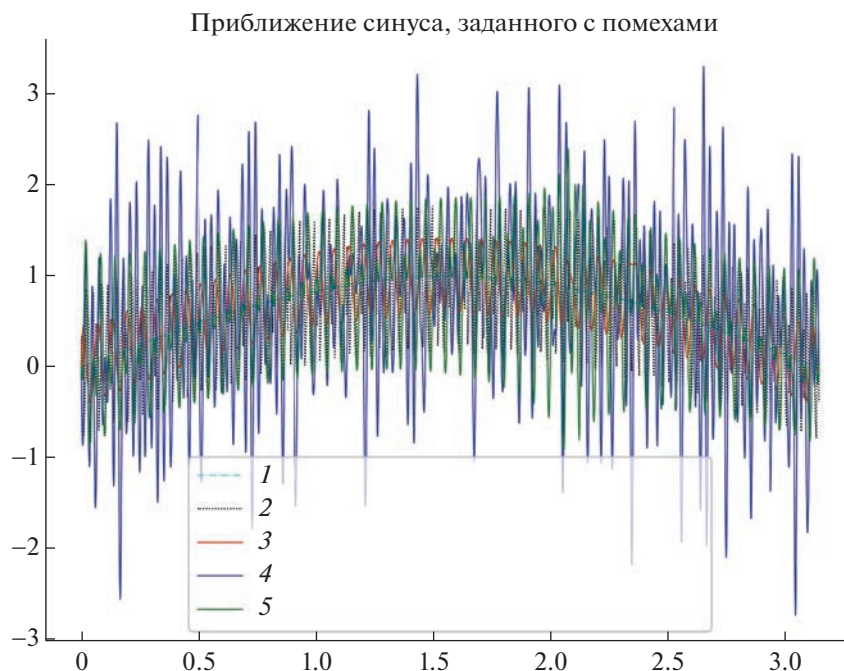
$$\Phi_{k,n,m}(x) := \int_{x_{k,n}}^x l_{k,n}(\xi - \phi_n) U_m(\xi) d\xi. \quad (72)$$

В окрестности любого из нулей $x_{k,n}$, определенных соотношениями (9), в формуле Тейлора используем остаточный член в форме Лагранжа и получаем оценку

$$s'_{k,\lambda_n}(x) = O(x - x_{k,n}).$$

Учитывая этот факт и предложение 6, подстановкой убеждаемся, что функция (72) удовлетворяет условиям задачи Коши (33). Отсюда получаем представление (34).

Предложение 2 доказано.



Фиг. 1. Сравнение поведения классического метода Фурье и нового метода для негладких начальных условий: 1 — точное решение для начальных условий без шума, 2 — для начальных условий с шумом, 3 — с помощью $A_n(f, x)$ для сигналов с шумом, 4 — метод Фурье сигналов с шумом, 5 — с помощью $L_n(f, x)$ для сигналов с шумом.

4. РЕЗУЛЬТАТ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Известно (см., например, [47–49]), что ряды Фурье непрерывных функций могут расходиться на довольно представительном множестве. В случае, когда непрерывные начальные условия или неоднородность уравнения смешанной краевой задачи не допускают представления своими рядами Фурье, применение методов разделения переменных невозможно в принципе.

Для реализации численного эксперимента используем классический пример расходящегося в точке ряда Фурье, построенный методом скользящего горба в виде лакунарного ряда. Такой ряд обладает свойством, что каждое его слагаемое имеет гармонику ряда Фурье, принимающую значение в точке расходимости растущее вместе с номером гармоники. В то время как остальные гармоники с меньшими и большими номерами остаются ограниченными. На фиг. 1 продемонстрирована возможность предлагаемого метода справляться с отсутствием гладкости в начальных условиях, исключающих возможность применения классического метода Фурье в принципе. Начальные условия при $t = 0$ в примере численного эксперимента (их график на фиг. 1 изображен пунктиром) подобраны в виде описанной ранее гармоники метода скользящего горба. На фиг. 1 видно, что соответствующие частичные суммы решений ведут себя по разному. График приближения при $n = 200$, $m = 300$ решения при $t = 1$ с помощью классических сумм Фурье изображен синим цветом, а график частичной суммы того же порядка решения (31), полученного с помощью значений операторов (28), — красным. Поэтому при реализации метода скользящего горба в пределе получим неограниченно разошедшийся ряд классического решения и точное обобщенное решение (31) для негладких начальных условий в виде фрактала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krivoshein A., Skopina M. Multivariate sampling-type approximation // Anal. Appl. 2017. Т. 15. № 4. С. 521–542.
2. Richardson M., Trefethen L. A sinc function analogue of Chebfun // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 33. № 5. P. 2519–2535.
3. Шмуклер А.И., Шульман Т.А. О некоторых свойствах рядов Котельникова // Изв. вузов. Матем. 1974. Вып. 3. С. 93–103.

4. Butzer P.L., Ferreira P.J.S.G., Higgins J.R., Saitoh S., Schmeisser G., Stens R.L. Interpolation and Sampling: E.T. Whittaker, K. Ogura and Their Followers // J. Fourier Anal. Appl. 2010. P. 1–35.
<https://doi.org/10.1007/s00041-010-9131-8>
5. Zayed A. A generalized sampling theorem with the inverse of an arbitrary square summable sequence as sampling points // J. Fourier Anal. Appl. 1996. V. 2. № 3. P. 303–314.
6. Schmeisser G., Stenger F. Sinc Approximation with a Gaussian Multiplier // Sampl. Theor. Signal Proces. 2007. V. 6. P. 199–221.
7. Трынин А.Ю. Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6. P. 66–78.
8. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи матем. наук. 1998. V. 53. № 6. P. 53–128.
9. Дьяченко М.И. Асимптотика сумм косинус-рядов с коэффициентами дробной монотонности // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 6. С. 865–874 [M.I. Dyachenko, Math. Notes. 2021. V. 110. № 6. P. 894–902].
<http://mi.mathnet.ru/mz13180>;
<https://doi.org/10.1134/S0001434621110250>
10. Голубов Б.И. Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной p -вариации // Изв. вузов. Матем. 2012. Т. 56. № 6. С. 3–13 [B.I. Golubov, Russian Math. 2012. V. 56. № 6. P. 1–10].
<https://doi.org/10.3103/S1066369X12060011>
11. Новиков И.Я., Скопина М.А. Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые? // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 6. С. 950–953 [I.Ya. Novikov, M.A. Skopina, Math. Notes. 2012. V. 91. № 6. P. 895–898].
<https://doi.org/10.4213/mzm9392>
12. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1954.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
14. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Физматлит, Наука, 1965.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
17. Макаова Р.Х. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // Вестн. Самарского. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. Науки. 2017. Т. 21. № 4. 651–664.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1574>
18. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179 [A.I. Kozhanov, L.S. Pulkina, Differ. Equ. 2006. V. 42. № 9. P. 1233–1246].
<https://doi.org/10.1134/S0012266106090023>
19. Абдуллаев О.Х. Краевая задача для нагруженного уравнения эллиптического-гиперболического типа в двусвязной области // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. Т. 1. № 8. С. 33–48.
<https://doi.org/10.18454/2079-6641-2014-8-1-33-48>
20. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Матем. 2012. Т. 56. № 4. С. 74–83 [O.Kh. Abdullaev, Russian Math. 2012. V. 56. № 4. P. 62–69].
<https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081>
21. Тарасенко А.В. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. Т. 5. № 21. С. 263–267.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu825>
22. Балкизов Ж.А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказ. матем. журн. 2016. Т. 18. № 2. С. 19–30.
23. Водахова В.А., Балкизова А.Х. Краевая задача для модельного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 28. № 3. С. 6–15.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-28-3-6-15>
24. Макаова Р.Х. Краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка с производной в граничных условиях // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37. № 4. С. 38–44.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-37-4-38-44>
25. Андреев А.А., Огородников Е.Н. О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2000. Т. 9. С. 32–36.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu28>
26. Жура Н.А., Солдатов А.П. Краевая задача для гиперболической системы первого порядка в двумерной области // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 83–108 [N.A. Zhura, A.P. Soldatov, Izv. Math. 2017. V. 81. № 3. P. 542–567].
<https://doi.org/10.4213/im8442>

27. Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 8–19.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19>
28. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для парабола-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Матем. 2015. Т. 59. № 6. С. 31–42 [K.B. Sabitov, Russian Math. 2015. V. 59. № 6. P. 23–33].
<https://doi.org/10.3103/S1066369X15060055>
29. Кожанов А.И., Дюжеева А.В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 423–434.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1859>
30. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Балансно-характеристические разностные схемы для уравнений параболического типа // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 94–105.
<https://doi.org/10.20948/mm-2020-04-07>
31. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
32. Сушков А.С. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей одну краевую задачу гиперболического типа // Челяб. физ.-матем. журн. 2019. Т. 4. № 3. С. 333–344.
<https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14306>
33. Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667 [A.S. Kholodov, Ya.A. Kholodov, Comput. Math. Math. Phys. 2006. V. 46. № 9. P. 1560–1588].
<https://doi.org/10.1134/S0965542506090089>
34. Комурджшивили О.П. Разностные схемы для решения многомерных уравнений и систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 6. С. 980–987 [O.P. Komurdzhishvili, Comput. Math. Math. Phys. 2007. V. 47. № 6. P. 936–942].
<https://doi.org/10.1134/S096554250706005X>
35. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1476–1492 [A.S. Kholodov, Comput. Math. Math. Phys. 1978. V. 18. № 6. P. 116–132].
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(55\)90141-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(55)90141-6)
36. Холодов Я.А., Холодов А.С., Цыбулин И.В. Построение монотонных разностных схем для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 30–49 [Ya.A. Kholodov, A.S. Kholodov, I.V. Tsybulin, Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. № 8. P. 1226–1246].
<https://doi.org/10.1134/S0965542518080110>
37. Трынин А.Ю. Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 10. С. 141–158.
38. Трынин А.Ю. О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 4. С. 232–256.
39. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950.
40. Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. Theory of Distributions. The sequential approach. Amsterdam: Elsevier Sci., 1973.
41. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, Физматлит, 1988.
42. Трынин А.Ю. Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма–Лиувилля // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 3. С. 662–675.
43. Трынин А.Ю. Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 11. С. 61–108.
44. Трынин А.Ю. Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 4. С. 133–143.
45. Трынин А.Ю. Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 4. С. 116–129 [A. Yu. Trynin, Ufa Math. J. 2013. V. 5. № 4. P. 112–124].
<https://doi.org/10.13108/2013-5-4-112>
46. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
47. Олевский А.М. Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 1. С. 28–31.
48. Буздалин В.В. Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве // Матем. сб. 1974. Т. 95. № 1. С. 84–107 [V.V. Buzdalín, Sb. Math. 1974. V. 24. № 1. P. 79–102].
<https://doi.org/10.1070/SM1974v024n01ABEH001906>
49. Казарян К.С. Расходящиеся ортогональные ряды Фурье // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 985–1008 [K.S. Kazarian, Sb. Math. 1992. V. 73. № 2. P. 355–377].
<https://doi.org/10.1070/SM1992v073n02ABEH002550>

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УМЕРЕННО ДЛИННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

© 2023 г. Х. Г. Умаров^{1,2,*}¹ 364061 Грозный, пр-т М. Эсамбаева, 13, АН Чеченской Республики, Россия² 364068 Грозный, ул. С. Кишиевой, 33, Чеченский государственный педагогический университет, Россия

*e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.
Переработанный вариант 21.12.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, моделирующего умеренно длинные продольные волны малой амплитуды в вязкоупругом стержне, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси, для которых существуют пределы на бесконечности. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке. Библ. 11.

Ключевые слова: продольные волны в вязкоупругом стержне, нелинейные уравнения соболевского типа, глобальное решение, разрушения решения.

DOI: 10.31857/S0044466923070177, EDN: VTFKPL

ВВЕДЕНИЕ

Распространение умеренно длинных продольных волн малой амплитуды в вязкоупругом стержне с учетом дисперсии и диссипации моделируется [1, § 3.1, (3.1.16)], [2] нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных:

$$u_{tt} - \alpha u_{tx} + \beta u_{xx} - u_{ttx} - u_{ttxx} + \gamma u_{txxx} - \delta u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0, \quad (0.1)$$

$$(t, x) \in R_+^1 \times R^1, R_+^1 =]0, +\infty[, R^1 =]-\infty, +\infty[,$$

где $u = u(t, x)$ — продольная деформация; $u_y = \partial_y u = du/dy$ — символы дифференцирования по переменной y ; коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — неотрицательные постоянные. (Продольные волны называются умеренно длинными, если длина волны существенно больше характерного поперечного размера стержня.)

Неразрешенное относительно старшей временной производной уравнение (0.1) является уравнением соболевского типа с младшими в обобщенном смысле членами [3, гл. 2, § 2], получившимся из уравнения, выведенного в [2] и для которого рассмотрена задача Коши в [4], добавлением как старших: γu_{txxx} и δu_{xxxx} , так и младших: αu_{tx} и βu_{xx} , членов уравнения, что, как отмечается в [5], может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши.

Задача Коши для уравнения (0.1) исследуется в пространстве $C[R^1]$ (см. [6, гл. VIII, § 1]) непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \rightarrow \pm\infty$ и норма которого $\|g_C\| = \sup_{x \in R^1} |g(x)|$, полагая, что начальные функции:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^1, \quad (0.2)$$

и искомое классическое решение $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \bar{R}_+^1 \times R^1$, $\bar{R}_+^1 = [0, +\infty[$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C[R^1]$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функ-

ция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка, и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Пусть $C^{(k)}[R^1] = \{g(x) \in C[R^1]: g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C[R^1]\}$, $k = 1, 2, \dots$, — подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C[R^1]$. Напомним, что в пространстве $C[R^1]$ [6, гл. VIII, § 1], [7, § 2] дифференциальный оператор ∂_x с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[R^1]$ порождает сжимающую сильно непрерывную группу $U(\tau; \partial_x)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 левых сдвигов: $U(\tau; \partial_x)g(x) = g(x + \tau)$, а оператор ∂_x^2 с областью определения $D(\partial_x^2) = C^{(2)}[R^1]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t; \partial_x^2)$, $t \in \bar{R}_+^1$, класса C_0 : $U(t; \partial_x^2)g(x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x + \xi) d\xi$; причем для резольвент $R(\lambda; \partial_x) = (\lambda I - \partial_x)^{-1}$, $R(\lambda; \partial_x^2) = (\lambda I - \partial_x^2)^{-1}$ справедливы оценки $\|R(\lambda; \partial_x)\|, \|R(\lambda; \partial_x^2)\| \leq 1/\lambda$ при $\lambda > 0$.

Исследование задачи Коши (0.1), (0.2) проведем по следующей схеме: прежде чем приступить к установлению основных результатов статьи, убедимся, что постановка задачи Коши (0.1), (0.2) корректна и локальное по времени классическое решение ее существует. С этой целью 1) для соответствующего (0.1) линейного однородного уравнения, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций, найдем решение задачи Коши, отмечая используемые в дальнейшем оценки норм вспомогательных операторнозначных функций; и 2) для задачи Коши (0.1), (0.2) найдем временной отрезок $[0, t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму в $C[R^1]$ этого локального решения. Далее, 3) предполагая, что классическое решение $u = u(t, x)$ уравнения (0.1) и его частная производная $u_t = u_t(t, x)$ для всех значений временной переменной на отрезке $t \in [0, t_1]$ по переменной x принадлежат пересечению пространства $C[R^1]$ с пространством Соболева $W_2^1(R^1)$:

$$u(t, x), u_t(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1), \quad t \in [0, t_1]; \quad (0.3)$$

найдем условия существования глобального решения ($t \geq 0$), и разрушения на конечном временном отрезке решения задачи Коши (0.1), (0.2).

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (0.1):

$$(I - \partial_x^2)u_{tt} - (\alpha \partial_x + \partial_x^2 - \gamma \partial_x^3)u_t + (\beta \partial_x^2 - \delta \partial_x^4)u = 0. \quad (1.1)$$

Введем в уравнение (1.1) новую неизвестную функцию

$$v(t, x) = u(t, x) - u_{xx}(t, x), \quad (1.2)$$

полагая, что частные производные u_{xx} , u_{txx} непрерывны при $t \in \bar{R}_+^1$. Из замены (1.2), при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[R^1]$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v = v(t, x)$: $v|_{t=0} = v_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $v_t|_{t=0} = v_1(x) = \psi(x) - \psi''(x)$, и, используя принадлежность положительной полуоси резольвентному множеству дифференциального оператора ∂_x^2 , выразить решение $u(t, x)$ уравнения (1.1) через новую неизвестную функцию $v(t, x)$:

$$u(t, x) = R(1; \partial_x^2)v(t, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} v(t, x + s) ds. \quad (1.3)$$

В результате замены (1.2) получим эквивалентное (1.1) интегродифференциальное уравнение

$$v_{tt} - Av_t + Bv = 0, \quad (1.4)$$

где $A = \gamma \partial_x - I + A_1$, $A_1 = A_{11} + A_{12}$, $A_{11} = c_1 R(1; \partial_x)$, $c_1 = \alpha - \gamma$, $A_{12} = c_2 R(1; \partial_x^2)$, $c_2 = 1 - c_1$, $D(A) = C^{(1)}[R^1]$; $B = \delta \partial_x^2 + B_1$, $B_1 = c_3 [-I + R(1; \partial_x^2)]$, $c_3 = \beta - \delta$, $D(B) = C^{(2)}[R^1]$.

Оператор A получен возмущением ограниченным оператором A_1 производящего оператора $\gamma \partial_x - I$ сильно непрерывной группы $U(\tau; \gamma \partial_x - I)g(x) = e^{-\tau}g(x + \gamma\tau)$ класса C_0 , поэтому (см. [7, § 8]) он порождает группу $U(\tau; A)g(x) = e^{-\tau}U(\tau; A_1)g(x + \gamma\tau)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , для которой справедлива оценка нормы

$$\|U(t; A)\| \leq e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \|A_1\|^k \leq e^{c_4 t}, \quad c_4 = |c_1| + |c_2|, \quad t \in \bar{R}_+^1. \quad (1.5)$$

В уравнении (1.4) произведем замену неизвестной функции

$$w(t, x) = U(-t/2; A)v(t, x), \quad (1.6)$$

тогда можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t, x)$: $w|_{t=0} = w_0(x) = v_0(x)$, $w_t|_{t=0} = w_1(x) = -Av_0(x)/2 + v_1(x)$, и выразить решение $v(t, x)$ уравнения (1.4) через новую неизвестную функцию $w(t, x)$:

$$v(t, x) = U(t/2; A)w(t, x). \quad (1.7)$$

В результате замены (1.6) получим эквивалентное (1.4) интегродифференциальное уравнение

$$w_{tt} = Qw, \quad (1.8)$$

в котором операторный коэффициент $Q = A^2/4 - B = (\gamma^2/4 - \delta)\partial_x^2 - \gamma/2\partial_x + P$, здесь $4P = (1 - 2\gamma c_1 + 4c_3)I + 2(\gamma - c_1)R(1; \partial_x) - 2((1 + \gamma)c_2 + 2c_3)R(1; \partial_x^2) + c_1^2 R^2(1; \partial_x) + 2c_1 c_2 R(1; \partial_x)R(1; \partial_x^2) + c_2^2 R^2(1; \partial_x^2)$ — ограниченный оператор: $D(P) = C[R^1]$, притом $D(Q) = C^{(2)}[R^1]$.

Предполагая выполнение условия $\gamma^2 > 4\delta$, уравнение (1.8) можно переписать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = QW, \quad (1.9)$$

где $Q = Q_0 + Q_1$: $Q_0 = (c_5/2\partial_x - \gamma/(2c_5))I$, $c_5 = \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}$, $D(Q_0) = C^{(2)}[R^1]$; $Q_1 = P - \gamma^2/(4c_5^2)I$, $D(Q_1) = C[R^1]$, а $W = W(t) : t \rightarrow w(t, x)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t \in \bar{R}_+^1$ и со значениями в пространстве $C[R^1]$.

Начальные условия для уравнения (1.9) в $C[R^1]$ переписутся в виде

$$W|_{t=0} = \Phi, \quad W_t|_{t=0} = \Psi, \quad (1.10)$$

где $\Phi = w_0(x)$, $\Psi = w_1(x)$ — элементы пространства $C[R^1]$.

Оператор $Q_0 = (c_5/2)\partial_x - \gamma/(2c_5)I$ порождает в пространстве $C[R^1]$ группу $U(\tau; Q_0)g(x) = e^{-\gamma\tau/(2c_5)}g(x + c_5\tau/2)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , поэтому квадрат этого оператора, т.е. оператор Q_0 , является [7, § 1.5] производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; Q_0)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , для которой справедливо представление

$$C(\tau; Q_0)g(x) = \frac{1}{2}[U(\tau; Q_0) + U(-\tau; Q_0)]g(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-\gamma\tau/(2c_5)}g\left(x + \frac{c_5}{2}\tau\right) + e^{\gamma\tau/(2c_5)}g\left(x - \frac{c_5}{2}\tau\right)\right]$$

и оценка нормы $\|C(t; Q_0)\| \leq \text{ch}(\gamma t/(2c_5))$, $t \in \bar{R}_+^1$.

Ограниченный оператор Q_1 порождает [7, § 4.2] косинус оператор-функцию $C(\tau; Q_1)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , для которой справедливы представление $C(\tau; Q_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} Q_1^k$, в котором степен-

ной ряд сходится равномерно по $\tau \in R^1$ на каждом конечном отрезке, и оценка нормы $\|C(t; Q_1)\| \leq \text{ch}(c_6 t)$, $t \in \bar{R}_+^1$, где $c_6^2 = |\gamma - c_1|/2 + (c_1 + c_2)^2/4 + |(1 + \gamma)c_2/2 + c_3| + |c_3 - \gamma c_1/2 - \gamma^2/(4c_5^2) + 1/4|$.

Возмущение ограниченным оператором Q_1 сохраняет способность оператора Q_0 порождать косинус оператор-функцию класса C_0 [7, § 8.2], поэтому оператор Q является производящим оператором косинус оператор-функции класса C_0 , для которой на элементах $g(x) \in D(Q) = C^{(2)}[R^1]$ и для всех $\tau \in R^1$ справедливо представление

$$C(\tau; Q)g(x) = C(\tau; Q_0)g(x) + \frac{\tau^2}{2} \int_0^1 j_1(\tau\sqrt{1-s^2}, Q_0) C(\tau s; Q_1)g(x) ds, \quad (1.11)$$

где $j_1(\tau, Q_0)g(x) = (4/\pi) \int_0^1 \sqrt{1-r^2} C(\tau r; Q_0)g(x) dr$.

Для нормы косинус оператор-функции (1.11), используя табличные интегралы, выводим цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \|C(t; Q)\| &\leq \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{2c_5 t}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\gamma t \sqrt{1-s^2}}{2c_5}\right) \text{ch}(c_6 ts) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \\ &= \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{\pi c_5 t}{\gamma} I_{1/2}((c_7 + c_6)t) I_{1/2}((c_7 - c_6)t) = \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{\pi c_5^2 t}{\gamma^2} \text{sh}((c_7 + c_6)t) \text{sh}((c_7 - c_6)t) \leq \quad (1.12) \\ &\leq \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{2c_5^2 t}{\gamma^2} \text{ch}(2c_7 t) = h_1(t), \quad c_7 = \sqrt{c_6^2 + \frac{\gamma^2}{4c_5^2}}, \quad t \in \bar{R}_+^1. \end{aligned}$$

С косинус оператор-функцией (1.11) связана [7, § 1.4] синус оператор-функция:

$$S(\tau; Q)g(x) = \int_0^\tau C(\xi; Q)g(x) d\xi, \quad g(x) \in C[R^1], \quad (1.13)$$

и линейное многообразие $C_1[R^1] = \{g(x) \in C[R^1] : C(\tau; Q)g(x) \in C^{(1)}(R^1; C[R^1])\}$, т.е. подмножество $C_1[R^1] \subset C[R^1]$ состоит из тех функций из $C[R^1]$, для которых функция $C(\tau; Q)g(x) : R^1 \rightarrow C[R^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ . Очевидно, что $D(Q) \subset C_1[R^1]$.

Из соотношений (1.13) и (1.12) для $t \in \bar{R}_+^1$ выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t; Q)\| \leq \frac{2c_5}{\gamma} \text{sh}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{c_5^2}{2\gamma^2 c_7^2} (1 + 2c_7 t \text{sh}(2c_7 t)) = h_2(t). \quad (1.14)$$

Задача Коши (1.9), (1.10) равномерно корректна [7, § 1.4] только тогда, когда оператор Q является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; Q)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (1.9), (1.10) дается формулой

$$W(t) = C(t; Q)\Phi + S(t; Q)\Psi, \quad t \in \bar{R}_+^1,$$

для любых $\Phi \in D(Q)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$.

Теперь, производя обратные замены (1.7) и (1.3), находим решение задачи Коши для уравнения (1.1):

$$u(t, x) = U(t/2; A)\{C(t; Q)\varphi(x) + S(t; Q)[\psi(x) - A\varphi(x)/2]\}. \quad (1.15)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Пусть выполняется условие $\gamma^2 > 4\delta$ и пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству $C[R^1]$: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}[R^1]$, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (1.1) равномерно корректна, классическое решение дается формулой (1.15) и для него в пространстве $C[R^1]$ при $t \in \bar{R}_+^1$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq e^{c_4 t/2} \left[h_1(t) \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| + h_2(t) \left(\sup_{x \in R^1} |\psi(x)| + \gamma \sup_{x \in R^1} |\varphi'(x)| + (|c_1| + |c_2| + 1) \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right) \right],$$

в которой функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ из (1.12) и (1.14) соответственно.

Замечание 1. От начальной функции $\psi(x)$ требуем заведомо большую гладкость, чем нужно для существования решения задачи Коши для уравнения (1.9), чтобы не заниматься описанием подмножества $C_1[R^1]$ пространства $C[R^1]$.

Замечание 2. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (1.9), (1.10) принадлежит $C^{(2)}(\bar{R}_+^1; C[R^1])$ и для него $QW(t) \in C(\bar{R}_+^1; C[R^1])$, поэтому решение $u(t, x) = (I - \partial_x^2)^{-1} U(t/2; A) w(t, x)$ уравнения (1.1) принадлежит $C^{2,4}(\bar{R}_+^1, R^1)$.

2. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Применим к обеим частям уравнения (0.1) линейный ограниченный оператор $R(1; \partial_x^2)$, тогда получим эквивалентное (0.1) нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$u_{tt} - Au_t + Bu + [R(1; \partial_x^2) - I]f(u) = 0, \quad (2.1)$$

в котором операторные коэффициенты A , B такие же, как и в уравнении (1.4), а $f(\cdot)$ — оператор суперпозиции: $f(g) = (g(x))^2$, $g(x) \in C[R^1]$.

