

## НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ЯВНОГО ВЫРАЖЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОЛЯ МАГНЕТИКОВ, ПОМЕЩЕННЫХ В ПОЛЕ ВНЕШНИХ ИСТОЧНИКОВ

© 2024 г. В.В. Дякин<sup>1</sup>, О.В. Кудряшова<sup>1,\*</sup>, В.Я. Раевский<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН,  
Россия 620137 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18  
E-mail: \*kudryashova\_ov@imp.uran.ru; \*\*ravskii@mail.ru

Поступила в редакцию 31.05.2024; после доработки 16.06.2024  
Принята к публикации 21.06.2024

Приведены формулы для вычисления напряженности результирующего магнитного поля от магнетиков с заданным распределением намагниченности или погруженного в заданное поле внешних источников. Собраны именно те случаи, когда вычисление по этим формулам может быть выполнено пользователем, не имеющим большого опыта в области вычислительной математики и программирования. А именно, в указанных случаях формулы для напряженности в большинстве своем выражаются в конечном виде через элементарные функции либо требуют использования одной из стандартных подпрограмм, имеющихся в библиотеке любого языка программирования. Такие формулы могут служить как справочным материалом, так и для решения соответствующих задач с подходящими реальными объектами, а также для определения оптимальных стратегий и оптимального набора входных параметров при использовании универсальных пакетов программ и оценки погрешности получаемых при этом результатов.

*Ключевые слова:* магнитостатика, расчет напряженности полей.

## SOME CASES OF EXPLICIT EXPRESSION OF THE RESULTING FIELD STRENGTH OF MAGNETS PLACED IN THE FIELD OF EXTERNAL SOURCES

© 2024 V. V. Dyakin<sup>1</sup>, O. V. Kudryashova<sup>1,\*</sup>, V. Y. Raevskii<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch  
of the Russian Academy of Sciences,  
Russia 620108 Yekaterinburg, Sofya Kovalevskaya Str., 18  
E-mail: \*kudryashova\_ov@imp.uran.ru; \*\*ravskii@mail.ru

Formulas for calculating of the resulting magnetic field strength of magnets with a given magnetization distribution or given field of external sources are presented. We have collected exactly those cases where a user who does not have much experience in the field of computational mathematics and programming can perform calculations using these formulas. Namely, in these cases formulas for tension are mostly expressed in final form through elementary functions or require the use of one of the standard subroutines available in the library of any programming language. Such formulas can serve both as reference material and for solving corresponding problems with suitable real objects, as well as for determining optimal strategies and the optimal set of input parameters when using universal software packages and assessing the error of the results obtained.

*Keywords:* magnetostatics, calculation of magnetic field strength.

DOI: 10.31857/S0130308224070027

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач из области магнетизма, например, задач неразрушающего магнитного контроля, актуальной является проблема создания и программной реализации алгоритмов аналитического или численного решения задач магнитостатики по вычислению напряженности результирующего поля применительно к магнитным телам различной формы, помещенным во внешнее магнитное поле. Решение этой проблемы развивается в двух направлениях. Прежде всего, расширяется круг задач (в смысле усложнения геометрии исследуемых магнетиков, характера их магнитной проницаемости, конфигурации внешнего поля), для которых получены либо точные аналитические формулы вычисления указанной напряженности, либо предложены численно-аналитические алгоритмы, реализованные в компьютерных программах и дающие ответ с контролируемой задаваемой точностью. Но круг таких задач пока еще недостаточно широк и исчерпывается, в основном, конфигурациями однородных и изотропных магнетиков идеальных геометрических форм с идеальными же формами дефектов в них. Во многих же реальных задачах геометрия исследуемых магнетиков и/или характер их магнитной проницаемости достаточно сложны и не поддаются пока решению указанными ана-

литическими или численно-аналитическими методами с задаваемой и контролируемой точностью. Поэтому в последнее время бурное развитие получило создание так называемых универсальных пакетов программ (типа ANSYS или ELCUT), реализующих численный метод конечных элементов. Главное преимущество таких программных продуктов — их универсальность в плане формальной возможности применения к самому широкому кругу магнитостатических задач, возникающих для описания полей от магнетиков практически произвольной формы с достаточно общими типами линейной и нелинейной связи в материальных соотношениях. Однако сама по себе возможность применения вычислительного пакета совсем не гарантирует адекватность получаемых результатов. Практическое применение таких программ таит в себе множество подводных камней, подробному описанию которых посвящена работа [1]. Одним из основных их недостатков является существенная субъективность необходимого выбора предлагаемых стратегий расчета и многочисленных входных параметров (например, выбор типа конечных элементов, их расположение, густота сетки соответствующих узлов в различных частях расчетной области), который должен сделать сам пользователь в соответствии со своим опытом и интуицией, и от которого в значительной степени количественно и качественно зависят результаты расчетов. Такая многовариантность выбора стратегии и параметров расчетов (и невозможность перепробовать все заложенные возможности наряду с отсутствием внятных критериев выбора) всегда оставляет сомнение в действительной оптимальности сделанного выбора. Другим существенным недостатком универсальных пакетов является отсутствие в большинстве случаев сколько-нибудь полного представления о величине погрешности полученных результатов, без которого ценность применения таких программ становится весьма сомнительной.

