

УДК 517.5+004.434

## О ВЫЧИСЛЕНИИ ЛИНИЙ УРОВНЯ МНОГОЧЛЕНА НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. А. Д. Брюно<sup>a,\*</sup>, А. Б. Батхин<sup>a,b,\*\*</sup>, З. Х. Хайдаров<sup>c,\*\*\*</sup><sup>a</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
125047 Москва, Миусская пл., д. 4, Россия<sup>b</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141701 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д. 9, Россия<sup>c</sup>Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова  
140104 г. Самарканд, Университетский бул., д. 15, Узбекистан

\*E-mail: abruno@keldysh.ru

\*\*E-mail: batkhin@gmail.com

\*\*\*E-mail: zafarxx@gmail.com

Поступила в редакцию 05.07.2022 г.

После доработки 01.08.2022 г.

Принята к публикации 21.10.2022 г.

Демонстрируется применение метода вычисления расположения всех типов линий уровня вещественного многочлена на вещественной плоскости, теория которого основана на методах локального и глобального анализа средствами степенной геометрии и компьютерной алгебры. Подробно рассмотрены 3 нетривиальных примера вычисления линий уровня вещественных многочленов на вещественной плоскости. При этом используются следующие алгоритмы компьютерной алгебры: факторизация многочлена, вычисление базиса Гребнера, построение многоугольника Ньютона, изображение алгебраической кривой на плоскости. Показано, как преодолевать вычислительные трудности.

DOI: 10.31857/S0132347423020073, EDN: MFOETX

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Различные прикладные задачи предполагают построение линий уровня для двумерных скалярных полей. Соответствующее программное обеспечение использует различные вычислительные алгоритмы, которые хорошо справляются с ситуацией, когда у линии уровня нет особенностей. Наличие особенностей заставляет существенно уменьшать шаг разбиения и, соответственно, увеличивать объем вычислений. В статье подробно разбирается, как используя методы степенной геометрии и алгоритмы компьютерной алгебры можно радикально улучшить качество решения указанной задачи.

Пусть  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим вещественный многочлен  $f(X)$ . При постоянной  $c \in \mathbb{R}$  кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$

$$f(X) = c \quad (1.1)$$

является *линией уровня* многочлена  $f(X)$ .

Наша задача — описать все типы линий уровня многочлена  $f(X)$  на вещественной плоскости  $X \in \mathbb{R}^2$ .

В разделе 2 кратко изложена теория построения линий уровня вещественного многочлена на вещественной плоскости согласно [1] и [2]. В разделе 3 выписан многочлен 6-й степени от трех переменных  $x, y, z$ , возникший в задаче линейной устойчивости положения равновесия некоторой механической системы [3]. Нули этого многочлена описывают границу области устойчивости. Затем в разделах 4, 5 и 6 рассматриваются сечения этой границы плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  соответственно. На каждой из этих трех плоскостей вычисляются линии уровня соответствующих многочленов. При этом используются такие алгоритмы компьютерной алгебры как факторизация многочлена, вычисление базиса Гребнера, построение многоугольника Ньютона, изображение алгебраической кривой на плоскости.

### 2. ТЕОРИЯ МЕТОДА

#### 2.1. Основная теорема

Пусть  $C_* = \inf f(X)$  и  $C^* = \sup f(X)$  по  $X \in \mathbb{R}^2$ .

**Теорема 1.** *Имеется конечное множество критических значений  $c$ :*

$$C_* < c_1^* < c_2^* < \dots < c_m^* < C^*, \quad (2.1)$$

которым соответствуют критические линии уровня

$$f(X) = c_j^*, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

а для значений  $c$  из каждого из  $m + 1$  интервала

$$I_0 = (C_*, c_1^*), \quad I_j = (c_j^*, c_{j+1}^*), \quad I_m = (c_m^*, C^*), \quad (2.3)$$

$$j = 1, \dots, m - 1,$$

линии уровня топологически эквивалентны. Если  $C_* = c_1^*$  или  $C^* = c_m^*$ , то интервалы  $I_0$  или  $I_m$  отсутствуют.

Поэтому для выявления расположения всех линий уровня многочлена  $f(X)$  надо найти все критические значения  $c_j^*$ , изобразить  $m$  критических линий уровня (2.2) и по одной линии уровня для произвольного значения  $c$  из  $m + 1$  интервала (2.3). Способ вычисления этих линий уровня с помощью степенной геометрии описан в [1] и отчасти в [4, гл. I, § 2]. Более традиционный подход см. в [5, гл. I]. Локальное строение линий уровня многочлена рассматривалось в [4, гл. I, § 3]. Здесь некоторые результаты из [4, гл. I, § 3] дополнены.