Уравнение (2.1) заменой $u(t, x) = U(t/2; A)w(t, x)$ преобразуется к абстрактному полулинейному уравнению

$$W_{tt} = QW + F(t, U(t/2; A)W), \quad (2.2)$$

при этом оператор Q такой же, как и в уравнении (1.9), а $F(t, \cdot)$ — заданный нелинейный оператор:

$$F(t, g) = U(-t/2; A)[I - R(1; \partial_x^2)]f(g). \quad (2.3)$$

При $t \in \bar{R}_+^1$ справедлива оценка нормы оператора $F(t, \cdot)$ в пространстве $C[R^1]$:

$$\|F(t, g)\|_C \leq 2e^{(c_4+1)t/2} \|g\|_C^2. \quad (2.4)$$

Ограниченность линейных операторов $U(-t/2; A)$ и $R(1; \partial_x^2)$ и непрерывная дифференцируемость оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций обеспечивают непрерывную дифференцируемость по Фреше оператора (2.3) в пространстве $C[R^1]$ и поэтому оператор $F(t, \cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Следовательно, найдется промежуток $[0, t_0[$, в котором абстрактная задача Коши (2.2), (1.10) для любых $\Phi \in D(Q)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$ имеет [8, § 3] единственное обобщенное решение $W = W(t)$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$W(t) = C(t; Q)\Phi + S(t; Q)\Psi + \int_0^t S(t-\tau; Q)F(\tau, U(\tau/2; A)W)d\tau. \quad (2.5)$$

Оценивая норму левой части уравнения (2.5) через норму ее правой части с учетом оценок (1.5), (1.12), (1.14), (2.4) и (0.3), выводим интегральное неравенство

$$\|W(t)\|_C \leq h_1(t)\|\Phi\|_C + h_2(t)\|\Psi\|_C + 2 \int_0^t h_2(t-\tau) e^{(c_4+1)\tau/2} \|W(\tau)\|_C^2 d\tau,$$

где $\|\Psi\|_C = \sup_{x \in R^1} |w_1| = 2^{-1} \left[(1+c_4)\|\Phi\|_C + \gamma \sup_{x \in R^1} |\varphi'(x) - \varphi'''(x)| \right] + \sup_{x \in R^1} |\psi(x) - \psi''(x)|$ и $\|\Phi\|_C = \sup_{x \in R^1} |w_0| = \sup_{x \in R^1} |\varphi(x) - \varphi''(x)|$.

Пусть $h_3(t) = h_1(t)\|\Phi\|_C + h_2(t)\|\Psi\|_C$ и $c_8 = 2 \max_{\tau \in [0,t], t \in [0,t_0]} h_2(t-\tau) e^{(c_4+1)\tau/2}$, перепишем интегральное неравенство в виде

$$\|W(t)\|_C \leq h_3(t) + c_8 \int_0^t \|W(\tau)\|_C^2 d\tau. \quad (2.6)$$

Из неравенства (2.6) выводим [9, §1.3] оценку нормы в пространстве $C[R^1]$ обобщенного решения уравнения (2.2):

$$\|W(t)\|_C \leq h_3(t) \left(1 - c_8 \int_0^t h_3(\tau) d\tau \right)^{-1} = h_4(t),$$

на отрезке $t \in [0, t_1]$, где

$$t_1 = \sup_{t \in [0, t_0]} \left\{ \int_0^t h_3(\tau) d\tau < 1/c_8 \right\}.$$

Найденное обобщенное решение $W(t)$, $t \in [0, t_1]$, будет классическим решением абстрактной задачи Коши (2.2), (1.10), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что является следствием [8] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(t, \cdot)$, при условии принадлежности начальных данных Φ и Ψ соответственно множествам $D(Q)$ и $C_1[R^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть выполняется условие $\gamma^2 > 4\delta$ и пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}[R^1]$, тогда на временном отрезке $[0, t_1]$ существует единственное классическое решение $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) в пространстве $C[R^1]$, для которого справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq e^{c_4 t/2} h_4(t) = h_5(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.7)$$

В дальнейших рассмотрениях локальное по временной переменной классическое решение $u = u(t, x)$ уравнения (0.1) принадлежит не только пространству $C[R^1]$, но и пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ на отрезке $[0, t_1]$. (Напомним, что скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом обозначаются соответственно через $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx$ и $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(R^1)$ с пространством Соболева $W_2^1(R^1)$, справедлива оценка $\|g\|_C \leq \|g\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(g(x))^2 + (g'(x))^2] dx \right)^{1/2}$, причем, если $g(x) \in C^{(2)}(R^1)$, то [10] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равен нулю.)

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Теорема 3. Пусть параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и начальные функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap W_2^1(R^1)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha > 1, \quad \gamma > 1 + \delta, \quad \gamma^2 > 4\delta;$$

$$\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi') + 2(\psi', \varphi''),$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \frac{\delta}{\gamma-1} (\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2) a_1 \geq \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + \frac{2\delta}{\gamma-1} [(\psi, \varphi') + (\psi', \varphi'')] a_1,$$

где $a_1 = 1 + e^{3t_1/(\gamma-1)}$, тогда из существования классического решения $u = u(t, x)$, удовлетворяющего условию $u(t, x), u_t(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$ на отрезке $t \in [0, t_1]$, следует существование единственного глобального классического решения задачи Коши (0.1), (0.2), для которого в пространстве $C[R^1]$ справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq ae^{bt}, \quad a, b = \text{const}, \quad t \in \bar{R}_+^1.$$

(Постоянные a, b , зависящие от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и начальных функций $\varphi(x), \psi(x)$, определяются в ходе доказательства теоремы.)

Доказательство. Введем в рассмотрение функционал

$$y(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx = \|u\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.1)$$

Применяя к значениям производной функционала (3.1): $y'(t) = 2(u, u_t) + 2(u_x, u_{tx})$, и ее квадрата: $[y'(t)]^2$, неравенство Коши—Буняковского: $|(u, \psi)| \leq \|u\|_2 \|\psi\|_2$, и обозначая через

$$z(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2) dx = \|u_t\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1], \quad (3.2)$$

еще один функционал, связанный с уравнением (0.1), выводим вспомогательные оценки:

$$y'(t) \leq y(t) + z(t), \quad (3.3)$$

и

$$[y'(t)]^2 \leq 4y(t)z(t). \quad (3.4)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u_t = u_t(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_t\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 - \beta \|u_x\|_2^2 - \delta \|u_{xx}\|_2^2) + \|u_{tx}\|_2^2 - 2(uu_x, u_{tx}) = 0,$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0, t]$ и обозначая $E_1 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 - \beta \|\varphi'\|_2^2 - \delta \|\varphi''\|_2^2$, имеем

$$z(t) + 2 \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau = E_1 + \beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2 + 4 \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau. \quad (3.5)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, оценим абсолютную величину интеграла в правой части (3.5):

$$2 \left| \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau \right| \leq \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_x^2 dx + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau \leq$$

(применяя оценку (2.7) решения $u = u(t, x)$ на временном отрезке $[0, t_1]$)

$$\leq \int_0^t h_5^2(\tau) \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau \leq$$

(обозначая $\max_{\tau \in [0, t_1]} h_5^2(\tau) = c_9^2$)

$$\leq c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau.$$

Таким образом,

$$2 \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau \leq c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.6)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u_x = u_x(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2) = (u_t, u_x) + (u_{tx}, u_{xx}) + (u_{ttx}, u_{xxx}) + 2(uu_x, u_{xx})$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0, t]$, имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2 &= \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 + 2 \int_0^t (u_{tt}, u_x) d\tau + \\ &+ 2 \int_0^t (u_{ttx}, u_{xx}) d\tau + 2 \int_0^t (u_{tx}, u_{xx}) d\tau + 4 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первые два интеграла в правой части равенства (3.7) можно вычислить и затем оценить, применяя неравенство Коши—Буняковского:

1) используя равенство $(u_{tt}, u_x) = (u_t, u_x)_t - (u_t, u_{tx})$, имеем цепочку равенств и неравенств

$$2 \int_0^t (u_{tt}, u_x) d\tau = 2(u_t, u_x) - 2(\psi, \varphi') - \int_0^t u_t^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} d\tau \leq 2\|u_t\|_2 \|u_x\|_2 - 2(\psi, \varphi') \leq \|u_t\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 - 2(\psi, \varphi'); \quad (3.8)$$

2) аналогично, используя равенство $(u_{ttx}, u_{xx}) = (u_{tx}, u_{xx})_t - (u_{tx}, u_{txx})$, получаем цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (u_{ttx}, u_{xx}) d\tau &= 2(u_{tx}, u_{xx}) - 2(\psi', \varphi'') - \int_0^t u_{tx}^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} d\tau \leq 2\|u_{tx}\|_2 \|u_{xx}\|_2 - 2(\psi', \varphi'') \leq \\ &\leq \|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 - 2(\psi', \varphi''). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для третьего интеграла в правой части равенства (3.7), имеем

$$2 \int_0^t (u_{tx}, u_{xx}) d\tau \leq \int_0^t (\|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq \int_0^t z(\tau) d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (3.10)$$

Наконец, оценивая четвертый интеграл в правой части равенства (3.7), получаем

$$2 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau \leq \int_0^t (\|uu_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (3.11)$$

С учетом полученных оценок из равенства (3.7) выводим

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) \|u_x\|_2^2 + (\gamma - 1) \|u_{xx}\|_2^2 &\leq \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi, \varphi') - 2(\psi', \varphi'') + \\ &+ z(t) + \int_0^t z(\tau) d\tau + 2c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau + 3 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Откуда, полагая $\alpha > 1$ и $\gamma_1 = \gamma - 1 > 0$, и обозначая $c_{10} = \gamma_1^{-1} (\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi, \varphi') - 2(\psi', \varphi''))$, $H_1(t) = \gamma_1^{-1} \left(z(t) + \int_0^t z(\tau) d\tau + 2c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau \right)$, следует интегральное неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{10} + H_1(t) + 3\gamma_1^{-1} \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.12)$$

Из неравенства (3.12) при выполнении условия $c_{10} \geq 0$, т.е. $\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi') + 2(\psi', \varphi'')$, согласно лемме Гронуолла [9, § 1.1] следует оценка

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_2^2 &\leq c_{10} + H_1(t) + 3\gamma_1^{-1} \int_0^t [c_{10} + H_1(\tau)] e^{3\gamma_1^{-1}(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq c_{10} + H_1(t) + c_{10} e^{3\gamma_1^{-1}t} + 3\gamma_1^{-1} e^{3\gamma_1^{-1}t} \int_0^t H_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Интегрируя по частям, оценим на отрезке $[0, t_1]$ интеграл в правой части последнего неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_0^t H_1(\tau) d\tau &= \int_0^t z(\tau) d\tau + \tau \int_0^\tau z(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau z(\tau) d\tau + 2c_9^2 \left(\tau \int_0^\tau y(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau y(\tau) d\tau \right) = \\ &\leq (1 + t_1) \int_0^t z(s) ds + 2c_9^2 t_1 \int_0^t y(s) ds. \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства и обозначая $a_2 = \gamma_1^{-1} e^{3\gamma_1^{-1}t_1}$, $c_{11} = c_{10}(1 + \gamma_1 a_2)$, $c_{12} = \gamma_1^{-1}(1 + 3(1 + t_1)a_2)$, $c_{13} = 2\gamma_1^{-1}c_9^2(1 + 3t_1a_2)$ оценка (3.13) на отрезке $[0, t_1]$ примет вид

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{11} + \gamma_1^{-1} z(t) + c_{12} \int_0^t z(\tau) d\tau + c_{13} \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.14)$$

Применяя полученные оценки (3.6), (3.14) к равенству (3.5), имеем

$$\gamma_1^{-1} (\gamma - \delta - 1) z(t) \leq E_1 + c_{11}\delta + \beta y(t) + (c_{13}\delta + 2c_9^2) \int_0^t y(\tau) d\tau + (c_{12}\delta + 2) \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Полагая $\gamma > 1 + \delta$ и $E_1 + c_{11}\delta \geq 0$, т.е. $\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \gamma_1^{-1}\delta(\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2)(1 + \gamma_1 a_2) \geq \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + 2\gamma_1^{-1}\delta[(\psi, \varphi') + (\psi', \varphi'')](1 + \gamma_1 a_2)$, и обозначая $c_{14} = \gamma_1/(\gamma_1 - \delta)$, $c_{15} = c_{14}(E_1 + c_{11}\delta)$, $c_{16} = c_{14}\beta$, $c_{17} = c_{14}(c_{13}\delta + 2c_9^2)$, $c_{18} = c_{14}(c_{12}\delta + 2)$, $H_2(t) = c_{15} + c_{16}y(t) + c_{17} \int_0^t y(\tau) d\tau$, из соотношения (3.15) выводим интегральное неравенство

$$z(t) \leq H_2(t) + c_{18} \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Отсюда по лемме Гронуолла следует неравенство на отрезке $[0, t_1]$

$$z(t) \leq H_2(t) + c_{18} \int_0^t H_2(\tau) e^{c_{18}(t-\tau)} d\tau \leq H_2(t) + a_3 \int_0^t H_2(\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

где обозначено $a_3 = c_{18}e^{c_{18}t_1}$.

Интегрируя по частям, оценим при $t \in [0, t_1]$ интеграл в правой части (3.16):

$$\int_0^t H_2(\tau) d\tau \leq c_{15}t_1 + c_{16} \int_0^t y(\tau) d\tau + c_{17} \left(\tau \int_0^\tau y(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau y(\tau) d\tau \right) \leq c_{15}t_1 + (c_{16} + c_{17}t_1) \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16) и обозначая $c_{19} = c_{15}(1 + t_1 a_3)$, $c_{20} = c_{17} + (c_{16} + c_{17}t_1)a_3$, получаем

$$z(t) \leq c_{19} + c_{16}y(t) + c_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.18)$$

Интегрируя обе части неравенства (3.5) и учитывая неравенство (3.18), получаем интегральное неравенство

$$y(t) \leq c_{21} + c_{22} \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad (3.19)$$

где обозначено $c_{21} = y(0) + c_{19}t_1$, $c_{22} = (1 + c_{16} + c_{20}t_1)$.

Из неравенства (3.19) в силу леммы Гронуолла следует оценка

$$y(t) \leq c_{21}e^{c_{22}t}, \quad t \geq 0,$$

и, значит, классическое решение $u = u(t, x)$ при $t \geq 0$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ и поэтому справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq \|u\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{c_{21}} e^{c_{22}t/2}, \quad t \in \bar{R}_+^1,$$

обеспечивающая существование глобального решения задачи Коши (0.1), (0.2).

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 3 классическое решение $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) удовлетворяет требованиям (0.3): $u(t, x)$, $u_t(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, для всех $t \geq 0$.

4. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Предполагая выполнение требования (0.3): u , $u_t \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, $t \in [0, t_1]$, рассмотрим условия разрушения решения $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) на некотором временном отрезке $[0, t_2] \subseteq [0, t_1]$, другими словами, получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала $y(t) = \|u(t, \cdot)\|_{W_2^1}^2$ на отрезке $[0, t_2]$. Отрезок $[0, t_2]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялось неравенство $y(t) > 0$, которое следует из начального условия

$$y(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0. \quad (4.1)$$

Теорема 4. Пусть параметры α , β , γ , δ и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap W_2^1(R^1)$ удовлетворяют условиям $\gamma > \delta + 2$, $\gamma^2 > 4\delta$,

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + 2(\varphi, (\varphi')^2) > (\varphi', \alpha\psi + \psi') + \gamma(\varphi'', \psi'),$$

$$(1 + \alpha)\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi'' + \varphi' - \varphi) + 2(\psi', \varphi'),$$

$$\begin{aligned}
 & (\gamma - 2) \|\Psi\|_{W_2^1}^2 + a_5 \delta \left[(\alpha + 1) \|\Phi'\|_2^2 + \gamma \|\Phi''\|_2^2 \right] > \\
 & > (\gamma - 2) \left(\beta \|\Phi'\|_2^2 + \delta \|\Phi''\|_2^2 \right) + a_5 \delta [2(\Psi, \Phi'' + \Phi' - \Phi) + 2(\Psi', \Phi'')], \\
 & (\Phi, \Psi) + (\Phi', \Psi') > \frac{1}{2} a_7 \|\Phi\|_{W_2^1}^2 > 0,
 \end{aligned}$$

тогда время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: решение разрушается за конечное время T_0 и для времени существования решения справедлива оценка сверху

$$t_0 < T_0 = \frac{1}{c_{35}} \|\Phi\|_{W_2^1}^{-2\varrho},$$

при этом для функционала $y(t)$ имеет место оценка снизу

$$y(t) \geq \left(\|\Phi\|_{W_2^1}^{-2\varrho} - c_{35} t \right)^{-1/\varrho} e^{a_6 t / \varrho}.$$

(Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные a_5 , a_6 , a_7 , ϱ и c_{35} определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметров α , β , γ , δ и начальных функций $\Phi(x)$, $\Psi(x)$.)

Доказательство. Вычислим производную второго порядка функционала (3.1) и выразим ее значение через функционал (3.2):

$$\frac{1}{2} y''(t) + (u_{xx}, u_{tt}) - (u, u_{tt}) = z(t). \quad (4.2)$$

Учитывая уравнение (0.1) и интегрируя по частям, преобразуем третье слагаемое в левой части равенства (4.2)

$$(u, u_{tt}) = -\alpha(u_x, u_t) + \beta \|u_x\|_2^2 - (u_x, u_{tx}) + (u_{xx}, u_{tt}) - \gamma(u_{xx}, u_{tx}) + \delta \|u_{xx}\|_2^2 + 2(u, u_x^2). \quad (4.3)$$

Из равенств (4.2) и (4.3) следует представление

$$z(t) + \beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2 = \frac{1}{2} y''(t) + \alpha(u_x, u_t) + (u_x, u_{tx}) + \gamma(u_{xx}, u_{tx}) - 2(u, u_x^2), \quad (4.4)$$

из которого, в частности, можно найти значение

$$\frac{1}{2} y''(0) = \|\Psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\Phi'\|_2^2 + \delta \|\Phi''\|_2^2 + 2(\Phi, (\Phi')^2) - (\Phi', \alpha\Psi + \Psi') - \gamma(\Phi'', \Psi').$$

Потребуем, чтобы в дополнение к условию (4.1) выполнялись требования $y'(0) > 0$ и $y''(0) > 0$, т.е. $(\Phi, \Psi) + (\Phi', \Psi') > 0$ и $\|\Psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\Phi'\|_2^2 + \delta \|\Phi''\|_2^2 + 2(\Phi, (\Phi')^2) > \alpha(\Phi', \Psi) + (\Phi', \Psi') + \gamma(\Phi'', \Psi')$, тогда найдется отрезок $[0, t_3] \subseteq [0, t_2]$ на котором для функционала (3.1) справедливы неравенства

$$y(t) > 0, \quad y'(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad y''(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.5)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u = u(t, x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$(u_{tt}, u) + \alpha(u_t, u_x) - \beta \|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_2^2 - (u_{tt}, u_{xx}) + \gamma(u_{tx}, u_{xx}) - \delta \|u_{xx}\|_2^2 - 2(u, u_x^2) = 0,$$

откуда, интегрируя обе части по отрезку $[0, t]$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 + \int_0^t (u_{\tau\tau}, u) d\tau + \alpha \int_0^t (u_\tau, u_x) d\tau + \gamma \int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx}) d\tau = \\
 & = \frac{1}{2} \|\Phi'\|_2^2 + \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \delta \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \int_0^t (u_{\tau\tau}, u_{xx}) d\tau + 2 \int_0^t (u, u_x^2) d\tau.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Применяя соотношения $(u_{\tau\tau}, u) = (u_\tau, u)_\tau - \|u_\tau\|_2^2$ и $(u_{\tau\tau}, u_{xx}) = (u_\tau, u_{xx})_\tau + \|u_{\tau x}\|_2^2$, вычислим соответственно первый интеграл в левой части и третий интеграл в правой части равенства (4.6):

$$\int_0^t (u_{\tau\tau}, u) d\tau = \int_0^t (u_\tau, u)_\tau d\tau - \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau = (u_t, u) - (\psi, \varphi) - \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau$$

и

$$\int_0^t (u_{\tau\tau}, u_{xx}) d\tau = \int_0^t (u_\tau, u_{xx})_\tau d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau = (u_t, u_{xx}) - (\psi, \varphi'') + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau.$$

Используя полученные равенства, перепишем (4.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 &= \frac{1}{2} \|\varphi'\|_2^2 + (\psi, \varphi) - (\psi, \varphi'') - (u_t, u) - \alpha \int_0^t (u_\tau, u_x) d\tau - \gamma \int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx}) d\tau + \\ &+ \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \delta \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + (u_t, u_{xx}) + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2 \int_0^t (u, u_x^2) d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Складывая равенство (4.7) с равенством (3.7), переписанным в виде

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2 &= \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi, \varphi') - 2(\psi', \varphi'') + \\ &+ 2(u_t, u_x) + 2(u_{tx}, u_{xx}) + 4 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2 &= E_2 + 2(u_t, u_{xx} + u_x - u) + 2(u_{tx}, u_{xx}) + 2\beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \\ &+ 2\delta \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + 2 \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + 2 \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 4 \int_0^t (u, u_x^2) d\tau + 4 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau - \\ &- 2\alpha \int_0^t (u_\tau, u_x) d\tau - 2\gamma \int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx}) d\tau, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $E_2 = (1 + \alpha) \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 + 2(\psi, \varphi - \varphi' - \varphi'') - 2(\psi', \varphi'')$.

Применяя неравенство Коши–Буняковского и оценки

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau &\leq \int_0^t (\|uu_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq \int_0^t \left(\sup_{x \in R^1} |u(\tau, x)| \right)^2 d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq \\ &\leq c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \end{aligned}$$

и

$$\int_0^t (u, u_x^2) d\tau \leq \int_0^t \sup_{x \in R^1} |u(\tau, x)| d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq \int_0^t h_5(\tau) \|u_x\|_2^2 d\tau \leq c_9 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau,$$

увеличим правую часть равенства (4.8)

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + (\gamma - 2) \|u_{xx}\|_2^2 &\leq E_2 + y(t) + 3z(t) + (\alpha + \gamma + 2) \int_0^t z(\tau) d\tau + \\ &+ (\alpha + 2\beta + 4c_9 + 2c_9^2) \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + (\gamma + 2\delta + 1) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Пусть выполнены следующие условия $\gamma_2 = \gamma - 2 > 0$ и $E_2 \geq 0$, тогда, обозначая $c_{23} = \max\{(\alpha + 2\beta + 4c_9 + 2c_9^2)/\alpha, (\gamma + 2\delta + 1)/\gamma_2\}$, и $H_3(t) = E_2 + y(t) + 3z(t) + (\alpha + \gamma + 2) \int_0^t z(\tau) d\tau$ приходим к интегральному неравенству

$$\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma_2 \|u_{xx}\|_2^2 \leq H_3(t) + c_{23} \int_0^t [\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma_2 \|u_{xx}\|_2^2] d\tau.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, интегрируя по частям и обозначая $a_4 = c_{23}e^{c_{23}t_1}$, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma_2 \|u_{xx}\|_2^2 &\leq H_3(t) + a_4 \int_0^t H_3(\tau) d\tau \leq (1 + t_1 a_4) E_2 + y(t) + a_4 \int_0^t y(\tau) d\tau + 3z(t) + \\ &+ (\alpha + \gamma + 2 + 3a_4) \int_0^t z(\tau) d\tau + a_4 (\alpha + \gamma + 2) \left[\tau \int_0^\tau z(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau z(\tau) d\tau \right] \leq \\ &\leq (1 + t_1 a_4) E_2 + y(t) + a_4 \int_0^t y(\tau) d\tau + 3z(t) + ((\alpha + \gamma + 2)(1 + t_1 a_4) + 3a_4) \int_0^t z(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и, следовательно, обозначая $c_{24} = (1 + t_1 a_4) E_2 / \gamma_2$, $c_{25} = ((\alpha + \gamma + 2)(1 + t_1 a_4) + 3a_4) / \gamma_2$, имеем

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{24} + \frac{y(t)}{\gamma_2} + \frac{a_4}{\gamma_2} \int_0^t y(\tau) d\tau + \frac{z(t)}{\gamma_2} + c_{25} \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.10)$$

Далее сложим соответствующие части равенств (4.4) и (3.5), предварительно умножив обе части равенства (3.5) на пока неопределенное положительное число ε :

$$\begin{aligned} (\varepsilon + 2) z(t) + 2\varepsilon \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau &= 4\varepsilon \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau + \varepsilon E_1 + (\varepsilon - 2) (\beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2) + \\ &+ y''(t) + 2\alpha (u_x, u_t) + 2(u_x, u_{tx}) + 2\gamma (u_{xx}, u_{tx}) - 4(u, u_x^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (3.6) и $(u, u_x^2) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u| u_x^2 dx \leq \sup_{x \in R^1} |u| \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq c_9 \|u_x\|_2^2$, увеличим правую часть равенства (4.11):

$$\begin{aligned} (\varepsilon + 2) z(t) + 2\varepsilon \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau &\leq 2\varepsilon c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + 2\varepsilon \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau + \varepsilon E_1 + y''(t) + 4c_9 \|u_x\|_2^2 + \\ &+ (\varepsilon - 2) (\beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2) + \alpha (\|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) + \|u_x\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma (\|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2). \end{aligned}$$

Откуда, применяя неравенства $\|u_t\|_2^2 \leq z(t)$, $\|u_{tx}\|_2^2 \leq z(t)$, $\|u_x\|_2^2 \leq y(t)$, приводя подобные и обозначая $c_{26} = \alpha + (\varepsilon - 2)\beta + 4c_9 + 1$, $c_{27} = \gamma + (\varepsilon - 2)\delta$, выводим

$$(\varepsilon - \alpha - \gamma + 1) z(t) \leq \varepsilon E_1 + y''(t) + c_{26} y(t) + 2\varepsilon c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau + c_{27} \|u_{xx}\|_2^2. \quad (4.12)$$

Используя неравенство (4.10), увеличим правую часть (4.12):

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon - \alpha - \gamma - \frac{c_{27}}{\gamma_2} + 1 \right) z(t) &\leq \varepsilon E_1 + c_{24} c_{27} + y''(t) + \left(c_{26} + \frac{c_{27}}{\gamma_2} \right) y(t) + \\ &+ \left(\frac{a_4 c_{27}}{\gamma_2} + 2\varepsilon c_9^2 \right) \int_0^t y(\tau) d\tau + c_{25} c_{27} \int_0^t z(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\gamma - \delta - 2 > 0$ и

$$\varepsilon - \alpha - \gamma - \frac{c_{27}}{\gamma_2} + 1 > 0, \quad (4.13)$$

т.е.

$$\varepsilon > \frac{(\alpha + \gamma)(\gamma - 2) - 2\delta + 2}{\gamma - \delta - 2}, \quad (4.14)$$

и обозначая $c_{28} = \varepsilon - \alpha - \gamma - \gamma_2^{-1} c_{27} + 1$, $c_{29} = (\varepsilon E_1 + c_{24} c_{27}) c_{28}^{-1}$, $c_{30} = (c_{26} + \gamma_2^{-1} c_{27}) c_{28}^{-1}$, $c_{31} = (2\varepsilon c_9^2 + \gamma_2^{-1} a_4 c_{27}) c_{28}^{-1}$, $c_{32} = c_{25} c_{27} c_{28}^{-1}$, $H_4(t) = c_{29} + c_{30} y(t) + c_{28}^{-1} y''(t) + c_{31} \int_0^t y(\tau) d\tau$, придем к интегральному неравенству на отрезке $[0, t_3]$

$$z(t) \leq H_4(t) + c_{32} \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Для того чтобы выполнялось неравенство $H_4(t) \geq 0$, достаточно потребовать, учитывая (4.5) и (4.14), выполнение неравенства $c_{29} \geq 0$, т.е. $\varepsilon[\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2] \geq (2\delta - \gamma) a_5 E_2$, где $a_5 = 1 + t_1 a_4$, поэтому при выполнении условия $\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2 > 0$ или в подробной записи $\gamma_2 \|\psi\|_{W_2^1}^2 + a_5 \delta [(\alpha + 1) \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2] > \gamma_2 (\beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2) + a_5 \delta [2(\psi, \varphi'' + \varphi' - \varphi) + 2(\psi', \varphi'')]$, получается оценка снизу параметра ε :

$$\varepsilon \geq \frac{(2\delta - \gamma) a_5 E_2}{\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2}. \quad (4.16)$$

Теперь, из неравенства (4.15), применяя лемму Гронуолла, выводим оценку

$$z(t) \leq H_4(t) + c_{32} e^{c_{32} t} \int_0^t H_4(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_3].$$

Отсюда, интегрируя по частям, обозначая $a_6 = c_{32} e^{c_{32} t_1}$ и используя неравенство $\int_0^t y(\tau) d\tau = \tau y(\tau)|_0^t - \int_0^t \tau y'(\tau) d\tau \leq t y(t) \leq t_1 y(t)$, выводим

$$z(t) \leq c_{29} (1 + t_1 a_6) + c_{30} y(t) + c_{28}^{-1} y''(t) + a_6 c_{28}^{-1} y'(t) + t_1 (c_{31} + a_6 (c_{30} + t_1 c_{31})) y(t).$$

Таким образом, обозначая $c_{33} = c_{28} c_{29} (1 + a_6 t_1)$ и $c_{34} = c_{28} t_1 (c_{31} + a_6 (c_{30} + t_1 c_{31}))$, имеем

$$c_{28} z(t) \leq c_{33} + c_{34} y(t) + a_6 y'(t) + y''(t), \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.17)$$

Уменьшим левую часть неравенства (4.17), применив оценку (3.4):

$$y(t) y''(t) - \frac{c_{28}}{4} [y'(t)]^2 + a_6 y'(t) y(t) + c_{34} y^2(t) + c_{33} y(t) \geq 0. \quad (4.18)$$

Потребуем, чтобы коэффициент при квадрате производной в (4.18) удовлетворял условию $c_{28}/4 > 1$, что подразумевает автоматическое выполнение условия (4.13) и, значит,

$$\varepsilon > \frac{(3 + \alpha + \gamma) \gamma_2 + \gamma - 2\delta}{\gamma_2 - \delta}. \quad (4.19)$$

Теперь, рассматривая одновременно оценки (4.16) и (4.19), приходим к определению ранее неопределенного числа ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 > \max \left\{ \frac{(3 + \alpha + \gamma) \gamma_2 + \gamma - 2\delta}{\gamma_2 - \delta}, \frac{(2\delta - \gamma) a_5 E_2}{\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2} \right\}, \quad (4.20)$$

при этом дальнейшие рассуждения проводим, полагая во всех соотношениях, в которых фигурирует число ε , его равным ε_0 .