Выходом, на наш взгляд, является комбинированное использование указанных двух подходов в том направлении, чтобы достоинства программ, реализующих точные методы решения, в возможной мере помогли нивелировать основные недостатки пакетов универсальных программ путем их тестирования. Для каждой реальной задачи желательно найти из имеющейся уже достаточно широкой базы точно решаемых (в указанном выше смысле) задач по возможности наиболее близкую к ней (по форме и конфигурации магнетиков, их физическим параметрам). После этого задать используемому универсальному пакету геометрические и физические параметры именно этой вспомогательной задачи (для которой получены результаты с гарантированной точностью), а затем подбирать стратегии и многочисленные субъективные параметры универсального пакета именно из критерия наибольшего совпадения с полученными точными результатами. Определив таким образом оптимальную стратегию и оптимальные субъективно задаваемые универсальному пакету параметры, получить представление о точности получаемых при этом результатов. Затем в этой стратегии и с этими параметрами запустить универсальную программу для реальной задачи. И тогда можно иметь представление об оценке погрешности получаемого при этом результата.

Одной из проблем такого подхода является тот факт, что для большинства точно решаемых задач вывод формул и описание соответствующего алгоритма вычисления напряженности поля в достаточной нетривиальных случаях геометрии магнетика и конфигурации внешнего поля содержится лишь в журнальных статьях, причем самостоятельное составление компьютерной программы для реализации предлагаемого алгоритма требует достаточно высокой квалификации и большого опыта в области применения вычислительной математики и программирования. У большинства пользователей универсальных пакетов такой квалификации и опыта нет, что затрудняет тестирование программ с помощью точно решаемых задач. Однако во многих упрощающих частных случаях (например, постоянное внешнее поле, постоянная магнитная проницаемость) формулы, описывающие общие алгоритмы, значительно упрощаются и для составления соответствующей компьютерной программы требуют от пользователя небольшого опыта непосредственного программирования явных аналитических выражений, содержащих элементарные функции, или, в крайнем случае, использования лишь несложных стандартных подпрограмм, имеющих в библиотеке любого языка программирования.

Такие упрощенные формулы, собранные в настоящей работе, могут служить как справочным материалом, так и для решения соответствующих задач с подходящими реальными объектами, а также для предложенного выше подхода определения оптимальных стратегий и оптимального набора входных параметров при использовании универсальных пакетов программ и оценки погрешности получаемых результатов. Ниже приводится описание некоторых упомянутых ситуаций, соответствующие формулы для нахождения напряженности результирующего поля и ссылки на литературу (не обязательно первоисточники), где приведен их вывод. Все приводимые формулы проверялись, по возможности, на соответствующих предельных случаях формы магнетика с известными ответами, а также на выполнение граничных условий для напряженности.

## 2. МАГНЕТИКИ С ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ

### 2.1. Поле однородно намагниченного прямого параллелепипеда [2]

Однородно намагниченное тело в пространственной декартовой системе координат занимает область  $[-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$  в форме прямого параллелепипеда. Намагниченность внутри тела постоянна и направлена вдоль оси  $x$ :  $\mathbf{M} = \{M, 0, 0\}$  (см. рис. 1). Тогда вне поверхности тела напряженность результирующего магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}(x, y, z) = \{H_x(x, y, z), H_y(x, y, z), H_z(x, y, z)\}$  имеет вид:

$$H_x(x, y, z) = \frac{M}{4\pi} [E(x-a, b-y, c-z) + E(x-a, b+y, c-z) + E(x-a, b-y, c+z) + E(x-a, b+y, c+z) - E(x+a, b-y, c-z) - E(x+a, b+y, c-z) - E(x+a, b-y, c+z) - E(x+a, b+y, c+z)];$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{M}{4\pi} \ln \left[ \frac{D(c-z, x+a, y+b)D(-c-z, x+a, y-b)D(-c-z, x-a, y+b)D(c-z, x-a, y-b)}{D(-c-z, x+a, y+b)D(c-z, x+a, y-b)D(c-z, x-a, y+b)D(-c-z, x-a, y-b)} \right];$$

$$H_z(x, y, z) = \frac{M}{4\pi} \ln \left[ \frac{D(b-y, x+a, z+c)D(-b-y, x+a, z-c)D(-b-y, x-a, z+c)D(b-y, x-a, z-c)}{D(-b-y, x+a, z+c)D(b-y, x+a, z-c)D(b-y, x-a, z+c)D(-b-y, x-a, z-c)} \right];$$

где  $E(\alpha, \beta, \gamma) = \arctg \left( \frac{\beta\gamma}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right)$ ,  $D(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ .

### 2.2. Поле внутри и вне бесконечной пластины конечной толщины [3, с. 133, 243], [4, с. 13, 14]

Однородная пластина с магнитной проницаемостью  $\mu = \text{const}$  расположена между двумя параллельными плоскостями в постоянном внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ . Ось  $z$  декартовой системы координат перпендикулярна граничным плоскостям. Тогда напряженность результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$  в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  вне пластины совпадает с напряженностью внешнего поля, а внутри пластины

$$H_x(\mathbf{r}) = H_x^0, \quad H_y(\mathbf{r}) = H_y^0, \quad H_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} H_z^0.$$

### 2.3. Поле неоднородного пространства и полупространства [5, с. 157], [6, с. 127]

Пространство разделено плоскостью  $S$  на два однородных полупространства с различными магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (см. рис. 2). Ось  $z$  декартовой системы координат перпендикулярна плоскости раздела  $S$ , уравнение которой  $z = z_0$ . Внешнее поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(x, y, z), H_y^0(x, y, z), H_z^0(x, y, z)\}$  во всем пространстве постоянно:  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ . Тогда результирующее поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$  в каждом полупространстве тоже постоянно, причем в произвольной точке  $\mathbf{r} = (x, y, z) \notin S$  будет  $H_x(\mathbf{r}) = H_x^0$ ,  $H_y(\mathbf{r}) = H_y^0$  как для  $z < z_0$ , так и  $z > z_0$ , а

$$H_z(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_z^0, \quad z > z_0; \quad H_z(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} H_z^0, \quad z < z_0. \quad (1)$$