## 2.2. Критические точки и критические кривые

Точка  $X = X^0$  называется *простой* для многочлена  $f(X)$ , если в ней отлична от нуля хотя бы одна из частных производных  $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2$ .

**Определение 1.** Точка  $X = X^0$  для многочлена  $f(X)$  называется *критической порядка  $k$* , если в точке  $X = X^0$  равны нулю все частные производные от  $f(X)$  до порядка  $k$ , т.е. все

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^i \partial x_2^j} (X^0) = 0, \quad 1 \leq i + j = l \leq k,$$

и отлична от нуля хотя бы одна частная производная порядка  $k + 1$ .

**Определение 2.** *Кривая*

$$g(X) = 0 \quad (2.4)$$

называется *критической* для многочлена  $f(X)$ , если

1. она лежит на какой-то линии уровня (1.1) и
2. на ней  $\partial f / \partial x_1 \equiv 0$ , или  $\partial f / \partial x_2 \equiv 0$ .

Значения постоянной  $c = f(X)$  в критических точках  $X = X^0$  и на критических линиях (2.4) назовем *критическими* и обозначим  $c_j^*$  согласно (2.1).

## 2.3. Локальный анализ линий уровня

В дальнейшем вблизи точки  $X = X^0 = (x_1^0, x_2^0)$  будем рассматривать аналитические обратимые замены координат

$$y_i = x_i^0 + \varphi_i(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0), \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

где  $\varphi_i$  – аналитические функции от  $X - X^0$ .

**Лемма 1** ([4, гл. I, § 3]). *Если точка  $X^0$  простая и в ней  $\partial f / \partial x_2 \neq 0$ , то существует замена (2.5), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = y_2 = c. \quad (2.6)$$

Она следует из теоремы о неявной функции.

Линии уровня (2.6) – это прямые, параллельные оси  $y_1$ .

Рассмотрим решения уравнения (1.1) вблизи критической точки  $X^0 = 0$  порядка 1. Тогда

$$f(X) = f_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots$$

Дискриминант  $\Delta$  выписанной квадратичной формы есть  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Лемма 2** ([4, гл. I, § 3]). *Если в критической точке первого порядка  $X^0 = 0$  дискриминант  $\Delta \neq 0$ , то существует замена (2.5), приводящая уравнение (1.1.) к виду*

$$f(X) = f_0 + \sigma y_1^2 + y_2^2 = c, \quad (2.7)$$

где  $\sigma = 1$  (если  $\Delta < 0$ ) или  $\sigma = -1$  (если  $\Delta > 0$ ).

Это двумерный вариант известной леммы Морса [6, гл. I, § 2].

**Лемма 3.** *Если в критической точке первого порядка  $X^0 = 0$  дискриминант  $\Delta = 0$ , то существует замена (2.5), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = f_0 + y_2^2 + \tau y_1^n = c, \quad (2.8)$$

где целое  $n > 2$  и число  $\tau \in \{-1, 0, +1\}$ .

Выражения (2.7) и (2.8) – это *нормальные формы* многочлена  $f(X)$  вблизи его критической точки первого порядка  $X^0 = 0$ .

Пусть теперь критическая точка  $X^0 = 0$  имеет порядок  $k > 1$ . Согласно [1, п. 5] соответствующая ей линия уровня либо не имеет ветвей, входящих в критическую точку  $X^0 = 0$ , либо имеет несколько таких ветвей.

В первом случае критическая линия уровня состоит из этой точки  $X^0 = 0$ , а остальные линии уровня являются замкнутыми кривыми вокруг нее и соответствуют одному знаку разности  $c - f(X^0)$ .

Во втором случае критическая линия уровня состоит из конечного числа ветвей разных крат-

ностей, входящих в критическую точку  $X^0 = 0$ . Они разбивают окрестность этой критической точки на криволинейные секторы. Остальные линии уровня заполняют эти секторы, оставаясь на некотором расстоянии от критической точки  $X^0 = 0$ . При этом в соседних секторах они соответствуют разным знакам разности  $c - f(X^0)$ , если разделяющая их ветвь имеет нечетную кратность, и одному знаку этой разности, если разделяющая их ветвь имеет четную кратность.

#### 2.4. Глобальный анализ линий уровня

Используемые в этом подразделе объекты степенной геометрии — многоугольник Ньютона  $\Gamma(f)$  многочлена  $f$ , ребро  $\Gamma_j^{(1)}$  многоугольника, его внешняя нормаль  $P_j^{(1)}$ , укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(1)}(X)$ , соответствующее ребру  $\Gamma_j^{(1)}$ , — подробно описаны в [1].