Далее, увеличим левую часть неравенства (4.18), потребовав выполнение оценки

$$c_{33} + c_{34}y(t) \leq \omega y(t), \quad t \in [0, t_3], \quad (4.21)$$

где ω — пока неопределенное положительное число. Тогда из (4.5) и (4.21) с необходимостью следует

$$\omega = \omega_0 \geq c_{34} + c_{33} \|\varphi\|_{W_2^1}^{-2}. \quad (4.22)$$

При выполнении условий (4.20) и (4.22) дифференциальное неравенство (4.18) примет вид

$$y(t)y''(t) - (\varrho + 1)[y'(t)]^2 + a_6y(t)y'(t) + \omega_0y^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_3], \quad (4.23)$$

где $\varrho = c_{28}/4 - 1 > 0$.

Применяя к неравенству (4.23) результат, приведенный в монографии [11, Приложение, § 2, уравнение (2.9), Теорема 2], заключаем, что если в дополнение к ранее приведенным условиям потребовать выполнения условия $y'(0) > a_7 y(0)$, $a_7 = a_6/\varrho + \sqrt{\omega_0/\varrho}$, т.е. $(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > \frac{1}{2}a_7 \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$, тогда время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: $t_0 < T_0 = c_{35}^{-1} \|\varphi\|_{W_2^1}^{-2\varrho}$, где $c_{35} = \varrho (y(0))^{-1-\varrho} \left[(y'(0) - y(0)a_6/\varrho)^2 - (y(0))^2 \omega_0/\varrho \right] > 0$, т.е.

$$c_{35} = \varrho \|\varphi\|_{W_2^1}^{-2(\varrho+1)} \left[\left(2(\varphi, \psi) + 2(\varphi', \psi') - \frac{a_6}{\varrho} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 \right)^2 - \frac{\omega_0}{\varrho} \|\varphi\|_{W_2^1}^4 \right] > 0,$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу $y(t) \geq e^{a_6 t/\varrho} \left(\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2\varrho} - c_{35}t \right)^{-1/\varrho}$, и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильичев А.Т. Устойчивость локализованных волн в нелинейно-упругих стержнях. М.: Физматлит, 2009. С. 159.
2. Куликовский А.Г., Гвоздовская Н.И. О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Тр. МИАН. 1998. Т. 223. С. 63–73.
3. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998. С. 436.
4. Умаров Х.Г. Задача Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне // Сиб. матем. журнал. 2021. Т. 62. № 1. С. 198–209.
5. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
6. Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I: General Theory. N.Y.: Interscience, 1958. xiv + 858 p. = Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 895.
7. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 87–202.
8. Travis C.C., Webb G.F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
9. Dragomir S.S. Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002. 193 p.
10. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
11. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Физический факультет МГУ, 2014. С. 364.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

LASER-INDUCED THERMOELASTIC RESPONSE IN AN ISOTROPIC MEDIUM HAVING VARIABLE MATERIAL MODULI¹⁾

© 2023 г. Aktar Seikh¹, Soumen Shaw^{2,*}, Smita Pal (Sarkar)¹

¹ 711103 Howrah, Department of Mathematics, Indian Institute of Engineering Science and Technology, Shibpur

² 700084 Kolkata, Department of Mathematics, Dinabandhu Andrews College, Shibpur

*e-mail: shaw soumen@rediffmail.com

Поступила в редакцию 19.02.2023 г.

Переработанный вариант 19.02.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Индукцированный лазером термоупругий отклик в изотропной среде с переменными модулями материала. Исследованы температурные нагрузки и распределение напряжений в задаче о плоской деформации изотропной термоупругой среды с переменными модулями материала. Источники тепла индуцируются лазером. Для анализа тепловых характеристик использована модель теплопроводности гиперболического типа с тремя запаздываниями по фазе. Аналитическое решение задачи представлено с помощью интегрального преобразования Лапласа—Фурье. Представлены результаты численных расчетов и выделены характерные особенности полученных тепловых нагрузок.

Ключевые слова: среда с переменными модулями материала, теплопроводность гиперболического типа, интегральное преобразование Лапласа—Фурье.

DOI: 10.31857/S0044466923070153, **EDN:** ZXXBVE

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СМЕСЕЙ РАЗНОРОДНЫХ ФЛЮИДОВ

© 2023 г. Т. Г. Елизарова^{1,*}, Е. В. Шильников^{1,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: telizar@mail.ru

**e-mail: shilnikov@imamod.ru

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.

Переработанный вариант 14.11.2022 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Приведены способ построения и апробация изящного и простого в реализации численного алгоритма для моделирования течений гомогенной смеси газов в предположении равенства температур и скоростей компонент. Алгоритм позволяет получать монотонные профили плотности компонент даже при сильном отличии их показателей адиабаты. Этот же алгоритм позволяет моделировать некоторые течения смеси газ–жидкость. Библ. 20. Фиг. 8. Табл. 2.

Ключевые слова: гомогенная смесь газов, одножидкостное приближение, конечно-разностный алгоритм, регуляризованные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466923070050, **EDN:** ZXOZPY

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование поведения разнородных флюидов и, в частности, смесей газов, газов и жидкостей в различных режимах течения широко востребовано во многих областях науки и техники, включая актуальные в настоящее время задачи, связанные с производством составляющих для микроэлектронных приборов. В силу своей относительной простоты для практических применений особенно востребовано описание гомогенных смесей в так называемом одножидкостном приближении. Под гомогенными смесями понимается смесь, в которой отсутствуют выделенные поверхности раздела между компонентами.

В одножидкостном приближении полагается, что скорости и температуры компонент смеси находятся в термодинамическом равновесии. Многочисленные варианты соответствующих систем уравнений опубликованы во многих монографиях (см., например, [1–3]). Рассмотрение двухжидкостных моделей смесей предполагает, что компоненты смеси обладают индивидуальными макроскопическими скоростями и температурами, что приводит к значительному усложнению математической модели процесса за счет увеличения числа уравнений в системе. Кроме того, необходимо учитывать обменные слагаемые в уравнениях переноса импульса и энергии, которые обеспечивают взаимодействие между компонентами смеси. Описание таких смесей оказывается значительно более громоздким и с алгоритмической точки зрения. В то же время применимость таких моделей существенно ограничена рамками применимости самих газодинамических моделей для неравновесных течений (см., например, [4]). Числа Кнудсена, для которых возможно описание газов в рамках двухжидкостного приближения, соответствуют течениям умеренно-разреженного газа и лежат в достаточно узком диапазоне значений. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением одножидкостного приближения для описания гомогенной смеси флюидов.

Численные алгоритмы для описания гомогенных одножидкостных смесей достаточно многочисленны как в плане записи исходной системы уравнений, так и ее численной реализации. В частности, в [5–7] были выписаны и протестированы алгоритмы для моделирования смеси газов, основанные на регуляризованных или квазигазодинамических (КГД) уравнениях в одно-температурном и односкоростном приближении для смеси. Первый вариант такой системы для разреженных течений был представлен в [4].

Однако, как показала практика численных расчетов, в рамках этого подхода при моделировании течений смесей с сильно отличающимися показателями адиабаты компонент возникают нефизические осцилляции плотностей компонент смеси, в то время как общая плотность смеси остается достаточно гладкой (см. [7], [8]). В частности, нефизические осцилляции плотностей отдельных компонент могут приводить к отрицательным значениям плотностей в областях, где эти плотности малы. Аналогичная проблема возникает и при использовании других численных алгоритмов. Устранение этого недостатка приводит к существенному усложнению вычислительных схем (см. [9–12]). Например, в [9], [12] для устранения этого недостатка применяется метод двойного потока, в котором для аппроксимации конвективных потоков на границах ячеек применяются специальные модификации численных методов.

В недавней работе [13] был предложен новый вариант регуляризованных или КГД уравнений для смеси газов в двухжидкостном и одножидкостном приближениях, удовлетворяющих условию неубывания энтропии для смеси. Уравнения для одножидкостного приближения построены путем агрегирования уравнений для двухжидкостной модели. Построенные на основе этих уравнений энтропийно-корректные разностные схемы показали свою применимость для расчетов задач с большими перепадами давлений и плотностей компонент, обеспечивая их неотрицательность. Однако результирующий алгоритм является достаточно сложным из-за использования специального вида осреднений газодинамических величин при вычислении потоков на границах ячеек.

В настоящей работе впервые приведены способ построения и апробация изящного и весьма простого в реализации КГД-алгоритма для моделирования течений гомогенной смеси газов в предположении равенства температур и скоростей компонент. Этот алгоритм позволяет получать монотонные профили плотности компонент даже при сильном отличии их показателей адиабаты. Вариант этого алгоритма в недавнее время был реализован в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM (см. [14]). Описание реализации КГД-решателя для однокомпонентного газа в рамках платформы OpenFOAM приведено в [15].

В последнем разделе работы показано, что близкий по структуре алгоритм позволяет моделировать класс задач о взаимодействии существенно разнородных флюидов, когда один из флюидов является газом, а другой — жидкостью. При этом для обоих флюидов сохраняются уравнения состояния, но для жидкой компоненты используется уравнение состояния в виде упрощенного варианта уравнения Ван-дер-Ваальса.

В качестве примеров применения алгоритма приводятся результаты решения одномерных задач о распаде разрыва, которые наглядно показывают особенности, преимущества и ограничения изложенного подхода.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА В ОДНОЖИДКОСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В одножидкостной модели предполагается, что газовая смесь имеет единую скорость $\mathbf{u}$ и температуру T , а плотность смеси, ее давление, удельная полная энергия и другие параметры определяются через параметры ее компонент как

$$\rho = \rho_a + \rho_b, \quad p = p_a + p_b,$$

уравнения состояния компонент

$$p_k = \rho_k R_k T, \quad \varepsilon_k = C_{V_k} T, \quad k = a, b. \quad (1)$$

Здесь R_k — газовая постоянная, ε_k — удельная внутренняя энергия компоненты смеси. Параметры смеси вычисляются как взвешенные величины в виде

$$R = \frac{R_a \rho_a + R_b \rho_b}{\rho} = C_p - C_v, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad \gamma - 1 = \frac{R}{C_v}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a \rho_a + \varepsilon_b \rho_b}{\rho}, \quad C_v = \frac{C_{Va} \rho_a + C_{Vb} \rho_b}{\rho}.$$

Полная энергия имеет вид

$$E = \rho \varepsilon + \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2}.$$

Скорость звука в смеси газов a и b вычисляется по формуле

$$\rho c_s^2 = \gamma_a p_a + \gamma_b p_b. \quad (3)$$

Следуя [3–8], исходную систему уравнений для описания гомогенной смеси двух газов выберем в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{u}) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi + \rho \mathbf{F}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{u}) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + Q. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{F}$ и Q обозначают удельную мощность внешних сил и тепловых источников соответственно.

Тензор вязких напряжений Навье–Стокса в форме закона вязкого трения Ньютона Π_{NS} и вектор теплового потока в форме закона Фурье $\mathbf{q}_{\text{NS}}$ имеют традиционный вид

$$\Pi_{\text{NS}} = \mu \left((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} I \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad \mathbf{q}_{\text{NS}} = -\kappa \nabla T,$$

где I — единичная матрица, μ , κ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности смеси.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СМЕСИ ГАЗОВ

Для построения регуляризованного варианта исходной системы воспользуемся приемом сглаживания газодинамических величин по малому промежутку времени, согласно, например, [16]. Аналогичное осреднение газодинамических уравнений, выполненное по малому объему и приводящее к построению регуляризованных газодинамических уравнений, выписано в [4, 17]. Аналогично [16] осредним систему уравнений по малому промежутку времени Δt и воспользуемся предположением о том, что решение системы уравнений существует и обладает достаточной гладкостью. Применяя теорему о среднем при вычислении интегралов по времени и полагая, что интервал осреднения невелик, представим изменение параметров газа на промежутке времени $\Delta t \sim \tau$ в виде первого члена разложения в ряд Тейлора:

$$\tilde{\rho}_a = \rho_a + \tau \frac{\partial \rho_a}{\partial t}, \quad \tilde{\rho}_b = \rho_b + \tau \frac{\partial \rho_b}{\partial t}, \quad \tilde{\rho} = \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \tilde{p} = p + \tau \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Подставим приведенные разложения в исходные уравнения (4)–(7). При этом первое уравнение системы примет вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho}_a \tilde{\mathbf{u}}) = 0. \quad (8)$$

Для вычисления осредненных величин в уравнении (8) преобразуем производные по времени с использованием исходных уравнений (4) и (6). Из уравнений (4), (5) и определений (1) следует уравнение для общей плотности смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (9)$$

Тогда уравнение импульса (6) с использованием уравнения (9) преобразуется к недивергентному виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi + \mathbf{F}. \quad (10)$$

Пренебрегая вязкими слагаемыми из уравнения (10), найдем производную скорости $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

Тогда в осредненном уравнении (8)

$$\tilde{\rho}_a \tilde{\mathbf{u}} = (\rho_a - \tau \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u})) \left(\mathbf{u} - \tau \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{F} \right).$$

Это определит регуляризующую добавку в регуляризованном уравнении (8) для плотности компоненты a . Вид добавок в уравнениях импульса и энергии остается таким же, как для КГД-уравнений для однокомпонентного газа. Детали этой процедуры приведены в [16].

Полученная регуляризованная система уравнений для описания течения двух флюидов—газов имеет вид

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) = \nabla(\tau \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u})), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) = \nabla(\tau \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{u})), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi + (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \mathbf{F}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)(\mathbf{u} - \mathbf{w})) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{F} + Q. \quad (14)$$

Вспомогательные КГД-величины являются малыми добавками к скорости, тензору вязких напряжений и тепловому потоку и имеют вид

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} (\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{F}) = \hat{\mathbf{w}} + \frac{\tau}{\rho} \mathbf{u} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}), \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\tau}{\rho} (\rho(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}), \quad (16)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{NS}} + \mathbf{q}^\tau, \quad -\mathbf{q}^\tau = \tau \rho \mathbf{u} \left(\mathbf{u} c_V \nabla T + p(\mathbf{u} \nabla) \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{Q}{\rho} \right), \quad (17)$$

$$\Pi = \Pi_{\text{NS}} + \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau(\mathbf{u} \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} - (\gamma - 1)Q). \quad (18)$$

При суммировании уравнений (11) и (12) получается регуляризованное уравнение неразрывности КГД-системы для однокомпонентного газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0.$$

Система уравнений (11)–(14) отличается от системы, использованной в [6–8], в первую очередь, способом вычисления КГД-добавок в уравнениях неразрывности компонент. Именно это изменение и обеспечивает отсутствие осцилляций за контактным разрывом в численных экспериментах. Другие изменения, такие как замена $\nabla \varepsilon$ на $c_V \nabla T$ в (19), менее существенны, хотя тоже ведут к улучшению качества разностного решения.

Параметр регуляризации свяжем с шагом пространственной сетки h и скоростью звука в смеси в виде

$$\tau = \alpha \frac{h}{c_s}. \quad (19)$$

При решении уравнений Эйлера коэффициенты вязкости и теплопроводности смеси μ и κ рассматриваются как искусственные регуляризаторы и вычисляются следующим образом:

$$\mu = \tau p Sc, \quad \kappa = \frac{\mu C_p}{Pr}. \quad (20)$$

Таким образом, у нас имеется три свободных числовых параметра для настройки диссипативных свойств алгоритма: коэффициент α , число Шмидта Sc и число Прандтля Pr . Базовыми значениями являются $\alpha = 0.5$, $Sc = Pr = 1$.

Численный алгоритм для расчета течений смеси газов на ортогональной сетке строится непосредственно путем разностной аппроксимации системы уравнений (11)–(19) с применением центральных разностей для всех пространственных производных. Таким образом, схема имеет второй порядок аппроксимации. Использование диссипативных коэффициентов вида (19), (20), которые пропорциональны шагу пространственной сетки h , приводят к понижению порядка аппроксимации уравнений до первого. Отметим, что дополнительная диссипация схемы носит сильно нелинейный характер и существенно зависит от решения задачи, автоматически подстраиваясь под него. В расчетах применялась явная по времени условно-устойчивая разностная схема.

В представленных далее расчетах внешняя сила $\mathbf{F}$ и источники тепла Q отсутствуют.

3. РАСПАД РАЗРЫВА МЕЖДУ ДВУМЯ РАЗНОРОДНЫМИ ГАЗАМИ

В качестве первого примера численного моделирования решалась задача Римана о распаде разрыва между двумя различными газами. Постановка задачи соответствует [12]. Детали постановки и результаты численных экспериментов для упрощенного вида регуляризации из [6] приведены в препринте [8].

Начальные условия в левой и правой частях области $0 \leq x \leq 1$ различаются не только давлением, плотностью и скоростью газа, но и свойствами самих газов, которыми являются воздух – газ a , и гелий – газ b . Соответствующие величины приведены в табл. 1.

На фиг. 1 приведены результаты расчета данной задачи в виде распределения плотности компонент газов a и b и их суммарной плотности, рассчитанные по методикам из [6] и с применением системы (11)–(14). Видно, что расчеты по методу из [6] приводят к появлению сильных колебаний плотности компонент и появлению отрицательных значений плотности газа b . Результаты, полученные с применением системы (11)–(14), оказались свободными от этих недостатков (фиг. 1б).

Приведены результаты расчетов на равномерной расчетной сетке из 400 ячеек с параметрами регуляризации $\alpha = 0.13$, $Sc = Pr = 1$. Число Куранта $\beta = 0.2$. Расчет проводится до времени $t_{fin} = 2.0 \times 10^{-4}$.

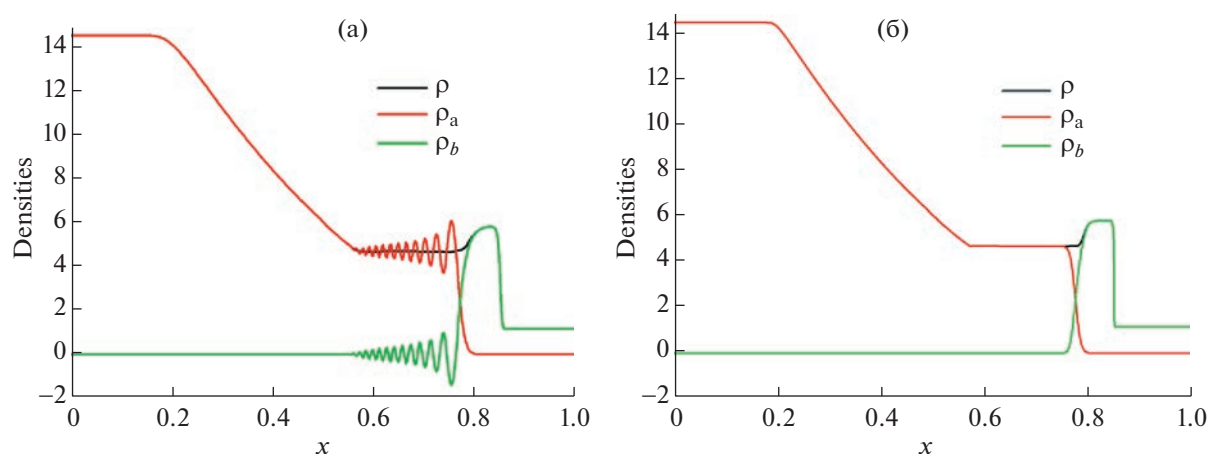
В качестве второго примера решался вариант задачи Сода с большим перепадом давлений на интерфейсе между компонентами в постановке, изложенной в [9], [13]. В начальный момент времени разрыв расположен в точке $x = 0.5$, разделяя смеси газов a и b , как и в предыдущей задаче, с параметрами $\gamma_a = 1.4$, $C_{va} = 1$ и $\gamma_b = 1.6$, $C_{vb} = 1$. Скорость смеси $u_{beg} = 0$. При $x < 0.5$ плотности компонент $\rho_a = 1$, $\rho_b = 0$, давления компонент $p_a = 500$, $p_b = 0$. Справа от разрыва, при $x > 0.5$ плотности $\rho_a = 0$, $\rho_b = 1$, давления $p_a = 0$, $p_b = 0.2$. Таким образом, давление смеси слева от разрыва в 2500 раз выше, чем справа. Во всей расчетной области температура вычисляется из уравнений состояния.

Расчеты проводились до момента времени $t_{fin} = 0.011$ при следующих параметрах настройки схемы: $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$, $Sc = 1$, $Pr = 4$. Сравнение результатов расчетов на трех пространственных сетках ($N = 500, 2000$ и 4000) представлены на фиг. 2. На нем хорошо видны основные газодинамические особенности течения, а также сходимость метода при сгущении пространственной сетки. Решение на грубой сетке оказывается сглаженным, при числе узлов 2000 и 4000 отличия в профилях становятся незначительными. Результаты расчетов близко соответствуют эталонным данным из работ [9], [13].

Подбор параметров настройки алгоритма позволяет найти оптимальное численное решение. Увеличение α приводит к сглаживанию разрывов, изменение числа Шмидта Sc в пределах 0.1–10 практически не влияет на результат расчета, увеличение числа Прандтля Pr от 1 до 4 незначи-

Таблица 1. Начальные значения параметров смеси в задаче о распаде разрыва

Область	ρ_{He}	ρ_{Air}	U	Молекулярные массы	P	γ
$0 \leq x \leq 0.5$	14.54903	0.0	0.0	He, 4.003	10^7	5/3
$0.5 \leq x \leq 1$	0.0	1.16355	0.0	Воздух, 28.96	10^5	7/5



Фиг. 1. (а) – Расчет по схеме из [6], (б) – расчет по схеме из настоящей работы.

тельно меняет форму профиля температуры в зоне контактного разрыва. Небольшой дефект в профиле скорости в окрестности точки $x = 0.6$ отражает энтропийный след в зоне контактного разрыва, вносимый использованным здесь разностным алгоритмом. В энтропийно-согласованном алгоритме (см. [13]) этот дефект схемы оказывается почти незаметным.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА РАЗНОРОДНЫХ ГАЗОВ

Решается задача о взаимодействии ударной волны с границей раздела газов с сильно отличающимися показателями адиабаты, описанная в [10], [11].

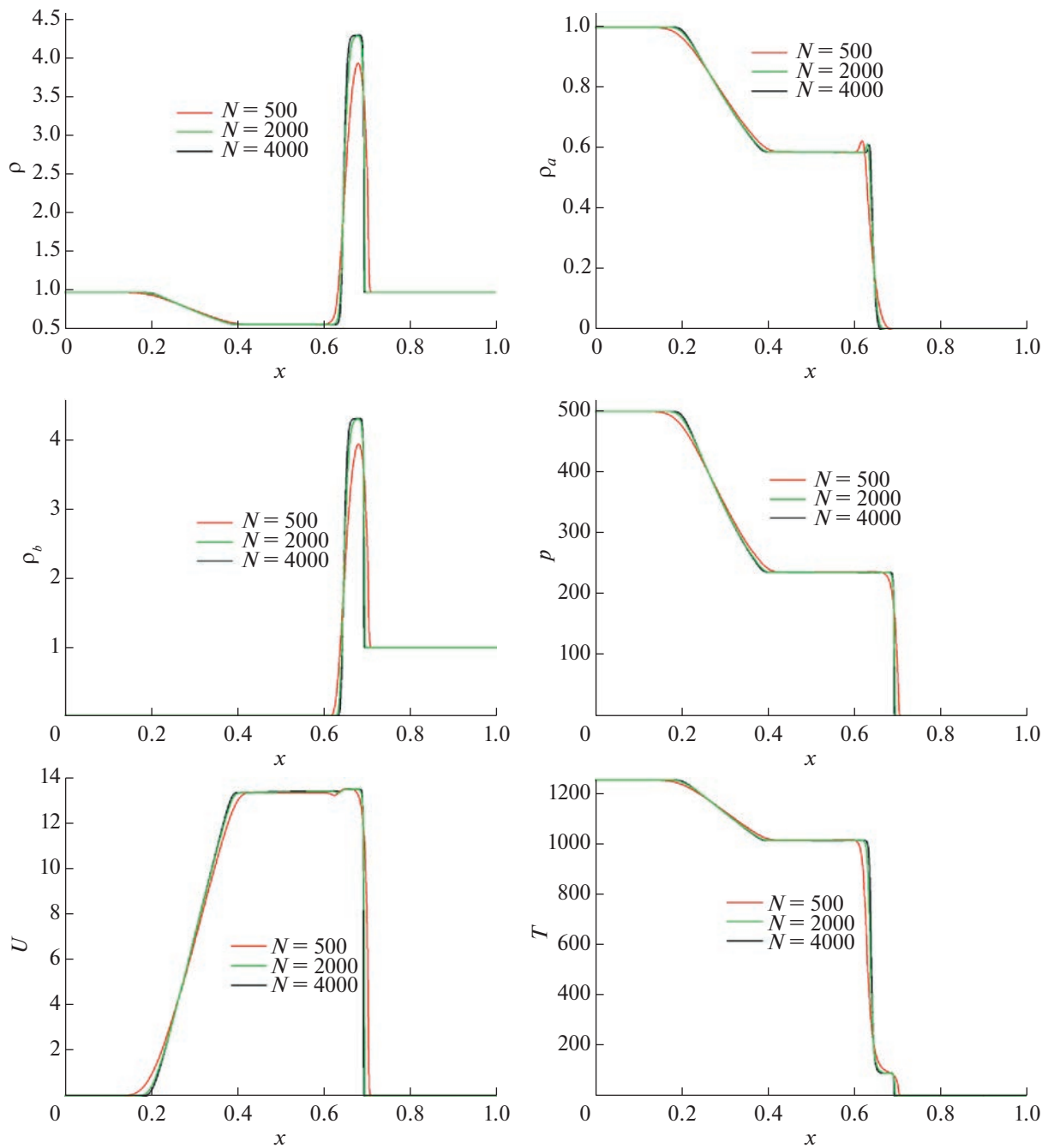
Граница раздела первоначально расположена в точке $x = 0.5$, разделяя материалы с $\gamma_a = 1.35$ и $C_{Va} = 2.4$ слева и $\gamma_b = 5.0$ и $C_{Vb} = 1.5$ справа. Эти значения примерно соответствуют высоковольтным продуктам (материал a) и ограничивающему материалу (материал b). В начальный момент слева от границы раздела при $x = 0.1$ в материале a находится ударная волна, движущаяся вправо со скоростью 2.3238 относительно границы раздела. В момент времени $t = 0.1721$ ударная волна сталкивается с границей раздела, в результате чего прошедшая ударная волна распространяется вправо в материале b , а отраженная волна – влево в материале a . На фиг. 3 приведена $x-t$ диаграмма для этой задачи, показывающая расположение ударных волн и границы, разделяющие состояния с постоянными значениями газодинамических величин.