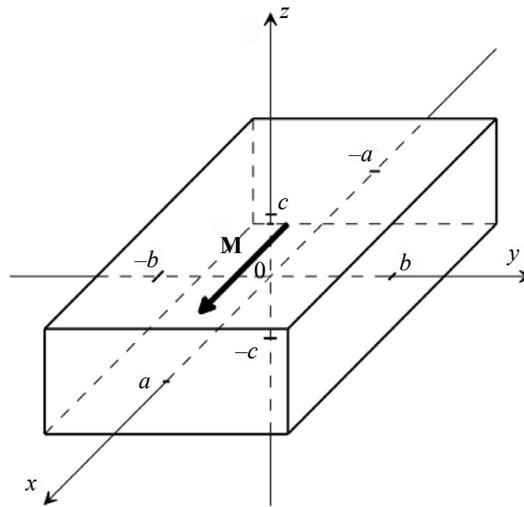


Рис. 1. Однородно намагниченный параллелепипед.

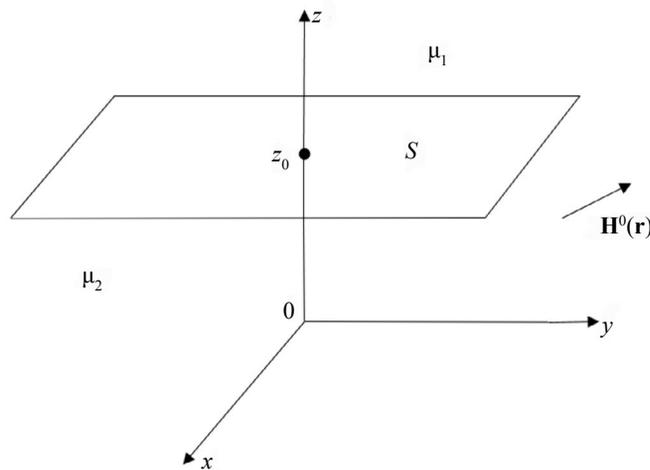


Рис. 2. Неоднородное пространство.

Несложно обобщить эти формулы на тот случай, когда постоянна только  $z$ -компонента напряженности внешнего поля  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0\}$ ,  $H_z^0 = \text{const}$ . Тогда

$$H_x(\mathbf{r}) = H_x^0(\mathbf{r}), \quad H_y(\mathbf{r}) = H_y^0(\mathbf{r}), \quad z < z_0 \text{ или } z > z_0, \quad (2)$$

а для  $H_z(\mathbf{r})$  выполнено соотношение (1). Если же предположить, что для внешнего поля  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$  компонента  $H_z^0(\mathbf{r})$  постоянна только на границе  $S$  полупространств  $H_z^0(\mathbf{r}) = h = \text{const}$  для  $z = z_0$ , то выполнены соотношения (2), а  $H_z(\mathbf{r}) = H_z^0(\mathbf{r}) - bh$ ,  $z > z_0$ ;  $H_z(\mathbf{r}) = H_z^0(\mathbf{r}) + bh$ ,  $z < z_0$ , где  $b := (\mu_1 - \mu_2) / (\mu_1 + \mu_2)$ . Полагая в вышеупомянутых формулах  $\mu_1 = 1$  или  $\mu_2 = 1$ , получим соответствующие формулы для магнитного полупространства.

#### 2.4. Поле над двухслойным полупространством [7]

Полупространство  $z < d_2$  с граничной плоскостью  $S_2$  с уравнением  $z = d_2$  состоит из слоя  $d_1 < z < d_2$  с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu$  и внутреннего полупространства  $z < d_1$  с граничной плоскостью  $S_1$  с уравнением  $z = d_1$  и постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_d$ . На рис. 3 изображено сечение описанной конфигурации плоскостью  $x = 0$ . Внешнее поле постоянно с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ .

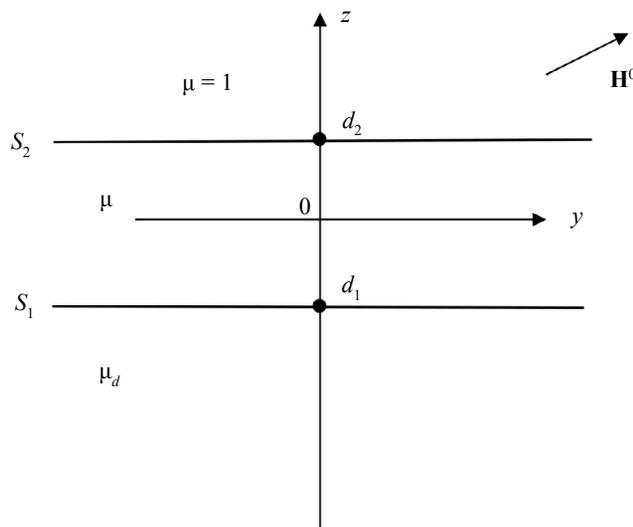


Рис. 3. Двухслойное полупространство.

Тогда напряженность результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$  в произвольной точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  над двухслойным полупространством  $z > d_2$  тоже постоянна:

$$H_x(\mathbf{r}) = H_x^0, \quad H_y(\mathbf{r}) = H_y^0, \quad H_z(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_d}{\mu_d + 1} H_z^0.$$

Интересно, что наличие в полупространстве верхнего слоя конечной толщины  $d_1 < z < d_2$  с магнитной проницаемостью  $\mu$  не влияет на напряженность поля над двухслойным полупространством.

