

ОБРАТНЫЙ РАСЧЕТ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОИСТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ (НА ПРИМЕРЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ)

© 2024 г. А.Н. Тиратурян^{1,*}

¹Донской государственный технический университет, Россия 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: *tiraturjan@list.ru

Поступила в редакцию 28.05.2024; после доработки 01.07.2024
Принята к публикации 12.07.2024

Статья посвящена совершенствованию метода обратного расчета модулей упругости слоев дорожных одежд автомобильных дорог в динамической постановке, предполагающего анализ характеристик деформирования во временной области. Для решения этой проблемы математическая модель слоистого полупространства адаптирована к вычислению амплитудно-временных характеристик деформирования на поверхности слоистой среды и построению соответствующих им чаш максимальных значений вертикальных перемещений. Выполнена корректировка расчетных значений вертикальных перемещений относительно зарегистрированных экспериментальных перемещений в полевых условиях. Продемонстрировано соответствие между итоговыми значениями максимальных вертикальных перемещений, амплитудно-временных характеристик на поверхности слоистой среды и формами и площадями динамических петель гистерезиса на поверхности исследуемой среды, достигнутое при корректировке расчетных характеристик относительно экспериментальных. Впервые при решении задачи определения механических параметров слоистой среды в качестве одного из параметров, их характеризующих, предложено рассматривать динамические петли гистерезиса и соответствие их расчетных и экспериментальных площадей как критерий адекватности достигнутого результата.

Ключевые слова: обратная задача, модули Юнга, амплитудно-временная характеристика перемещений, петля гистерезиса, установка ударного нагружения.

BACKCALCULATION OF ELASTIC MODULI OF ELEMENTS OF LAYERED HALFSPACE ON THE BASIS OF DYNAMIC DEFORMATION ANALYSIS (BY THE EXAMPLE OF HIGHWAYS)

© 2024 A. N. Tiraturyan^{1,*},

¹Don State Technical University, 344000, Rostov-on-Don, Gagarin Square, 1
E-mail: *tiraturjan@list.ru

The paper is devoted to the improvement of the method of inverse calculation of elasticity moduli of layers of motorway pavements in the dynamic setting, which involves the analysis of deformation characteristics in the time domain. To solve this problem, the mathematical model of a layered half-space is adapted to the calculation of amplitude-time characteristics of deformation on the surface of the layered medium, and the construction of the corresponding bowls of maximum values of vertical displacements. Adjustment of the calculated values of vertical displacements with respect to the registered experimental displacements in the field was performed. The correspondence between the final values of maximum vertical displacements, amplitude and time characteristics on the surface of the layered medium, and the shapes and areas of dynamic hysteresis loops on the surface of the investigated medium, achieved by adjusting the calculated characteristics relative to the experimental ones, has been demonstrated. For the first time in solving the problem of determining the mechanical parameters of a layered medium, it was proposed to consider dynamic hysteresis loops as one of the parameters characterising them and the correspondence of their calculated and experimental areas as a criterion of the adequacy of the achieved result.

Keywords: inverse problem, Young's moduli, amplitude-time characteristic of displacements, hysteresis loop, falling weight deflectometer.

DOI: 10.31857/S0130308224080059

ВВЕДЕНИЕ

Стадия эксплуатации автомобильной дороги является одним из важнейших этапов ее жизненного цикла. Неверно принятые решения в части выбора мероприятий по ее ремонту и восстановлению на этапе эксплуатации могут привести к значительным финансовым потерям и уменьшению срока ее эксплуатации. Принятие подобных решений на основе анализа структурного состояния дорожной одежды автомобильных дорог с применением методов неразрушающего контроля стало одним из основных трендов в практике как Российской, так и мировой диагностики.

В основной своей части теоретической основой применяемых методов неразрушающего контроля структурного состояния автомобильных дорог являются обратные коэффициентные

задачи [1—3]. К этому классу задач относят задачи, в которых по функциям перемещений, напряжений или деформации $u(t)$, $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ восстанавливаются коэффициенты исходных определяющих уравнений.

В дорожной отрасли основной исследуемой характеристикой как правило выступает характеристика вертикальных перемещений $u(R, t)$, регистрируемая на поверхности автомобильной дороги в ходе ее эксплуатации с использованием специализированных установок динамического нагружения, оснащенных различным количеством датчиков геофонов, расположенных на расстоянии R от точки ударного нагружения. Группа методов, решающих задачу определения модулей Юнга материалов конструктивных слоев дорожных одежд, получила название Backcalculation [4—9].

В привязке к задачам неразрушающего контроля в дорожной отрасли метод Backcalculation был детально разработан в части постановки и решения статической прямой задачи определения напряженно-деформированного состояния слоистой среды и методов регуляризации полученного решения прямой задачи относительно экспериментальной характеристики, регистрируемой в полевых условиях [10—12]. При этом основной упор делался именно на совершенствование процедур численной регуляризации, так как до текущего момента вопрос устойчивости процедуры численной корректировки и единственности получаемых решений остается одним из самых «тонких» мест данной процедуры [13—15].