В табл. 2 приведены значения газодинамических параметров в областях, изображенных на фиг. 3. Значение $\phi_a = 0$ означает, что в данной области находится газ a , $\phi_a = 1$ соответствует газу b .

Расчеты проводились до момента времени $t_{fin} = 0.25$ на двух сетках ($N = 500$ и $N = 4000$) таких же, как и в [10], [11]. Результаты расчетов приведены на фиг. 4. Дальнейшее сгущение сетки на результатах не сказывается. При стандартных значениях искусственных диссипативных параметров $Sc = Pr = 1$ в профиле суммарной плотности образовывался небольшой провал на границе раздела, обусловленный излишним численным размазыванием профилей компонент плотности. Подбором параметров диссипации совместно с уменьшением пространственного шага разностной схемы удалось полностью избавиться от этого дефекта (см. фиг. 4б). Наилучшими

Таблица 2. Значения параметров смеси в областях с однородными состояниями

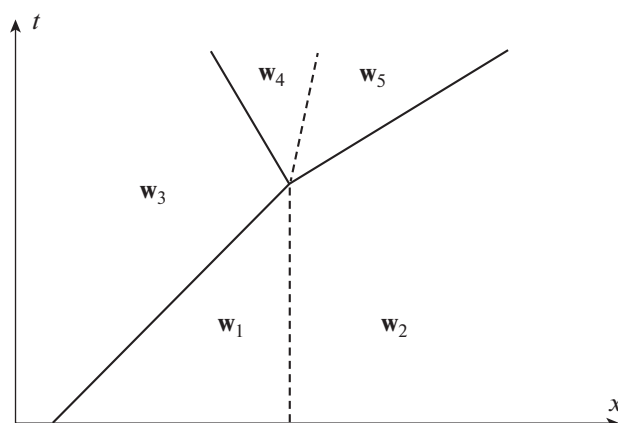
Параметр	Область 1	Область 2	Область 3	Область 4	Область 5
ρ	1	1.9	2.7647	3.9581	2.5786
u	0	0	1.4833	0.9304	0.9304
p	1	1	4.4468	7.2498	7.2498
ϕ_a	0	1	0	0	1



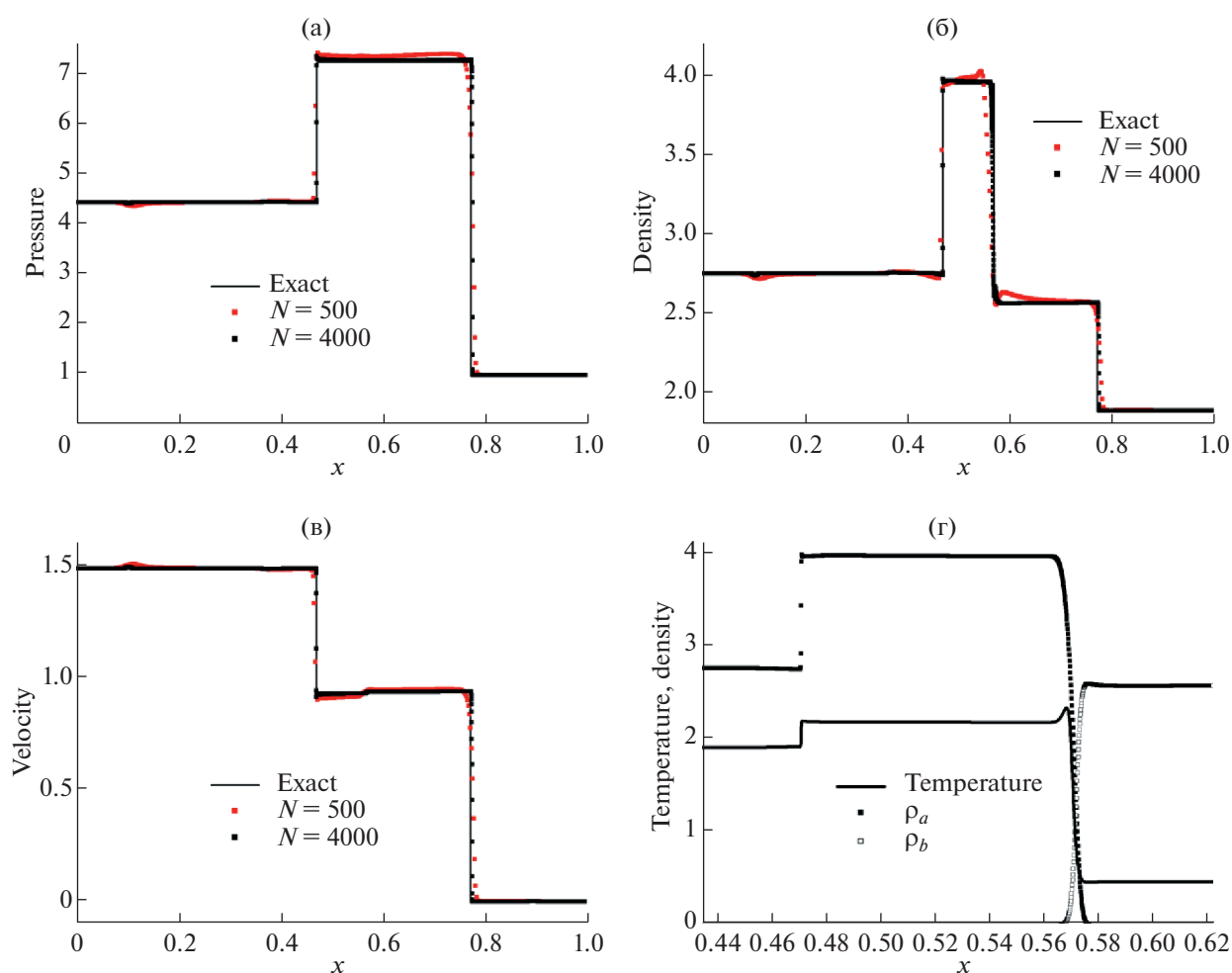
Фиг. 2. Расчет задачи Сода с большим перепадом давлений.

значениями диссипативных параметров являются значения $\alpha = 0.5$, $Sc = 0.3$, $Pr = 5$. Устойчивый расчет с этими параметрами обеспечивается при максимальном числе Куранта $\beta = 0.25$. Заметим, что ударные волны хорошо разрешаются и на грубой пространственной сетке, чего нельзя сказать о контактном разрыве. На грубой сетке в этой области ($x \approx 0.57$) наблюдается немотонность профилей как общей плотности, так и ее компонент. Там же наблюдается дефект в профиле скорости. При расчетах на подробной сетке эти недостатки становятся почти незаметными, что хорошо видно на фиг. 4б–г.

Результаты КГД-расчетов оказались близки как к автомодельному решению, так и к данным, полученным с помощью алгоритмов второго порядка точности из [10] и [11].



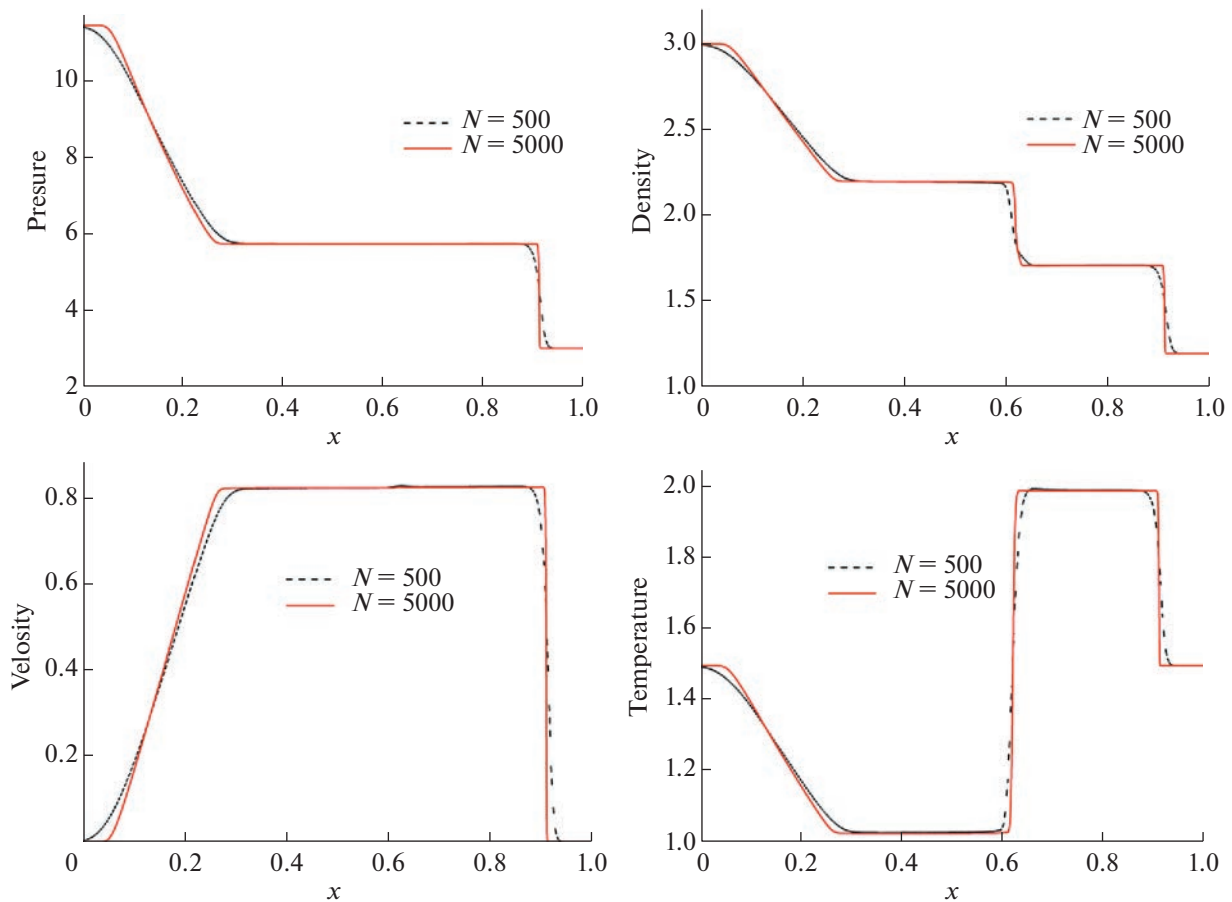
Фиг. 3. Диаграмма $x-t$ задачи о взаимодействии ударной волны с границей раздела газов согласно [10].



Фиг. 4. Профили газодинамических величин в задаче о взаимодействии ударной волны с границей раздела.

5. РАСПАД РАЗРЫВА МЕЖДУ ДВУМЯ СМЕСЯМИ РАЗНОРОДНЫХ ГАЗОВ

В предыдущих задачах в начальный момент времени два разных газа находились в разных половинах расчетной области, а смесь газов фактически была только в небольшой области вблизи границы раздела. В следующей задаче рассматривается распад разрыва между смесями газов с разными концентрациями компонент справа и слева от разрыва. Разрыв первоначально распо-



Фиг. 5. Распад разрыва между двумя смесями.

ложен в точке $x = 0.5$, разделяя смеси тех же газов, как и в предыдущей задаче. Напомним параметры этих газов: $\gamma_a = 1.35$, $C_{Va} = 2.4$ и $\gamma_b = 5.0$, $C_{Vb} = 1.5$. Начальные условия задаются следующими: во всей расчетной области температура постоянна и равна $T_{\text{beg}} = 1.5$, скорость $u_{\text{beg}} = 0$. При $x < 0.5$ плотности компонент $\rho_a = 2$, $\rho_b = 1$. Справа от разрыва при $x > 0.5$ плотности $\rho_a = 1$, $\rho_b = 0.2$. Таким образом, давление слева от разрыва почти в 4 раза выше, чем справа.

Расчеты проводились до момента времени $t_{\text{fin}} = 0.15$ при следующих параметрах схемы: $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $Sc = 0.4$, $Pr = 1$. Сравнение результатов расчетов на двух пространственных сетках ($N = 500$ и $N = 5000$) представлены на фиг. 5, где хорошо видно улучшение качества решения при дроблении сетки.

Для данной задачи мы не располагаем аналитическим решением. Однако из постановки задачи понятно, что вправо должна распространяться ударная волна, а влево — волна разрежения. Между ними располагается контактный разрыв. Все эти характерные особенности достаточно хорошо разрешаются даже на не слишком подробной сетке с $N = 500$.

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ ГАЗ–ЖИДКОСТЬ

Предложенный в первых разделах работы численный алгоритм обобщен для моделирования взаимодействия флюидов в виде газа и жидкости в приближении, когда жидкость описывается с помощью модели “замороженного газа” (stiffened gas model) (см., например, [9], [18–20] и обширную библиографию к этим работам).

Данное приближение основано на модификации уравнения состояния для жидкой компоненты путем включения добавки в уравнение состояния идеального газа, полученной на основе

упрощения уравнения состояния вида уравнения Ван-дер-Ваальса. Соответствующие формулы приобретают вид, который здесь выписан в одной из возможных форм, согласно [19]:

$$p_k = \rho_k R_k T - p_{k\infty}, \quad \varepsilon_k = C_{vk} T + \frac{p_{k\infty}}{\rho_k}, \quad k = a, b.$$

Величины добавок к давлению выбираются таким образом, чтобы обеспечить нужную скорость звука в жидком флюиде. Для газов добавки к давлению полагаются равными нулю.

Общая скорость звука вычисляется по формуле

$$\rho c_s^2 = \gamma_a(p_a + p_{a\infty}) + \gamma_b(p_b + p_{b\infty}).$$

Уравнения состояния смеси модифицируются следующим образом:

$$p\varepsilon = T(\rho_a C_{va} + \rho_b C_{vb}) + p_{\infty}, \quad p_{\infty} = \frac{\rho_a p_{a\infty} + \rho_b p_{b\infty}}{\rho}.$$

Предложенный нами вариант вычисления p_{∞} в виде взвешенного значения давлений оказывается эффективным при расчетах смесей, в которых возможно образование областей с нулевыми значениями плотностей компонент флюидов a или b .

Согласно [19] для флюидов воздух и вода соответствующие величины имеют следующие значения:

– воздух (компонента a) – $\gamma = 1.4$, $C_p = 1004.5$ (Дж/(Кг К)), $p_{a\infty} = 0$ (Па).

– вода (компонента b) – $\gamma = 2.8$, $C_p = 4186$ (Дж/(Кг К)), $p_{b\infty} = 8.5 \times 10^8$ (Па).

В качестве примера далее приведены результаты численного моделирования задачи о распаде разрыва в среде воздух–вода. Задача решается в постановке, изложенной в [19].

В соответствии с указанной работой в расчетной области $0 \leq x \leq 10$ м задаются следующие начальные условия:

$$(p, U, T)_{\text{воздух}} = (10^9 \text{ Па}, 0, 308.15 \text{ К}), \quad \rho_{\text{вода}} = 0 \quad \text{при} \quad x \leq 5 \text{ м},$$

$$(p, U, T)_{\text{вода}} = (10^5 \text{ Па}, 0, 308.15 \text{ К}), \quad \rho_{\text{воздух}} = 0 \quad \text{при} \quad x > 5 \text{ м}.$$

Расчет ведется на сетках с числом узлов 500 и 5000 до момента времени $t_{\text{fin}} = 0.002$ с.

Наилучшими значениями диссипативных регуляризационных параметров являются значения $\alpha = 0.5$, $Sc = 1$, $Pr = 4$. Устойчивый расчет с этими параметрами обеспечивается при максимальном числе Куранта $\beta = 0.2$. Размеры пространственного шага равны соответственно $h = 0.02$ м и 0.002 м. Шаги по времени составляют соответственно, примерно, 2×10^{-6} с и 2×10^{-7} с.

Результаты расчетов на сетках 500 и 5000 приведены на фиг. 6 и 7.

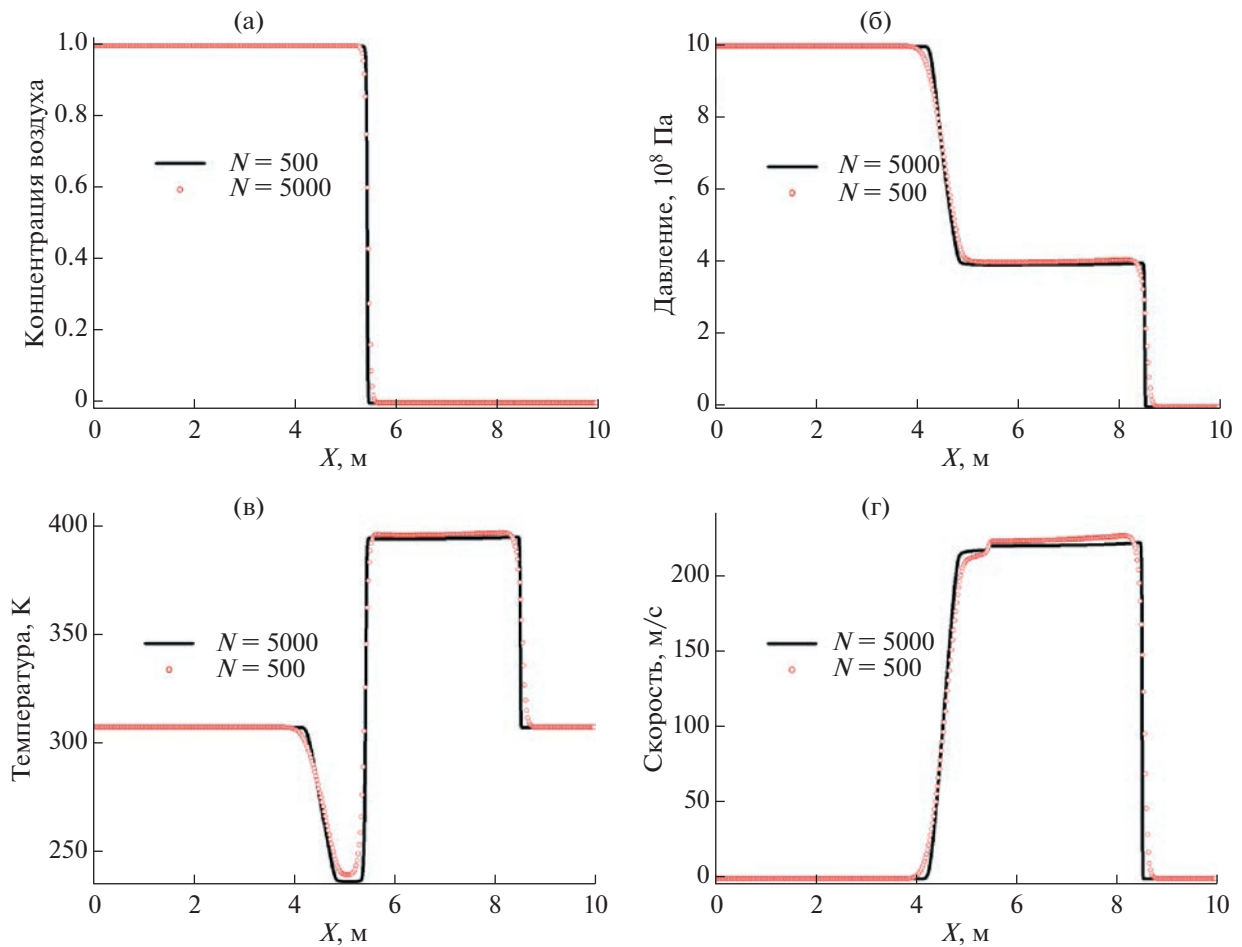
На приведенных распределениях видны характерные особенности течения – волна разрежения в воздухе в зоне x от 4 до 5 м, граница между фазами воздух и вода при $x \sim 5.5$ м и ударная волна в воде при $x \sim 8.5$ м. Хорошо видно достаточно малое отличие результатов, полученных на сетках 500 и 5000 узлов, что говорит о хорошей точности алгоритма. Отметим, что полученные результаты очень близко соответствуют данным из [19], несмотря на то что в цитируемой работе используется метод высокого порядка точности, в то время как КГД-алгоритм формально обладает первым порядком аппроксимации по времени и пространству.

На фиг. 8 дополнительно показана сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки до значения 20 000. Приведен фрагмент графика скорости, на котором наиболее заметны отличия в численных результатах. Видно, что нефизичный уступ в распределении скорости в зоне взаимодействия воды и воздуха сглаживается при уменьшении шага по пространству.

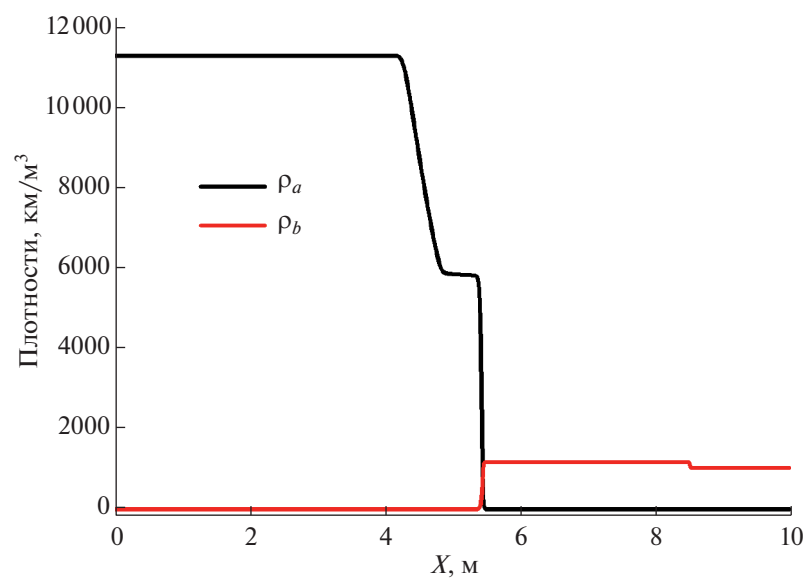
При уменьшении давления воздуха на разрыве численные эксперименты показывают рост неустойчивости скорости на интерфейсе, отмеченной на фиг. 8, что в дальнейшем приводит к неустойчивости счета всей задачи в целом.

Численные эксперименты и анализ алгоритма показали, что для получения устойчивого численного решения в задаче моделирования смеси газ–жидкость необходимо, чтобы давление газа было порядка или больше значения дополнительного давления в жидкости

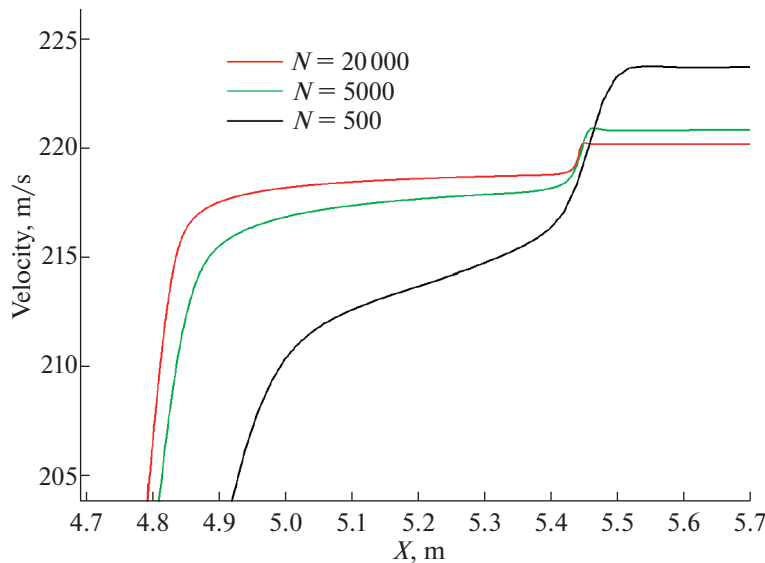
$$p_a \geq p_{b\infty}. \quad (21)$$



Фиг. 6. Распад разрыва в среде воздух–вода.



Фиг. 7. Плотности компонент ($N = 5000$).



Фиг. 8. Сходимость алгоритма по сетке. Фрагмент распределения скорости.

В случае, когда при выполнении условия (21) давления компонент на границе между газом и жидкостью одинаковы, в численном расчете граница контактного разрыва остается неподвижной, скорости течения остаются строго нулевыми, а сама граница размазывается искусственной вязкостью на одну ячейку пространственной сетки.

В случае, когда соотношение (21) не выполняется, численное решение становится неустойчивым, что связано с упрощенным описанием флюида-жидкости с помощью двучленного уравнения Ван-дер-Ваальса.

В случае, когда требуется численное решение задачи с малыми значениями давления газа, при которых условие (21) не выполняется, возможно искусственно понизить величину $p_{\text{вс}}$. Однако уменьшение этого значения приводит к нефизичному занижению скорости звука в жидком флюиде, расчет течения остается устойчивым, но его результаты оказываются неадекватными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен чрезвычайно простой математический подход к моделированию течений смеси существенно разных флюидов. Метод описывает течение смеси в рамках уравнений переноса плотностей компонент, общей скорости и общей температуры смеси флюидов. Температуры и скорости компонент предполагаются одинаковыми. Граница между компонентами в явном виде не выделяется.

Для течений смеси газов данный алгоритм позволил моделировать сверхзвуковое нестационарное течение с существенно разными показателями адиабаты компонент без проявления числительных колебаний плотности компонент газов в зоне их малых значений.

Модификация метода для расчета неперемешивающихся флюидов типа газ-жидкость была выполнена с применением уравнения состояния в виде упрощенного уравнения Ван-дер-Ваальса. Это позволило проводить расчеты без явного выделения границы раздела при условии соблюдения требований на соотношение давления газа и добавки, определяющей скорость звука в жидкости.

Точность КГД-расчета варьируется в зависимости от выбора коэффициентов регуляризации α , Sc и Pr . Адекватный выбор (tuning) этих коэффициентов позволяет приблизиться по точности к схеме второго порядка. Результаты КГД-расчетов при адекватном выборе диссипативных коэффициентов оказались близки как к автомодельному решению, так и к данным, полученным с помощью алгоритмов второго порядка точности (см. [10], [11], [19]). Наблюдается уверенная сходимость метода по сетке.