**Определение 3.** Пусть  $\Gamma_j^{(1)}$  — ребро многоугольника Ньютона многочлена  $g(X) = f(X) - c$ , которое имеет внешнюю нормаль  $P_j^{(1)} = (p_1, p_2)$  с одной или двумя положительными координатами  $p_i$  и соответствует укороченному многочлену  $\hat{g}_j^{(1)}(X)$ . Тогда пересечение корня  $x_1 = A\tau^{p_1}$ ,  $x_2 = B\tau^{p_2}$  (где постоянные  $A, B \in \mathbb{R}$ ) укороченного многочлена  $\hat{g}_j^{(1)}(X)$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  с бесконечностью  $x_i = \pm\infty$  назовем *бесконечной точкой пересечения*. Кратность корня — это *кратность* этой точки.

**Лемма 4.** Если все ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  из определения 3 не содержат точки  $(q_1, q_2) = 0$  и у многочлена  $f(X)$  все бесконечные точки пересечения имеют кратность один, то для всех значений постоянной  $c$  из одного из  $t + 1$  интервалов (2.3) линии уровня (1.1) топологически эквивалентны.

### 3. БОЛЬШОЙ МНОГОЧЛЕН

#### 3.1. Описание

В работе [3] рассматривалась устойчивость в линейном приближении стационарного решения одной многопараметрической системы Гамильтона. В процессе исследования возникла необходимость изучить нули некоторого многочлена  $g(x, y, z)$  6-го порядка от трех переменных  $x, y, z$ :

$$g(x, y, z) = 4x^5y - 4x^5z + 48x^4y^2 - 92x^4yz + 40x^4z^2 + 344x^3y^3 - 904x^3y^2z + 736x^3yz^2 - 192x^3z^3 + 1200x^2y^4 - 4376x^2y^3z +$$

$$+ 5360x^2y^2z^2 - 2752x^2yz^3 + 512x^2z^4 + 2500xy^5 - 11700xy^4z + 19168xy^3z^2 - 14656xy^2z^3 + 5376xyz^4 - 768xz^5 - 7500y^5z + 21800y^4z^2 - 25408y^3z^3 + 14848y^2z^4 - 4352yz^5 + 512z^6 + 2x^5 + 82x^4y - 64x^4z + 740x^3y^2 - 1152x^3yz + 456x^3z^2 + 3156x^2y^3 - 6784x^2y^2z + 5144x^2yz^2 - 1344x^2z^3 + 6490xy^4 - 14464xy^3z + 13816xyz^2 - 6720xyz^3 + 1344xz^4 + 20250y^5 - 45120y^4z + 37928y^3z^2 - 14976y^2z^3 + 2880yz^4 - 256z^5 + 13x^4 + 412x^3y - 344x^3z + 2782x^2y^2 - 5176x^2yz + 2200x^2z^2 + 828xy^3 - 12936xy^2z + 15888xyz^2 - 5088xz^3 - 37827y^4 + 67608y^3z - 35496y^2z^2 + 2016yz^3 + 1872z^4 + 64x^3 + 1728x^2y - 1152x^2z + 15552xy^2 - 20736xyz + 6912xz^2 + 46656y^3 - 93312y^2z + 62208yz^2 - 13824z^3.$$

Здесь исследуем линии уровня на трех нулевых сечениях поверхности  $g(x, y, z) = 0$ , т. е. для функций  $f_1(y, z) = g(x, y, z)|_{x=0}$ ,  $f_2(x, z) = g(x, y, z)|_{y=0}$  и  $f_3(x, y) = g(x, y, z)|_{z=0}$ .

#### 3.2. Вычисление критических значений, точек и кривых

Учитывая полиномиальный характер задачи, вычисление критических значений  $c_j^*$  и соответствующих им критических точек и кривых удобно проводить с использованием алгоритмов компьютерной алгебры, в первую очередь, вычисляя базисы Гребнера соответствующих идеалов с подходящими мономиальными порядками (подробнее, см. [7, гл. 2, 3]).

Идеал, определяющий критические точки и кривые, состоит из многочлена  $f(X) - c$  и его частных производных по  $X$ :

$$\mathcal{J} = \left\{ f(X) - c, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}. \quad (3.2)$$

Как следует из основной теоремы, число критических значений  $c_j^*$  конечно. Тогда базис Гребнера  $\mathcal{GB}\mathcal{J}$  идеала (3.2) для чисто лексикографического порядка  $c \succ x_1 \succ x_2$  содержит полином  $h(c)$ , зависящий только от переменной  $c$ . Среди веще-

ственных корней этого полинома следует искать критические значения  $c_j^*$ , для которых имеются вещественные критические линии уровня.