Тем не менее в 2017 г. был выпущен документ «Enhanced Analysis of Falling Weight Deflectometer Data for Use With Mechanistic-Empirical Flexible Pavement Design and Analysis and Recommendations for Improvements to Falling Weight Deflectometers» [16] во многом обобщивший существующий на тот момент передовой опыт статического и динамического обратного расчета. В нем был предложен один из вариантов перехода от дискретной характеристики — чаще прогибов, характеризующей только максимальные значения амплитудно-временной характеристики перемещений, к непрерывной — амплитудно-временной характеристике перемещений. В рамках данного документа были рассмотрены два основных случая: модели LAVA и LAVAN. Модель LAVA предполагает, что вязкоупругие свойства характерны только для слоев асфальтобетона, а нижележащие слои работают исключительно как упругие. LAVAN предполагает возможность задания аналогичных характеристик и для слоев оснований, дополнительных слоев оснований и слоев грунта земляного полотна. Но при сравнении данного решения с замеренными в полевых условиях амплитудно-временными характеристиками и другими аналогичными моделями в ряде случаев были установлены неточности и ограничения, связанные с разными подходами и оставляющие простор для дальнейших исследований в данном направлении [17—21].

В Российской практике данная методика также развивается. Основной подход к реализации процедуры «обратного» расчета базируется на трудах М.Г. Селезнева, А.А. Ляпина, Е.В. Глушкова [22—24]. В работах [25, 26] проведены исследования, позволяющие в значительной степени повысить точность и устойчивость соответствующих методов за счет более оптимальных процедур численного интегрирования.

Целью данной статьи является разработка и реализация подхода к определению модулей упругости элементов слоистых сред на стадии эксплуатации (на примере автомобильных дорог), обеспечивающего соответствие между экспериментальными и расчетными характеристиками деформирования, такими как амплитудно-временная характеристика перемещений и динамические петли гистерезиса, регистрируемыми при динамическом нагружении измерительными установками на различном срок их эксплуатации.

Таким образом, поставленная в рамках данной статьи задача является актуальной, научно и практически значимой, а совершенствование методов обратного расчета позволит в значительной степени повысить точность и качество принимаемых решений.

МЕТОДЫ

В наиболее общем случае реализация метода обратного расчета модулей Юнга слоев дорожной одежды предполагает три основных этапа:

- регистрацию характеристик отклика слоистой среды на ударное воздействие, воспроизводимое установками динамического нагружения в ходе натурных испытаний на определенном этапе эксплуатации объекта;
- построение расчетных характеристик отклика на поверхности слоистой среды с помощью математической модели при начальных (проектных) значениях механических параметров слоев.
- корректировка расчетных характеристик отклика относительно экспериментальных (до достижения между ними соответствия в заданных пределах) и определение «эксплуатационных» значений параметров, при которых это соответствие достигается.

В качестве экспериментального оборудования для неразрушающего контроля состояния дорожных одежд на автомобильных дорогах основное распространение получили установки ударного нагружения FWD, представляющие собой прицеп с оборудованным на нем механизмом ударного нагружения и балкой, оснащенной датчиками-геофонами, регистрирующими вертикальную компоненту скорости колебаний точек покрытия, преобразуемую впоследствии в перемещение. Механизм ударного нагружения позволяет воспроизводить нагрузку величиной от 2 до 130 кН с настраиваемым временем импульса.

Непосредственно, процесс измерений предполагает серию сбросов груза с регистрацией вертикальных компонент перемещений на поверхности покрытия, формирующих так называемую «чашу прогиба».

Обработка результатов экспериментальных измерений предполагает последующее применение математической модели, позволяющей осуществить построение аналогичной расчетной чаши прогибов по проектным или нормативным параметрам дорожной одежды, и с применением численных методов оптимизации осуществить корректировку расчетной чаши относительно экспериментальной, соответствующим образом подобрав механические параметры слоев дорожной одежды. Основным параметром, определяющим структурное состояние слоев дорожной одежды в дорожной практике, выступает модуль Юнга (модуль упругости) слоя.

Вместе с тем динамическая схема испытаний накладывает ограничения на расчетные методы и модели, так как требует не только применения эффективных вычислительных алгоритмов, позволяющих строить решения задачи определения динамического напряженно-деформированного состояния слоистой среды, но и корректного подбора формы импульса ударного нагружения, соответствующего импульсу, непосредственно приложенному к покрытию на момент проведения полевых испытаний.

В рамках данных исследований динамическая задача решалась в следующей постановке. Рассматривается многослойное полупространство, на поверхность которого прикладывается нагрузка, распределенная по круговому отпечатку. Слои характеризуются модулями Юнга, коэффициентами Пуассона, плотностями и толщинами. Общий вид слоистого полупространства представлен на рис. 1.