### 3. МАГНЕТИКИ ШАРООБРАЗНОЙ ФОРМЫ

#### 3.1. Поле однородно намагниченного шара [8, с. 141], [9]

Напряженность  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  поля, создаваемого в произвольной точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  однородно намагниченным (намагниченность  $\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\} = \text{const}$ ) шаром с центром  $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$  радиуса  $R$  вне и внутри него, может быть вычислена по формулам:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{R^3}{3|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \left[ 3(\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \mathbf{M} \right], \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geq R;$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3} \mathbf{M}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < R.$$

Здесь  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  означает скалярное произведение векторов.

#### 3.2. Поле внутри и вне однородного шара в однородной среде при постоянном внешнем поле [10, с. 278], [11, с. 203], [6, с. 129, 208]

В однородную среду с магнитной проницаемостью  $\mu_2$  помещен однородный шар радиуса  $R$  с проницаемостью  $\mu_1$ , внешнее поле  $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ . Начало декартовой системы координат в центре шара. Напряженность результирующего магнитного поля внутри шара является постоянной:

$$\mathbf{H} = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \mathbf{H}^0,$$

а в произвольной точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  вне шара:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)R^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)r^3} \left[ \frac{3}{r^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}^0) \mathbf{r} - \mathbf{H}^0 \right], \quad \text{где } r = |\mathbf{r}|.$$

Для случая  $\mu_2 = 1$  (шар в воздухе или в вакууме) эти формулы приведены в работах [4], [12, с. 245], [13, с. 90] (в последней с опечаткой).

### 3.3. Поле концентрических шаров с разными проницаемостями в постоянном внешнем поле [14, с. 184]

Два концентрических шара радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ) помещены в постоянное внешнее поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0 = \text{const}$ . Магнитная проницаемость внутреннего шара  $\mu_2$ , а проницаемость между границами шаров  $\mu_1$ . Центр декартовой системы координат в общем центре шаров, а ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{H}^0$ , таким образом,  $\mathbf{H}^0 = \{0, 0, H^0\} = \text{const}$ . Напряженность результирующего магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$  в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  вне наружного шара (т.е.  $r := |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R_1$ ) вычисляется по формуле  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H^0 \nabla \left[ z \left( 1 - C_0 R_1^3 / r^3 \right) \right]$  или, раскрывая градиент, покомпонентно:

$$H_x(\mathbf{r}) = \frac{3C_0 R_1^3 xz}{r^5} H^0, \quad H_y(\mathbf{r}) = \frac{3C_0 R_1^3 yz}{r^5} H^0, \quad H_z(\mathbf{r}) = \left[ 1 + \frac{C_0 R_1^3 (2z^2 - x^2 - y^2)}{r^5} \right] H^0,$$

где  $C_0 := \frac{\mu_1 - 1 + (2\mu_1 + 1)A}{\mu_1 + 2 + 2(\mu_1 - 1)A}, \quad A := \frac{(\mu_2 - \mu_1)R_2^3}{(\mu_2 + 2\mu_1)R_1^3}.$

Из формул, приведенных в [11, с. 184], несложно вывести формулы для напряженности магнитного поля и внутри шаров. Напряженность в «шаровом слое» ( $R_2 < r < R_1$ ):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H^0 \nabla \left[ z \left( C_1 + C_2 R_1^3 / r^3 \right) \right]$$

или покомпонентно:

$$H_x(\mathbf{r}) = -\frac{3C_2 R_1^3 xz}{r^5} H^0, \quad H_y(\mathbf{r}) = -\frac{3C_2 R_1^3 yz}{r^5} H^0, \quad H_z(\mathbf{r}) = \left[ C_1 - \frac{C_2 R_1^3 (2z^2 - x^2 - y^2)}{r^5} \right] H^0,$$

$$C_1 := \frac{2\mu_1 + 1 - 2C_0(\mu_1 - 1)}{3\mu_1}, \quad C_2 := \frac{\mu_1 - 1 - C_0(\mu_1 + 2)}{3\mu_1}.$$

Напряженность поля во внутреннем шаре ( $r < R_2$ ):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H^0 \left( C_1 + C_2 R_1^3 / R_2^3 \right) \nabla z \quad \text{или покомпонентно:}$$

$$H_x(\mathbf{r}) = H_y(\mathbf{r}) = 0, \quad H_z(\mathbf{r}) = \left( C_1 + \frac{C_2 R_1^3}{R_2^3} \right) H^0.$$

### 3.4. Поле неоднородного шара, погруженного в постоянное внешнее поле [15], [16]

Шаровой магнетик радиуса  $R$  погружен в постоянное магнитное поле. Начало декартовой системы координат в центре шара. Рассматривается модельная магнитная проницаемость неоднородного шара  $\mu(\mathbf{r}) = c_0 e^{\alpha r}$  ( $r := |\mathbf{r}|$ ,  $c_0$  и  $\alpha$  — постоянные параметры,  $c_0 > 0$ ,  $\alpha$  — любого знака), напряженность постоянного внешнего поля  $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ .

Напряженность результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в произвольной точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  внутри шара ( $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R$ ) вычисляется по формуле:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{3R}{(d+2)F(R)} \nabla A(\mathbf{r}), \quad A(\mathbf{r}) := \frac{F(r)}{r} (xH_x^0 + yH_y^0 + zH_z^0),$$

а напряженность  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  вне шара ( $r > R$ ) — по формуле:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left[ 1 - \frac{(d-1)R^3}{d+2} \right] \nabla B(\mathbf{r}), \quad B(\mathbf{r}) := \frac{xH_x^0 + yH_y^0 + zH_z^0}{r^3}.$$

В этих формулах:

$$d := -c_0 e^{\alpha R} \left[ \frac{\alpha R (e^{-\alpha R} - 1 + \alpha R)}{e^{-\alpha R} - 1 + \alpha R - \frac{\alpha^2 R^2}{2}} + 2 \right], \quad F(r) := \frac{e^{-\alpha r} - 1 + \alpha r - \frac{\alpha^2 r^2}{2}}{r^2}.$$

