

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ И ВНЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, ПОМЕЩЕННОГО В ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ

© 2024 г. В.В. Дякин^{1,*}, О.В. Кудряшова^{1,*}, В.Я. Раевский^{1,**}

*¹Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН,
Россия 620137 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18
E-mail: *kudryashova_ov@imp.uran.ru; **ravskii@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.02.2024; после доработки 19.03.2024
Принята к публикации 19.03.2024

В модели бесконечного цилиндра выведены формулы и представлен соответствующий алгоритм нахождения напряженности магнитного поля внутри и вне однородного цилиндра, помещенного во внешнее магнитное поле произвольной конфигурации. Проведено тестирование результатов расчетов по этим формулам на их соответствие физическим законам, а также на их совпадение с известными аналитическими ответами в предельных частных случаях формы магнетика. Составлена и отлажена компьютерная программа на языке Фортран, реализующая расчеты по предложенному алгоритму.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение магнитостатики, цилиндрический магнетик, расчет магнитостатических полей.

CALCULATION OF THE MAGNETIC FIELD STRENGTH INSIDE AND OUTSIDE OF AN INFINITE CYLINDER PLACED IN AN ARBITRARY EXTERNAL FIELD

© 2024 V.V. Dyakin^{1,*}, O.V. Kudryashova^{1,*}, V.Y. Raevskii^{1,**}

*M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
Yekaterinburg, 620108 Russia
E-mail: *kudryashova_ov@imp.uran.ru; **ravskii@mail.ru*

In the model of the infinite cylinder the formulas and the corresponding algorithm for finding the magnetic field strength inside and outside the homogeneous cylinder placed in the external magnetic field of arbitrary configuration are deduced. Testing the results of calculations on these formulas for their correspondence with known physical laws, as well as on their coincidence with well-known analytical answers in the limiting private cases of the forms of magnetics were carried out. A computer program in Fortran language has been compiled and debugged to implement calculations using the proposed algorithm.

Keywords: integrodifferential equation of magnetostatics, cylindrical magnet, magnetostatic field calculation.

DOI: 10.31857/S0130308224020038

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач из области магнетизма, например, задач неразрушающего магнитного контроля, актуальной является проблема создания обоснованных алгоритмов аналитического или численно-аналитического решения задач магнитостатики по вычислению напряженности результирующего поля применительно к магнитным телам различной формы, помещенным во внешнее магнитное поле произвольной конфигурации. Такие алгоритмы, позволяющие вычислять напряженность поля внутри и вне магнитного тела с гарантированной и контролируемой точностью, представляют собой как реальный практический интерес, так и пополняют базу алгоритмов точно решаемых (в указанном смысле) задач, которая необходима для тестирования известных пакетов универсальных программ (типа ELCUT, ANSYS, ELMER), формальное использование которых без всестороннего тестирования приводит ко многим проблемам. Подробному описанию недостатков этих программ и подводных камней при их использовании посвящена работа [1].

В статье авторов [2] предложен и обоснован подход, сводящий вычисление напряженности магнитного поля от однородного цилиндра конечных размеров, помещенного в произвольное внешнее поле, к решению некоторого количества систем трех одномерных линейных интегральных уравнений. В следующей работе [3] предложен численный алгоритм, основанный на дискретизации

указанных интегральных уравнений методом квадратур, а в качестве квадратурной формулы, приближенно заменяющей интегралы, выбрана формула средних прямоугольников, которая при разбиении используемого в указанных в дальнейшем интегральных уравнениях отрезка интегрирования $[0, 1]$ на m равных частей имеет вид:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i), \quad (1)$$

где узлы квадратурной формулы выбираются в середине отрезков разбиения:

$$x_i = \frac{2i-1}{2m}, \quad i=1, \dots, m. \quad (2)$$

Указанный алгоритм успешно прошел различные тестовые проверки, описанные в [3], однако обнаружил и ряд недостатков, проявляющихся при расчетах в случае достаточно длинных цилиндров. Для дискретизации интегральных уравнений оказалось неудачным применение квадратурной формулы (1) с равномерным распределением узлов интегрирования (2) при больших значениях длины цилиндра из-за «нетривиального» поведения в этом случае соответствующих подынтегральных функций, что приводило к значительной потере точности результатов (ниже об этом подробнее).

Для преодоления этих недостатков при необходимости расчета напряженности результирующего поля внутри и вне достаточно длинного цилиндра предлагается не использовать описанный в [3] общий алгоритм, а использовать значительно более простые и более точные (в этой ситуации) формулы, полученные в модели бесконечного или полубесконечного цилиндра. Формулы для полубесконечного цилиндра предполагается применять в том случае, когда требуется вычисление напряженности поля в точке, достаточно близкой к плоскости одного из торцов длинного цилиндра. А формулы для бесконечного цилиндра — в случае, когда такая точка удалена от обеих торцевых плоскостей длинного цилиндра. Выводу и тестированию указанных формул для полубесконечного цилиндра посвящена наша статья [4]. В настоящей же работе аналогичное исследование проведено для модели бесконечного цилиндра. Существующие ограничения на объем статьи не позволяют сколько-нибудь подробно изложить достаточно громоздкие выкладки, приводящие к расчетным формулам. Поэтому при их выводе будет даваться направление выкладок и указываться способы преодоления возникающих на этом пути подводных камней в основном.

2. СХЕМА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ РЕАКЦИИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Для решения задач магнитостатики мы исходим из так называемого основного уравнения магнитостатики, которое в случае однородного магнетика с постоянной магнитной проницаемостью μ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \frac{\mu-1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus S. \quad (3)$$

Это трехмерное интегродифференциальное уравнение эквивалентно системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики (см. [5, с. 17], [6, с. 149], [7—9]) и связывает искомую напряженность результирующего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$ в произвольной точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (не лежащей на границе магнетика) с напряженностью $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ заданного поля внешнего источника. В уравнении (3) Ω есть область в пространстве R^3 , ограниченная поверхностью S и занятая исследуемым магнетиком с заданной постоянной магнитной проницаемостью μ .