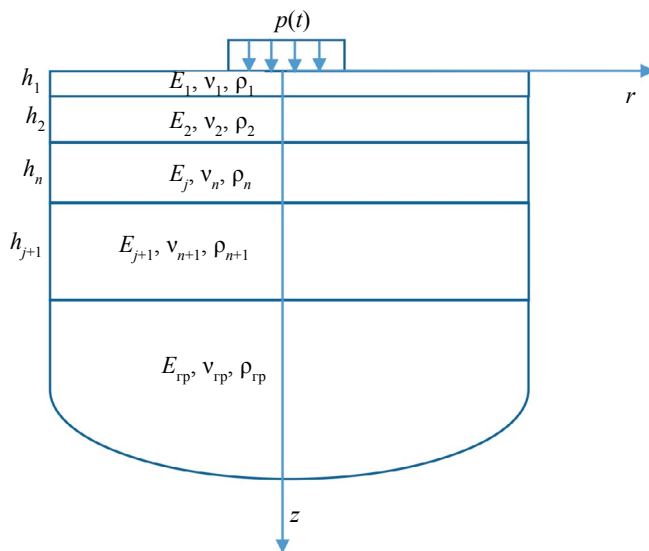


Рис. 1. Слоистая среда, описывающая конструкцию дорожной одежды автомобильной дороги.

Основные допущения, принятые в рамках данной модели:

- все слои являются изотропными;
- слой грунта земляного полотна моделируется в виде упругого полупространства, не ограниченного по глубине, а остальные слои не ограничены по ширине;
- нагрузка распределена равномерно по круговому отпечатку.

При реализации данной модели в упругой постановке механические параметры среды характеризуются модулями Юнга и коэффициентами Пуассона. В дальнейшем в рамках решения обратной задачи принимается допущение, что в процессе эксплуатации изменяются только модули Юнга слоев рассматриваемой конструкции. Коэффициенты Пуассона характеризуются постоянными значениями. При переходе к вязкоупругой постановке начальные значения моду-

лей Юнга задаются в комплексном виде либо задаются проектные значения модулей Юнга и тангенсы углов потерь продольных и поперечных волн.

Динамическое деформирование среды описывается системой уравнений Ламе, представленной в виде:

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r}) - \frac{\theta_{j1}^2}{\theta_{j2}^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r}) + \theta_{j1}^2 \mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

$\theta_{j1}^2 = \omega^2 / V_{pj}^2$, $\theta_{j2}^2 = \omega^2 / V_{sj}^2$ — приведенные частоты колебаний; $V_{pj} = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j) / \rho_j}$, $V_{sj} = \sqrt{\mu_j / \rho_j}$ — скорости распространения продольных и поперечных волн в j -й среде.

При решении задачи в вязкоупругой постановке приведенные частоты колебаний становятся комплексными. Диссипация энергии вводится путем учета тангенсов углов потерь продольных и поперечных волн, определяемых как

$$\operatorname{tg} \gamma_p = \frac{\operatorname{Im} \theta_p^2}{\operatorname{Re} \theta_p^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma_s = \frac{\operatorname{Im} \theta_s^2}{\operatorname{Re} \theta_s^2}. \quad (2)$$

Комплекснозначное представление приведенных частот колебаний возможно при применении модели комплексного модуля Юнга вида:

$$E(\omega) = \frac{E}{1 + m_1(i\omega\eta)^{-m_2} + (i\omega\eta)^{-m_3}}, \quad (3)$$

где E — мгновенный модуль упругости, МПа; k_1, k_2, k_3 — эмпирические коэффициенты, подбираемые в ходе лабораторных испытаний слоев асфальтобетона; ω — циклическая частота колебаний; η — параметр вязкости асфальтобетона, также определяемый по данным лабораторных испытаний.

Решение системы уравнений (2) строится с применением интегрального преобразования Фурье и принципа предельного поглощения. Детально принципы решения данных задач изучены и изложены как для случая упругого полупространства, так и слоистых сред в трудах [21—25]. Решение нестационарной задачи динамики в рамках данной задачи осуществляется путем применения метода дискретного гармонического анализа позволяющего построить нестационарное решение в виде набора решений для установившихся колебаний.

Перемещения $u_{r,z}(r, z, t)$ на поверхности всей конструкции и в каждом слое отыскиваются методом дискретного гармонического анализа путем разложения данных функций в ряд Фурье:

$$u_{r,z}^{(M)}(r, z, t) = \sum_{k=1}^M p_k \left\{ \begin{aligned} & -\cos \eta_k \operatorname{Im} [U_{r,z}(r, z, \omega_k) \exp(-i\omega_k t)] + \\ & + \sin \eta_k \operatorname{Re} [U_{r,z}(r, z, \omega_k) \exp(-i\omega_k t)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

через коэффициенты разложения p_k импульса нагрузки $p(t)$ в классе периодических, финитных на отрезке $t \in D = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} + t_{\text{имп}} \right]$ функций:

$$p_k = \int_0^t \sin(\omega_k t + \eta_k) p(t) dt.$$

Здесь $\eta_k = 0,5 \cdot k \cdot \pi \cdot T / (T + t_{\text{имп}})$, $\omega_k = k\pi / (T + t_{\text{имп}})$; T — необходимое предельное время наблюдения за процессом до его затухания.