Изложенный подход может быть дополнен включением в него реальных коэффициентов вязкости и теплопроводности смеси путем замены искусственных значений соответствующих ко-

эффицентов на реальные величины с сохранением регуляризирующих КГД-добавок. По аналогии с уже работающими КГД-алгоритмами для однокомпонентного газа описанный метод был обобщен на многомерные течения с применением неструктурированных сеток при его реализации в рамках платформы OpenFOAM (см. [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2002.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений газа в ударном слое. М.: Наука, Физматлит, 1996.
4. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир, 2007.
5. Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Shil'nikov E.V. Regularized equations for numerical simulation of flows of homogeneous binary mixtures of viscous compressible gases // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2019. V. 59. № 11. P. 1832–1847.
<https://doi.org/10.1134/S0965542519110058>
6. Elizarova T.G., Shil'nikov E.V. Numerical simulation of gas mixtures based on the quasi-gasdynamic approach as applied to the interaction of shock wave with a gas bubble // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2021. V. 61. № 1. P. 118–128.
<https://doi.org/10.1134/S096554252101004>
7. Shilnikov E.V., Elizarova T.G. About one numerical method of compressible multifluid flow modelling in Euler formulation. In: *Proc. IRF2020: 7th Inter. Conf. Integrity—Reliability—Failure*. J.F. Silva Gomes and S.A. Me-guid (ed.), INEGI-FEUP, 2020. P. 613–622.
8. Хайталиев И.Р., Шильников Е.В. Исследование свойств квазигазодинамической системы уравнений на решении задачи Римана для смеси газов. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 52 2021 г. (перевод: Shilnikov E.V., Khaytaliev I.R. Investigation of the properties of a quasi-gas-dynamic system of equations based on the solution of the Riemann problem for a mixture of gases. Preprints KIAM RAS, 2021, № 52, 12 p).
9. Abgrall R., Karni S. Computations of compressible multifluids // *J. Comp. Phys.* 2001. № 2. P. 594–623.
10. Banks J.W., Schwendeman D.W., Karila A.K., Henshaw W.D. A high-resolution Godunov method for compressible multi-material flow on overlapping grids // *J. Comp. Phys.* 2007. V. 223. Iss. 1. P. 262–297.
11. Borisov V.E. and Rykov Yu.G. Modified Godunov method for multicomponent flow simulation // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. 1250 012006.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012006>
12. Борисов В.Е., Рыков Ю.Г. Численное моделирование течений многокомпонентных газовых смесей с использованием метода двойного потока // *Матем. моделирование*. 2020. Т. 32. № 9. С. 15–29.
13. Zlotnik A., Fedchenko A., Lomonosov T. Entropy correct spatial discretizations for 1D regularized systems of equations for gas mixture dynamics // *Symmetry*. 2022. V. 14. P. 2171.
<https://doi.org/10.3390/sym14102171>
14. github.com/unicfdlab/QGDsolver
15. Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations // *Comp. & Fluid.* 2018. V. 166. P. 163–175.
<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.02.010>
16. Елизарова Т.Г. Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. Т. 51. № 11. С. 2096–2105 (перевод: Elizarova T.G. Time averaging as an approximate technique for constructing quasi-gasdynamic and quasi-hydrodynamic equations // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2011. V. 51. № 11. P. 1973–1982).
17. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.-Ижевск, 2009.
18. Denner F., Cheng-Nian Xiao, Berend G.M. van Wachem Pressure-based algorithm for compressible interfacial flows with acoustically-conservative interface discretization // *J. Comp. Phys.* 2018. V. 367. P. 192–234. ISSN 0021-9991.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.04.028>
19. Keiichi Kitamura, Meng-Sing Liou, Chih-Hao Chang Extension and comparative study of AUSM-family schemes for compressible multiphase flow simulations // *Commun. Comp. Phys.* 2014. V. 16. № 3. С. 632–674.
<https://doi.org/10.4208/cicp.020813.190214a>
20. Liou, Meng-Sing, Chih Chang, Loc Hoang Nguyen, Theo G. Theofanous How to solve compressible multifluid equations: a simple, robust and accurate method // *AIAA J.* 2007. V. 46. P. 2345–2356.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.642

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ ЭНТРОПИЙНЫХ
РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА© 2023 г. О. В. Ильин^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: oilyin@gmail.com

Поступила в редакцию 02.09.2022 г.
Переработанный вариант 20.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Устойчивость решеточных уравнений Больцмана регулируется параметром, отвечающим за время релаксации неравновесной системы, который, в свою очередь, влияет на вязкость исследуемого течения. В энтропийном подходе время релаксации вычисляется из уравнения баланса энтропии таким образом, чтобы энтропия в каждый момент времени и в каждой пространственной точке не убывала. В настоящей статье рассматривается метод решения уравнения баланса энтропии на основе модифицированного метода секущих. Показано, что данный подход имеет хорошую точность. В качестве приложения предлагаемого метода рассмотрены численные решения задачи о двумерном двойном сдвиге. Проведено сравнение результатов расчетов с другими энтропийными методами.

Ключевые слова: решеточные уравнения Больцмана, энтропия, уравнения вязкой жидкости.

DOI: 10.31857/S0044466923060108, **EDN:** UYPUHC

1. ВВЕДЕНИЕ

Решеточные уравнения Больцмана (РУБ) являются дискретизацией по пространственным и временным переменным кинетического уравнения Бхатнагара-Гросса-Крука [1]. Внедрение моделей РУБ для численных расчетов достаточно просто и состоит из двух шагов, локального по пространственным переменным шага столкновений частиц и последующего шага распространения частиц (адвекции) в соседние узлы. Основной проблемой стандартного способа численного решения РУБ является его относительно невысокая устойчивость при моделировании течений с большими числами Рейнольдса.

Одним из возможных подходов улучшения устойчивости моделей РУБ является энтропийный метод. Энтропийный подход состоит из двух частей [2], [3]: состояния равновесия, минимизирующего H -функцию (или максимизирующего энтропию), и времени релаксации, которое не является постоянным и подбирается так, чтобы выполнялось неравенство баланса энтропии в каждый момент времени и каждой пространственной точке (т.е. энтропия системы не убывает). Отметим, что в отличие от дискретных моделей уравнения Больцмана, для которых состояние равновесия максимизирует энтропию [4–6], стандартная форма состояния равновесия для РУБ в виде полиномиальной функции от потоковой скорости имеет существенный недостаток, а именно, H -теорема для таких состояний равновесия в общем случае не выполняется [7], [8]. Отметим, что задача построения энтропийных состояний равновесия является достаточно сложной [9–12]. Время релаксации (определяется в энтропийном методе РУБ параметром α) находится из уравнения баланса энтропии, которое может быть решено численно путем применения методов Ньютона-Рафсона, бисекции [13–15] или в виде комбинации метода Ньютона-Рафсона и аналитических оценок [16]. В существенно энтропийном (essentially entropic) подходе решение уравнения баланса энтропии, которое переформулировано в виде неравенства, было получено в аналитической форме с использованием Паде аппроксимации для логарифмов, входящих в формулу энтропии [17]. Важно подчеркнуть, что данный метод дает решения для α , которые имеют маленькие отклонения от стандартного значения ($\alpha = 2$). Данное свойство важно при решении прикладных задач, так как вязкость течения линейно зависит от α и отклонение α от 2 приводит к изменению вязкости и диссипативных свойств моделируемого течения. Энтропийный подход Чжао и Юна основан на геометрических соображениях [18] (алгоритм секущих), для α получа-

ются выражения в замкнутой форме. Также недавно было проведено сравнение разных энтропийных методов для РУБ [19]. Отметим, что в силу того, что параметр α в энтропийном методе имеет достаточно сложную форму, то анализ линейной устойчивости, применяющийся для стандартных РУБ [22–29], затруднен.

В настоящей работе предложена модификация метода секущих энтропийного подхода РУБ. В новом подходе отдельно рассматриваются два случая $\alpha < 2$ и $\alpha > 2$. В первом случае требуется увеличить вязкость течения для поддержания устойчивости, секущая строится по точкам $\alpha = \underline{\alpha}$, где $\underline{\alpha}$ есть нижняя граница оценки α , и $\alpha = 2$, при этом решение α лежит внутри интервала $[\underline{\alpha}, 2]$; во втором случае секущая строится по точкам $\alpha = 2$ и $\alpha = \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ есть верхняя граница оценки α . Данный подход позволяет получать усредненные значения α , близкие к 2, и тем самым внести минимальные искажения в диссипативные свойства гидродинамической системы. Предложенный подход тестировался для задачи о течении в двойном сдвиговом слое. Показано, что метод дает хорошую точность при сравнении с эталонными решениями.

2. ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

В энтропийном подходе решеточные уравнения Больцмана записываются следующим образом:

$$f_i(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t) = f_i(t, \mathbf{x}) + \alpha \beta (f_i^{eq}(t, \mathbf{x}) - f_i(t, \mathbf{x})), \quad (1)$$

где f_i есть дискретная функция распределения, отвечающая частицам, движущимся со скоростями $\mathbf{c}_i$, $i = 1 \dots N$, N — количество дискретных скоростей, f_i^{eq} функция распределения локального равновесия, t , $\mathbf{x}$ есть время и пространственные координаты, Δt есть шаг по времени. Переменная $0 < \beta < 1$ вычисляется следующим образом:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\left(\tau + \frac{1}{2} \Delta t \right)},$$

где τ — время релаксации. В стандартном методе РУБ $\alpha = 2$, а также вязкость вычисляется как $\nu = c_s^2 \tau$, c_s — постоянная величина (скорость звука). В энтропийном методе переменная α непостоянна и зависит от координат и времени, также $\nu = (2/\alpha) c_s^2 \tau$; α есть решение уравнения

$$H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})] \leq H[\mathbf{f}], \quad (2)$$

где $H[\mathbf{f}]$ — некоторая выпуклая функция (H -функция, или энтропия, взятая со знаком минус), $\alpha > 1$ [17], кроме того используются следующие обозначения $\mathbf{f} = \{f_i, i = 1 \dots N\}$, $\mathbf{f}^{eq} = \{f_i^{eq}, i = 1 \dots N\}$. Если α удовлетворяет неравенству (2), то выполняется H -теорема в рассматриваемых дискретных пространственных и временных переменных

$$\begin{aligned} H[\mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t)] &= H[\mathbf{f} + \alpha \beta (\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})] = H[(1 - \beta)\mathbf{f} + \beta(\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f}))] \leq \\ &\leq (1 - \beta)H[\mathbf{f}] + \beta H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})] \leq (1 - \beta)H[\mathbf{f}] + \beta H[\mathbf{f}] = H[\mathbf{f}], \end{aligned}$$

отметим, что явная форма функции $H[\mathbf{f}]$ не требуется, используются только свойство выпуклости и неравенство (2). Далее рассматривается только больцмановская форма H -функции

$$H[\mathbf{f}] = \sum_{i=1}^N f_i \log \left(\frac{f_i}{w_i} \right), \quad (3)$$

где $w_i > 0$ — веса решетки (дискретные аналоги абсолютного максвелловского распределения). Функции локального равновесия (локальное максвелловское равновесие) в энтропийном подходе находятся как условные экстремумы $H[\mathbf{f}]$ при условии постоянства плотности и импульса (отметим, что энергия может не сохраняться для РУБ, предназначенных для описания изотермических течений). Отметим, что локальное максвелловское равновесие есть неполиномиаль-

ная функция от потоковой скорости, но не обязательно экспоненциальная, для одномерной трехскоростной модели РУБ ($D1Q3$) локальное максвелловское равновесие имеет вид [20]

$$f_{\pm 1}^{eq} = \frac{1}{3} \rho \left(\pm \frac{uc \mp c_s^2}{2c_s^2} + \sqrt{1 + \frac{u^2}{c_s^2}} \right), \quad (4)$$

$$f_0^{eq} = \frac{2}{3} \rho \left(2 - \sqrt{1 + \frac{u^2}{c_s^2}} \right), \quad (5)$$

где $f_{\pm 1}^{eq}$, f_0^{eq} соответствуют дискретным скоростям $\pm c$, 0, кроме того ρ , u — плотность и потоковая скорость, а также $c_s = c/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$, в данной работе считаем $c = 1$. Состояние равновесия в двумерном случае (по пространственным переменным) получается как произведение одномерных функций распределения, соответствующая модель РУБ имеет девять скоростей [1] ($D2Q9$).

Изменения переменной α определяют изменения вязкости течения, в случае если решение $\alpha > 1$ неравенства (2) меньше 2, то вязкость увеличена в сравнении со стандартным значением, если допускаются решения $\alpha > 2$, то для таких α вязкость меньше стандартного значения. Очевидно, что следует искать такие решения неравенства (2), которые наиболее близко лежат к 2.

Так как функция $H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})]$ неубывающая по α , то очевидно, что если в некотором узле решение (2) такое, что $\alpha > 2$, то и $\alpha = 2$ является решением. В данном узле выполняется H -теорема и неустойчивость не развивается. То есть нет необходимости изменять вязкость относительно стандартного значения и можно в рассматриваемом узле считать, что $\alpha = 2$. Такой подход используется в методе секущих [18]. С другой стороны, в этом случае среднее значение $\alpha \leq 2$, это означает, что течение будет более диссипативным, чем требуется. Поэтому в некоторых других методах (таких как существенно энтропийный [17]) допускаются решения $\alpha > 2$. При этом в силу того, что отклонения от $\alpha = 2$ в разных точках мало и среднее α в моделируемой пространственной области будет близко к 2, то диссипативные свойства течения мало искажены.

Также удобно будет ввести следующие обозначения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i^N a_i b_i,$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — два вектора с компонентами $a_i, b_i, i = 1 \dots N$, макроскопические величины (плотность ρ и импульс $\rho \mathbf{u}$) записываются следующим образом:

$$(\mathbf{f}, 1) = \rho, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{c}_\gamma) = \rho \mathbf{u}_\gamma,$$

где γ обозначает пространственные координаты x, y, z . Имеем выражение для H -функции в виде

$$H[\mathbf{f}] = (\mathbf{f}, \log(\mathbf{f}/\mathbf{w})).$$

где $\mathbf{w} = \{w_i, i = 1 \dots N\}$.

3. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПАРАМЕТРА α

Для построения секущих необходимо определить точки, которые секущие пересекают. Для случая $\alpha \leq 2$ такими точками являются $\underline{\alpha} \leq 2$ и 2, где $\underline{\alpha}$ есть нижняя граница оценки α ; в случае $\alpha \geq 2$ берутся точки 2 и $\bar{\alpha} \geq 2$, где $\bar{\alpha}$ есть верхняя граница оценки α .

Для энтропии в больцмановской форме (3) неравенство (2) может быть записано в следующем виде (см. [17]):

$$(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x})) \leq \alpha (\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x})), \quad (6)$$

где $\mathbf{x}$ отвечает за отклонение от локального равновесия

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f}}{\mathbf{f}}$$

и имеет компоненты $x_i = (f_i^{eq} - f_i)/f_i$.

Дополнительно будет удобно ввести следующие обозначения:

$$(a, b)_+ = \sum_{i: x_i \geq 0} a_i b_i, \quad (a, b)_- = \sum_{i: x_i < 0} a_i b_i,$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ имеют компоненты $a_i, b_i, i = 1 \dots N$.

Имеем тогда для левой части (2) следующую запись:

$$(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x})) = (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_+ + (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_-,$$

теперь воспользуемся следующими неравенствами для логарифмов [21]:

$$\log(1 + z) < \frac{z(2 + z)}{2(1 + z)}, \quad z > 0,$$

$$\log(1 + z) \leq \sum_{l=1}^M (-1)^{(l+1)} \frac{z^l}{l}, \quad -1 < z \leq 0,$$

где $M = 1, 2, \dots$, в данной работе рассмотрим случай $M = 3$. С использованием неравенств для логарифмов получаем

$$\begin{aligned} & (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_+ + (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_- \leq \left(\mathbf{f}, \frac{1}{2} \alpha \mathbf{x} (2 + \alpha \mathbf{x}) \right)_+ + \\ & + \left(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \left(\alpha \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\alpha \mathbf{x})^2 + \frac{1}{3} (\alpha \mathbf{x})^3 \right) \right)_- \leq \frac{\alpha^2}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{\alpha^3}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{\alpha^4}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_-, \end{aligned}$$

где было учтено, что $(\mathbf{f}, \mathbf{x})_+ + (\mathbf{f}, \mathbf{x})_- = (\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \sum_i (f_i^{eq} - f_i) = 0$. Если найти α такое, что выполняется неравенство

$$\frac{\alpha}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{\alpha^2}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{\alpha^3}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_- \leq (\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x})), \quad (7)$$

то тогда выполняется и (2). Отметим, что для (7) решение $\alpha \leq 2$. Действительно, так как $\alpha > 1$, то из (7) имеем

$$\alpha \leq \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))}{\frac{1}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{\alpha}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{\alpha^2}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_-} \leq \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)}{\frac{1}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{1}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{1}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_-} \leq 2,$$

где использовалось неравенство $(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x})) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)$, следующее из $\log(1 + z) \leq z, z > -1$. Тогда для уравнения (7) и (2) имеется решение, обозначаемое $\underline{\alpha}$, оно имеет вид

$$\underline{\alpha} = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))}{\left(\frac{1}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{1}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{4}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_- \right)}. \quad (8)$$

Использование $\underline{\alpha}$ из (8) вместо α в энтропийном методе РУБ гарантирует выполнение H -теоремы и, следовательно, стабилизирует численные расчеты. Однако в приложениях его использование ведет к излишне диссипативному поведению моделируемых течений. Поэтому в текущей работе $\underline{\alpha}$ из (8) используется как нижняя грань оценки α , при котором выполняется H -теорема.

Из условия $f_i + \alpha(f_i^{eq} - f_i) \geq 0, i = 1 \dots N$, получаем верхнюю границу [14] α^* для α

$$\alpha^* = \min_{i: f_i - f_i^{eq} > 0} \frac{f_i}{f_i - f_i^{eq}}, \quad (9)$$

данную оценку можно улучшить. Рассмотрим неравенство [21]

$$\log(1 + z) > \frac{z}{1 + z}, \quad z \geq -1,$$

применяя данное неравенство к левой части (2), получаем

$$(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x})) \geq \frac{\alpha^2}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)_-,$$

тогда решение уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)_- = \alpha (\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))$$

определяет еще одну верхнюю границу для α . В результате имеем оценку

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{2(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))}{(\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)_-}, \alpha^* \right\}, \quad (10)$$

где α^* определяется из (9).

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

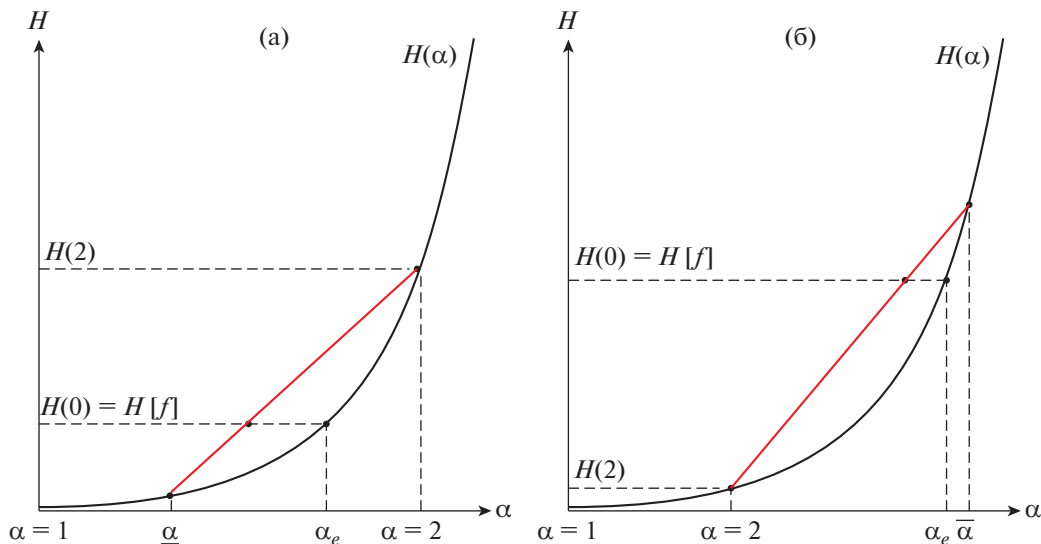
4.1. Модифицированный метод секущих

Вначале рассмотрим случай $\alpha^* < 2$, где α^* определяется из (9), очевидно, что данный случай отвечает большим отклонениям от локального равновесия, на практике это редкий случай. В данном случае считаем, что $\alpha = \min(\underline{\alpha}, \alpha^*)$, где $\underline{\alpha}$ определена формулой (8).

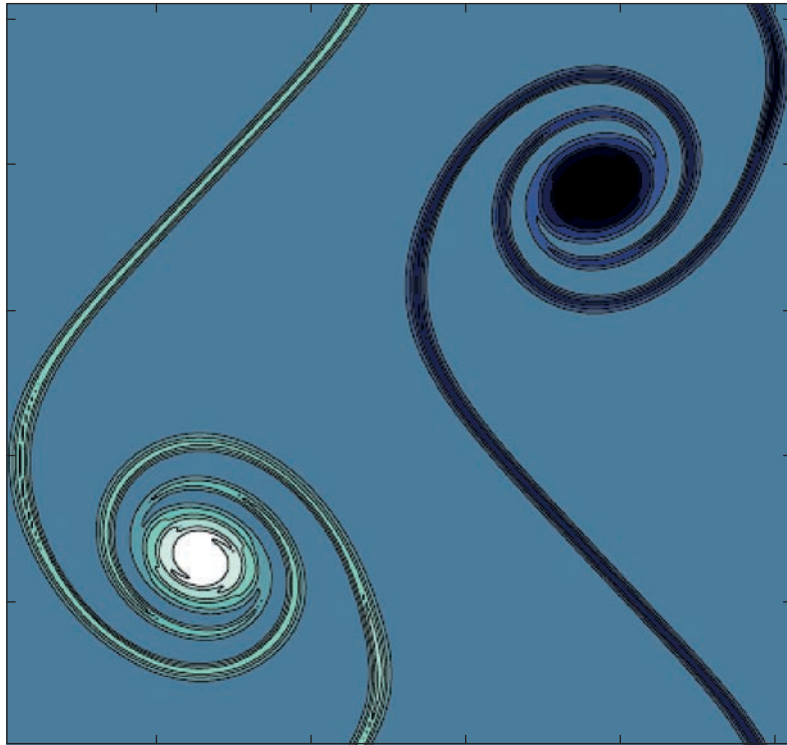
Дальше будем считать, что $\alpha^* \geq 2$. Геометрическая интерпретация метода представлена на фиг. 1. Для удобства определим функцию

$$H(\alpha) \equiv H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{\text{eq}} - \mathbf{f})],$$

очевидно, что решение (2), записанное в виде равенства, есть абсцисса точки пересечения горизонтальной линии $H(0) = H[\mathbf{f}]$ с кривой $H(\alpha)$, фиг. 1, обозначим эту точку α_e . Нахождение аналитического выражения для α_e не представляется возможным. В данном разделе найдем аналитические оценки $\alpha \leq \alpha_e$ с помощью метода секущих.



Фиг. 1. Геометрическая интерпретация модифицированного метода секущих, (а) – для $H(2) \geq H(0)$, (б) – для $H(2) < H(0)$, $H(\alpha) \equiv H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{\text{eq}} - \mathbf{f})]$. Решение уравнения баланса энтропии для модифицированного метода секущих есть точка пересечения секущей и горизонтальной прямой $H = H(0) = H[\mathbf{f}]$. Решение уравнения баланса энтропии (2) (в виде равенства) есть точка α_e .



Фиг. 2. Двойной сдвиговый слой. Представлены амплитуды завихренности скорости течения для модифицированного метода секущих.

Пусть $H(0) \leq H(2)$, данный случай представлен на левом слайде фиг. 1. Одним из решений (2) является абсцисса α точки пересечения горизонтальной линии $H(0) = H[f]$ и секущей, проходящей через точки $\underline{\alpha}$ и 2, после алгебраических вычислений получаем для абсциссы этой точки выражение

$$\alpha = \underline{\alpha} + \frac{H[f] - H(\underline{\alpha})}{H(2) - H(\underline{\alpha})}(2 - \underline{\alpha}), \quad (11)$$

где $\underline{\alpha}$ задается (8). Отметим, что если в качестве $\underline{\alpha}$ взять $\alpha = 1$, то получаем стандартный метод секущих [18].

Теперь пусть $H(0) \geq H(2)$, данный случай представлен на фиг. 1б. Аналогично предыдущему случаю находим аналитическое решение для (2) в виде

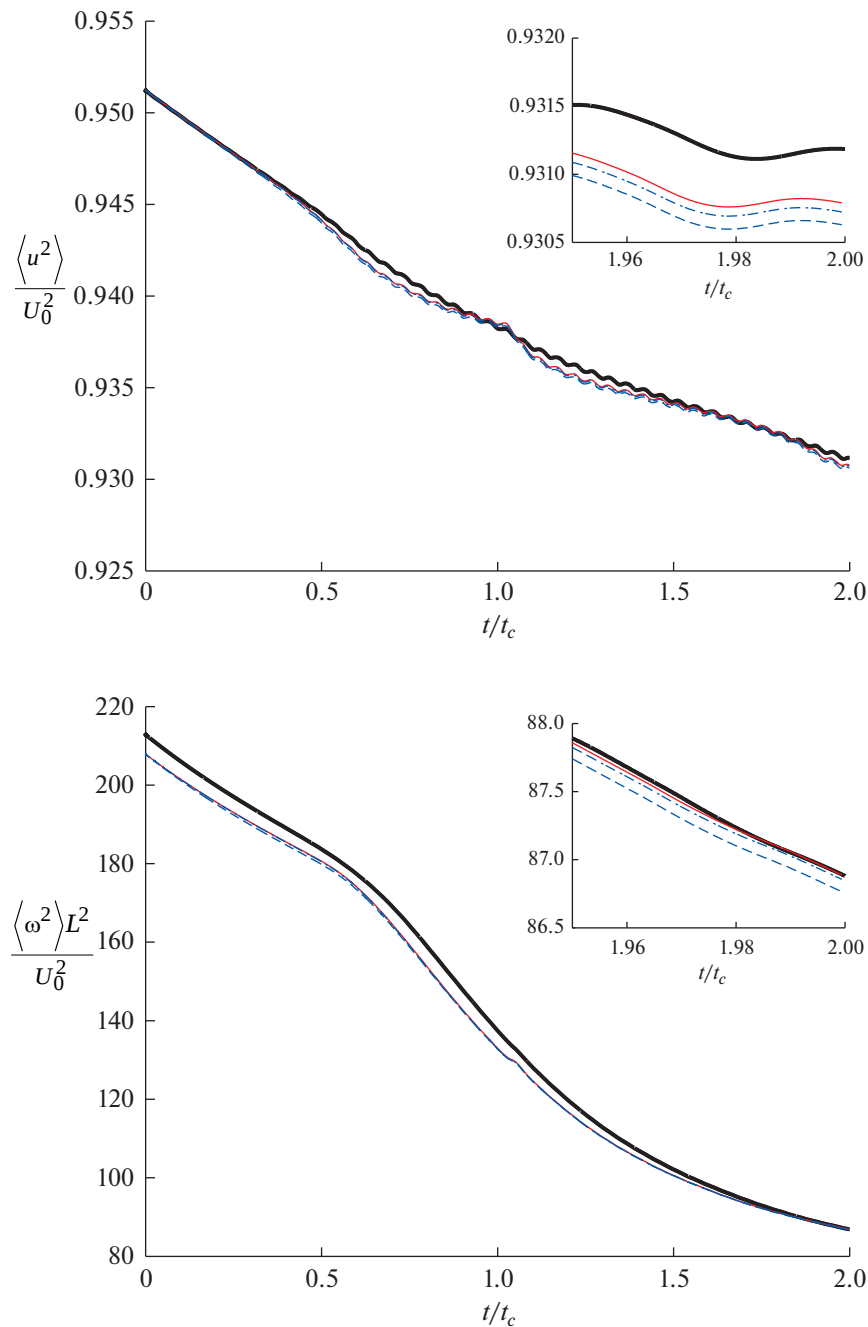
$$\alpha = 2 + \frac{H[f] - H(2)}{H(\bar{\alpha}) - H(2)}(\bar{\alpha} - 2), \quad (12)$$

где $\bar{\alpha}$ задается формулой (10).

Для численного моделирования используется девятискоростная решеточная модель уравнения Больцмана для двух пространственных переменных $D2Q9$ [1], состояние локального равновесия берется как произведение одномерных функций распределения (4)–(5). Временной шаг берется равным единице $\Delta t = 1$. В ходе численного моделирования параметр α на каждом временном шаге и в каждом пространственном узле вычисляется по формулам (11)–(12).