Базис Гребнера, задаваемый идеалом  $\mathcal{GB}\mathcal{F}$ , имеет размерность либо 0, либо 1. В первом случае критических кривых нет, ибо идеал  $\mathcal{GB}\mathcal{F}$  нульмерен. Во втором случае некоторым критическим значениям  $c_j^*$  соответствуют критические кривые.

Вычисление и исследование идеала  $\mathcal{GB}\mathcal{F}$  удобно выполнять с использованием какой-либо системы компьютерной алгебры, как свободно распространяемой (например, SymPy, Sage, Singular, Macaulya2) или коммерческой (например, Maple, Mathematica, Magma). В любой из них имеются процедуры построения базисов Гребнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры для проверки нульмерности идеала, вычисления его размерности и др. Все вычисления в последующих разделах работы были выполнены в СКА Maple с использованием пакета Groebner. Отметим, что имеется пакет PolynomialIdeals, в состав которого входят процедуры примарной декомпозиции или декомпозиции идеала на его нульмерные подидеалы и другие, но, во-первых, все процедуры этого пакета реализуются с помощью процедур пакета Groebner, а во-вторых, авторы предпочитают детально контролировать процесс вычислений.

Используется следующий порядок вычислений.

1. Составляется идеал  $\mathcal{F}$  и для него вычисляется базис Гребнера  $\mathcal{GB}\mathcal{F}$  с чисто лексикографическим порядком  $c \succ x_1 \succ x_2$  с применением процедуры Basis пакета Groebner.

2. Базис  $\mathcal{GB}\mathcal{F}$  позволяет найти все критические значения  $c_j^*$  с помощью полинома  $h(c)$  либо точно, либо в виде алгебраических чисел. Такой полином автоматически определяется для указанного выше лексикографического порядка, или с помощью процедуры UnivariatePolynomial и, по возможности, раскладывается на множители.

3. Среди критических значений  $c_j^*$  отбираются те, которым соответствуют вещественные критические точки и критические кривые. Для этого для каждого множителя  $h_j(c)$  многочлена  $h(c)$  вычисляется новый базис Гребнера на основе ранее вычисленного базиса и этого множителя, но уже с другими лексикографическими порядками:  $c \prec x_1 \prec x_2$  и  $c \prec x_2 \prec x_1$ . Это есть некоторый вариант примарной декомпозиции, который позволяет разделить многочлены только от  $x_1$  или от  $x_2$ , задающие координаты критических точек.

4. Теперь для каждого примарного идеала следует найти его множество вещественных нулей.

Если критическое значение  $c_j^*$  принадлежит  $\mathbb{Q}$ , то все вычисления выполняются точно. Если же оно есть иррациональное алгебраическое число, то можно поступить так, как описано в [1, п. 5.6], т.е. проводить все вычисления по модулю идеала, определяющего критическое значение и критическую точку. В данной работе вычисления иррациональных критических значений и иррациональных координат критических точек проводятся приближенно с повышенной точностью.

5. Вид нормальной формы (ВНФ) (2.7) или (2.8) каждой критической точки определяется с использованием дискриминанта  $\Delta$  квадратичной формы разложения функции  $f(X)$  вблизи нее согласно леммам 2 и 3. Разложения вещественных ветвей линий уровня в окрестности каждой критической точки и на бесконечности вычисляются с использованием алгоритмов степенной геометрии. В частности, в СКА Maple удобно выполнять такие вычисления с помощью пакета PolyhedralSets, а также пакета процедур из пакета algcurves.

6. Проведенные вычисления позволяют выполнить построение эскизов линий уровня так, как это описано в [2].

### 3.3. Замечания об обозначениях

Последующие разделы работы содержат большое число различных объектов, поэтому дадим здесь краткое описание принятой нотации.

- Каждое из нулевых сечений поверхности, заданной многочленом (3.1), обозначается символом  $f_j$ , где  $j$  принимает значения 1, 2, 3, соответствующие той переменной, которая полагается равной нулю. Многочлен, определяющий критические значения  $c_j^*$  обозначается  $h_j(c)$ , а его  $k$ -й множитель соответственно  $h_{jk}(c)$ .