Функции $U_{r,z}(r, z, \omega)$ представляют собой решения задачи о стационарных колебаниях (с частотой ω) нормальной поверхностной нагрузки, распределенной по площади круга радиуса R для уравнений (1) с преобразованной для этого случая правой частью.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Реализация динамического обратного расчета осуществлялась для слоистой среды, представленной конструкцией дорожной одежды со следующими параметрами (табл. 1).

Таблица 1

Расчетные характеристики тестовой конструкции дорожной одежды автомобильной дороги

Слой	Толщина, см	Модуль Юнга (начальные значения), МПа	Коэффициент Пуассона
Асфальтобетон	20	2700	0,30
Слой основания (щебень фракционированный)	20	450	0,27
Дополнительный слой основания (щебеночно-песчаная смесь)	43	260	0,27
Земляное полотно (суглинок тяжелый)		47	0,35

Данная конструкция эксплуатируется на протяжении 7 лет с момента окончания строительства и характеризуется очевидным ухудшением жесткостных характеристик, проявляющихся на поверхности в виде дефектов покрытия — продольных и поперечных трещин, а также локальных сеток трещин. Прямое определение модулей Юнга слоев для эксплуатируемых конструкций в ходе разрушающего контроля не представляется возможным, так как для этих целей отсутствует лабораторное оборудование и схемы испытаний, и единственным путем получения фактических значений модулей Юнга для таких конструкций является выполнение неразрушающего контроля, предполагающего решение обратной задачи по восстановлению механических параметров слоистой среды, эксплуатируемой длительное время.

На поверхности данной конструкции были проведены экспериментальные измерения вертикальных перемещений с использованием установки ударного нагружения FWD.

Приближение расчетной формы импульса к экспериментальной было достигнуто за счет функции пилообразного сигнала, разложенного на 30 гармоник. Соответствие фактического импульса нагружения расчетному значению показано на рис. 2.

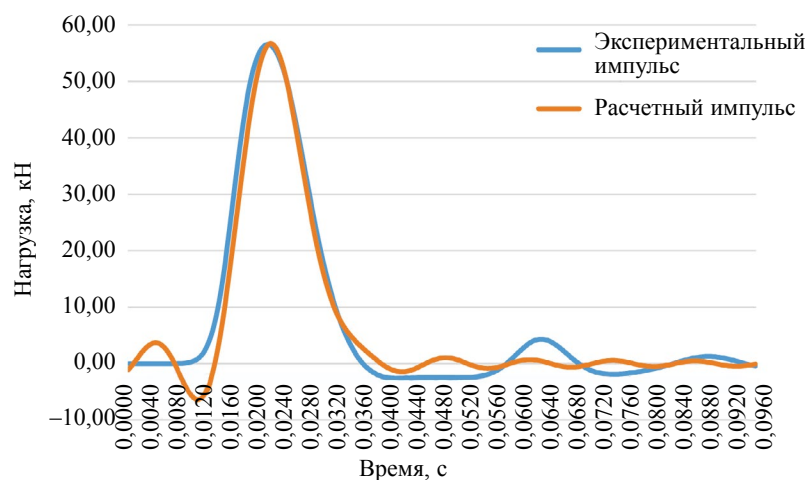


Рис. 2. Соответствие формы экспериментального импульса установки ударного нагружения расчетному импульсу.

Ниже представлено сопоставление расчетной и экспериментальной амплитудно-временной характеристики перемещений на поверхности покрытия (рис. 3). Как видно, при начальных значениях модулей упругости слоев дорожной одежды расчетная и экспериментальная формы амплитудно-временных характеристик деформирования значительно отличаются. Меньшие значения вертикальных перемещений на расчетной амплитудно-временной характеристике явно демонстрируют необходимость снижения модулей упругости конструктивных слоев дорожных одежд. В ходе вычислительного эксперимента, осуществляемого с применением метода оптимизации Левенберга—Марквардта, описанной для подобного класса задач в документе ГОСТ Р 59918—2021, было достигнуто удовлетворительное соответствие между формами расчетной и экспериментальной амплитудно-временных характеристик. В табл. 2 приведены результаты расчета модулей упругости слоев дорожной одежды, позволяющие достичь