При вычислении компонент вектора градиента  $\nabla A(\mathbf{r})$  можно использовать формулу для производной от функции  $F(r)$ :

$$F'(r) := -\frac{2}{r^3} \left( e^{-\alpha r} - 1 + \alpha r - \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right) - \frac{\alpha}{r^2} (e^{-\alpha r} - 1 + \alpha r).$$

#### 4. МАГНЕТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

##### 4.1. Поле внутри и вне бесконечного кругового цилиндра, внешнее поле постоянно [4], [12], [17], [18]

Однородный круговой цилиндр бесконечной длины с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu = \text{const}$  и радиусом  $R$  поперечного сечения в постоянном внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ . Уравнение цилиндра в трехмерном пространстве  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , т.е. вся ось  $z$  декартовой системы координат находится внутри цилиндра и совпадает с его осью. Тогда напряженность результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$  в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  внутри цилиндра ( $\sqrt{x^2 + y^2} < R$ ) вычисляется по формулам:

$$H_x(\mathbf{r}) = \frac{2}{\mu + 1} H_x^0, \quad H_y(\mathbf{r}) = \frac{2}{\mu + 1} H_y^0, \quad H_z = H_z^0.$$

Напряженность поля вне цилиндра в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  ( $\sqrt{x^2 + y^2} > R$ ):

$$H_x(\mathbf{r}) = H_x^0 + \frac{\lambda R^2}{(x^2 + y^2)^2} [H_x^0(x^2 - y^2) + 2H_y^0 xy];$$

$$H_y(\mathbf{r}) = H_y^0 + \frac{\lambda R^2}{(x^2 + y^2)^2} [2H_x^0 xy + H_y^0(y^2 - x^2)];$$

$$H_z(\mathbf{r}) = H_z^0, \quad \lambda := \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

##### 4.2. Поле на оси бесконечного кругового цилиндра в произвольном внешнем поле [18]

Тот же цилиндр, но внешнее поле произвольно  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Тогда компоненты напряженности результирующего поля  $\mathbf{H}(0, 0, z)$  на оси цилиндра:

$$H_x(0, 0, z) = H_x^0(0, 0, z) - \frac{\lambda}{2} \left[ b_1 + b_0 + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1 + \hat{z}^2}} (b_1 - b_0) \right];$$

$$H_y(0, 0, z) = H_y^0(0, 0, z) - \frac{\lambda}{2} \left[ c_1 + c_0 + \frac{\hat{z}}{\sqrt{1 + \hat{z}^2}} (c_1 - c_0) \right];$$

$$H_z(0,0,z) = H_z^0(0,0,z) + \frac{\lambda}{(1 - 2\lambda\sqrt{\pi}A_0)\sqrt{1 + \hat{z}^2}}(a_0 - a_1),$$

где  $\lambda := \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$ ,  $\hat{z} := z/R$ ;  $A_0 = 0,282095299\dots$ ;

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \sin \varphi] d\varphi;$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \sin \varphi] \cos \varphi d\varphi;$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\infty) \sin \varphi] \sin \varphi d\varphi;$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi] d\varphi;$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi] \cos \varphi d\varphi;$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H_x^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \cos \varphi + H_y^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, +\infty) \sin \varphi] \sin \varphi d\varphi.$$

В этих формулах для модели бесконечного цилиндра введено формально обозначение  $f(x, y, \pm\infty) := \lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(x, y, z)$ . При использовании формул этой модели для расчета напряженности поля на оси достаточно длинного цилиндра нужно в эти формулы вместо  $+\infty$  подставлять  $z$ -координату верхнего торца цилиндра, а вместо  $-\infty$  подставлять  $z$ -координату нижнего торца цилиндра.

В случае постоянного внешнего поля  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$  эти формулы приводят к известным формулам внутри бесконечного цилиндра.

### 4.3. Поле на оси полубесконечного кругового цилиндра при постоянном внешнем поле [19]

Однородный круговой цилиндр бесконечной (в одном направлении) длины с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu = \text{const}$  и радиусом  $R$  поперечного сечения в постоянном внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Уравнение цилиндра в трехмерном пространстве описывается системой неравенств  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $z \geq d$ , т.е. ось цилиндра лежит на оси  $z$  декартовой системы координат, нижнее основание лежит в плоскости с уравнением  $z = d$ , а верхнее «ушло» в бесконечность (см. рис. 4). Тогда напряженность результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$  в точке  $\mathbf{r} = (0, 0, z)$  на оси цилиндра ( $z > d$ ) или ее продолжении ( $z < d$ ) вычисляется по формулам:

$$H_x(0,0,z) = \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} \right) \right] H_x^0, \quad H_y(0,0,z) = \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} \right) \right] H_y^0,$$

$$H_z(0,0,z) = \left[ 1 - \lambda \left( \text{sgn}(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} \right) \right] H_z^0, \quad \text{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}, \quad \lambda := \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \quad \bar{z} := \frac{z - d}{R}.$$

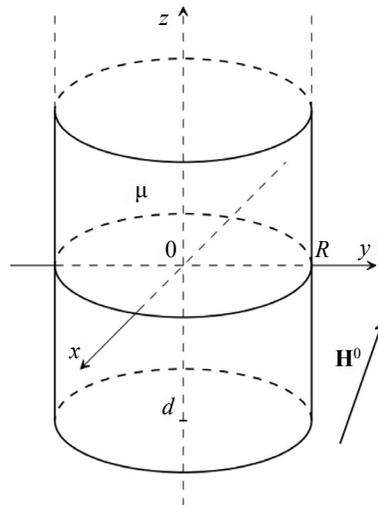


Рис. 4. Полубесконечный цилиндр.