- Для соответствующего многочлена  $f_j$  вычисляется его носитель и многоугольник Ньютона  $\Gamma(f_j)$ . Все ребра многоугольника нумеруются и обозначаются в тексте  $\Gamma_k^{(1)}$ , а соответствующий  $k$ -му ребру укороченный многочлен обозначается  $\hat{f}_k^{(1)}$ . Нумерация ребер и укороченных многочленов сквозная в пределах своего раздела. В силу технических трудностей на рисунках многоугольников Ньютона верхний индекс у  $k$ -го ребра  $\Gamma_k^{(1)}$  опускается. Поскольку в вычислениях используются только грани размерности один, то это не должно привести к путанице.

- Если многочлен  $f_j$  преобразуется, то результат его  $i$ -го преобразования обозначается  $_i f_j$ . При этом все соответствующие этому многочлену объекты степенной геометрии имеют соответствующий ле-

вый нижний индекс, т.е.  ${}_2\Gamma_3^{(1)}$  обозначает 3-е ребро многоугольника Ньютона многочлена, полученного на втором шаге преобразований, а  ${}_2\hat{f}_3^{(1)}$  – соответствующий этому ребру многочлен.

4. ПРИМЕР 1 ПРИ  $x = 0$

4.1. Критические значения

Рассмотрим вычисление линий уровня многочлена  $f_1(y, z) = g(x, y, z)|_{x=0}$ .

$$\begin{aligned} f_1 = & -7500y^5z + 21800y^4z^2 - 25408y^3z^3 + \\ & + 14848y^2z^4 - 4352yz^5 + 512z^6 + 20250y^5 - \\ & - 45120y^4z + 37928y^3z^2 - 14976y^2z^3 + \\ & + 2880yz^4 - 256z^5 - 37827y^4 + 67608y^3z - \\ & - 35496y^2z^2 + 2016yz^3 + 1872z^4 + 46656y^3 - \\ & - 93312y^2z + 62208yz^2 - 13824z^3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для многочлена (4.1) составляем идеал  $Id_1$ , определяющий критические точки и кривые:  $Id_1 = \{f_1 - c, \partial f_1/\partial x, \partial f_1/\partial z\}$ . Для него строим базис Гребнера  $\mathcal{GB}\mathcal{F}_1$  с чисто лексикографическим порядком  $y < z < c$ , в который входят полиномы, зависящие соответственно от  $\{c\}$ ,  $\{c, z\}$ ,  $\{c, z\}$ ,  $\{c, y\}$ ,  $\{c, y, z\}$ ,  $\{c, y, z\}$ . Получаем 6 полиномов, некоторые из которых имеют 15-ю степень и выглядят очень громоздко. Поэтому мы их не приводим здесь в явном виде. Пользуемся первым полиномом, определяющим критические значения полинома (4.1), и разлагаем его на множители [7, гл. 2, 3].

$$\begin{aligned} h_1(c) = & c^2(791015625 \times 10^{12}c^4 - \\ & - 4137285273243305806216 \times 10^5c^3 + \\ & + 2268208541119374290121362928c^2 - \\ & - 42844219213475982104286084531c + \\ & + 38437670697580573719552 \times 10^6). \end{aligned}$$

Первый множитель этого полинома  $h_{11}(c) = c^2$  задает первое критическое значение  $c_1^* = 0$ . Второй множитель  $h_{12}$  имеет два вещественных корня  $c_2^* \approx 0.9355$ ,  $c_3^* \approx 523029.1004$  и пару комплексных корней. Добавляя каждый множитель многочлена  $h_1(c)$  в найденный выше базис Гребнера, составляем его примарную декомпозицию. Рассмотрим эти критические значения последовательно.

4.2. Критическая линия  $h(y, z) = c_1^* = 0$

Вычисляя идеал  $SP_1(h_1)$  для двух различных номинальных порядков, находим соответствующие многочлены от переменных  $y$  и  $z$  соответственно

$$\begin{aligned} & y^8(y-2)(y-14) \times \\ & \times (8000y^3 - 50832y^2 + 111321y - 84672)^2, \\ & z^8(z-3)(z-27) \times \\ & \times (2560z^3 - 22176z^2 + 63909z - 61344)^2. \end{aligned}$$

С их помощью определяем, что критическому значению  $c_1^* = 0$  соответствуют четыре критические точки:  $(y_1, z_1) = (0, 0)$ ,  $(y_2, z_2) = (2, 3)$ ,  $(y_3, z_3) \approx (2.3427, 3.2427)$  и  $(y_4, z_4) = (14, 27)$ . Рассмотрим ВНФ каждой из этих критических точек.