4.2. Численное моделирование: двойной сдвиговый слой

Задача о двойном сдвиговом слое часто используется для оценки устойчивости и диссипативных свойств решеточных уравнений Больцмана [18, 27, 29–31]. Это связано с тем, что в данной задаче наблюдаются значительные амплитуды сдвиговых напряжений и достаточно сложная вихревая структура, с другой стороны, задача относительно легко решается численно и имеет



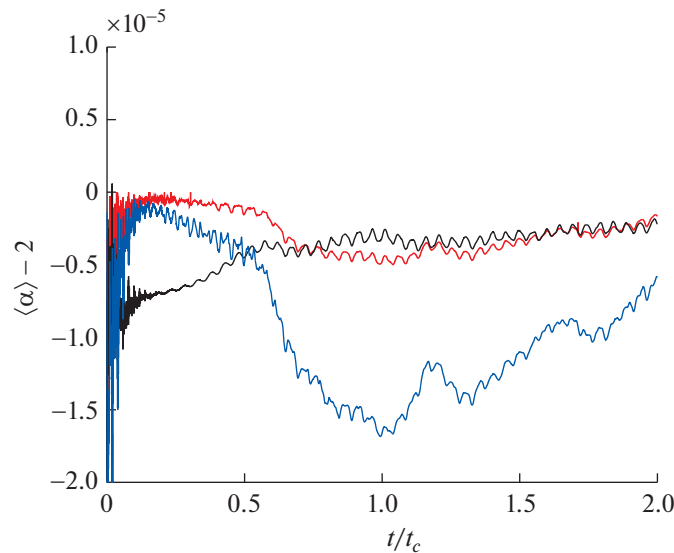
Фиг. 3. Двойной сдвиговый слой. Представлена эволюция во времени усредненной по пространству кинетической энергии и усредненной по пространству завихренности. Эталонное решение обозначается (—), модифицированный метод секущих обозначается (---); существенно энтропийный метод обозначается (— · —); метод секущих обозначается (---).

простые граничные условия. Рассмотрим численное моделирование течения вязкой жидкости в двумерной квадратной области размера $L \times L$, на границах ставятся периодические граничные условия. Начальные значения скоростей в рассматриваемой области следующие:

$$u_x(x, y)|_{t=0} = U_0 \text{th}(k(y/L - 0.25)), \quad y < L/2, \quad (13)$$

$$u_x(x, y)|_{t=0} = U_0 \text{th}(k(0.75 - y/L)), \quad y \geq L/2, \quad (14)$$

$$u_y(x, y)|_{t=0} = U_0 \delta \sin(2\pi(x/L + 0.25)), \quad (15)$$



Фиг. 4. Двойной сдвиговый слой. Представлена эволюция во времени величины $\langle \alpha \rangle - 2$, где $\langle \alpha \rangle$ есть усреднение по пространственным узлам значений α ; модифицированный метод секущих обозначается (—); существенно энтропийный метод обозначается (---); метод секущих обозначается (—).

где параметры k , δ следующие:

$$k = 80, \quad \delta = 0.05$$

также считаем, что плотность жидкости равна 1, число Рейнольдса определяется так: $Re = U_0 L / \nu$, где ν есть вязкость жидкости.

Отметим, что форма начальной функции распределения (которая определяет начальные значения скоростей) существенно влияет на диссипативные свойства течения. Для того, чтобы избежать осцилляций гидродинамических величин в начальные моменты времени, функция распределения в момент времени $t = 0$ задается как $\mathbf{f}^{(eq)} + \mathbf{f}^{(1)}$, где $\mathbf{f}^{(eq)}$ есть равновесная часть функции распределения, в которой гидродинамические величины заданы выражениями (13)–(15), $\mathbf{f}^{(1)}$ есть неравновесная часть функции распределения, зависящая от градиентов гидродинамических величин, последние оцениваются численно на основе центральных разностей [30].

Расчеты для задачи (13)–(15) проводились для числа Рейнольдса $Re = 3 \times 10^4$ и $U_0 = 0.04$, последнее означает, что число Маха $M = U_0 / c_s = \sqrt{3} \times 0.04 \approx 0.0693$. Также удобно ввести характеристическое время конвекции по формуле $t_c = L / U_0$. В качестве эталонного решения возьмем результаты, полученные с помощью стандартной модели $D2Q9$ ($\alpha = 2$) для сетки высокого разрешения 1028×1028 . Сравнивать эталонные решения будем с результатами расчетов на основе энтропийной $D2Q9$ модели для сетки с разрешением 256×256 . Отметим, что для данного разрешения стандартная модель $D2Q9$ ($\alpha = 2$) уже неустойчива, но все рассматриваемые энтропийные подходы (метод секущих, модифицированный метод секущих, существенно энтропийный) дают устойчивые решения. Амплитуды завихренностей (ротор) скоростей в момент времени $t = t_c$ представлен на фиг. 2 для модифицированного метода секущих, другие подходы дают очень похожие результаты. Отметим, что энтропийные методы устойчивы для более грубых сеток, но в решениях наблюдаются паразитные вихри, однако их появление не приводит к возникновению неустойчивостей. На фиг. 3. представлены профили во времени усредненной по пространству кинетической энергии (нормализованной на U_0^2) и усредненного по пространству квадрата завихренности w^2 (нормализованного на L^2 / U_0^2). Очевидно, что модифицированный метод секущих дает результаты, которые чуть ближе лежат к эталонным решениям. На фиг. 4 показана динамика отклонения от 2 усредненной по пространству переменной α . Видно, что метод секущих дает наибольшие отклонения, модифицированный метод секущих имеет наименьшие

отклонения в начальные моменты времени, существенно энтропийный метод имеет наименьшие отклонения при $t > 0.7t_c$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается задача построения нового энтропийного подхода для решеточных уравнений Больцмана. Для улучшения устойчивости РУБ требуется, чтобы в каждой точке выполнялось уравнение баланса энтропии, это означает, что H -функция не возрастает в результате столкновений (энтропия не убывает). Нахождение аналитического решения уравнения баланса энтропии не представляется возможным, однако можно получить решения для данного уравнения, записанного в виде неравенства. В настоящей работе предложен вариант решения, основанный на методе секущих. Показано, что для параметра α (от которого зависят диссипативные свойства системы) можно получить аналитические выражения, зависящие от значений H -функции, вычисленной для разных функций распределения. В качестве тестовой задачи рассмотрен двойной сдвиговый слой. Показано, что построенный метод дает устойчивые решения при больших числах Рейнольдса, также показано, что модифицированный метод секущих менее диссипативен, чем стандартный энтропийный метод секущих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggien E. The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. Springer, 2017.
2. Karlin I., Succi S., Chikatamarla S. Comment on “Numerics of the lattice Boltzmann method: Effects of collision models on the lattice Boltzmann simulations” // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. 068701.
3. Karlin I., Bösch F., Chikatamarla S., Succi S. Entropy-Assisted Computing of Low-Dissipative Systems // Entropy. 2015. V. 17. P. 8099.
4. Godunov S., Sultangazin U. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation // Russian Math. Surveys. 1971. V. 26. P. 1.
5. Gatignol R. The hydrodynamical description for a discrete velocity model of gas // Complex Systems. 1987. V. 1. P. 709.
6. Ilyin O. Discrete Velocity Boltzmann Model for Quasi-Incompressible Hydrodynamics // Mathematics. 2021. V. 9. P. 993.
7. Yong W.-A., Luo L.-S. Nonexistence of H theorems for the athermal lattice Boltzmann models with polynomial equilibria // Phys. Rev. E. 2003. 051105.
8. Yong W.-A., Luo L.-S. Nonexistence of H Theorem for some Lattice Boltzmann models // J. Stat. Phys. 2005. V. 121. P. 91.
9. Karlin I., Succi S. Equilibria for discrete kinetic equations // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. R4053.
10. Karlin I., Gorban A., Succi S., Boffi V. Maximum Entropy Principle for Lattice Kinetic Equations // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 6.
11. Karlin I., Ferrante A., Öttinger H. Perfect entropy functions of the Lattice Boltzmann method // Europhys. Lett. 1999. V. 47. P. 182.
12. Ansumali S., Karlin I., Öttinger H. Minimal entropic kinetic models for hydrodynamics // Europhys. Lett. 2003. V. 63. P. 798.
13. Ansumali S., Karlin I. Stabilization of the lattice Boltzmann method by the H theorem: A numerical test // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. 7999.
14. Ansumali S., Karlin I. Entropy Function Approach to the Lattice Boltzmann Method // J. Stat. Phys. 2002. V. 107. P. 291.
15. Tosi F., Ubertini S., Succi S., Karlin I. Optimization Strategies for the Entropic Lattice Boltzmann Method // J. Sci. Comput. 2007. V. 30. P. 369.
16. Chikatamarla S., Ansumali S., Karlin I. Entropic Lattice Boltzmann Models for Hydrodynamics in Three Dimensions // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. 010201.
17. Atif M., Kolluru P., Thantapanally C., Ansumali S. Essentially Entropic Lattice Boltzmann Model // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. 240602.
18. Zhao W., Yong W.-A. Relaxation-rate formula for the entropic lattice Boltzmann method // Chinese Phys. B. 2019. V. 28. 114701.
19. Jonnalagadda A., Sharma A., Agrawal A. Single Relaxation Time Entropic Lattice Boltzmann Methods: A Developer's Perspective for Stable and Accurate Simulations // Comput. Fluids. 2021. V. 2015. 104792.
20. Karlin I., Ansumali S., Frouzakis C., Chikatamarla S. Elements of the Lattice Boltzmann Method I: Linear Advection Equation // Commun. Comput. Phys. 2006. V. 1. P. 616.

21. *F. Topsøe*. Some bounds for the logarithmic function // <https://rgmia.org/papers/v7n2/pade.pdf>. 2007. University of Copenhagen.
22. *Sterling J., Chen S.* Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods // *J. Comp. Phys.* 1996. V. 123. P. 196.
23. *Siebert D., Hegele Jr. L., Philippi P.* Lattice Boltzmann equation linear stability analysis: Thermal and athermal models // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 77. P. 026707.
24. *Ricot D., Marié S., Sagaut P.* Comparison between lattice Boltzmann method and Navier-Stokes high order schemes for computational aeroacoustics // *J. Comp. Phys.* 2009. V. 228. P. 1056.
25. *Wissocq G., Sagaut P., Boussuge J.-F.* An extended spectral analysis of the lattice Boltzmann method: modal interactions and stability issues // *J. Comp. Phys.* 2019. V. 380. P. 311.
26. *Masset P.-A., Wissocq G.* Linear hydrodynamics and stability of the discrete velocity Boltzmann equations // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 897. A.29.
27. *Coreixas C., Wissocq G., Chopard B., Latt, J.* Impact of collision models on the physical properties and the stability of lattice Boltzmann methods // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2020. V. 378. P. 20190397.
28. *Wissocq G., Coreixas C., Boussuge J.-F.* Linear stability and isotropy properties of athermal regularized lattice Boltzmann methods // *Phys. Rev. E*. 2020. V. 102. P. 053305.
29. *Ilyin O.* Discrete-velocity Boltzmann model: Regularization and linear stability // *Phys. Rev. E*. 2022. V. 105. P. 045312.
30. *Mattila K., Hegele Jr. L., Philippi P.* Investigation of an entropic stabilizer for the lattice-Boltzmann method // *Phys. Rev. E*. 2015. V. 91. P. 063010.
31. *Dellar P.* Bulk and shear viscosities in lattice Boltzmann equations // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64. P. 031203.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

О ТОЧНОСТИ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН¹⁾

© 2023 г. В. А. Колотилов^{1,*}, А. А. Курганов^{2,3,**}, В. В. Остапенко^{1,***},
Н. А. Хандеева^{1,****}, Ш. Чу^{2,*****}

¹ 630090 Новосибирск, пр-т акад. Лаврентьева, 15, ИГиЛ СО РАН, Россия

² 518005 Шеньчжэнь, пр-т Сюэюань, 1088, р-н Наньшань, Математический факультет,
Южный научно-технологический университет, Китай

³ 518005 Шеньчжэнь, пр-т Сюэюань, 1088, р-н Наньшань, Международный математический центр SUSTech
и Ведущая лаборатория вычислительной техники и дизайна материалов провинции Гуандун,
Южный научно-технологический университет, Китай

*e-mail: kolotilov1992@gmail.com

**e-mail: alexander@sustech.edu.cn

***e-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

****e-mail: nzyuzina1992@gmail.com

*****e-mail: chuss2019@mail.sustech.edu.cn

Поступила в редакцию 09.12.2022 г.
Переработанный вариант 09.12.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Проведен сравнительный анализ точности численных схем CABARET (второго порядка), Русанова (третьего порядка) и A-WENO (пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени) при сквозном расчете газодинамических ударных волн, возникающих при численном моделировании задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. Показано, что схемы CABARET и A-WENO, при построении которых используется нелинейная коррекция потоков, имеют приблизительно одинаковую точность в областях влияния ударных волн (возникающих в результате градиентных катастроф внутри расчетной области), в то время как немонотонная схема Русанова имеет в этих областях существенно более высокую точность, несмотря на заметные нефизические осцилляции на ударных волнах. При этом комбинированная схема, получаемая путем совместного применения схем Русанова и CABARET монотонно локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния. Библ. 25. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ударные волны, схемы сквозного счета повышенной точности.

DOI: 10.31857/S0044466923070062, **EDN:** ZXRBGJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку в классической работе [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории схем сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы численных схем [2–9], в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков. Укажем основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL [10], TVD [11], Central [12], WENO [13], DG (Discontinuous Galerkin) [2], [3], CABARET [14].

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060 (разд. 1–3), а также РФФИ и ГФЕН, проект № 21-51-53012 (РФФИ) и № 12111530004 (ГФЕН) (разд. 4–6). Разработка алгоритма схемы A-WENO была поддержана грантом ГФЕН № 12171226, а также фондом провинции Гуандун, лаборатория вычислительной техники и материаловедения (№ 2019B030301001).

На примере системы законов сохранения теории мелкой воды [15] было показано, что NFC-схемы имеют не более чем первый порядок как локальной сходимости в областях влияния ударных волн [16], так и интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны [17–19]. В то же время некоторые немонотонные схемы повышенной точности (в частности, схема Русанова [20] и компактная схема из [16]) сохраняют повышенный порядок интегральной сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы [17], [18]. В результате эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, имеют существенно более высокую точность в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах.

Для системы уравнений мелкой воды был разработан и применен метод построения комбинированных схем сквозного счета [17–19], которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и классических немонотонных схем, а именно, монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок точности в областях их влияния. В комбинированной разностной схеме применяется базисная немонотонная схема, которая имеет повышенную точность в областях влияния ударных волн. По базисной схеме разностное решение строится во всей расчетной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем.

При построении комбинированных схем в [17] в качестве базисной использовалась неявная компактная схема [16] третьего порядка слабой аппроксимации, а в [18] — явная схема Русанова [20] третьего порядка классической аппроксимации. В качестве внутренней NFC-схемы в [17], [18] применялся монотоннизированный вариант схемы CABARET [14] второго порядка точности на гладких решениях. В [19] в качестве базисной схемы, входящей в комбинированную схему, использовался немонотонный вариант DG-метода третьего порядка, а в качестве внутренней схемы — монотонный вариант данного метода, в котором применялась нелинейная коррекция численных потоков [2].

В настоящей работе изучается точность схем сквозного счета при численном моделировании разрывных решений системы законов сохранения неизоэнтропической газовой динамики [21], которая, в отличие от системы уравнений теории мелкой воды, не является строго нелинейной [22] (поскольку имеет вырожденное характеристическое поле, приводящее к формированию контактных разрывов) и в общем случае не допускает записи в форме инвариантов. Проведен сравнительный анализ точности схемы Русанова [19] и двух различных современных NFC схем (монотонной модификации схемы CABARET [23] и схемы A-WENO [24]) при сквозном расчете газодинамических ударных волн, возникающих при численном моделировании задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. При решении этой задачи внутри расчетной области в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, распространяющихся с постоянной скоростью. Между этими ударными волнами образуются их области влияния, которые с течением времени заполняют всю расчетную область.

Численные расчеты показали, что в гладких частях точного решения вне областей влияния ударных волн (в соответствии с формальными порядками аппроксимации) схема Русанова имеет существенно более высокую точность, чем схема CABARET, а схема A-WENO — существенно более высокую точность, чем схема Русанова. В то же время внутри областей влияния ударных волн точность NFC схем CABARET и A-WENO становится сравнимой и существенно более низкой, чем точность немонотонной схемы Русанова, имеющей заметные нефизические осцилляции за фронтами ударных волн. В работе предлагается теоретическое обоснование этих численных результатов.

По аналогии с [18], для системы уравнений газовой динамики построена комбинированная схема, в которой схема Русанова является базисной схемой, а схема CABARET — внутренней схемой. При этом области больших градиентов, где применяется внутренняя схема, выделяются на основе метода, предложенного в [25]. Полученная таким образом комбинированная схема, монотонно (без заметных нефизических осцилляций) локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

2. МЕТОД ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА

Рассмотрим квазилинейную строго гиперболическую систему законов сохранения [21], [22]

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная гладкие вектор-функции, содержащие m компонент. Строгая гиперболичность системы (2.1) означает, что все собственные значения $\lambda_i(\mathbf{u})$ матрицы Якоби $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathbf{u})$ действительны и различны. Поставим для системы (2.1) задачу Коши с периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) = \mathbf{u}_0(x + X), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{u}_0(x)$ — заданная гладкая вектор-функция, X — длина периода. Предположим, что задача (2.1), (2.2) имеет единственное слабое решение $\mathbf{u}(x, t)$, которое является ограниченным и в котором в результате градиентных катастроф при $t > 0$ возникают ударные волны.

Явные численные схемы, аппроксимирующие задачу (2.1), (2.2) будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (2.3)$$

где $h = X/M$ — шаг сетки по пространству, M — заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (2.4)$$

есть шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $z \in (0, 1)$ — коэффициент запаса, $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$ — численное решение в полупространственном узле $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$. В случае проведения прикладных расчетов для экономии компьютерного времени более естественно использовать неравномерные по времени численные сетки

$$\bar{S} = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\},$$

в которых шаг по времени τ_n определяется по формуле

$$\tau_n = zh / \max_{k,j} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))|.$$

Однако в настоящей работе, целью которой является экспериментальное изучение точности различных численных схем, более удобно применение равномерной численной сетки (2.3) с постоянным шагом по времени (2.4).

Поскольку в рассматриваемой далее тестовой задаче Коши (2.1), (2.2) точное решение $\mathbf{u}(x, t)$ заранее неизвестно, то для приближенного вычисления ошибки численного решения $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$ на базисной сетке (2.3) мы зададим нечетное целое число $N \gg M$ и воспользуемся квазиточным численным решением $\mathbf{v}_{h_*}(x_{j+1/2}^*, t_n^*)$, получаемым по одной из схем повышенной точности на существенно более мелкой равномерной сетке

$$S_* = \{(x_j^*, t_n^*) : x_j^* = jh_*, t_n^* = n\tau^*, n \geq 0\}, \quad (2.5)$$

где $x_{j+1/2}^* = (j + 1/2)h_*$, $h_* = h/N$ и $\tau_* = \tau/N$. В результате ошибка численного решения $\mathbf{v}_h$ в узле $(x_{j+1/2}, t_n)$ базисной сетки (2.3) приближенно определяется по формуле

$$\delta \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n) = \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n) - \mathbf{v}_{h_*}(x_{j+1/2}^*, t_n^*). \quad (2.6)$$

Далее на графиках мы будем показывать относительные дисбалансы (ошибки) вычисления векторного решения $\mathbf{u}$, определяемые по формуле

$$\Delta \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n) = \lg \frac{|\delta \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)|}{|\mathbf{v}_{h_*}(x_{j+1/2}^*, t_n^*)|}. \quad (2.7)$$

Если гиперболическая система (2.1) моделирует некоторый физический процесс, для корректности формулы (2.7) с точки зрения теории размерности, система (2.1) должна быть записана в безразмерных переменных. Если эта система записана в размерных переменных, то для корректности формулы (2.7) компоненты векторов $\mathbf{v}_h$ и $\mathbf{v}_{h_*}$, входящих в формулы (2.6) и (2.7), должны быть заменены на свои безразмерные аналоги.

3. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

В качестве конкретной гиперболической системы (2.1) выберем безразмерную форму записи системы законов сохранения неизэнтропической газовой динамики [4, 21], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где ρ , u , p и $e = \varepsilon + u^2/2$ — плотность, скорость, давление и удельная полная энергия, ε — удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (3.2)$$

в котором $\gamma = 1.4$ — показатель адиабаты двухатомного газа. При $\rho > 0$ и $p > 0$ система (2.1), (3.1), с учетом (3.2), является строго гиперболической, поскольку соответствующая ей матрица Якоби имеет действительные и различные собственные значения

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

где $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — адиабатическая скорость звука.

Рассмотрим для системы (2.1), (3.1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.3)$$

$$\rho(x, 0) = \left(\frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}(u(x, 0) + 10)\right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p(x, 0) = (\rho(x, 0))^\gamma, \quad (3.4)$$

где $X = 10$ — длина периода. Из формул (3.3) и (3.4) следует, что энтропия газа

$$s = \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma},$$

представляющая собой инвариант w_2 системы (2.1), (3.1), и изоэнтропические квазиинварианты [7] этой системы

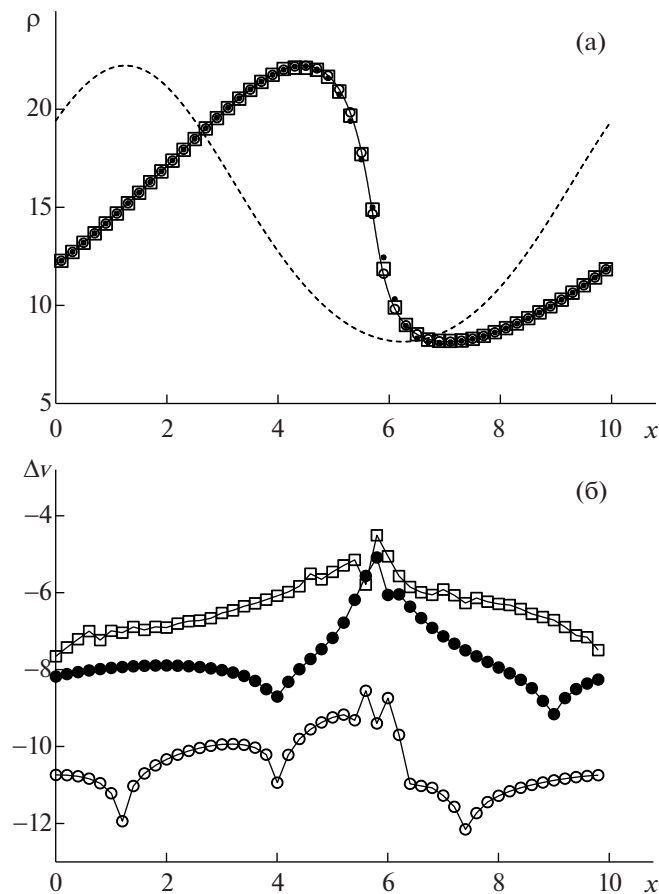
$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma-1}, \quad w_3 = u + \frac{2c}{\gamma-1}$$

имеют следующие начальные значения:

$$w_1(x, 0) = -10, \quad s(x, 0) = 0, \quad w_3(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10. \quad (3.5)$$

Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим. Отметим, что с учетом формул (3.5) задача (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) аналогична задаче Коши для системы уравнений теории мелкой воды, которая изучалась в [17–19].

В точном решении задачи (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) в момент времени $t_* \approx 1.35$ в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси x , в силу чего расстояние между соседними ударными волнами остается постоянным и равным длине периода X . На фиг. 1а штриховой линией показана начальная плотность жидкости, задаваемая второй формулой (3.5), а на фиг. 1а, 2а, 3а и 4а в моменты времени $t = 1$, $t = 2.5$, $t = 3.5$ и $t = 5$ сплошными линиями изображены квазиточные профили плотности, получаемые в результате численного расчета по схеме A-WENO [24] на мелкой сетке (2.5), в которой $h_* = 0.005$ и $\tau_* = 0.0005$. К моменту времени $t = 1$ в точном решении начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким (фиг. 1а). Ударные волны, которые в момент времени t_* возникают как сильные разрывы первоначально бесконечно малой амплитуды, в момент времени $t = 2.5$ имеют конечную амплитуду (фиг. 2а), но области их влияния,



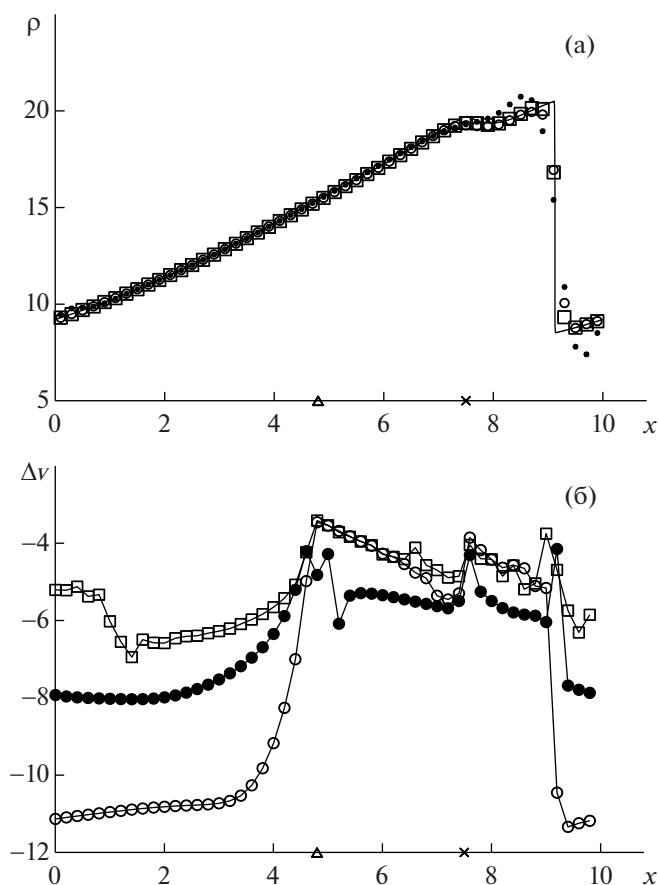
Фиг. 1. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 1$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). На графике (а) сплошной линией показано квазиточное, а пунктирной линией — начальные значения плотности.

расположенные внутри интервалов $(10i + 5, 10i + 9) \subset [10i, 10i + 10]$, $i \in \mathbb{Z}$, еще не заполняют всю расчетную область. К моменту времени $t = 3.5$ ударные волны проходят расстояние, большее длины периода $X = 10$, и вся расчетная область становится их областью влияния. С учетом этого сильные разрывы, расположенные на линиях, приведенных на фиг. 3а и 4а, соответствуют ударной волне, которая сформировалась в момент времени t_* внутри интервала $[-X, 0]$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На фиг. 1–4 приведены результаты численных расчетов задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки) на равномерной сетке (2.3), где шаг по времени выбирается из условия устойчивости (2.4), в котором коэффициент запаса $z \cong 0.35$. На рисунках (а) показаны значения плотности газа, получаемые при численном расчете на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.2$. Из этих рисунков видно, что, в отличие от NFC-схем CABARET и A-WENO, схема Русанова имеет заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн.