Рассмотрим магнетик в форме прямого кругового цилиндра (см. рис. 1). Область Ω , занятая магнетиком, представляет собой прямой круговой цилиндр длины l с боковой поверхностью S_1 , ось которого совмещена с осью z , а нижнее и верхнее основания S_2 и S_3 суть круги радиуса R , расположенные в плоскостях с уравнениями $z = d$ и $z = d + l$ соответственно.

В нашей работе [2] разработана и обоснована методика нахождения так называемого поля реакции (магнетика) $\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) := \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, которая сводится к схеме, представленной ниже.

Цилиндрические координаты поля реакции $\mathbf{H}^R(r, \varphi, z) = \{H_r^R(r, \varphi, z), H_\varphi^R(r, \varphi, z), H_z^R(r, \varphi, z)\}$ в произвольной точке пространства с цилиндрическими координатами (r, φ, z) , не лежащей на поверхности магнетика $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ или на его оси, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
H_r^R(r, \varphi, z) = & \sqrt{\pi}(\mu - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
& + \left. \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] + \sin n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - t \cdot z') dz' + \right. \\
& \left. + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \left. \right\};
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
H_\varphi^R(r, \varphi, z) = & -\sqrt{\pi}(\mu - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \beta_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
& + \left. \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] - \sin n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \beta_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - t \cdot z') dz' + \right. \\
& \left. + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \left. \right\};
\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
H_z^R(r, \varphi, z) = & \sqrt{\pi}(\mu - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
& + \left. \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] + \sin n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \right. \\
& \left. + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \left. \right\},
\end{aligned} \quad (6)$$

где приняты обозначения:

$$\bar{r} := \frac{r}{R}, \quad \bar{z} := \frac{z - d}{R}, \quad t := \frac{l}{R}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n(a, b, q) := & \frac{(-1)^{n+1} b \delta(a, b, q)}{a \Gamma(n - \frac{1}{2})} \left\{ \left[a^2 - \frac{n(a^2 + b^2 + q^2)}{2n + 1} \right] P_{\frac{1}{2}}^n(\varepsilon(a, b, q)) + \right. \\
& \left. + \frac{2ab}{4n^2 - 1} P_{\frac{1}{2}}^{n+1}(\varepsilon(a, b, q)) \right\};
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\beta_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} n b \delta(a, b, q)}{a \Gamma(n - \frac{1}{2})} \left[\frac{a^2 + b^2 + q^2}{2n + 1} P_{\frac{1}{2}}^n(\varepsilon(a, b, q)) + \frac{4ab}{4n^2 - 1} P_{\frac{1}{2}}^{n+1}(\varepsilon(a, b, q)) \right]; \quad (9)$$

$$\gamma_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} b q \delta(a, b, q)}{\Gamma(n - \frac{1}{2})} P_{\frac{1}{2}}^n(\varepsilon(a, b, q)). \quad (10)$$

В формулах (8)—(10):

$$\delta(a, b, q) = [(a^2 + b^2 + q^2)^2 - 4a^2 b^2]^{-\frac{3}{4}}, \quad \varepsilon(a, b, q) = \left[1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2 + q^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$P_{\frac{1}{2}}^n(\cdot)$ — присоединенная функция Лежандра [10]; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Функции $\{a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ в (4)—(6) для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ являются решением системы следующих одномерных линейных интегральных уравнений:

$$a_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(1, 1, t(z-z')) dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(1, r', tz) dr' + \right. \\ \left. + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(01)}(z); \quad (12)$$

$$a_n^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(02)}(r); \quad (13)$$

$$a_n^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(03)}(r). \quad (14)$$

Функции $\{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ в (4)—(6) для каждого $n = 1, 2, \dots$ есть решение аналогичной системы одномерных линейных интегральных уравнений:

$$b_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \alpha_n(1, 1, t(z-z')) dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \alpha_n(1, r', tz) dr' + \right. \\ \left. + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \alpha_n(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(01)}(z); \quad (15)$$

$$b_n^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(02)}(r); \quad (16)$$

$$b_n^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(03)}(r). \quad (17)$$

В системах (12)—(14) и (15)—(17) параметр $\lambda = (\mu - 1)/(\mu + 1)$, а сами системы отличаются только правыми частями и обозначениями искомых функций. Функции в правых частях этих систем $\{a_n^{(01)}(z), a_n^{(02)}(r), a_n^{(03)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n^{(01)}(z), b_n^{(02)}(r), b_n^{(03)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ выражаются через декартовы компоненты напряженности заданного поля внешних источников $\mathbf{H}^0(x, y, z) = \{H_x^0(x, y, z), H_y^0(x, y, z), H_z^0(x, y, z)\}$ следующим образом:

$$a_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \sin \varphi \right] \cos n\varphi d\varphi; \quad (18)$$

$$a_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d) \cos n\varphi d\varphi; \quad (19)$$

$$a_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d + l) \cos n\varphi d\varphi; \quad (20)$$

$$b_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d) \sin \varphi \right] \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (21)$$

$$b_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d) \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (22)$$

$$b_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d + l) \sin n\varphi \, d\varphi. \quad (23)$$

В формулах (18)—(23):

$$z, r \in (0, 1), n = 0, 1, 2, \dots, h_0 := 1/2\pi, h_n := 1/\pi, n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

В часто встречаемом случае постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ формулы (18)—(23) очевидным образом упрощаются:

$$a_0^{(01)} = 0, \quad a_1^{(01)} = H_x^0, \quad b_1^{(01)} = H_y^0, \quad a_n^{(01)} = b_n^{(01)} = 0, \quad n = 2, 3, \dots; \quad (25)$$

$$a_0^{(02)} = -H_z^0, \quad a_0^{(03)} = H_z^0, \quad a_n^{(02)} = b_n^{(02)} = a_n^{(03)} = b_n^{(03)} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Поэтому для $n = 2, 3, \dots$ системы (12)—(14) и (15)—(17) являются однородными с нулевыми решениями соответственно, а потому в формулах напряженности поля реакции (4)—(6) ненулевыми могут быть только функции $\{a_0^{(1)}(z), a_0^{(2)}(r), a_0^{(3)}(r)\}$ — решение системы (14)—(16) для $n = 0$, $\{a_1^{(1)}(z), a_1^{(2)}(r), a_1^{(3)}(r)\}$ — решение этой системы для $n = 1$, а $\{b_1^{(1)}(z), b_1^{(2)}(r), b_1^{(3)}(r)\}$ — решение системы (17)—(19) для $n = 1$ с правыми частями в соответствии с (25), (26). Следовательно, в случае $\mathbf{H}^0 = \text{const}$ ряды в формулах напряженности (4)—(6) обрываются на первом или втором слагаемом.