Многочлен (4.1) при  $c = 0$  факторизуется на два множителя: линейный

$$3z - 2y \quad (4.2)$$

и полином пятой степени

$$\begin{aligned} h(y, z) = & 2500y^4z - 5600y^3z^2 + 4736y^2z^3 - \\ & - 1792yz^4 + 256z^5 - 6750y^4 + 10540y^3z - \\ & - 5616y^2z^2 + 1248yz^3 - 128z^4 + 12609y^3 - \\ & - 14130y^2z + 2412yz^2 + 936z^3 - 15552y^2 + \\ & + 20736yz - 6912z^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это единственный случай, когда многочлен  $f_j - c_k^*$  факторизуется. Поэтому особенности находим для множителя (4.3), но в критической линии учитываем и (4.2). Далее рассматриваем только многочлен  $h(y, z)$  и для него применяем систему обозначений подраздела 3.3.

а) *Разложение в точке*  $(y_1, z_1) = (0, 0)$ . Здесь конус задачи есть  $\mathcal{K}_3 = \{P = (p_1, p_2) < 0\}$ . Непосредственные вычисления показывают, что квадратичная форма  $h_2$  ряда Тейлора многочлена  $h$  есть полный квадрат  $h_2 = -1728(3y - 2z)^2$  и имеет общий множитель с кубической формой  $h_3$ . Таким образом, теорема о неявной функции неприменима, и здесь необходимо применить следующую технику [1, п. 5.2].

Вычисляем выпуклую оболочку носителя многочлена (4.3) с использованием пакета Polyhedral-Sets. Многоугольник Ньютона и его ребра показаны на рис. 1.

Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{h}_1^{(1)} = -1728(3y - 2z)^2$ . Выполним подстановку  $z = 3y/2 + z_1$  и получим многочлен  ${}_1h$  в переменных  $y, z_1$ :

$$\begin{aligned} {}_1h = & 6y^5 - 44y^4z_1 + 160y^3z_1^2 - 256y^2z_1^3 + 128yz_1^4 + \\ & + 256z_1^5 - 12y^4 + 388y^3z_1 - 1728y^2z_1^2 + 480yz_1^3 - \\ & - 128z_1^4 - 576y^2z_1 + 6624yz_1^2 + 936z_1^3 - 6912z_1^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 2.

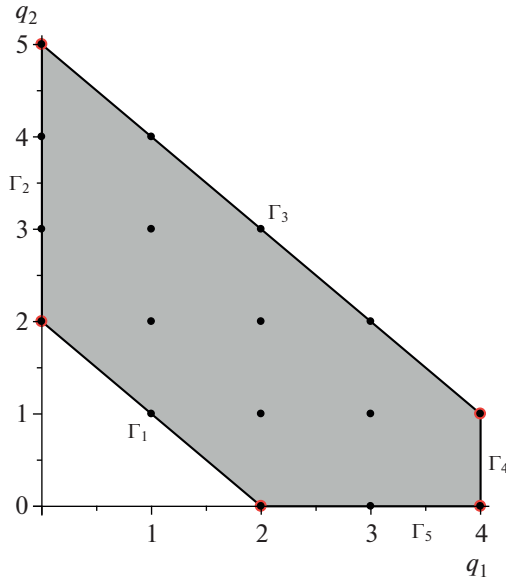


Рис. 1. Многоугольник Ньютона и его ребра для многочлена (4.3).

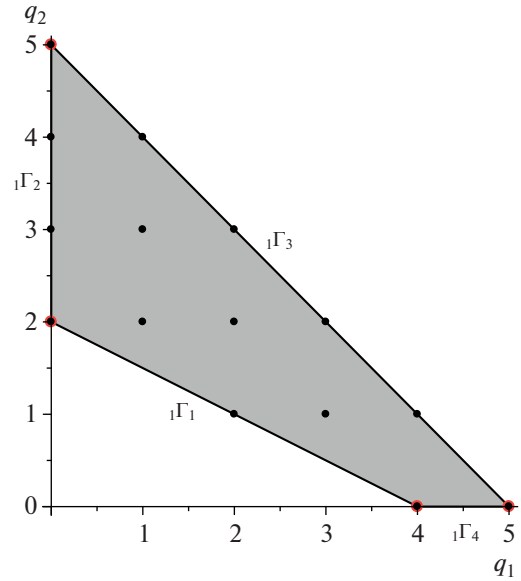


Рис. 2. Многоугольник Ньютона и его ребра для многочлена (4.4).