#### 4.4. Поле внутри и вне бесконечного цилиндра с эллипсоидальным сечением [4], [12]

Рассмотрим однородный магнетик ( $\mu = \text{const}$ ), занимающий область  $\Omega$  в форме бесконечного цилиндра с эллипсоидальным поперечным сечением и координатной осью  $z$  в качестве оси цилиндра, помещенный во внешнее поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ , постоянное в области цилиндра  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ ,  $\mathbf{r} \in \Omega$  (см. рис. 5). Граница  $\Gamma$  сечения такого цилиндра плоскостью  $z = 0$  суть эллипс с уравнением:

$$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

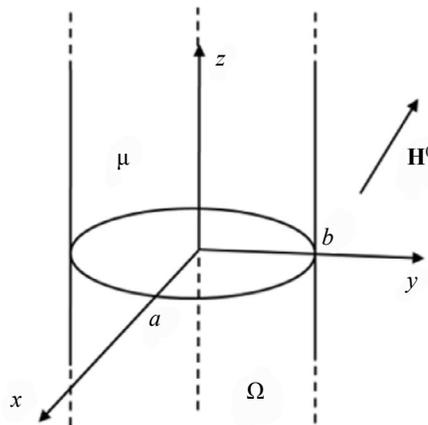


Рис. 5. Бесконечный цилиндр с эллипсоидальным сечением.

Тогда результирующее поле внутри цилиндра тоже постоянно с напряженностью  $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}) = \{H_x^{(i)}, H_y^{(i)}, H_z^{(i)}\}$ , где

$$H_x^{(i)} = \frac{a+b}{a+\mu b} H_x^0, \quad H_y^{(i)} = \frac{a+b}{b+\mu a} H_y^0, \quad H_z^{(i)} = H_z^0.$$

При  $a = b = R$  получаются известные формулы для поля внутри кругового цилиндра.

Напряженность поля вне рассматриваемого цилиндра  $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}) = \{H_x^{(e)}(\mathbf{r}), H_y^{(e)}(\mathbf{r}), H_z^{(e)}(\mathbf{r})\}$  в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z) \notin \Omega$  равна:

$$H_x^{(e)}(\mathbf{r}) = H_x^0(\mathbf{r}) - (\mu - 1)ab \left\{ \frac{H_x^{(i)}}{a^2 + u + \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)}} - \frac{p(u; x, a) [H_x^{(i)} p(u; x, a) + H_y^{(i)} p(u; y, b)]}{[p^2(u; x, a) + p^2(u; y, b)] \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)}} \right\};$$

$$H_y^{(e)}(\mathbf{r}) = H_y^0(\mathbf{r}) - (\mu - 1)ab \left\{ \frac{H_y^{(i)}}{b^2 + u + \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)}} - \frac{p(u; y, b) [H_x^{(i)} p(u; x, a) + H_y^{(i)} p(u; y, b)]}{[p^2(u; x, a) + p^2(u; y, b)] \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)}} \right\}, \quad H_z^{(e)}(\mathbf{r}) = H_z^0(\mathbf{r}),$$

где

$$u := \frac{1}{2} \left[ x^2 + y^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - 4(a^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2)} \right],$$

$$p(u; x, a) := \frac{x}{a^2 + u}.$$

В случае поперечного внешнего поля эти формулы совпадают с формулами в [12, с. 245], выписанными для этого частного случая. При  $a = b = R$  эти формулы переходят в ранее выписанные формулы напряженности поля вне кругового цилиндра.

### 5. МАГНЕТИК В ФОРМЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЭЛЛИпсоИДА [4], [17], [11], [12], [20]

Однородный магнетик ( $\mu = \text{const}$ ), занимающий область  $\Omega$  в форме произвольного эллипсоида с уравнением границы  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , помещен во внешнее поле с напряженностью  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ , постоянное в области эллипсоида  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\} = \text{const}$ ,  $\mathbf{r} \in \Omega$  (см. рис. 6). Тогда результирующее поле внутри эллипсоида тоже постоянно с напряженностью  $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}) = \{H_x^{(i)}, H_y^{(i)}, H_z^{(i)}\}$ , где

$$H_x^{(i)} = \frac{H_x^0}{1 + dI(0; a, b, c)}, \quad H_y^{(i)} = \frac{H_y^0}{1 + dI(0; b, a, c)}, \quad H_z^{(i)} = \frac{H_z^0}{1 + dI(0; c, a, b)},$$

а  $d := 0,5(\mu - 1)abc$ , выражение для

$$I(u; a, b, c) := \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(a^2 + s) \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}}$$

через неполные эллиптические интегралы или элементарные функции (для разных типов соотношения между полуосями эллипсоида) будут приведены ниже. Для случая эллипсоида вращения  $a = b \neq c$  эти формулы приводят к тем же выражениям, что и в [17, с. 339], а для шара ( $a = b = c$ ) получаем известную формулу [11, с. 207], [12, с. 245]:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{3}{\mu + 2} \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{r} \in \Omega.$$

Напряженность поля вне эллипсоида  $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}) = \{H_x^{(e)}(\mathbf{r}), H_y^{(e)}(\mathbf{r}), H_z^{(e)}(\mathbf{r})\}$  в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z) \notin \Omega$  равна:

$$H_x^{(e)}(\mathbf{r}) = H_x^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mu - 1)abc \left[ H_x^{(i)} I(u; a, b, c) - \frac{x}{a^2 + u} Q(u; x, y, z) \right];$$