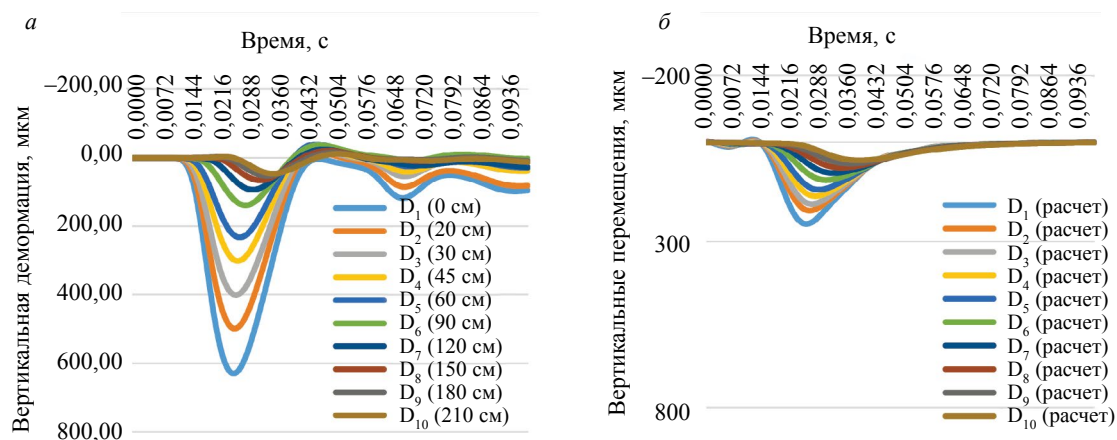


Рис. 3. Сопоставление экспериментальной и расчетной амплитудно-временных характеристик деформирования на поверхности слоистой среды (D_i — номер датчика (точки), в которой определяется амплитудно-временная характеристика).

Т а б л и ц а 2

Начальные и расчетные значения модулей упругости слоев асфальтобетона после корректировки

Начальные значения модулей Юнга до корректировки, МПа	Расчетные значения модулей Юнга после корректировки, МПа
2700	1043
450	100
240	127
47	82

хорошего соответствия как пиковых значений экспериментальной амплитудно-временной характеристики деформирования ее расчетной форме, так и в целом обеспечить хорошее соответствие расчетной и экспериментальной амплитудно-временных характеристик во всей временной области (рис. 4).

Также для дополнительного контроля адекватности полученных результатов было осуществлено сопоставление расчетных и экспериментальных динамических петель гистерезиса на

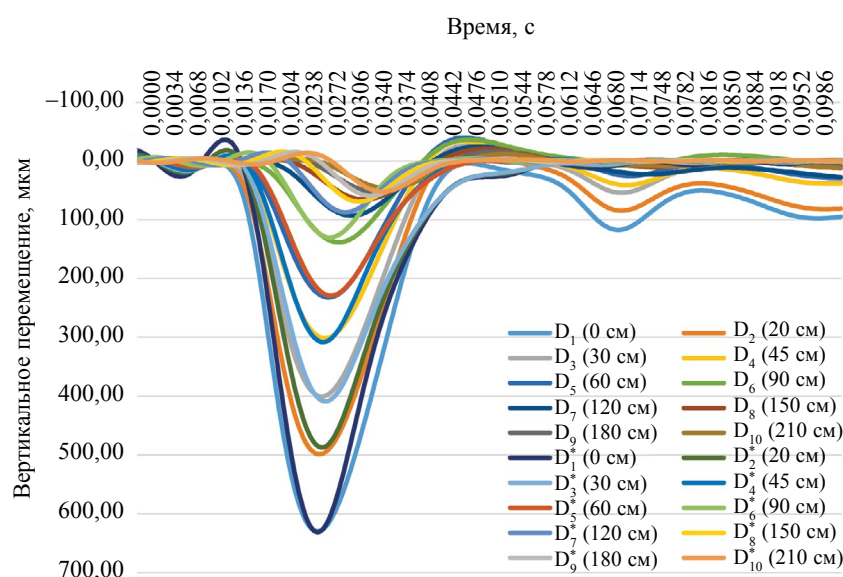


Рис. 4. Сопоставление экспериментальной и расчетной амплитудно-временных характеристик вертикальных перемещений после проведения корректировки (рядами D_i^* обозначены расчетные амплитудно-временные характеристики).

поверхности слоистой среды. Критерием соответствия в данном случае служит как визуальная схожесть их форм, так и количественный параметр в виде площади динамической петлей определяемый как

$$W = \int_0^t P(t)u(t)dt,$$

где W — площадь динамического гистерезиса, Дж/м³; $P(t)$ — временная характеристика импульса нагружения; $u(t)$ — амплитудно-временная характеристика деформирования.

Данная характеристика имеет физический смысл величины потерь энергии при ударном нагружении. В качестве количественного параметра соответствия расчетных и экспериментальных петлей динамического гистерезиса выступает погрешность в 10 % между величиной потерь энергии по каждому датчику. Результаты сопоставления приведены на рис. 5 и в табл. 3.