Для расчета декартовых координат поля реакции $\mathbf{H}^R(\mathbf{r})$ в точках $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ на оси цилиндра (внутри или вне его, т.е. z либо внутри интервала $(d, d + l)$, либо вне отрезка $[d, d + l]$), помещенного в произвольное внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, в работе [2] получены следующие расчетные формулы:

$$H_x^R(0, 0, z) = -\frac{\mu - 1}{4} \left\{ t \int_0^1 a_1^{(1)}(z') [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz' + \int_0^1 a_1^{(2)}(r') r'^2 (r'^2 + \bar{z}^2)^{-3/2} dr' + \int_0^1 a_1^{(3)}(r') r'^2 [r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{-3/2} dr' \right\}; \quad (27)$$

$$H_y^R(0, 0, z) = -\frac{\mu - 1}{4} \left\{ t \int_0^1 b_1^{(1)}(z') [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz' + \int_0^1 b_1^{(2)}(r') r'^2 (r'^2 + \bar{z}^2)^{-3/2} dr' + \int_0^1 b_1^{(3)}(r') r'^2 [r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{-3/2} dr' \right\}; \quad (28)$$

$$H_z^R(0, 0, z) = \frac{\mu - 1}{2} \left\{ t \int_0^1 a_0^{(1)}(z') (\bar{z} - t \cdot z') [1 + (\bar{z} - tz')^2]^{-3/2} dz' + \bar{z} \int_0^1 a_0^{(2)}(r') r' (r'^2 + \bar{z}^2)^{-3/2} dr' + (\bar{z} - t) \int_0^1 a_0^{(3)}(r') r' [r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{-3/2} dr' \right\}, \quad (29)$$

где функции $\{a_0^{(1)}(z), a_0^{(2)}(r), a_0^{(3)}(r)\}$, $\{a_1^{(1)}(z), a_1^{(2)}(r), a_1^{(3)}(r)\}$, $\{b_1^{(1)}(z), b_1^{(2)}(r), b_1^{(3)}(r)\}$ суть решения систем (14)—(16) и (17)—(19) с правыми частями (18)—(23) с соответствующим значением индекса n .

3. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ РЕАКЦИИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

В ходе тестовых расчетов поля реакции от однородного цилиндра конечной длины по общим формулам (4)—(6), (12)—(17) и (27)—(29) выявились существенные недостатки численной реализации расчетов по этим формулам в подходе [3], основанном на дискретизации входящих в эти формулы интегралов квадратурной формулой средних прямоугольников (1) с равномерным распределением узлов интегрирования (2). Оказалось, что этот подход дает большую погрешность результата в случае достаточно длинных цилиндров, что привело к необходимости получения для этого случая более простых и более точных асимптотических формул расчета поля реакции, что и реализовано в работе [4] и настоящей работе. Численные эксперименты и анализ расчетных формул в [3] выявил причину такого роста погрешности при увеличении длины цилиндра. Оказалось, что подынтегральная функция в некоторых интегралах выписанных выше расчетных формул при большой длине l цилиндра почти на всем отрезке интегрирования $[0, 1]$ принимает практически нулевые значения, однако имеет очень большой всплеск на очень узком отрезке с началом в нуле (чем больше l , тем уже этот отрезок и тем выше всплеск). А потому при использовании для приближенного вычисления этого интеграла квадратурной формул (1), (2) с равноотстоящими узлами при больших l основная масса узлов попадает на «нулевой» участок, а на «несущий» узкий участок попадает один-два (иногда ни одного) узла, а потому интеграл получается практически нулевым, что не соответствует его истинному значению (более подробно эта ситуация разобрана в [4]). В связи с этим для поддержания достаточной точности расчетов при использовании квадратурных формул (1), (2) с равноотстоящими узлами с ростом длины цилиндра приходилось значительно увеличивать число разбиений m (до нескольких тысяч) в (1). Это приводило к резкому увеличению порядка (равному $3m$) систем линейных уравнений, получаемых при дискретизации интегральных уравнений (12)—(14), (15)—(17), что, в свою очередь, влекло ужесточение требований к объему памяти используемого компьютера и, что наиболее важно, к увеличению числа обусловленности этих систем, тем самым неконтролируемо увеличивало ошибки в их решениях.

Полубесконечным цилиндром мы считаем предельную форму конечного цилиндра, нижнее основание которого S_2 остается в плоскости $z = d$, а его длина $l \rightarrow +\infty$. Бесконечным же цилиндром мы считаем предельную форму конечного цилиндра, симметричного относительно координатной плоскости xOy , нижнее основание которого S_2 лежит в плоскости $z = -l/2$ (т.е. параметр $d = -l/2$), верхнее основание S_3 в плоскости $z = d + l = l/2$ соответственно, а длина цилиндра $l \rightarrow +\infty$. Для получения формул напряженности поля реакции бесконечного цилиндра необходимо перейти к пределу $l \rightarrow +\infty$ (эквивалентно $t = l/R \rightarrow +\infty$) в формулах конечного цилиндра (4)—(6), (12)—(23), (27)—(29) с учетом $d = -l/2$. Однако некоторые определенные интегралы по отрезку $[0, 1]$ в этих формулах являются несобственными (второго рода — от неограниченных функций), что делает невозможным непосредственный переход к такому пределу под знаком интеграла. Опишем неоднократно используемый в дальнейшем прием (назовем его «прием (*)»), позволяющий для вычисления такого предела выразить несобственный интеграл через собственный. Этот прием также неоднократно применялся в программной реализации предлагаемого алгоритма, поскольку стандартные квадратурные формулы могут применяться только к собственным интегралам.