Единственному ребру  ${}_1\Gamma_1^{(1)}$  этого многоугольника, у которого нормальный конус попадает в конус задачи  $\mathcal{H}_3 = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  ${}_1\hat{h}_1^{(1)} = 12(y^2 + 24z_1)^2$ . Следовательно, здесь требуется еще одна подстановка  $z_1 = -y^2/24 + z_2$ . Она приводит к многочлену  ${}_2h$  от переменных  $y, z_2$ :

$$\begin{aligned}
 {}_2h = & \frac{1}{31104}y^{10} + \frac{1}{2592}y^9 + \frac{5}{1296}y^8z_2 + \frac{47}{2592}y^8 - \\
 & - \frac{1}{27}y^7z_2 - \frac{5}{27}y^6z_2^2 + \frac{35}{144}y^7 - \frac{35}{27}y^6z_2 + \frac{4}{3}y^5z_2^2 + \\
 & + \frac{40}{9}y^4z_2^3 - \frac{79}{64}y^6 - \frac{65}{6}y^5z_2 + \frac{92}{3}y^4z_2^2 - \frac{64}{3}y^3z_2^3 - \\
 & + \frac{40}{9}y^4z_2^3 - \frac{79}{64}y^6 - \frac{65}{6}y^5z_2 + \frac{92}{3}y^4z_2^2 - \frac{64}{3}y^3z_2^3 - \\
 & - \frac{160}{3}y^2z_2^4 + \frac{4}{3}y^5 + \frac{839}{8}y^4z_2 + 100y^3z_2^2 - \\
 & - \frac{704}{3}y^2z_2^3 + 128yz_2^4 + 256z_2^5 - 164y^3z_2 - 1845y^2z_2^2 + \\
 & + 480yz_2^3 - 128z_2^4 + 6624yz_2^2 + 936z_2^3 - 6912z_2^2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Его многоугольник Ньютона (см. рис. 3) имеет единственное ребро  ${}_2\Gamma_1^{(1)}$  с нормальным конусом из конуса задачи  $\mathcal{H}_3 = \{P < 0\}$ , которому соответствует многочлен  ${}_2\hat{h}_1^{(1)} = 4y^5/3 - 6912z_2^2$ . Таким образом, получаем два решения  $z_2 = \pm y^{5/2}/72$ . Выполняя обратную подстановку, в итоге получаем разложения двух ветвей

$$z_{1,2} = \frac{3}{2}y - \frac{1}{24}y^2 \pm \frac{1}{72}y^{5/2},$$

которые в особой точке  $(0, 0)$  имеют касание второго порядка.

Вычисления с использованием функции `puiseux` из пакета `algsurves` системы Maple или с использованием функции `AsymptoticSolve` системы Mathematica приводят к таким же результатам.

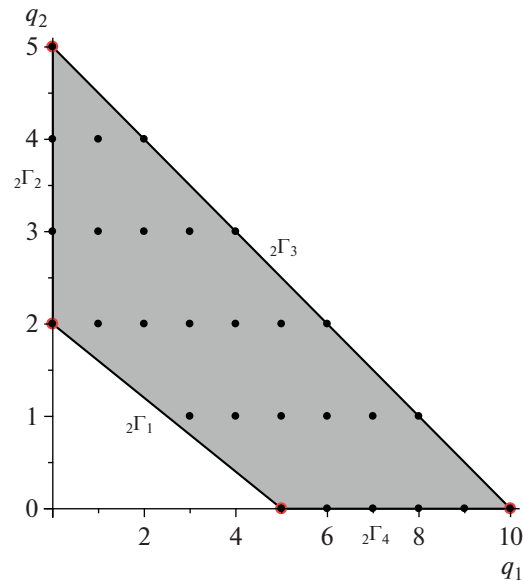


Рис. 3. Многоугольник Ньютона и его ребра для многочлена (4.5).

б) Точка  $(y_2, z_2) = (2, 3)$  лежит на прямой  $z = 3y/2$ , являющейся корнем многочлена (4.2). Эта точка является критической точкой самопересечения.

в) Точка  $(y_3, z_3) \approx (2.3427, 3.2427)$  была подробно рассмотрена в статье [1] первых двух авторов, поэтому здесь мы приведем только итоговый результат. Дискриминант квадратичной формы  $h_2(y_3 + \eta, z_3 + \zeta)$ , вычисленный с большой точностью, равен нулю, а кратный корень этой квадратичной формы не обнуляет кубическую форму  $h_3(y_3 + \eta, z_3 + \zeta)$ . Следовательно, указанная точка является точкой возврата кривой  $f_1(y, z) = 0$ , а ее разложение в окрестности особой точки описывается формулой

$$z = 0.823545771 + 1.03264746y + 0.05480984628(2.342744299 - y)^{3/2}$$

при  $y \leq y_3 \approx 2.342744299$ .