На рисунках (б) приведены относительные локальные дисбалансы (2.7), получаемые при численном расчете на базисной сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.005$. В формуле (2.7) использовалось квазиточное решение, получаемое по схеме Русанова [20] на мелкой сетке (2.5), в которой $h_* = 2.4 \times 10^{-4}$ и $\tau_* = 2.4 \times 10^{-5}$. Результаты этих расчетов показаны для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ базисной сетки (2.3). Из фиг. 1б и 2б следует, что вне областей влияния ударных волн схема A-WENO имеет на два, три порядка более высокую точность, чем

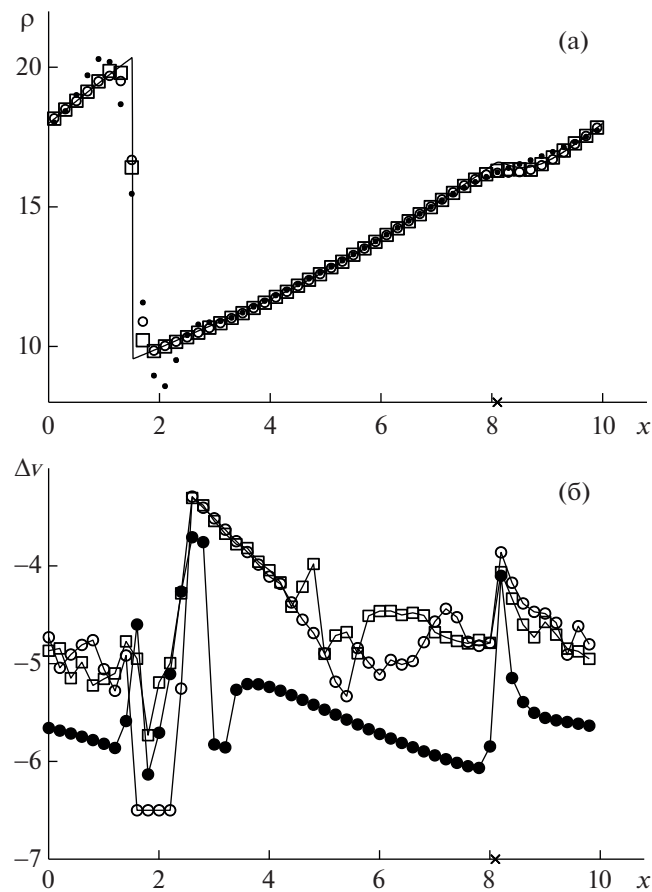


Фиг. 2. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 2.5$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). Крестиком изображена координата слабого контактного разрыва, а треугольником — левая граница области влияния ударной волны. На графике (а) сплошной линией показано квазиточное значение плотности.

схема Русанова и на три, четыре порядка более высокую точность, чем схема CABARET. Внутри областей влияния ударных волн точность схемы A-WENO резко падает (фиг. 2б, 3б и 4б), становится сравнимой с точностью схемы CABARET и существенно более низкой, чем точность схемы Русанова. При этом с течением времени различие в точности схем Русанова и A-WENO заметно возрастает, достигая к моменту времени $t = 5$ (фиг. 4б) приблизительно полтора порядка в основной части области гладкости точного решения. Необходимо также отметить, что точность всех схем резко падает не только в окрестности фронта ударной волны, но и в окрестности слабого контактного разрыва, положение которого отмечено крестиками на оси x .

5. КОМБИНИРОВАННАЯ СХЕМА

На основе методики, предложенной в [17], по аналогии с [18], для системы газодинамических уравнений (2.1), (3.1) построена комбинированная схема CRC (Combined Rusanov–CABARET), в которой схема Русанова является базисной схемой, а схема CABARET — внутренней схемой. Области больших градиентов, где применяется внутренняя схема, выделяются на основе метода, предложенного в [25]. Результаты расчета по CRC схеме плотности газа на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.2$ визуально близки результатам расчета по схеме CABARET, а результаты расчета по CRC схеме относительных локальных дисбалансов (2.7) на базисной сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.005$ визуально близки результатам расчета по схеме Русанова. Таким образом, CRC схема монотонно (без заметных нефизических осцилляций) локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

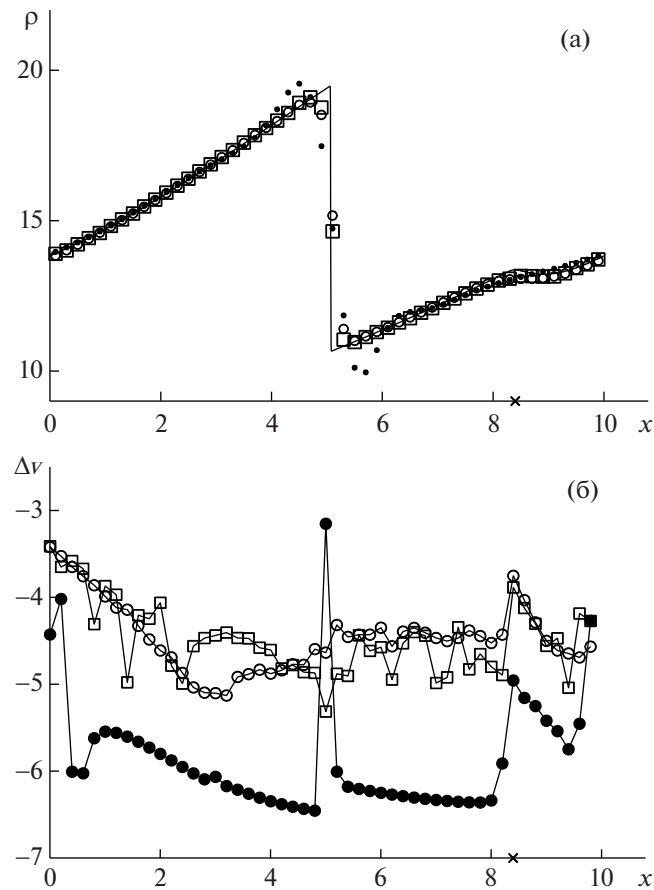


Фиг. 3. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 3.5$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). Крестиком изображена координата слабого контактного разрыва. На графике (а) сплошной линией показано квазиточное значение плотности.

6. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты тестовых расчетов, приведенные на фиг. 1–4, показывают, что в областях влияния ударных волн (также как при численном моделировании разрывных решений системы уравнений мелкой воды [17–19]) точность различных NFC-схем становится сравнимой, независимо от их порядка аппроксимации на гладких решениях, и существенно более низкой, чем точность схемы Русанова. Данный недостаток NFC-схем непосредственно связан с их главным преимуществом — монотонной локализацией фронтов ударных волн, поскольку каждая конечная сумма фурье-разложения разрывной функции не является монотонной функцией. С учетом этого, осцилляции, возникающие на фронтах ударных волн в немонотонной схеме Русанова, несут информацию о волновой структуре фурье-разложения разрывной функции в окрестности сильного разрыва, что позволяет этой схеме с повышенной точностью передавать условия Гюгоньо и, как следствие, сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн. NFC-схемы в результате искусственного сглаживания численных ударных волн эту информацию теряют, что приводит к снижению их точности при аппроксимации условий Гюгоньо.

В то же время численные расчеты газодинамического теста (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) показали, что схема Русанова (также как NFC-схемы CABARET и A-WENO) имеет лишь первый порядок интегральной сходимости в негативной норме на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны. В этом заключается принципиальное отличие от случая численного расчета аналогичного гидродинамического теста [18], в котором на таких интервалах схема Русанова (в отличие от NFC-схем) сохраняет второй порядок интегральной сходимости, что обеспечивает ей на три порядка более высокую точность в областях влияния ударных волн по сравнению с NFC-схемами. В результате при расчете задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) преиму-



Фиг. 4. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 5$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). Крестиком изображена координата слабого контактного разрыва. На графике (а) сплошной линией показано квазиточное значение плотности.

щество схемы Русанова по точности в областях влияния ударных волн (относительно схем CABARET и A-WENO) снижается приблизительно до порядка 1.5. Однако это преимущество является достаточно существенным для того, чтобы предложенную в предыдущем разделе комбинированную схему CRC, в которой базисной является схема Русанова, можно было рекомендовать для численного моделирования более сложных газодинамических течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection – dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150–268.
<https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
3. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. V. 16. № 3. P. 173–261.
<http://doi.org/10.1023/A:1012873910884>
4. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
5. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
<https://doi.org/10.1007/b79761>
6. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
<https://doi.org/10.1007/b79761>

7. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Изд. МГУ, 2013.
8. Hesthaven J.S. Numerical methods for conservation laws in V. 18 of Computational Science and Engineering. Philadelphia: SIAM, 2018.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611975109>
9. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. P. 701–762.
<https://doi.org/10.1017/S0962492920000057>
10. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
11. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
12. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. № 2. P. 408–463.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90260-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90260-8)
13. Liu X.-D., Osher T., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. № 1. P. 200–212.
<https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
14. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
15. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
16. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
17. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
<https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
18. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.
<https://doi.org/10.1134/S1064562418060315>
19. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
<https://doi.org/10.1134/S106456241906005X>
20. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
21. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. Appl. Math. 1972. 48 p.
23. Остапенко В.В., Колотилов В.А. Применение схемы CABARET для расчета разрывных решений гиперболической системы законов сохранения // Докл. АН. Матем., информ., проц. управл. 2021. Т. 501. С. 62–66.
<https://doi.org/10.1134/S1064562421060120>
24. Wang B.-S., Don W.S., Kurganov A., Liu Y. Fifth-order A-WENO schemes based on the adaptive diffusion central-upwind Rankine-Hugoniot fluxes // Commun. Appl. Math. Comput. 2021.
<https://doi.org/10.1007/s42967-021-00161-2>
25. Karni S., Kurganov A., Petrova G. A smoothness indicator for adaptive algorithms for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2002. V. 178. P. 323–341.
<https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7024>

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

МЕТОД ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ 3D КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ¹⁾

© 2023 г. Р. В. Намм^{1,*}, Г. И. Цой^{1,**}

¹ 680063 Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65, ВЦ ДВО РАН, Россия

* e-mail: rnamm@yandex.ru

** e-mail: tsoy.dv@mail.ru

Поступила в редакцию 24.11.2022 г.
Переработанный вариант 24.11.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

В статье исследуется трехмерная контактная задача с кулоновским трением для упругого тела, опирающегося на жесткую опору. Решение квазивариационной постановки задачи определяется как неподвижная точка некоторого отображения, ставящего в соответствие заданной силе нормальной реакции опоры величину нормального напряжения в зоне контакта. Для поиска неподвижной точки используется метод последовательных приближений, сходимость которого доказывается с помощью модифицированных функционалов Лагранжа. Приводятся результаты численного решения задачи с использованием конечно-элементного моделирования и метода проксимального градиента. Библ. 17. Фиг. 7. Табл. 1.

Ключевые слова: упругое тело, сила трения, нелинейные граничные условия, модифицированный функционал Лагранжа, неподвижная точка.

DOI: 10.31857/S0044466923070104, **EDN:** ZXTRJO

1. ВВЕДЕНИЕ

Контактные задачи с трением имеют приложения во многих областях механики сплошных сред и представляют большой интерес для специалистов, занимающихся математическим моделированием данных задач. Одновременный учет граничных условий непроникания типа Синьорины и кулоновского трения в математической модели контактных задач приводит к квазивариационным неравенствам. Неравенства такого типа не могут быть представлены в виде экстремальной задачи, и их решение сводится к поиску неподвижной точки некоторого отображения [1, 2]. Поиск неподвижной точки обычно осуществляется методом последовательных приближений, вычислительная эффективность которого зависит от реализации на каждом шаге вспомогательной контактной задачи с заданным трением.

Известно, что сила трения в зоне контакта упругого тела с жестким основанием пропорциональна модулю нормального напряжения с коэффициентом трения. Поэтому для решения вспомогательной контактной задачи с заданным трением эффективно использовать схемы двойственности на основе модифицированных функционалов Лагранжа, позволяющих находить нормальное напряжение как двойственную компоненту седловой точки. Использование модифицированных функционалов Лагранжа позволяет реализовать градиентный метод Удзавы, который является более эффективным по сравнению с классическим аналогом. Модифицированные функционалы Лагранжа ранее вводились и изучались в работах [3–8].

В данной работе исследуется сходимость метода последовательных приближений для нахождения неподвижной точки при решении квазивариационного неравенства в 3D случае. Численное решение задачи в 3D случае осложняется по сравнению с 2D наличием нескольких тангенциальных компонент вектора перемещения в зоне контакта. Для решения задачи минимизации недифференцируемого функционала в конечно-мерном случае был применен метод проксимального градиента. Чтобы показать эффективность предложенного метода, представлены численные результаты.

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 20-01-00450 А).

2. КРАЕВАЯ И ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, состоящей из трех непустых, попарно-непересекающихся частей $\Gamma_d, \Gamma_n, \Gamma_c$: $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_d \cup \bar{\Gamma}_n \cup \bar{\Gamma}_c$. Полагаем, что тело закреплено на Γ_d , на Γ_n задаются поверхностные силы $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in L^2(\Gamma_n) := \left(L^2(\Gamma_n)\right)^3$ и на участке Γ_c упругое тело опирается на абсолютно жесткую опору $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \leq 0\}$. В зоне контакта происходит учет силы трения по закону Кулона и на тело действуют объемные силы $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega) := \left(L^2(\Omega)\right)^3$. Необходимо найти перемещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ точек упругого тела Ω в состоянии равновесия.

Для этого определим тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{u})\}$ и тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$, связанные линейным законом Гука:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{km}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad k, m = 1, 2, 3.$$

Здесь $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j, k, m = 1, 2, 3$ — это элементы тензора модулей упругости, обладающего свойствами симметрии и положительной определенности: $c_{ijkl} = c_{jilm} = c_{kmij}$, $c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij}$, $\forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathbb{R}^1$, $c_0 = \text{const} > 0$. По повторяющимся индексам ведется суммирование.

Кроме того, определим как $u_\nu = u_i\nu_i$, $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu\mathbf{v}$ нормальную и тангенциальную компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}$ на Γ_c , где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Аналогично определим $\sigma_\nu(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})\nu_i\nu_j$, $\sigma_\tau(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})\nu_j - \sigma_\nu(\mathbf{u})\mathbf{v}$ — нормальная и тангенциальная компоненты вектора напряжений $(\sigma_{1j}(\mathbf{u})\nu_j, \sigma_{2j}(\mathbf{u})\nu_j, \sigma_{3j}(\mathbf{u})\nu_j)$ на Γ_c . Наконец обозначим через $\mathcal{F}$ коэффициент трения на Γ_c . Полагаем, что $\mathcal{F} > 0$ — это достаточно гладкая функция с компактным носителем на Γ_c .

Выберем два касательных вектора $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ на Γ_c , таких что вместе с $\mathbf{v}$ они образуют локальный ортонормированный базис $\{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{v}\}$ в $\mathbb{R}^3$. Тогда вектор перемещения $\mathbf{v}$ можно представить в локальной системе координат $\{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{v}\}$ как $\mathbf{v} = (v_\nu, \mathbf{v}_\tau)$, где $v_\nu = v_i\nu_i$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{v}_\tau = (v_{\tau_1}, v_{\tau_2})$, $v_{\tau_j} = v_i\tau_{ji}$, $j = 1, 2$. То есть тангенциальную компоненту вектора перемещений можно представить в виде двумерного вектора. Этот факт усложняет исследование решаемой задачи в 3D по сравнению с плоским случаем. Для рассматриваемой геометрии области Ω и опоры S , соответствующие компоненты можно записать следующим образом: $u_\nu = -u_3$, $\mathbf{u}_\tau = (u_1, u_2, 0)$, $\sigma_\nu(\mathbf{u}) = -\sigma_{3j}(\mathbf{u})\nu_j$, $\sigma_\tau(\mathbf{u}) = (\sigma_{1j}(\mathbf{u})\nu_j, \sigma_{2j}(\mathbf{u})\nu_j, 0)$ на Γ_c . Далее полагаем, что $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Рассмотрим следующую краевую постановку задачи в области Ω :

$$-\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma_d, \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{p} \quad \text{на } \Gamma_n, \quad (2.3)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_\nu(\mathbf{u})u_\nu = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (2.4)$$

$$\|\sigma_\tau(\mathbf{u})\| \leq -\mathcal{F}\sigma_\nu(\mathbf{u}), \quad \sigma_\tau(\mathbf{u})\mathbf{u}_\tau - \mathcal{F}\sigma_\nu(\mathbf{u})\|\mathbf{u}_\tau\| = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \quad (2.5)$$

Краевая задача (2.1)–(2.5) принадлежит к классу задач со свободной границей. В частности, точки на Γ_c , в которых тело слипается с опорой ($u_\nu = 0$), заранее неизвестны и определяются одновременно с решением задачи. Условия (2.4) обеспечивают непроникание упругого тела в абсолютно жесткую опору. Условия (2.5) задают силу трения по закону Кулона на Γ_c [1, 2, 9].

Для слабой формулировки задачи определим функциональное пространство

$$\mathbb{V} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) := \left(H^1(\Omega)\right)^3 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_d \right\}$$

и множество допустимых перемещений

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid v_v \leq 0 \text{ на } \Gamma_c\}.$$

Кроме того, обозначим через

$$H^{1/2}(\Gamma_c) = \{\varphi \in L^2(\Gamma_c) \mid \exists v \in H^1(\Omega) : v = \varphi \text{ на } \Gamma_c, v = 0 \text{ на } \Gamma_d\}$$

пространство следов функции на Γ_c и через $H^{-1/2}(\Gamma_c) = (H^{1/2}(\Gamma_c))^*$ соответствующее двойственное пространство. Далее в работе $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma_c}$ обозначает двойственность между пространствами $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ и $H^{1/2}(\Gamma_c)$.

Слабым решением задачи (2.1)–(2.5) назовем $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее квазивариационному неравенству [1, 2, 10]

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \langle \mathcal{F}\sigma_v(\mathbf{u}), \|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\| \rangle_{1/2, \Gamma_c} \geq b(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}, \quad (2.6)$$

где $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx$ – симметричная билинейная форма, определенная на $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ и $b(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_n} p_i v_i ds$ – линейная форма на $\mathbb{V}$, представляющая работу приложенных внешних сил.

Используя обобщенную формулу Грина, можно показать, что решение $\mathbf{u}$ квазивариационного неравенства (2.6) удовлетворяет краевой задаче (2.1)–(2.5) в обобщенном смысле. Если слабое решение достаточно гладкое, то оно также будет классическим решением краевой задачи. Если решение $\mathbf{u}$ задачи (2.6) имеет дополнительную гладкость по сравнению с вариационной, а именно $\sigma_v(\mathbf{u}) \in L^2(\Gamma_c)$, то член $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma_c}$ можно заменить скалярным произведением на $L^2(\Gamma_c)$, так как следы функций $\mathbf{v}_\tau, \mathbf{u}_\tau \in (H^{1/2}(\Gamma_c))^2$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}\sigma_v(\mathbf{u}) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) ds \geq b(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}.$$

Зависимость силы трения $\mathcal{F}|\sigma_v(\mathbf{u})|$ от искомого решения $\mathbf{u}$ является основной трудностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения подобных задач, поэтому разработка методов их решения является важной и сложной задачей. Решение квазивариационного неравенства (2.6) также соответствует квазиэкстремальному представлению

$$\mathbf{u} \in \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}|\sigma_v(\mathbf{u})| \|\mathbf{v}_\tau\| ds \right\}.$$

3. РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Определим по решению $\mathbf{u}$ задачи (2.6) $\sigma_v(\mathbf{u})$ при помощи формулы Грина

$$\langle \sigma_v(\mathbf{u}), v_v \rangle_{1/2, \Gamma_c} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v})$$

для $\mathbf{v} = 0$ на Γ_d и $\mathbf{v}_\tau = 0$ on Γ_c . Тогда $\sigma_v(\mathbf{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma_c)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу с заданным трением. Найти $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$ для $g \in L^2(\Gamma_c)$, $g \geq 0$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}g (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) ds \geq b(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}. \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1) существует и единственно. Тогда если определить отображение $\Phi(g) = -\sigma_v(\mathbf{u}(g))$, где $\mathbf{u}(g)$ слабое решение задачи с заданным трением, то задача (2.6) сводится к отысканию неподвижной точки этого отображения.

В работе [1] показано с использованием слабой теоремы Шаудера, что отображение Φ имеет неподвижную точку в пространстве $L^2(\Gamma_c)$ при достаточно малых значениях коэффициента трения $\mathcal{F}$. Существование неподвижной точки означает, что $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$ является решением квазивариационного неравенства (6), когда $\Phi(-\sigma_v(\mathbf{u})) = -\sigma_v(\mathbf{u})$.

Для нахождения неподвижной точки обычно используется метод последовательных приближений [1, 2, 11]. В нашем случае метод выглядит следующим образом.

1. Задаем стартовое $g^0 \in L^2(\Gamma_c)$, $g^0 \geq 0$.
2. Находим $\mathbf{u}^t$ как решение вспомогательной задачи (3.1) для $g = g^t$.
3. Вычисляем следующее $g^{t+1} = |\sigma_v(\mathbf{u}^t)|$.

Решение задачи с заданным трением (3.1) обычно заменяют задачей поиска седловой точки классического функционала Лагранжа. Это позволяет сгладить соответствующий недифференцируемый функционал и перейти к задаче безусловной оптимизации по прямой переменной. Однако применение алгоритма Удзавы для поиска седловой точки не гарантирует сходимость по двойственной переменной, несмотря на существование самой седловой точки классического функционала Лагранжа. Шаг сдвига по двойственной переменной также должен быть ограничен, для сходимости по прямой переменной, что замедляет работу алгоритма [12, 13]. Для преодоления данного затруднения авторами рассматривается схема двойственности, основанная на модифицированных функционалах Лагранжа с нелинейной зависимостью от двойственных переменных [4–7]. Вопрос о сходимости метода последовательных приближений будет тесно связан с последовательностью седловых точек, генерируемых в модифицированном методе Удзавы при поиске седловых точек. Для плоского случая аналогичное исследование авторами было проведено в работе [14].

Определим модифицированный функционал Лагранжа на пространстве [6]

$$M(\mathbf{v}, l) = J(\mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c} \left((l + r v_v)^+ \right)^2 - l^2 ds \quad \forall (\mathbf{v}, l) \in \mathbb{V} \times L^2(\Gamma_c),$$

где $(l + r v_v)^+ = \max\{0, l + r v_v\}$, $r > 0$ произвольная константа. Здесь

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g \|\mathbf{v}_\tau\| ds$$

функционал потенциальной энергии и $g \geq 0$.

Определение 1 (Седловая точка). Пара $(\mathbf{v}^*, l^*) \in \mathbb{V} \times L_2(\Gamma_c)$ называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(\mathbf{v}, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$M(\mathbf{v}^*, l) \leq M(\mathbf{v}^*, l^*) \leq M(\mathbf{v}, l^*) \quad \forall (\mathbf{v}, l) \in \mathbb{V} \times L_2(\Gamma_c). \quad (3.2)$$

Определение седловой точки для модифицированного функционала $M(\mathbf{v}, l)$ отличается от соответствующего определения для классического функционала, тем что область определения двойственной переменной l совпадает со всем пространством $L_2(\Gamma_c)$ и не должна быть неотрицательной. Можно показать, что множество седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [3, 8].

Введем модифицированный двойственный функционал на пространстве $L^2(\Gamma_c)$

$$\underline{M}(l) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} M(\mathbf{v}, l) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \left\{ J(\mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c} \left((l + r v_v)^+ \right)^2 - l^2 ds \right\}$$

и определим соответствующую двойственную задачу

$$\underline{M}(l) \rightarrow \sup, \quad l \in L^2(\Gamma_c). \quad (3.3)$$

Функционал $\underline{M}(l)$ имеет другое представление с помощью функционала чувствительности $\chi(m)$ для произвольного $m \in L^2(\Gamma_c)$ и $\mathbb{K}_m := \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid v_v \leq m \text{ на } \Gamma_c\}$:

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}_m} J(\mathbf{v}), & \text{если } \mathbb{K}_m \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функционал $\chi(m)$ является собственным выпуклым функционалом и слабополунепрерывным снизу на $L^2(\Gamma_c)$ [4, 6, 8]. Имеет место представление для $\underline{M}(l)$ [8]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L^2(\Gamma_c)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_c} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_c} m^2 ds \right\}.$$

Легко видеть, что для любых $l \in L^2(\Gamma_c)$ справедлива оценка

$$\underline{M}(l) \leq \chi(0) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}} J(\mathbf{v}). \quad (3.4)$$

Благодаря свойству слабой полунепрерывности снизу функционала чувствительности можно доказать, что двойственный функционал $\underline{M}(l)$ является непрерывным и дифференцируемым по Гато в $L^2(\Gamma_c)$, и его производная $\nabla \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{r}$ [3, 4, 8], т.е. справедливо

$$\|\nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{L^2(\Gamma_c)} \quad \forall l_1, l_2 \in L^2(\Gamma_c)$$

и субдифференциал $\underline{M}(l)$ состоит из единственного элемента $\partial \underline{M}(l) = m(l)$

$$m(l) = \max \left\{ u_v, -\frac{l}{r} \right\} \quad \forall l \in L^2(\Gamma_c).$$

Это позволяет для поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа применить градиентный метод Удзавы следующего вида:

(i) Полагаем $k = 0$. Задаем произвольную функцию $l^0 \in L^2(\Gamma_c)$.

(ii) Находим $\mathbf{u}^{k+1}$ как решение задачи минимизации при фиксированном l^k

$$\mathbf{u}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \left\{ J^t(\mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c} \left((l^k + r v_v)^+ \right)^2 - (l^k)^2 ds \right\}.$$

(iii) Вычисляем $l^{k+1} = (l^k + r u_v^{k+1})^+$ и задаем $k = k + 1$.

Здесь $J^t(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g^t \|\mathbf{v}_\tau\| ds$, где $t = 0, 1, \dots$ соответствуют номеру шага метода последовательных приближений. Шаг (iii) метода Удзавы соответствует градиентному методу решения двойственной задачи. Для последовательности $\{l^k\}$, построенной по данному методу, имеет место предельное равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L^2(\Gamma_c)} = 0$. Учитывая оценку (3.4), можно доказать, что справедливо условие сильной двойственности [6]

$$\sup_{l \in L^2(\Gamma_c)} \underline{M}(l) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}} J^t(\mathbf{v}).$$

Пара функций $(\mathbf{u}^t, l^t)$, для которых будет выполняться равенство двойственности $\underline{M}(l^t) = J^t(\mathbf{u}^t)$ и будет являться седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа. При условии разрешимости двойственной задачи (3.3) для заданного g^t можно доказать слабую сходимость последовательности $\{l^k\}$ к решению двойственной задачи l^t и сходимость последова-

тельности $\{\mathbf{u}^k\}$ к решению $\mathbf{u}^t$ задачи (3.1) по функционалу, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} J^t(\mathbf{u}^k) = J^t(\mathbf{u}^t)$ [4]. Если решение $\mathbf{u}^t$ вспомогательной задачи имеет дополнительную гладкость: $\sigma_v(\mathbf{u}^t) \in L^2(\Gamma_c)$, $\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}^t) \in L^2(\Omega)$, тогда пара $(\mathbf{u}^t, -\sigma_v(\mathbf{u}^t))$ будет являться седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа.

Если последовательность $\{\mathbf{u}^k\}$ принадлежит $\mathbf{H}^2(\Omega)$ и ограничена, тогда последовательность $\{(\mathbf{u}^k, l^k)\}$ сходится к седловой точке $(\mathbf{u}^t, l^t)$ в $\mathbb{V} \times L^2(\Gamma_c)$. Более того, справедливо равенство $l^t = -\sigma_v(\mathbf{u}^t)$. Таким образом, l^t будет соответствовать значению g^{t+1} на $(t+1)$ -м шаге метода последовательных приближений, т.е. $l^t = g^{t+1}$.

Пусть $\{g^t\}$ — последовательность нормальных сил, генерируемых методом последовательных приближений. Предположим, что последовательность $\{g^t\} \subset H^{1/2}(\Gamma_c)$ и ограничена в этом пространстве. Так как $H^{1/2}(\Gamma_c)$ компактно вкладывается в $L^2(\Gamma_c)$, то $\{g^t\}$ является компактной последовательностью в $L^2(\Gamma_c)$. Таким образом, $\{g^t\}$ имеет предельные точки. Без ограничения общности можно считать, что $\{g^t\}$ имеет одну предельную точку, т.е. является сходящейся последовательностью. Пусть $\bar{g} \in L^2(\Gamma_c)$ — предел $\{g^t\}$ в $L^2(\Gamma_c)$, поэтому $\bar{g} = \lim_{t \rightarrow \infty} g^t$.