Прием (*). Пусть имеется несобственный интеграл второго рода вида $\int_0^1 g(x)f(x)dx$, причем функция $g(x)$ достаточно гладкая на $[0, 1]$, а $f(x) \rightarrow \infty$ — при $x \rightarrow b \in [0, 1]$ (но эта особенность интегрируемая). Тогда, вычитая и добавляя $g(b)$, получаем:

$$\int_0^1 g(x)f(x)dx = \int_0^1 [g(x) - g(b)]f(x)dx + g(b) \int_0^1 f(x)dx. \quad (30)$$

Первый интеграл в правой части (30) является собственным, поскольку подынтегральное выражение можно представить в виде $[(g(x) - g(b))/(x - b)](x - b)f(x)$, при $x \rightarrow b$ дробь имеет пределом конечную производную $g'(b)$, а $(x - b)f(x) \rightarrow 0$, так как особенность в $f(x)$ интегрируема. Что касается несобственного интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ в правой части (30), то либо он может быть вычислен аналитически, либо, в противном случае, выделением порядка особенности в $f(x)$ подбирается

простая (в смысле аналитической интегрируемости) функция $p(x)$, такая, что $f(x) = p(x) + O(1)$ при $x \rightarrow b$. Тогда

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) - p(x)) dx + \int_0^1 p(x) dx, \quad (31)$$

причем первый интеграл в правой части особенности не имеет, а второй вычисляется аналитически.

Для получения формул напряженности поля реакции для бесконечного цилиндра необходимо в соответствующих формулах (4)—(6) для конечного цилиндра перейти к пределу $l \rightarrow +\infty$ с учетом $d = -l/2$. Прежде всего получим «предельный» вид функций $\{a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ в этих формулах как решение «предельных» систем, полученных переходом к пределу $l \rightarrow +\infty$ (с учетом $d = -l/2$) в правых и левых частях систем (12)—(14) и (15)—(17). Следующий вид таких систем из (12)—(14) был получен нами с использованием правила (*) в работе [4]:

$$a_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi}A_n a_n^{(1)}(z) = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(01)}(z); \quad (32)$$

$$a_n^{(2)}(r) = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(02)}(r), \quad a_n^{(3)}(r) = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(03)}(r), \quad (33)$$

где числа

$$A_n := 2 \int_0^{+\infty} \alpha_n(1, 1, x) dx, \quad A_0 = 0,282095299\dots, \quad A_1 = A_2 = \dots = 0. \quad (34)$$

Из (32), (33) получаем, что решения полученных из (12)—(14) предельных систем имеют вид:

$$a_n^{(1)}(z) = \frac{2a_n^{(01)}(z)}{(\mu+1)(1-2\lambda\sqrt{\pi}A_n)}, \quad a_n^{(2)}(r) = \frac{2a_n^{(02)}(r)}{\mu+1}, \quad a_n^{(3)}(r) = \frac{2a_n^{(03)}(r)}{\mu+1}, \quad (35)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Функции $a_n^{(01)}(z)$, $a_n^{(02)}(r)$, $a_n^{(03)}(r)$ в (32), (33) и (35) суть предельные значения этих функций, фигурирующих в правых частях систем (12)—(14). Переходя в формулах (18)—(20) к пределу $l \rightarrow +\infty$ при $d = -l/2$, получаем следующий явный вид функций $a_n^{(01)}(z)$, $a_n^{(02)}(r)$, $a_n^{(03)}(r)$ в (35):

$$a_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi \right] \cos n\varphi d\varphi \quad (36)$$

для $z \in (\frac{1}{2}, 1)$;

$$a_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \sin \varphi \right] \cos n\varphi d\varphi \quad (37)$$

для $z \in (0, \frac{1}{2})$.

Далее:

$$a_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, -\infty) \cos n\varphi d\varphi, \quad r \in (0, 1); \quad (38)$$

$$a_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, +\infty) \cos n\varphi d\varphi, \quad r \in (0, 1), \quad (39)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, введено обозначение $f(x, y, \pm\infty) := \lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(x, y, z)$, а числа h_n введены в (24).

Аналогично решение предельных систем, полученных из (15)—(17) при $l \rightarrow +\infty$, с учетом (34) имеет вид:

$$b_n^{(1)}(z) = \frac{2b_n^{(01)}(z)}{\mu + 1}, \quad b_n^{(2)}(r) = \frac{2b_n^{(02)}(r)}{\mu + 1}, \quad b_n^{(3)}(r) = \frac{2b_n^{(03)}(r)}{\mu + 1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где в правых частях стоят функции:

$$b_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi] \sin n\varphi \, d\varphi \quad (41)$$

для $z \in (\frac{1}{2}, 1)$;

$$b_n^{(01)}(z) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \sin \varphi] \sin n\varphi \, d\varphi \quad (42)$$

для $z \in (0, \frac{1}{2})$.

Далее:

$$b_n^{(02)}(r) = -h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, -\infty) \sin n\varphi \, d\varphi; \quad (43)$$

$$b_n^{(03)}(r) = h_n \int_{-\pi}^{\pi} H_z^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, +\infty) \sin n\varphi \, d\varphi. \quad (44)$$

В случае постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ формулы (36)—(39) и (41)—(44) снова переходят в простые формулы (25), (26), подстановка которых в (35) и (40) дает следующие решения предельных систем для бесконечного цилиндра:

$$a_0^{(1)}(z) = 0, \quad a_0^{(2)}(r) = -\frac{2}{\mu + 1} H_z^0, \quad a_0^{(3)}(r) = \frac{2}{\mu + 1} H_z^0, \quad a_1^{(1)}(z) = \frac{2}{\mu + 1} H_x^0; \quad (45)$$

$$a_1^{(2)}(r) = a_1^{(3)}(r) = 0, \quad a_n^{(1)}(z) = a_n^{(2)}(r) = a_n^{(3)}(r) = 0, \quad n = 2, 3, \dots; \quad (46)$$

$$b_1^{(1)}(z) = \frac{2}{\mu + 1} H_y^0, \quad b_1^{(2)}(r) = b_1^{(3)}(r) = 0; \quad (47)$$

$$b_n^{(1)}(z) = b_n^{(2)}(r) = b_n^{(3)}(r) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (48)$$