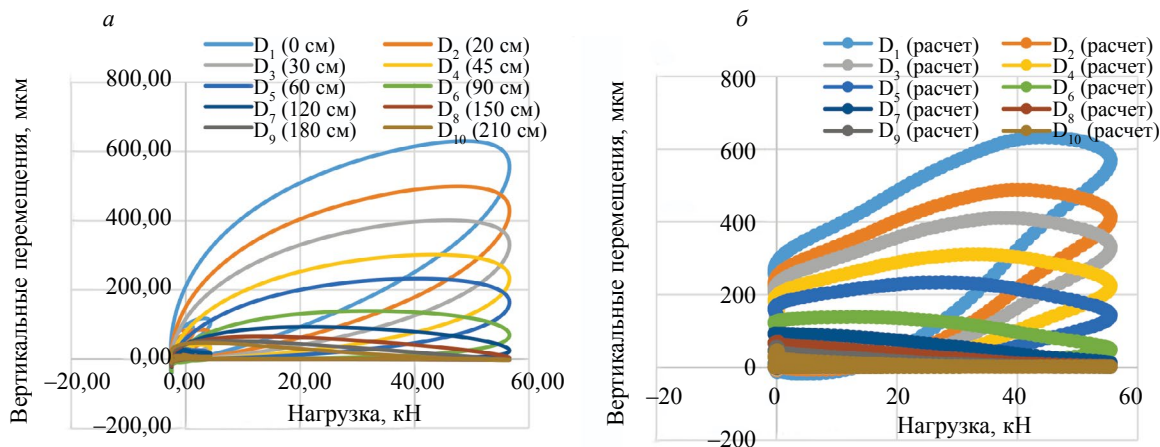


Рис. 5. Формы динамических петель гистерезиса, зарегистрированные на поверхности дорожной одежды с использованием установки ударного нагружения и рассчитанные с использованием математической модели после корректировки.

Таблица 3

Площади динамических петель гистерезиса, рассчитанные в ходе экспериментальных исследований и численного моделирования

	Площадь динамической петли, Дж/м ³									
	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇	D ₈	D ₉	D ₁₀
Экспериментальная	20,05	16,59	14,09	11,30	9,26	6,25	4,39	2,88	1,92	1,29
Расчетная	20,31	17,62	15,81	11,52	10,04	6,38	4,7	3,08	1,73	1,2

Примененная в рамках данного исследования реализация метода обратного расчета модулей упругости по ряду параметров отличается от уже известных решений. Так, в качестве модельного импульса в рамках данного исследования была применена пилообразная модель импульса нагружения, практически полностью соответствующая форме импульса нагружения, воспроизводимого установками ударного нагружения FWD. В основной части известных на текущий момент работ, касающихся развития метода динамического обратного расчета, применяется синусоидальная форма. В качестве количественного параметра соответствия расчетных и экспериментальных параметров в рамках данной работы предложено анализировать форму и площадь динамической петли гистерезиса. Данная характеристика обладает рядом преимуществ перед амплитудно-временной характеристикой, анализируемой на текущий момент в большинстве зарубежных источников. Она интегрально отражает импульс нагружения и характеристики перемещений во временной области и во многом может служить наиболее эффективной формой отображения т.н. «полной чаши прогибов», т.е. процесса изменения вертикальных перемещений на поверхности покрытия автомобильной дороги за весь период наблюдения, а не только их пиковых значений в фиксированный момент времени. Также данный подход хорошо коррелирует с подходом, разработанным и изложенным автором в [26].

ВЫВОДЫ

Изложены концептуальные основы динамического метода обратного расчета и продемонстрирована возможность определения модулей упругости конструктивных слоев дорожных одежд автомобильных дорог, обеспечивающая возможность достижения соответствия как между пиковыми значениями амплитудно-временной характеристики перемещений на поверхности покрытия, так и обеспечения их соответствия во всей временной области.

Впервые предложено в качестве количественного параметра соответствия расчетных и экспериментальных параметров деформирования анализировать форму и площадь динамической петли гистерезиса, регистрируемой при ударном воздействии и рассчитываемой в ходе численного моделирования. Отмечено, что данная характеристика во многом превосходит традиционно применяемую при динамической постановке амплитудно-временную характеристику перемещений, так как интегрально отражает изменения импульса нагружения и вертикальных перемещений во временной области и полностью описывает процесс деформирования на поверхности конструкции при ударном нагружении.