Теорема 1. *Элемент $\bar{g} \in L^2(\Gamma_c)$ является неподвижной точкой отображения Φ , т.е. выполняется $-\sigma_v(\mathbf{u}(\bar{g})) = \bar{g}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный t и рассмотрим элемент g^t . Обозначим $m(g^t) = \nabla \underline{M}(g^t)$, где

$$\underline{M}(g^t) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_c)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_c} g^t m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_c} m^2 ds \right\}$$

и $\chi(m)$ — это функционал чувствительности [8]. По методу Удзавы имеем $m(g^t) = 0$.

Следовательно,

$$\chi(m(g^t)) = \chi(0) = \inf_{\mathbf{v} \in K} J^t(\mathbf{v}).$$

Обозначим $\mathbf{v}(g^t) = \arg \min_{\mathbf{v} \in K} J^t(\mathbf{v})$. В силу сильной выпуклости функционала J^t имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(\mathbf{v}(g^t), \mathbf{v}(g^t)) - b(\mathbf{v}(g^t)) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g^t \|\mathbf{v}_\tau(g^t)\| ds + \frac{1}{2} a(\mathbf{v} - \mathbf{v}(g^t), \mathbf{v} - \mathbf{v}(g^t)) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g^t \|\mathbf{v}_\tau\| ds \quad \forall \mathbf{v} \in K. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выберем два произвольных неотрицательных элемента $\dot{g}, \ddot{g}$ из $L^2(\Gamma_c)$. Полагаем, что $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\dot{g})$, $\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\ddot{g})$, тогда последнее неравенство (3.5) можно записать для $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{v}}$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}) - b(\ddot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\ddot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}) - b(\ddot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\ddot{\mathbf{v}}_\tau\| ds, \\ \frac{1}{2} a(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}) - b(\dot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}) - b(\ddot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\ddot{\mathbf{v}}_\tau\| ds. \end{aligned}$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds, \\ a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} (\|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\|) ds + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} (\|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\|) ds, \\ a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} (\dot{g} - \ddot{g}) (\|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\|) ds. \end{aligned}$$

Так как $\text{meas}(\Gamma_d) > 0$, то квадратичная форма $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ является положительно-определенной на $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$. Следовательно, используя неравенства Корна и Коши–Шварца, можно показать, что существует константа $c > 0$:

$$\|\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}\|_{\mathbb{V}} \leq c \|\ddot{g} - \dot{g}\|_{L^2(\Gamma_c)}. \quad (3.6)$$

Пусть $\dot{g} = \bar{g}$, $\ddot{g} = g^t$. Тогда

$$\|\mathbf{v}(g^t) - \mathbf{v}(\bar{g})\|_{\mathbb{V}} \leq c \|g^t - \bar{g}\|_{L^2(\Gamma_c)}.$$

Переходя в (3.5) к пределу при $t \rightarrow \infty$, учитывая (3.6), получаем следующее неравенство

$$\frac{1}{2} a(\mathbf{v}(\bar{g}), \mathbf{v}(\bar{g})) - b(\mathbf{v}(\bar{g})) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \bar{g} \|\mathbf{v}_\tau(\bar{g})\| ds \leq \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \bar{g} \|\mathbf{v}_\tau\| ds \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательства выше проводились в предположении, что последовательность $\{g^t\}$ принадлежит пространству $H^{1/2}(\Gamma_c)$. Можно показать, что это условие выполняется, если элемент $\mathbf{u}^t = \arg \min_{\mathbf{v} \in K} J^t(\mathbf{v})$ принадлежит $\mathbf{H}^2(\Omega)$ для всех t .

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Численный анализ вариационных неравенств в механике обычно проводится на основе метода конечных элементов [2]. Пусть Ω — ограниченный многогранник. Конечно-элементная аппроксимация задачи проводилась с использованием трилинейных кубических конечных элементов. После дискретизации на (ii) шаге метода Удзавы мы получаем задачу минимизации недифференцируемой кусочно-квадратичной функции $\theta(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})$ по переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{N}|}$, где

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}_j - \sum_{j \in \mathcal{M}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_j + \frac{1}{2r} \sum_{j \in \mathcal{P}} \left(\left((l_j + r(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j))^+ \right)^2 - (l_j)^2 \right) w_j, \\ h(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \mathcal{P}} \mathcal{F}_j g_j \|\mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j\| w_j. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}$ — это множество индексов всех узлов сетки, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{P}$ — множества индексов узлов сетки на Γ_n и Γ_c соответственно, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 3|\mathcal{N}|$ — матрица жесткости ($|\mathcal{N}|$ — мощность множества $\mathcal{N}$), $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})$, $\mathbf{f}_j = (f_{j1}, f_{j2}, f_{j3})$, $\mathbf{p}_j = (p_{j1}, p_{j2}, p_{j3})$ — значения соответствующих функций в узлах сетки, g_j , l_j — значения нормальной силы и двойственной переменной в контактных узлах, $\mathbf{v}_j$ соответствуют векторам нормали в узлах сетки. Интегралы по Γ_c аппроксимировались с помощью квадратурной формулы трапеций в 2D случае, где w_j — коэффициенты квадратурной формулы.

Тот факт, что функцию $\theta(\mathbf{x})$ можно представить в виде суммы выпуклой дифференцируемой функции $g(\mathbf{x})$ и выпуклой блочно-сепарабельной функции $h(\mathbf{x})$, позволяет нам применить метод проксимального градиента для решения конечномерной задачи минимизации. Вследствие вы-

бранной геометрии задачи вектора нормали определяются как $\mathbf{v}_j = (0, 0, -1)$, поэтому $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j = -x_{j3}$ и $\mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j)\mathbf{v}_j = (x_{j1}, x_{j2}, 0)$. Для простоты обозначим $\mathbf{x}_{j\tau} = (x_{j1}, x_{j2})$, тогда $h(\mathbf{x})$ определяется как сумма евклидовых норм

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{P}} h_j(\mathbf{x}_{j\tau}), \quad h_j(\mathbf{x}_{j\tau}) = \mathcal{F}_j g_j w_j \|(\mathbf{x}_{j1}, \mathbf{x}_{j2})\|.$$

Проксимальный оператор для евклидовой нормы $\lambda \|\cdot\|$ определяется следующим образом:

$$\text{prox}_{\lambda \|\cdot\|}(\mathbf{v}) = \left(1 - \frac{\lambda}{\|\mathbf{v}\|}\right)^+ \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

В силу блочной сепарабельности функции $h(\mathbf{x})$ проксимальный оператор для нее будет определяться как

$$\text{prox}_h(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1, \dots, \text{prox}_{h_j}(\mathbf{x}_{j\tau}), x_{j3}, \dots, \mathbf{x}_{|\mathcal{N}|}), \quad j \in \mathcal{P},$$

где $\text{prox}_{h_j}(\mathbf{x}_{j\tau}) = \text{prox}_{\lambda_j \|\cdot\|}(\mathbf{x}_{j\tau})$, $\lambda_j = \mathcal{F}_j g_j w_j$.

Ускоренная версия метода проксимального градиента будет иметь следующий вид: выбираем $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(-1)} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{N}|}$ и повторяем шаги для $i = 1, 2, 3, \dots$:

$$1. \mathbf{y} = \mathbf{x}^{(i-1)} + \frac{i-2}{i+1}(\mathbf{x}^{(i-1)} - \mathbf{x}^{(i-2)}),$$

$$2. \mathbf{x}^{(i)} = \text{prox}_{\alpha h}(\mathbf{y} - \alpha \nabla g(\mathbf{y})).$$

Если шаг сдвига $\alpha \in (0, 1/L]$, где L — константа Липшица функции ∇g , то данный метод сходится со скоростью $O(1/i^2)$ [15], причем чем ближе стартовое значение к решению, тем быстрее метод сходится. Стоит отметить, что величину шага сдвига можно определять с помощью известного правила Армико.

Для нахождения седловой точки используется дискретный аналог метода Удзавы (i)–(iii), после чего находится новое приближение с помощью метода последовательных приближений.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

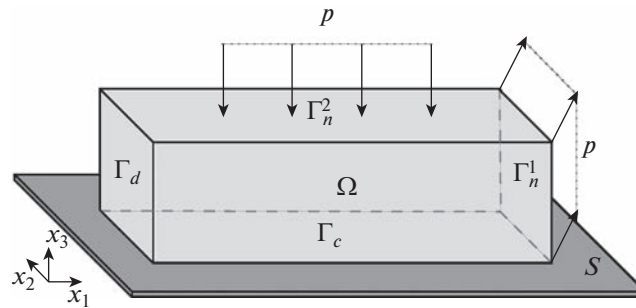
Рассмотрим следующий численный пример: тело $\Omega = (0, 3) \times (0, 1) \times (0, 1)$ (в м) выполнено из однородного упругого изотропного материала, характеризующегося модулем Юнга $E = 21.19 \times 10^4$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.277$. Полагаем, что тело жестко закреплено на участке границы $\Gamma_d = \{0\} \times (0, 1) \times (0, 1)$ и контактирует с абсолютно жесткой опорой S на участке $\Gamma_c = (0, 3) \times (0, 1) \times \{0\}$. На оставшейся части границы Γ_n задаются поверхностные силы, $\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^2 \cup \Gamma_n^3$, $\Gamma_n^1 = \{3\} \times (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_n^2 = (0, 3) \times (0, 1) \times \{1\}$, $\Gamma_n^3 = (0, 3) \times \{0, 1\} \times (0, 1)$:

$$\mathbf{p} = (p_x^1, 0, p_z^1) \text{ на } \Gamma_n^1, \quad \mathbf{p} = (0, 0, p_z^2) \text{ на } \Gamma_n^2, \quad \mathbf{p} = (0, 0, 0) \text{ на } \Gamma_n^3,$$

где $p_x^1 = 10$ МПа, $p_z^1 = 20$ МПа, $p_z^2 = -30$ МПа (см. фиг. 1). Объемные силы брались $\mathbf{f} = (0, 0, 0)$, коэффициент трения $\mathcal{F} = 0.3$ и параметр алгоритма Удзавы $r = 10^8$ (для больших r алгоритм эффективней).

Тело разбивается на $3N_d \times N_d \times N_d$ 8-узловых кубических конечных элементов, где N_d варьируется для получения задач с разными размерами. Число степеней свободы для перемещений равно $n_p = 3(3N_d + 1)(N_d + 1)(N_d + 1)$, а количество двойственных переменных равно $n_d = (3N_d + 1)(N_d + 1)$. Матрица жесткости A была соответствующим образом модифицирована для применения граничных условий закрепления тела на Γ_d . Во всех рассматриваемых ниже численных экспериментах мы выбираем

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}^{(i+1)}\|} < 10^{-8}$$



Фиг. 1. Геометрия области и нагрузка.

как критерий остановки для метода проксимального градиента. Для ускорения вычислений в качестве начального значения в данном методе можно использовать вектор перемещений, полученный на предыдущем шаге метода Удзавы или $\mathbf{0}$, если шаг первый. Алгоритм Удзавы и метод последовательных приближений завершаются, если

$$\frac{\|\mathbf{l}^{(k+1)} - \mathbf{l}^{(k)}\|}{\|\mathbf{l}^{(k+1)}\|} < 10^{-6}, \quad \frac{\|\mathbf{g}^{(r+1)} - \mathbf{g}^{(r)}\|}{\|\mathbf{g}^{(r+1)}\|} < 10^{-6},$$

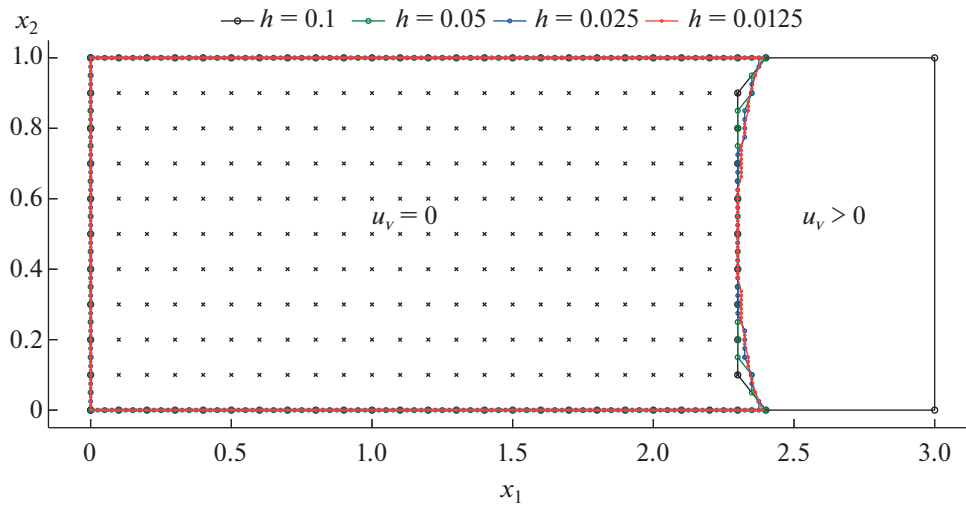
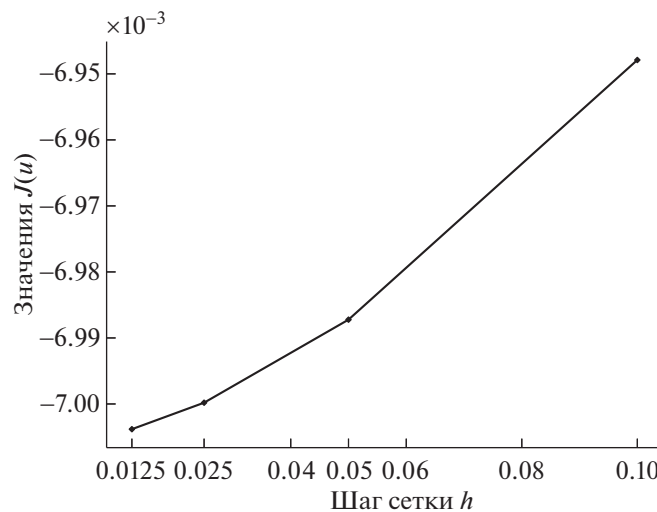
где $\mathbf{l}^{(k)}, \mathbf{g}^{(r)} \in \mathbb{R}^{n_d}$ — векторы, компонентами которых являются значения двойственной переменной и заданной нормальной силы в контактных узлах, а $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. В качестве начальных используем $\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Все эксперименты реализованы на Python с использованием библиотеки scikit-fem ver. 7.0.0 [16] для дискретизации с помощью метода конечных элементов. Для выполнения быстрых операций с векторами и разреженными матрицами использовались библиотеки SciPy, Numpy и CuPy для вычислений с ускорением на GPU. Расчет производился на сервере IBM Power Systems S822LC (8335-GTB), в основе которого два процессора IBM POWER8 с рабочей частотой 4.023 ГГц и два GPU-ускорителя NVIDIA Tesla P100.

В табл. 1 представлены результаты для различных значений n_p и n_d . Здесь “Итер. по $\mathbf{g}$ ” — число итераций метода последовательных приближений, “Итер. по $\mathbf{l}$ ” — среднее число итераций метода Удзавы для решения вспомогательной задачи с заданным трением, “Итер. по $\mathbf{x}$ ” — количество итераций метода проксимального градиента на первом шаге метода Удзавы (вычислительно наиболее затратный), “Время, с” — время вычислений, указанное в секундах. Можно видеть, что количество “Итер. по $\mathbf{l}$ ”, “Итер. по $\mathbf{x}$ ” немного увеличивается с увеличением количества прямых и двойственных переменных, что иллюстрирует стабильное поведение алгоритмов при уменьшении шага сетки. Причем число итераций метода последовательных приближений не меняется для всех размеров сетки и в данном примере равно 8. Расчеты показывают, что количество “Итер. по $\mathbf{g}$ ” растет с увеличением значения коэффициента трения.

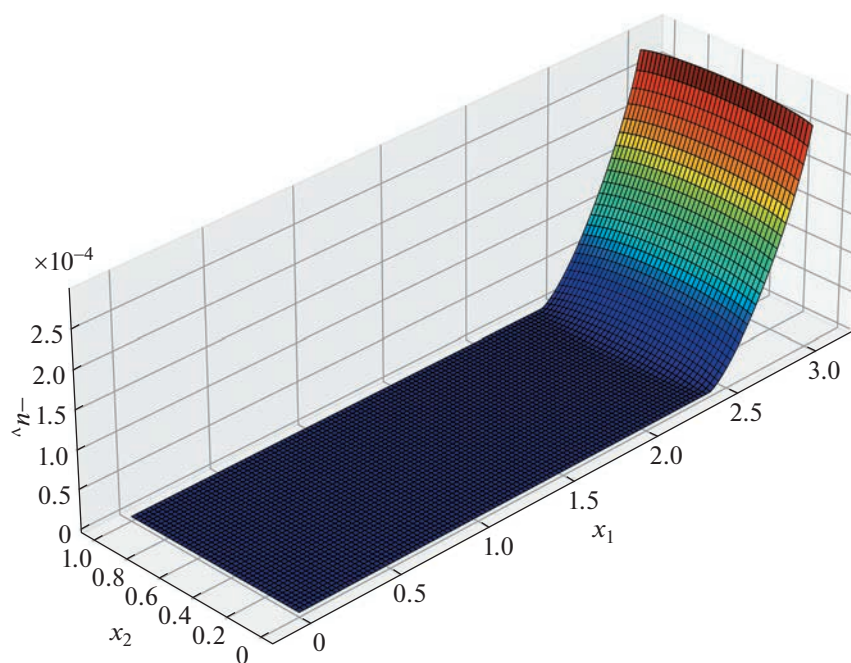
Таблица 1. Количество итераций и время решения для различных сеток

N_d	n_p	n_d	Итер. по $\mathbf{x}$	Итер. по $\mathbf{l}$	Итер. по $\mathbf{g}$	Время, с
10	11 253	341	17 663	5	8	130.22
20	80 703	1281	19 548	10	8	530.85
40	610 203	4961	27 917	14	8	4570.73
80	4 743 603	19 521	45 145	17	8	71 066.04

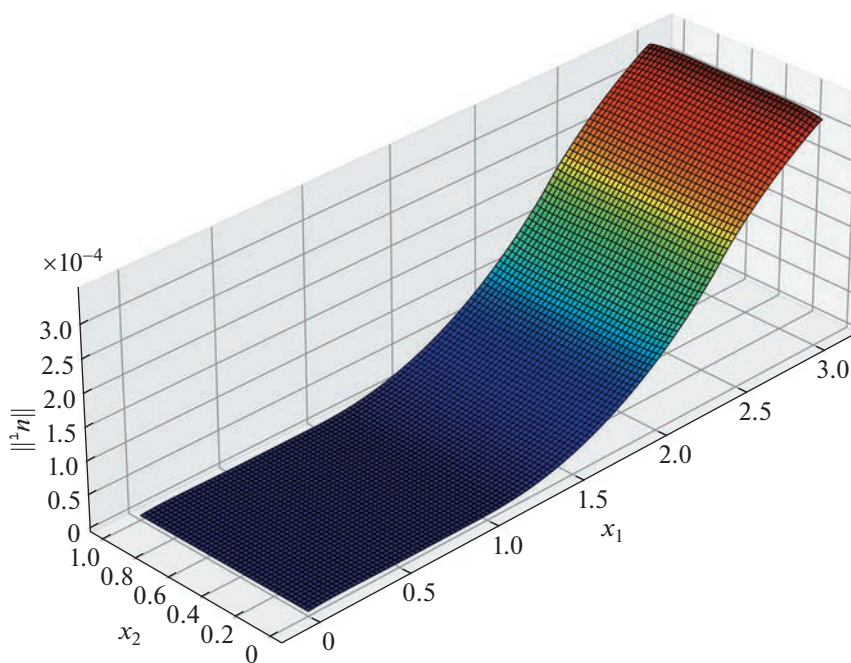
Фиг. 2. Зона слипания на Γ_c .Фиг. 3. Значения функционала $J(\mathbf{u})$.

Численные решения при уменьшении шага сетки $h = 1/N_d$ сравнивались по значениям функционала потенциальной энергии $J(\mathbf{u})$ и зоне слипания тела с абсолютно жесткой опорой на Γ_c . На фиг. 2 видно, что множества точек, в которых происходит контакт ($u_v = 0$), расположены близко друг к другу и стабилизируются при уменьшении h . На фиг. 3 мы наблюдаем сходимость значений функционала потенциальной энергии $J(u)$. На фиг. 4 и 5 представлены графики функций $-u_v$, $\|\mathbf{u}_\tau\|$ на Γ_c . Можно наблюдать, что выполнение условия непроникания тела в опору, так как $-u_v \geq 0$.

График силы трения $\mathcal{F}[\sigma_v(\mathbf{u})]$ представлен на фиг. 6. В зоне слипания сила трения больше нуля, причем при приближении к границам Γ_c нормальное напряжение возрастает. Результирующие деформации тела с увеличивающим коэффициентом $\chi + 500\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжениями по Мизесу показаны на фиг. 7.



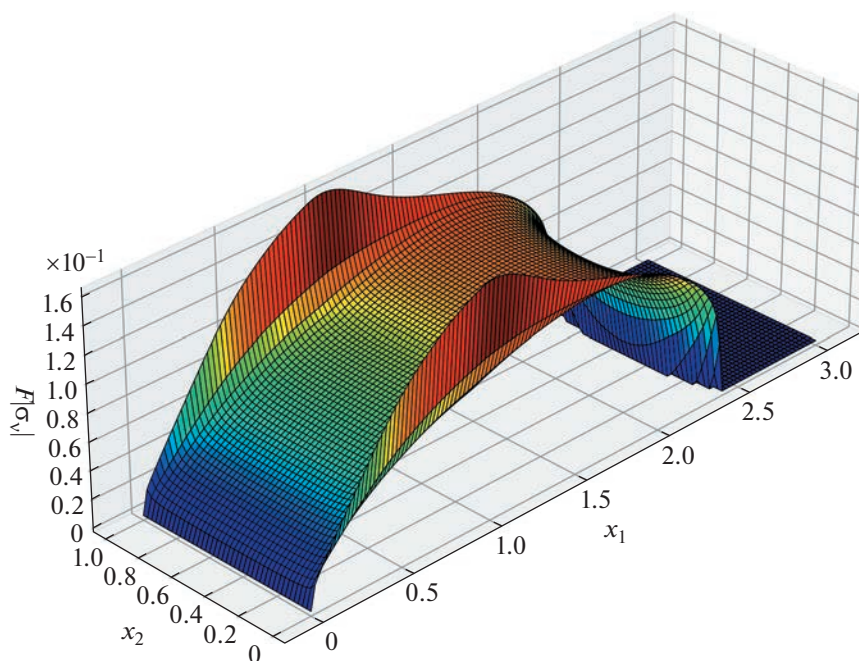
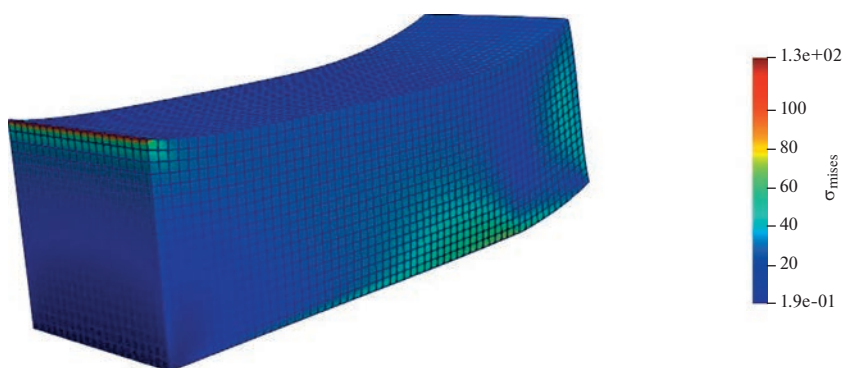
Фиг. 4. Нормальные перемещения на Γ_c .



Фиг. 5. Евклидова норма тангенциальных перемещений на Γ_c .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был рассмотрен численный алгоритм решения 3D контактной задачи с кулоновским трением. Алгоритм основан на модифицированной схеме двойственности, позволяющей эффективно решать вспомогательные задачи с заданным трением совместно с методом последовательных приближений. Использование модифицированных функционалов Лагранжа поз-

Фиг. 6. Сила трения на Γ_c .Фиг. 7. Результирующие деформации тела Ω .

воляет доказать сходимость метода последовательных приближений к неподвижной точке отображения Φ , которое каждому g ставится в соответствие функционал $-\sigma_v(\mathbf{u}(g))$. Дифференциальные свойства модифицированного двойственного функционала позволяют реализовать эффективный градиентный метод решения двойственной задачи. После дискретизации задачи был применен ускоренный вариант метода проксимального градиента для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала. Для иллюстрации работы алгоритма представлены численные эксперименты.

Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН” [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hlavaček I., Haslinger Ya., Nečas I., Lovišek Ya.* Numerical solution of variational inequalities. New York: Springer-Verlag, 1988.
2. *Kikuchi N., Oden J.T.* Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. Philadelphia: SIAM, 1988.

3. *Namm R., Tsoy G.* A modified duality scheme for solving a 3D elastic problem with a crack // Commun. Comput. Inf. Sci. 2019. V. 1090. P. 536–547.
4. *Намм Р.В., Цой Г.И.* Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной // Сиб. журн. вычисл. матем. 2017. Т. 20. № 1. С. 47–58.
5. *Namm R., Tsoy G.* Modified duality methods for solving an elastic crack problem with Coulomb friction on the crack faces // Open Comput. Sci. 2020. V. 10. № 1. P. 276–282.
6. *Вухтенко Э.М., Намм Р.В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 12. С. 2023–2036.
7. *Namm R., Tsoy G., Vikhtenko E., Woo G.* Variational method for solving contact problem of elasticity // CEUR Workshop Proc. 2021. V. 2930. P. 98–105.
8. *Вухтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В.* Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // Сиб. журн. вычисл. матем. 2014. Т. 17. № 1. С. 43–52.
9. *Haslinger J., Kučera R., Dostal Z.* An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with Coulomb friction // J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 164–165. P. 387–408.
10. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and quasi-variational inequalities in mechanics. Dordrecht: Springer, 2007.
11. *Haslinger J., Kučera R., Vlach O., Baniotopoulos C.C.* Approximation and numerical realization of 3D quasistatic contact problems with Coulomb friction // Math. Comput. Simul. 2012. V. 82. P. 1936–1951.
12. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. New York: Springer, 1984.
13. *Trémoières R., Lions J.-L., Glowinski R.* Numerical analysis of variational inequalities. Amsterdam: North-Holland, 1981.
14. *Namm R.V., Tsoy G.I.* Solution of the static contact problem with Coulomb friction between an elastic body and a rigid foundation // J. Comput. Appl. Math. 2023. V. 419. P. 114725.
15. *Beck A., Teboulle M.* A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems // SIAM J. Imaging Sciences. 2009. V. 2. P. 183–202.
16. *Gustafsson T., McBain G.D.* scikit-fem: A Python package for finite element assembly // J. Open Source Softw. 2020. V. 5. № 5. P. 2369.
17. *Сорокин А.А., Макогонов С.В., Королев С.П.* Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы. 2017. № 12. С. 14–16.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

A MODIFIED RUNGE–KUTTA SCHEME FOR THE GENERALIZED BENJAMIN–BONA–MAHONY–BURGERS' EQUATION¹⁾

© 2023 г. Qiubin Xu^{1,*}, Yan Liuy²

¹*School of Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China*

²*School of Mathematics and Statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China*

*e-mail: xqb0209@nau.edu.cn, 2209292270@qq.com

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.

Переработанный вариант 10.01.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Модифицированная схема Рунге–Кутты для обобщенного уравнения Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса. Предложена модифицированная схема Рунге–Кутты (MRK) для обобщенного уравнения Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса, расщепляющая уравнение на две части, для которых применяют различные конечно-разностные схемы по пространству, а затем используют метод Рунге–Кутты четвертого порядка во времени. Схема условно устойчива и сходится с четвертым порядком по времени и вторым порядком по пространству. Сравнение существующих численных методов с предложенной схемой демонстрирует ее высокую точность и устойчивость.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса, схема Рунге–Кутты, разностные схемы, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466923070189, **EDN:** ZXXETN

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.