Получим формулы для поля реакции на оси бесконечного цилиндра, переходя к пределу $l \rightarrow +\infty$ (эквивалентно $t \rightarrow +\infty$) в формулах (27)—(29), предварительно положив в них $d = -l/2$. Первое слагаемое в фигурных скобках (27) при $d = -l/2$ можно представить в виде:

$$\int_0^1 a_1^{(1)}(z') t \left\{ 1 + \left[t(z' - \frac{1}{2}) - \hat{z} \right]^2 \right\}^{-3/2} dz', \quad (49)$$

где обозначено $\hat{z} := z/R$. Ядро этого интеграла $t \left\{ 1 + \left[t(z' - \frac{1}{2}) - \hat{z} \right]^2 \right\}^{-3/2}$ при $z = 1/2$ имеет пределом бесконечность при $t \rightarrow +\infty$, а потому формальный переход к пределу под знаком интеграла некорректен. Функция $a_1^{(1)}(z')$ в (49), согласно (35)—(37), представляется различными аналитическими формулами по разные стороны от $z' = 1/2$ и может быть разрывной в этой точке. По этой причине разобьем определенный интеграл (49) по интервалу $(0, 1)$ на сумму двух интегралов по интервалам $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$, в каждом сделаем замены переменных интегрирования $x = 1/2 - z'$ и $x = z' - 1/2$ соответственно, в результате чего интеграл (49) представляется в виде:

$$\int_0^{1/2} \frac{a_1^{(1)}(\frac{1}{2}-x)tdx}{[1+(tx+\hat{z})^2]^{3/2}} + \int_0^{1/2} \frac{a_1^{(1)}(\frac{1}{2}+x)tdx}{[1+(tx-\hat{z})^2]^{3/2}}. \quad (50)$$

Оба интеграла в (50) суть интегралы вида:

$$A(t,b) := \int_0^{1/2} \frac{a(x)tdx}{[1+(tx-b)^2]^{3/2}}. \quad (51)$$

Причем для первого интеграла в (50) будет $a(x) = a_1^{(1)}(\frac{1}{2}-x)$, $b = -\hat{z}$, а для второго — $a(x) = a_1^{(1)}(\frac{1}{2}+x)$, $b = \hat{z}$. Найдем предел интеграла вида (51) при $t \rightarrow +\infty$. Ядро этого интеграла на левом конце интервала интегрирования $x = 0$ имеет пределом бесконечность при $t \rightarrow +\infty$, а потому формальный переход к пределу под знаком интеграла снова некорректен. Преобразуем этот интеграл аналогично приему (30), введя для дальнейшего стандартные обозначения для односторонних пределов $f(a \pm 0) := \lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x)$, $f(\pm 0) := \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x)$:

$$A(t,b) = \int_0^{1/2} \frac{[a(x) - a(+0)]tdx}{[1+(tx-b)^2]^{3/2}} + a(+0) \int_0^{1/2} \frac{tdx}{[1+(tx-b)^2]^{3/2}}. \quad (52)$$

Подынтегральная функция первого интеграла в (52) равномерно по x идет к нулю при $t \rightarrow +\infty$, зануляя предел первого интеграла, а второй интеграл вычисляется аналитически. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t,b) = 0 + a(+0) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tx-b}{\sqrt{1+(tx-b)^2}} \Big|_0^{1/2} = a(+0) \left(1 + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \right). \quad (53)$$

Учитывая (50), (51) и (53) получаем выражение для предела при $t \rightarrow +\infty$ первого слагаемого (49) в (27) при $d = -l/2$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_0^1 \frac{a_1^{(1)}(z')dz'}{\left\{ 1 + \left[t(z' - \frac{1}{2}) - \hat{z} \right]^2 \right\}^{3/2}} = a_1^{(1)}(\frac{1}{2}-0) + a_1^{(1)}(\frac{1}{2}+0) + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1+\hat{z}^2}} \left[a_1^{(1)}(\frac{1}{2}+0) - a_1^{(1)}(\frac{1}{2}-0) \right]. \quad (54)$$

Второй интеграл в фигурных скобках (27) при $d = -l/2$ имеет вид $\int_0^1 a_1^{(2)}(r')r'^2 \left[r'^2 + (\hat{z} + \frac{1}{2}t)^2 \right]^{-3/2} dr'$. Несложно показать равномерное по r' стремление к нулю при $t \rightarrow +\infty$ ядра этого интеграла, что зануляет предел всего интеграла. Аналогично обосновывается стремление к нулю при $t \rightarrow +\infty$ третьего интеграла в фигурных скобках (27) с учетом $d = -l/2$. В результате из (27) получаем формулу для x -компоненты напряженности поля реакции на оси бесконечного цилиндра:

$$H_x^R(0,0,z) = -\frac{\mu-1}{4} \left\{ a_1^{(1)}(\frac{1}{2}-0) + a_1^{(1)}(\frac{1}{2}+0) + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1+\hat{z}^2}} \left[a_1^{(1)}(\frac{1}{2}+0) - a_1^{(1)}(\frac{1}{2}-0) \right] \right\}. \quad (55)$$

Формула (28) для y -компоненты напряженности поля реакции на оси цилиндра полностью аналогична формуле (27) для x -компоненты, а потому из (55) получаем для y -компоненты напряженности поля реакции на оси бесконечного цилиндра:

$$H_y^R(0,0,z) = -\frac{\mu-1}{4} \left\{ b_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}-0\right) + b_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}+0\right) + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1+\hat{z}^2}} \left[b_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}+0\right) - b_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}-0\right) \right] \right\}. \quad (56)$$

Вывод формулы для z -компоненты напряженности поля реакции на оси бесконечного цилиндра переходом к пределу $t \rightarrow +\infty$ в (29) при $d = -l/2$ аналогичен выводу формулы для x -компоненты: первый интеграл в (29) разбивается на сумму двух однотипных интегралов, каждый из которых обрабатывается по той же схеме, что и при выводе формулы x -компоненты, а два других интеграла в пределе дают ноль. В результате получаем для z -компоненты напряженности поля реакции на оси бесконечного цилиндра

$$H_z^R(0,0,z) = \frac{\mu-1}{2} \left[a_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}-0\right) - a_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}+0\right) \right] \frac{1}{\sqrt{1+\hat{z}^2}}. \quad (57)$$