Предложена математическая модель и продемонстрирована ее эффективность на примере эксплуатируемого участка автомобильной дороги, для которого по данным натурных испытаний рассчитаны значения модулей Юнга, обеспечивающие практически полное соответствие экспериментально зарегистрированных параметров деформирования (импульс нагружения, амплитудно-временная характеристика нагружения, пиковые значения вертикальных амплитуд перемещений, форма динамической петли гистерезиса, площадь динамической петли) результатам численного моделирования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00110 (<https://rscf.ru/project/24-29-00110/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону, Таганрог: Южный федеральный университет, 2022. 178 с.
2. Ватульян А.О. К теории обратных задач в линейной механике деформируемого тела // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. № 6. С. 909—916.
3. Ватульян А.О., Гукасян Л.С., Недин Р.Д. О задаче Коши в теории коэффициентных обратных задач для упругих тел // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. № 2. С. 31—40.
4. Wu C. Asphalt pavement modulus backcalculation using surface deflections under moving loads // Computer — Aided Civil and Infrastructure Engineering. 2020. V. 35. No. 11. P. 1246—1260.
5. Nakhaei M., Timm D.H. A new methodology to improve backcalculation of flexible pavements with stabilized foundations // Construction and Building Materials. 2023. V. 368. P. 130405.
6. Elbagalati O., Mousa M., Elseifi M.A., Gaspard K., Zhang Z. Development of a methodology to backcalculate pavement layer moduli using the traffic speed deflectometer // Canadian Journal of Civil Engineering. 2018. V. 45. No. 5. P. 377—385.
7. Chou Y.J., Lytton R.L. Accuracy and consistency of backcalculated pavement layer moduli // Transportation research record. 1991. V. 1293. P. 72—85.
8. Harichandran R.S. Modified Newton algorithm for backcalculation of pavement layer properties // Transportation Research Record. 1993. V. 1384. P. 15.
9. Bayrak M.B., Guclu A., Ceylan H. Rapid pavement backcalculation technique for evaluating flexible pavement systems // Proceedings of the Mid Continent Transportation Research Symposium, Iowa. 2005. C. 319—326.
10. Guzina B.B., Osburn R.H. Effective tool for enhancing elastostatic pavement diagnosis // Transportation Research Record. 2002. V. 1806. No. 1. P. 30—37.
11. Fu G. Xue C., Zhao Y., Cao D., Alae M. Accuracy evaluation of statically backcalculated layer properties of asphalt pavements from falling weight deflectometer data // Canadian Journal of Civil Engineering. 2020. V. 47. No. 3. P. 317—325.
12. Lee Y.H., Ker H.W., Lin C.H., Wu P.H. Study of backcalculated pavement layer moduli from the LTPP database // Journal of Applied Science and Engineering. 2010. V. 13. No. 2. P. 145—156.
13. Sampei T., Matsui K., Inoue T. Comparative Study on Methods of Backcalculation for Pavement Structure // Doboku Gakkai Ronbunshu. 1992. V. 1992. No. 442. P. 237—240.
14. Gopalakrishnan K., Papadopoulos H. Reliable pavement backcalculation with confidence estimation // Scientia Iranica. 2011. V. 18. No. 6. P. 1214—1221.
15. Stubstad R.N., Jiang Y.J., Lukanen E.O. Review of the long-term pavement performance backcalculation results. United States. Federal Highway Administration. Office of Infrastructure Research and Development, 2006. № HRT-05-150.
16. Chatti K. Enhanced analysis of falling weight deflectometer data for use with mechanistic-empirical flexible pavement design and analysis and recommendations for improvements to falling weight deflectometers. Turner-Fairbank Highway Research Center, 2017. № FHWA-HRT-15-063.

17. Flores J.M., Lee H.J., Elipse C., Lee W., Kim K., Baek J. Dynamic backcalculation approach of deflections obtained from the rolling dynamic deflectometer: Fundamental theory // Journal of Transportation Engineering. Part B: Pavements. 2021. V. 147. No. 1. P. 04020089.
18. Wang Y., Zhao Y., Zhang M., Fu G. Influence of bedrock on the dynamic deflection response and dynamic back-calculation results of asphalt pavement: Insights from the numerical simulation of falling weight deflectometer tests // Construction and Building Materials. 2022. V. 330. P. 127252.
19. Chatti K., Kutay M. E., Lajnef N., Zaabar I., Varma S., Lee H. Enhanced analysis of falling weight deflectometer data for use with mechanistic-empirical flexible pavement design and analysis and recommendations for improvements to falling weight deflectometers. Turner-Fairbank Highway Research Center, 2017. № FHWA-HRT-15-063.
20. Nasr C. Development of Seed Variables Prediction Models for Use in Dynamic Backcalculation of FWD Data: Lebanese American University, 2022.
21. Madsen S.S., Levenberg E. Dynamic backcalculation with different load-time histories // Road Materials and Pavement Design. 2018. V. 19. No. 6. P. 1314—1333.
22. Beskopylny A., Lyapin A., Andreev V. Layered structures mechanical properties assessment by dynamic tests // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2017. V. 117. P. 00018.
23. Тиратурян А.Н., Ляпин А.А., Углова Е.В. Совершенствование неразрушающего метода определения механических характеристик элементов многослойных конструкций на примере дорожных одежд // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 1. С. 56—65. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.06
24. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
25. Бочкарев А.В., Землянухин А.И. Обратное вычисление послойных модулей упругости дорожных одежд // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2022. № 3 (94). С. 5—18.
26. Бочкарев А.В. Анализ надежности обратного расчета упругих параметров дорожных одежд // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. 2022. № 3 (33). С. 5.
27. Тиратурян А.Н., Углова Е.В., Ляпин А.А. Энергетический метод определения остаточного ресурса жестких дорожных одежд на стадии эксплуатации // Дефектоскопия. 2020. № 10. С. 71—80. DOI: 10.31857/S0130308220100073