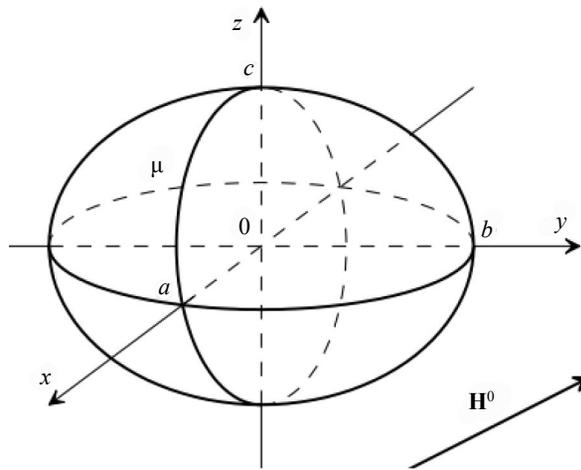


Рис. 6. Эллипсоидальный магнетик.

$$H_y^{(e)}(\mathbf{r}) = H_y^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mu - 1)abc \left[ H_y^{(i)} I(u; b, a, c) - \frac{y}{b^2 + u} Q(u; x, y, z) \right];$$

$$H_z^{(e)}(\mathbf{r}) = H_z^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mu - 1)abc \left[ H_z^{(i)} I(u; c, a, b) - \frac{z}{c^2 + u} Q(u; x, y, z) \right].$$

В этих выражениях

$$Q(u; x, y, z) := \frac{2}{G(u; x, y, z) \sqrt{R(u)}} \left( \frac{xH_x^{(i)}}{a^2 + u} + \frac{yH_y^{(i)}}{b^2 + u} + \frac{zH_z^{(i)}}{c^2 + u} \right),$$

где

$$G(u; x, y, z) := \left( \frac{x}{a^2 + u} \right)^2 + \left( \frac{y}{b^2 + u} \right)^2 + \left( \frac{z}{c^2 + u} \right)^2,$$

$$R(u) := (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u).$$

В этих формулах  $u$  есть единственный положительный корень уравнения  $\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$ , которое сводится к кубическому уравнению

$$u^3 + Au^2 + Bu + C = 0,$$

где  $A = a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ,  $B = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - x^2b^2 - x^2c^2 - y^2a^2 - y^2c^2 - z^2a^2 - z^2b^2$ ,  $C = a^2b^2c^2 - x^2b^2c^2 - y^2a^2c^2 - z^2a^2b^2$ .

Это уравнение имеет три действительных корня, из которых только один положительный и который лежит в интервале  $(0, x^2 + y^2 + z^2 - \min(a^2, b^2, c^2))$ . В случае эллипсоида вращения (две полуоси эллипсоида совпадают) этот корень выражается явно. Если, например,  $a = b \neq c$ , то ([20, с. 64]):

$$u = \frac{1}{2} \left[ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - z^2 - a^2 + c^2)^2 + 4z^2(x^2 + y^2)} \right].$$

Отметим, что если в эллипсоиде вращения  $b = c \neq a$  или  $a = c \neq b$ , то в этой формуле меняются не только  $a$ ,  $b$  и  $c$ , но и соответствующим образом  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В случае шара радиуса  $R$  ( $a = b = c = R$ ) будет  $u = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ .

Приведем формулы для вычисления  $I(u; a, b, c)$ , отметив сразу, что  $I(u; a, b, c) = I(u; a, c, b)$ .

1. Среди чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  нет равных. Тогда выражение для  $I(u; a, b, c)$  зависит от того, какое из чисел  $a$ ,  $b$  или  $c$  стоит на первом месте — наибольшее, среднее или наименьшее. Для определенности считаем  $a > b > c$ . Тогда:

$$I(u; a, b, c) = \frac{2}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - c^2}} [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)];$$

$$I(u; b, a, c) = \frac{2\sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \left[ E(\varphi, k) - \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} F(\varphi, k) - \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \sqrt{\frac{c^2 + u}{(a^2 + u)(b^2 + u)}} \right];$$

$$I(u; c, a, b) = \frac{2}{(b^2 - c^2)\sqrt{a^2 - c^2}} \left[ \sqrt{a^2 - c^2} \sqrt{\frac{b^2 + u}{(a^2 + u)(c^2 + u)}} - E(\varphi, k) \right],$$

где неполные эллиптические интегралы 1 и 2 рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} \, ds,$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + u}}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

2. Среди чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  есть в точности два одинаковых. Тогда выражение для  $I(u; a, b, c)$  зависит от того, на каком месте стоит отличный от других параметр и больше ли он двух равных или нет. Для определенности считаем  $a = b \neq c$ . Тогда в случае  $c > a = b$ :

$$I(u; a, a, c) = \frac{\sqrt{u + c^2}}{(c^2 - a^2)(u + a^2)} + \frac{1}{2(c^2 - a^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{u + c^2} - \sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{u + c^2} + \sqrt{c^2 - a^2}};$$

$$I(u; c, a, a) = -\frac{2}{(c^2 - a^2)\sqrt{u + c^2}} - \frac{1}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{u + c^2} - \sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{u + c^2} + \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

В случае  $c < a = b$ :

$$I(u; a, a, c) = \frac{1}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{u + c^2}} - \frac{\sqrt{u + c^2}}{(a^2 - c^2)(u + a^2)};$$

$$I(u; c, a, a) = -\frac{2}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{u + c^2}} + \frac{2}{(a^2 - c^2)\sqrt{u + c^2}}.$$

3. Если в  $I(u; a, b, c)$  будет  $a = b = c$ , то

$$I(u; a, a, a) = \frac{2}{3(u + a^2)^{3/2}}.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Квант» (“Quantum”) № АААА-А18-118020190095-4.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. О проблемах использования пакетов универсальных программ для решения задач магнитостатики // Дефектоскопия. 2018. № 11. С. 23—34.

2. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. Некоторые прямые и обратные задачи технической магнитостатики. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2004. 177с.
3. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Точные формулы напряженности магнитного поля внутри и вне однородного эллипсоидального магнетика во внешнем однородном в области магнетика поле // Дефектоскопия. 2022. № 2. С. 51—63.
5. Нетребко Н.В., Николаев И.П., Полякова М.С., Шмальгаузен В.И. Электричество и магнетизм. М.: Изд-во ВМиК МГУ, 2006, 327 с.
6. Меледин Г.В., Черкасский В.С. Электродинамика в задачах. Часть 1. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003. 227 с.
7. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Применение основного уравнения магнитостатики к задачам магнитной толщинометрии. Часть 2. // Дефектоскопия. 2014. № 10. С. 3—17.
8. Гречко Л.Г., Сузаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. М.: Высшая школа, 1984, 319 с.
9. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Обратная задача магнитостатики в полях насыщения // Дефектоскопия. 2019. № 10. С. 35—44.
10. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1983. 463 с.
11. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1989. 271 с.
12. Неразрушающий контроль и диагностика / Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1995. 487 с.
13. Антонов Л.И., Деденко Л.Г., Матвеев А.Н. Методика решения задач по электричеству. М.: Изд-во МГУ, 1982. 168 с.
14. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 403 с.
15. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Один подход к решению основного уравнения магнитостатики для случая неоднородных магнетиков // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 187. № 1. С. 88—103.
16. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. К решению задачи магнитостатики в случае зависимости магнитной проницаемости от координат // Дефектоскопия. 2015. № 9. С. 38—48.
17. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Киев: Наукова думка, 1981. 471 с.
18. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Расчет напряженности магнитного поля внутри и вне бесконечного цилиндра, помещенного в произвольное внешнее поле // Дефектоскопия. 2024. № 3. С. 33—46.
19. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Расчет напряженности магнитного поля от полу-бесконечного цилиндра, помещенного в произвольное внешнее поле // Дефектоскопия. 2023. № 5. С. 32—44.
20. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 279 с.

## REFERENCES

1. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. O problemah ispol'zovaniya paketov universal'nyh programm dlya resheniya zadach magnitostatiki // Defektoskopiya. 2018. № 11. P. 23—34.
2. Pechenkov A. N., Shcherbinin V.E. Nekotorye pryamyie i obratnyie zadachi tekhnicheskoy magnitostatiki. Ekaterinburg: Izd-vo UrO RAN, 2004. 177 p.
3. Savel'ev I.V. Sbornik voprosov i zadach po obshchej fizike. M.: Nauka, 1988. 288 p.
4. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. Tochnye formuly napryazhennosti magnitnogo polya vnutri i vne odnorodnogo ellipsoidal'nogo magnetika vo vneshnem odnorodnom v oblasti magnetika pole // Defektoskopiya. 2022. № 2. P. 51—63.
5. Netrebko N.V., Nikolaev I.P., Polyakova M.S., Shmal'gauzen V.I. Elektrichestvo i magnetizm. M.: Izd-vo VMiK MGU, 2006. 327 p.
6. Meledin G.V., Cherkasskij V.S. Elektrodinamika v zadachah. Chast' 1. Novosibirsk: Izd. NGU, 2003, 227 p.
7. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. Primenenie osnovnogo uravneniya magnitostatiki k zadacham magnitnoj tolshchinometrii. Chast' 2. // Defektoskopiya. 2014. № 10. P. 3—17.
8. Grechko L.G., Sugakov V.I., Tomasevich O.F., Fedorchenko A.M. Sbornik zadach po teoreticheskoy fizike. M.: Vysshaya shkola, 1984. 319 p.
9. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. Obratnaya zadacha magnitostatiki v polyah насыщения // Defektoskopiya. 2019. № 10. P. 35—44.
10. Matveev A.N. Elektrichestvo i magnetizm. M.: Vysshaya shkola, 1983. 463 p.
11. Tatur T.A. Osnovy teorii elektromagnitnogo polya. M.: Vysshaya shkola, 1989. 271 p.
12. Nerazrushayushchij kontrol' i diagnostika. Pod red. Klyueva V.V. M.: Mashinostroenie, 1995. 487 p.
13. Antonov L.I., Dedenko L.G., Matveev A.N. Metodika resheniya zadach po elektrichestvu. M.: Izd-vo MGU, 1982. 168 p.

14. *Dyakin V.V.* Matematicheskie osnovy klassicheskoy magnitostatiki. Ekaterinburg: RIO UrO RAN, 2016. 403 p.
15. *Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya.* Odin podhod k resheniyu osnovnogo uravneniya magnitostatiki dlya sluchaya neodnorodnyh magnetikov // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. 2016. T. 187. № 1. P. 88—103.
16. *Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya.* K resheniyu zadachi magnitostatiki v sluchae zavisimosti magnitnoj pronicaemosti ot koordinat // Defektoskopiya. 2015. № 9. P. 38—48.
17. *Ahizer A.I.* Obshchaya fizika. Elektricheskie i magnitnye yavleniya. Kiev: Naukova dumka, 1981. 471 p.
18. *Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya.* Raschet napryazhennosti magnitnogo polya vnutri i vne beskonechnogo cilindra, pomeshchennogo v proizvol'noe vneshnee pole // Defektoskopiya. 2024. № 3. P. 33—46.
19. *Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya.* Raschet napryazhennosti magnitnogo polya ot polubeskonechnogo cilindra, pomeshchennogo v proizvol'noe vneshnee pole // Defektoskopiya. 2023. № 5. P. 32—44.
20. *Hizhnyak N.A.* Integral'nye uravneniya makroskopicheskoy elektrodinamiki. Kiev: Naukova dumka, 1986. 279 p.