Выразим компоненты поля реакции (55)–(57) через известные функции (36), (37), (41), (42), определяемые заданным внешним полем $\mathbf{H}^0(x, y, z)$. Учитывая (35) и (40), получаем:

$$H_x^R(0,0,z) = -\frac{\lambda}{2} \left\{ a_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}-0\right) + a_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}+0\right) + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1+\hat{z}^2}} \left[a_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}+0\right) - a_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}-0\right) \right] \right\}; \quad (58)$$

$$H_y^R(0,0,z) = -\frac{\lambda}{2} \left\{ b_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}-0\right) + b_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}+0\right) + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1+\hat{z}^2}} \left[b_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}+0\right) - b_1^{(01)}\left(\frac{1}{2}-0\right) \right] \right\}; \quad (59)$$

$$H_z^R(0,0,z) = \frac{\lambda}{1-2\lambda\sqrt{\pi A_0}} \left[a_0^{(01)}\left(\frac{1}{2}-0\right) - a_0^{(01)}\left(\frac{1}{2}+0\right) \right] \frac{1}{\sqrt{1+\hat{z}^2}}. \quad (60)$$

Согласно (36), (37), (41), (42), числа $a_0^{(01)}(\frac{1}{2}-0)$, $a_1^{(01)}(\frac{1}{2}-0)$, $b_1^{(01)}(\frac{1}{2}-0)$ суть правые части формул (37) при $n = 0$, $n = 1$ и (42) при $n = 1$, а числа $a_0^{(01)}(\frac{1}{2}+0)$, $a_1^{(01)}(\frac{1}{2}+0)$, $b_1^{(01)}(\frac{1}{2}+0)$ — это правые части формул (36) при $n = 0$, $n = 1$ и (41) при $n = 1$.

В случае постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ из (58)–(60), (25), (26) получаем следующие формулы поля реакции на оси бесконечного цилиндра:

$$H_x^R(0,0,z) = -\lambda H_x^0, \quad H_y^R(0,0,z) = -\lambda H_y^0, \quad H_z^R(0,0,z) = 0, \quad (61)$$

что согласуется с аналогичными формулами в [11, с. 339].

Получим формулы напряженности поля реакции бесконечного цилиндра (вне и внутри, но не на его поверхности и не на оси), для чего перейдем к пределу $l \rightarrow +\infty$ (т.е. $t = l/R \rightarrow +\infty$) в формулах (4)–(6) для напряженности поля реакции конечного цилиндра, предварительно положив в них $d = -l/2$. Дальнейшие выкладки практически полностью повторяют схему получения формул (58)–(60) для напряженности поля реакции на оси бесконечного цилиндра, поэтому пояснения будут краткими. Первый интеграл формулы (4) $\int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz'$ при $d = -l/2$ представляется суммой интегралов:

$$B\left(a_n^{(1)}\left(\frac{1}{2}-x\right), t, -\hat{z}\right) + B\left(a_n^{(1)}\left(\frac{1}{2}+x\right), t, \hat{z}\right), \quad (62)$$

где обозначено

$$B(a(x), t, b) := \int_0^{1/2} a(x) t \alpha_n(\bar{r}, 1, tx - b) dx. \quad (63)$$

При $x = 0$ и $t \rightarrow +\infty$ ядро этого интеграла $t\alpha_n(\bar{r}, 1, tx - b) \rightarrow \infty$, а потому, снова выделяя эту особенность с использованием приема (*), имеем для интеграла (63):

$$B(a(x), t, b) := \int_0^{1/2} (a(x) - a(+0)) t \alpha_n(\bar{r}, 1, tx - b) dx + a(+0) t \int_0^{1/2} \alpha_n(\bar{r}, 1, tx - b) dx. \quad (64)$$

Можно показать, что $\alpha_n(\bar{r}, 1, q)$ при $q \rightarrow +\infty$ убывает не медленнее, чем $1/q^3$, а потому подынтегральная функция в первом интеграле (64) при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по x идет к нулю, зануляя весь этот интеграл. Для второго слагаемого в (64), делая замену переменной в интеграле $y = tx - b$ и затем переходя к пределу $t \rightarrow +\infty$, получим $a(+0) \int_{-\hat{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx$. С учетом (62) и полученных предельных значений предел при $t \rightarrow +\infty$ первого интеграла $t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz'$ формулы (4) при $d = -l/2$ равен:

$$a_n^{(1)}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \int_{\hat{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx + a_n^{(1)}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \int_{-\hat{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx. \quad (65)$$

Второй интеграл $\int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr'$ при $d = -l/2$ имеет вид $\int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \hat{z} + t/2) dr'$. Поскольку его ядро $\alpha_n(\bar{r}, r', q)$ при $q \rightarrow +\infty$ убывает не медленнее, чем $1/q^3$, то подынтегральная функция при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по r' идет к нулю, зануляя весь этот интеграл. Аналогично при $d = -l/2$ третий интеграл в (4) $\int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \hat{z} - t/2) dr'$ по тем же причинам зануляется при $t \rightarrow +\infty$.