REFERENCES

1. Vatulyan A.O. Coefficient inverse problems of thermomechanics. Rostov-on-Don, Taganrog: Southern Federal University, 2022. 178 p.
2. Vatulyan A.O. To the theory of inverse problems in linear mechanics of a deformable body // Applied Mathematics and Mechanics. 2010. V. 74. No. 6. P. 909—916.
3. Vatulyan A.O., Gukasyan L.S., Nedin R.D. On the Cauchy problem in the theory of coefficient inverse problems for elastic bodies // Vladikavkazskiy Mathematical Journal. 2016. V. 18. No. 2. P. 31—40.
4. Wu C. Asphalt pavement modulus backcalculation using surface deflections under moving loads // Computer — Aided Civil and Infrastructure Engineering. 2020. V. 35. No. 11. P. 1246—1260.
5. Nakhaei M., Timm D.H. A new methodology to improve backcalculation of flexible pavements with stabilized foundations // Construction and Building Materials. 2023. V. 368. P. 130405.
6. Elbagalati O., Mousa M., Elseifi M.A., Gaspard K., Zhang Z. Development of a methodology to backcalculate pavement layer moduli using the traffic speed deflectometer // Canadian Journal of Civil Engineering. 2018. V. 45. No. 5. P. 377—385.
7. Chou Y.J., Lytton R.L. Accuracy and consistency of backcalculated pavement layer moduli // Transportation research record. 1991. V. 1293. P. 72—85.
8. Harichandran R.S. Modified Newton algorithm for backcalculation of pavement layer properties // Transportation Research Record. 1993. V. 1384. P. 15.
9. Bayrak M.B., Guclu A., Ceylan H. Rapid pavement backcalculation technique for evaluating flexible pavement systems // Proceedings of the Mid Continent Transportation Research Symposium, Iowa. 2005. C. 319—326.
10. Guzina B.B., Osburn R.H. Effective tool for enhancing elastostatic pavement diagnosis // Transportation Research Record. 2002. V. 1806. No. 1. P. 30—37.
11. Fu G. Xue C., Zhao Y., Cao D., Alae M. Accuracy evaluation of statically backcalculated layer properties of asphalt pavements from falling weight deflectometer data // Canadian Journal of Civil Engineering. 2020. V. 47. No. 3. P. 317—325.
12. Lee Y.H., Ker H.W., Lin C.H., Wu P.H. Study of backcalculated pavement layer moduli from the LTPP database // Journal of Applied Science and Engineering. 2010. V. 13. No. 2. P. 145—156.
13. Sampei T., Matsui K., Inoue T. Comparative Study on Methods of Backcalculation for Pavement Structure // Doboku Gakkai Ronbunshu. 1992. V. 1992. No. 442. P. 237—240.
14. Gopalakrishnan K., Papadopoulos H. Reliable pavement backcalculation with confidence estimation // Scientia Iranica. 2011. V. 18. No. 6. P. 1214—1221.

15. *Stubstad R.N., Jiang Y.J., Lukanen E.O.* Review of the long-term pavement performance backcalculation results. United States. Federal Highway Administration. Office of Infrastructure Research and Development, 2006. № HRT-05-150.
16. *Chatti K.* Enhanced analysis of falling weight deflectometer data for use with mechanistic-empirical flexible pavement design and analysis and recommendations for improvements to falling weight deflectometers. Turner-Fairbank Highway Research Center, 2017. № FHWA-HRT-15-063.
17. *Flores J.M., Lee H.J., Elipse C., Lee W., Kim K., Baek J.* Dynamic backcalculation approach of deflections obtained from the rolling dynamic deflectometer: Fundamental theory // *Journal of Transportation Engineering. Part B: Pavements*. 2021. V. 147. No. 1. P. 04020089.
18. *Wang Y., Zhao Y., Zhang M., Fu G.* Influence of bedrock on the dynamic deflection response and dynamic back-calculation results of asphalt pavement: Insights from the numerical simulation of falling weight deflectometer tests // *Construction and Building Materials*. 2022. V. 330. P. 127252.
19. *Chatti K., Kutay M. E., Lajnef N., Zaabar I., Varma S., Lee H.* Enhanced analysis of falling weight deflectometer data for use with mechanistic-empirical flexible pavement design and analysis and recommendations for improvements to falling weight deflectometers. Turner-Fairbank Highway Research Center, 2017. № FHWA-HRT-15-063.
20. *Nasr C.* Development of Seed Variables Prediction Models for Use in Dynamic Backcalculation of FWD Data: Lebanese American University, 2022.
21. *Madsen S.S., Levenberg E.* Dynamic backcalculation with different load-time histories // *Road Materials and Pavement Design*. 2018. V. 19. No. 6. P. 1314—1333.
22. *Beskopylny A., Lyapin A., Andreev V.* Layered structures mechanical properties assessment by dynamic tests // *MATEC Web of Conferences*. EDP Sciences. 2017. V. 117. P. 00018.
23. *Tiraturyan A.N., Lyapin A.A., Uglova E.V.* Improvement of the nondestructive method for determining the mechanical characteristics of the elements of multilayer structures on the example of road pavements // *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2023. No. 1. P. 56—65. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.06
24. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.* Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media. Moscow: Nauka, 1989. 343 p.
25. *Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I.* Inverse calculation of layer-by-layer moduli of elasticity of road pavements // *Bulletin of Saratov State Technical University*. 2022. No. 3 (94). P. 5—18.
26. *Bochkarev A.V.* Reliability analysis of the inverse calculation of the elastic parameters of road pavements // *Avtomobil. Road. Infrastructure*. 2022. No. 3 (33). P. 5.
27. *Tiraturyan A.N., Uglova E.V., Lyapin A.A.* Energy method for determining the residual life of non-rigid road pavements at the operation stage // *Defectoscopya*. 2020. No. 10. P. 71—80. DOI: 10.31857/S0130308220100073