Следующая тройка интегралов в (4) полностью аналогична предыдущей, а потому имеет те же пределы при $t \rightarrow +\infty$. В результате получаем следующую формулу для r -компоненты напряженности поля реакции бесконечного цилиндра внутри и вне его (но не на его поверхности и оси):

$$\begin{aligned} H_r^R(r, \varphi, z) = & 2\sqrt{\pi}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - 2\sqrt{\pi}\lambda A_n} \left\{ [a_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \int_{\hat{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx + \right. \\ & \left. + a_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \int_{-\infty}^{\hat{z}} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx] \cos n\varphi + \right. \\ & \left. + [b_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \int_{\hat{z}}^{+\infty} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx + b_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \int_{-\infty}^{\hat{z}} \alpha_n(\bar{r}, 1, x) dx] \sin n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

По той же схеме ищутся пределы при $t \rightarrow +\infty$ в формулах (5) и (6) (при $d = -l/2$) для φ - и z -компонент напряженности поля реакции, в результате чего получаются следующие формулы этих компонент для бесконечного цилиндра внутри и вне его (но не на его поверхности и оси):

$$\begin{aligned} H_\varphi^R(r, \varphi, z) = & -2\sqrt{\pi}\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [b_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \int_{\hat{z}}^{+\infty} \beta_n(\bar{r}, 1, x) dx + \right. \\ & \left. + b_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \int_{-\infty}^{\hat{z}} \beta_n(\bar{r}, 1, x) dx] \cos n\varphi - \right. \\ & \left. - [a_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \int_{\hat{z}}^{+\infty} \beta_n(\bar{r}, 1, x) dx + a_n^{(01)}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \int_{-\infty}^{\hat{z}} \beta_n(\bar{r}, 1, x) dx] \sin n\varphi \right\}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$H_z^R(r, \varphi, z) = 2\sqrt{\pi}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - 2\sqrt{\pi}\lambda A_n} \{ [a_n^{(01)}(\frac{1}{2} - 0) - a_n^{(01)}(\frac{1}{2} + 0)] \cos n\varphi + \\ + [b_n^{(01)}(\frac{1}{2} - 0) - b_n^{(01)}(\frac{1}{2} + 0)] \sin n\varphi \} \int_{\hat{z}}^{+\infty} \gamma_n(\bar{r}, 1, x) dx. \quad (68)$$

В формулах (66)—(68) $\bar{r} = r/R$, $\hat{z} = z/R$, $\lambda = (\mu - 1)/(\mu + 1)$, числа A_n считаются по (34), $a_n^{(01)}(\frac{1}{2} \pm 0)$, $a_n^{(02)}(\frac{1}{2} \pm 0)$, $b_n^{(01)}(\frac{1}{2} \pm 0)$, $b_n^{(02)}(\frac{1}{2} \pm 0)$ по формулам (36)—(38), (41)—(43).

В случае постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля: $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ формулы (66)—(68) с учетом (25), (26) упрощаются:

$$H_r^R(r, \varphi, z) = 4\sqrt{\pi}\lambda H_r^0(\varphi) Q_1(\bar{r}), \quad H_\varphi^R(r, \varphi, z) = -4\sqrt{\pi}\lambda H_\varphi^0(\varphi) Q_2(\bar{r}), \quad H_z^R(r, \varphi, z) = 0, \quad (69)$$

где введены известные цилиндрические координаты внешнего поля $H_r^0(\varphi) = H_x^0 \cos \varphi + H_y^0 \sin \varphi$, $H_\varphi^0(\varphi) = -H_x^0 \sin \varphi + H_y^0 \cos \varphi$; $Q_1(\bar{r}) := \int_0^{+\infty} \alpha_1(\bar{r}, 1, x) dx$, $Q_2(\bar{r}) := \int_0^{+\infty} \beta_1(\bar{r}, 1, x) dx$, причем для $\bar{r} < 1$ будет $Q_1(\bar{r}) = -1/(4\sqrt{\pi})$, $Q_2(\bar{r}) = 1/(4\sqrt{\pi})$, а для $\bar{r} > 1$ будет $Q_1(\bar{r}) = Q_2(\bar{r}) = 1/(4\sqrt{\pi}\bar{r}^2)$.

Нами была составлена (на языке Фортран) компьютерная программа, реализующая расчеты по всем полученным выше формулам.

4. ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ НА ИЗВЕСТНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

В виду сложности и объемности аналитических преобразований, приведших к получению приведенных выше формул для напряженности поля реакции однородного бесконечного цилиндра, помещенного в произвольное внешнее магнитное поле, важное значение приобретает проверка этих формул на соответствие известным физическим законам, их внутреннюю непротиворечивость (например, непрерывность перехода общих формул в частные при приближении общих условий к частным), а также их соответствие известным аналитическим формулам напряженности поля реакции для частных случаев рассматриваемой общей ситуации. Сразу отметим, что все описанные ниже виды тестирования пройдены успешно.

В точках боковой поверхности цилиндрического магнетика для нормальной составляющей H_n напряженности результирующего поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^R(\mathbf{r})$ должно выполняться условие скачка ее предельных значений изнутри и извне магнетика $H_n^{(e)} / H_n^{(i)} = \mu$, что в этой ситуации эквивалентно $H_r^{(e)} / H_r^{(i)} = \mu$. Для постоянного в окрестности цилиндра внешнего поля это легко проверяется аналитически с учетом формулы (69).

Известно ([11, с. 339], [12, с. 245], [13]), что внутри и вне бесконечного цилиндра декартовы координаты поля реакции $\mathbf{H}^R(x, y, z) = \{H_x^R(x, y, z), H_y^R(x, y, z), H_z^R(x, y, z)\}$ при постоянном внешнем поле $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ имеют вид $H_x^R = -\lambda H_x^0$, $H_y^R = -\lambda H_y^0$, $H_z^R = 0$, внутри цилиндра ($r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$), а вне цилиндра ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > R$) имеют вид:

$$H_x^R(x, y, z) = \lambda R^2 [H_x^0(x^2 - y^2) + 2H_y^0 xy] / (x^2 + y^2)^2,$$

$$H_y^R(x, y, z) = \lambda R^2 [2H_x^0 xy + H_y^0(y^2 - x^2)] / (x^2 + y^2)^2, \quad H_z^R = 0.$$

При переходе к цилиндрическим координатам эти формулы приобретают вид: $H_z^R \equiv 0$, $H_r^R(r, \varphi, z) = -\lambda H_r^0(\varphi)$ для $r < R$ и $H_r^R(r, \varphi, z) = \lambda H_r^0(\varphi) / \bar{r}^2$ для $r > R$, $H_\varphi^R(r, \varphi, z) = -\lambda H_\varphi^0(\varphi)$ для $r < R$ и $H_\varphi^R(r, \varphi, z) = -\lambda H_\varphi^0(\varphi) / \bar{r}^2$ для $r > R$. Видно, что полученные нами формулы (69) для этого случая выглядят так же.

Выше уже было отмечено, что формулы (58)—(60) поля на оси бесконечного цилиндра в произвольном внешнем поле в случае его постоянства переходят в хорошо известные формулы (61) [11, с. 339].

Далее было проверено, что формулы (66)—(68) поля реакции внутри и вне бесконечного цилиндра (не на его оси и поверхности), помещенного в произвольное внешнее поле, при безграничном приближении точки наблюдения к оси цилиндра переходят в независимо выведенные формулы (58)—(60) поля на оси бесконечного цилиндра при произвольном внешнем поле. Соответствующий предельный переход в (66)—(68) был выполнен аналитически, однако при этом нужные значения некоторых интегралов со сложными подынтегральными функциями вида (8) были получены численными методами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. Получены эффективные асимптотические формулы расчета напряженности поля реакции внутри и вне бесконечного цилиндра, погруженного в произвольное внешнее магнитное поле.

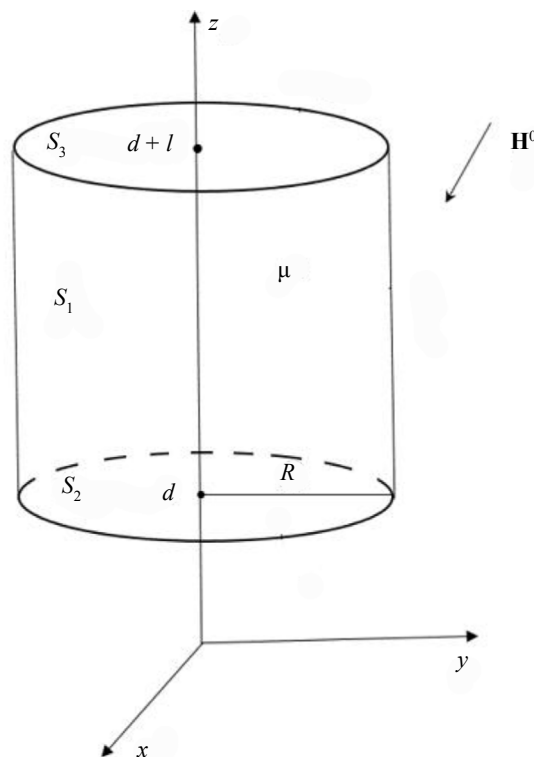


Рис. 1. Однородный цилиндр в магнитном поле.

2. Составлена реализующая предложенный алгоритм компьютерная программа, не требующая больших вычислительных ресурсов.

3. Проведено тестирование полученных формул и компьютерной реализации соответствующего алгоритма, состоящее в проверке результатов расчета на соответствие физическим законам явления, а также сравнение этих результатов в предельных частных случаях формы магнетика с известными аналитическими ответами.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Квант» (“Quantum”) № AAAA-A18-118020190095-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. О проблемах использования пакетов универсальных программ для решения задач магнитостатики // Дефектоскопия. 2018. № 11. С. 23—34.
2. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Один подход к численному решению основного уравнения магнитостатики для конечного цилиндра в произвольном внешнем поле // Дефектоскопия. 2021. № 4. С. 22—34.
3. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Расчет напряженности магнитного поля от однородного цилиндра конечных размеров, помещенного в произвольное внешнее поле // Дефектоскопия. 2022. № 4. С. 63—74.
4. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Расчет напряженности магнитного поля от полубесконечного цилиндра, помещенного в произвольное внешнее поле // Дефектоскопия. 2023. № 5. С. 32—44.
5. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
6. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 404 с.
7. Friedman M.J. Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation. 1. // SIAM Journal Appl. Math. 1980. V. 39. No. 1. P. 14—20.
8. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 2. // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18. No. 4. P. 644—653.
9. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 3. // SIAM J. Math. Analys. 1981. V. 12. No. 4. P. 536—540.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. 294 с.
11. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Киев: Наукова думка, 1981. 471 с.
12. Неразрушающий контроль и диагностика / Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1995. 487 с.
13. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Точные формулы напряженности магнитного поля внутри и вне однородного эллипсоидального магнетика во внешнем однородном в области в области магнетика поле // Дефектоскопия. 2022. № 2. С. 51—63.

REFERENCES

1. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. On the Use of Multipurpose Software Packages for Solving Problems of Magnetostatics // Defektoskopiya. 2018. No.11. P. 23—34.
2. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. One Approach to the Numerical Solution of the Basic Equation of Magnetostatics for a Finite Cylinder in an Arbitrary External Field // Defektoskopiya. 2021. No. 4. P. 22—34.
3. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. Calculating the Strength of Magnetic Field from a Homogeneous Cylinder of Finite Dimensions Placed in an Arbitrary External Field // Defektoskopiya. 2022. No. 4. P. 63—74.
4. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. Calculating the Strength of Magnetic Field from a Homogeneous Cylinder of Finite Dimensions Placed in an Arbitrary External Field // Defektoskopiya. 2023. No. 5. P. 32—44.
5. Hizhnyak N.A. Integral Equations of Macroscopic Electrodynamics. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 280 p.
6. Dyakin V.V. Mathematical Foundations of Classical Magnetostatics. Yekaterinburg: Ural Branch, Russ. Acad. Sci., 2016. 404 p.
7. Friedman M.J. Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation. 1. // SIAM Journal Appl. Math. 1980. V. 39. No. 1. P. 14—20.
8. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 2. // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18. No. 4. P. 644—653.
9. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 3. // SIAM J. Math. Analys. 1981. V. 12. No. 4. P. 536—540.
10. Bejtmn G., Erdeji A. Higher transcendental functions, V. 1. M.: Nauka, 1973. 294 p.
11. Ahiezer A.I. General Physics. Electric and Magnetic Phenomena. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 471 p.
12. Non-destructive testing and diagnostics / Ed. V.V. Klyuev M.: Mashinostroenie, 1995. 487 p.
13. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. Exact Formulas for Magnetic Field Strength inside and outside a Homogeneous Ellipsoidal Magnet Placed in an External Field Homogeneous in Magnet Vicinity // Defektoskopiya. 2022. No. 2. P. 51—63.