г) В точке  $(y_4, z_4) = (14, 27)$  вычисляем (с точностью до постоянного множителя) квадратичную форму  $h_2$ :

$$f_1(y_4 + \eta, z_4 + \zeta) = 243\eta^2 - 256\zeta\eta + 68\zeta^2.$$

Ее дискриминант  $\Delta = -560$ , следовательно, по лемме 2 критическая точка  $(y_4, z_4)$  является изолированной.

д) Ребрам  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_5^{(1)}$  соответствуют укороченные многочлены

$$\hat{h}_2^{(1)} = 8z^2(32z^3 - 16z^2 + 117z - 864),$$

и

$$\hat{h}_5^{(1)} = -27y^2(250y^2 - 467y + 576).$$

Их нули дают координаты пересечения кривой  $h = 0$  с осями  $Oz$  и  $Oy$  соответственно. Многочлен  $\hat{h}_2^{(1)}$  имеет два вещественных корня: 0 и 2.7470, а многочлен  $\hat{h}_5^{(1)}$  — только корень 0.

е) Ребру  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{h}_4^{(1)} = -250y^4(10z - 27)$ . Значит, при  $y \rightarrow \infty$  имеем  $z \rightarrow 27/10$ . Применяя технику из [1], находим разложение ветви кривой на бесконечности:

$$z = \frac{27}{10} - \frac{243}{2500y}. \tag{4.6}$$

Итак, кривая  $h = 0$  имеет горизонтальную асимптоту  $z = 27/10$ . Этой асимптоте соответствует бесконечная точка пересечения первой кратности.

Стремящейся к  $\infty$  координате  $z$  в многоугольнике  $\Gamma$  соответствует верхняя вершина, т.е. при  $z = \infty$  нет точек кривой (4.3).

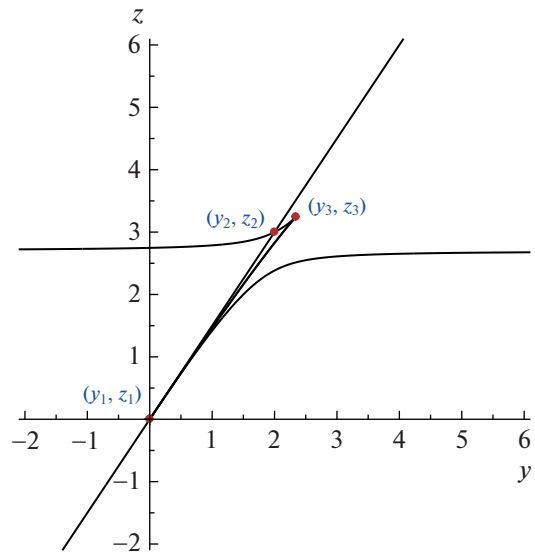


Рис. 4. Линии уровня для критического значения  $c_1^* = 0$  многочлена  $f_1$ .

Конусам задач  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  соответствуют только вершины многоугольника Ньютона, рис. 1.

ж) Ребру  $\Gamma_3^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен

$$\hat{h}_3^{(1)} = 2500y^4z - 5600y^3z^2 + 4736y^2z^3 - 1792yz^4 + 256z^5 = 4z(25y^2 - 28yz + 8z^2)^2,$$

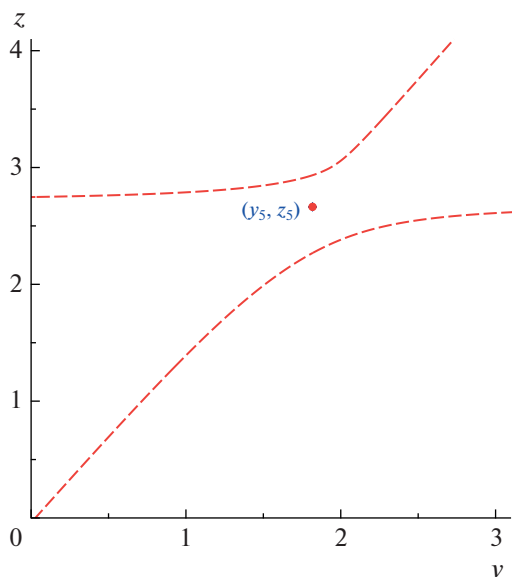
который не имеет нетривиальных вещественных корней. Следовательно, ветвей, соответствующих конусу задачи  $\mathcal{K}_1 = \{P : p_1 > 0, p_2 > 0\}$ , нет.

На рис. 4 показана сплошная линия уровня  $f_1 = 0$ , состоящая из сплошной линии  $h = 0$  и сплошной прямой (4.2)  $3z - 2y = 0$ , обе черного цвета. Изолированная критическая точка  $(y_4, z_4) = (14, 27)$  не попала на рисунок. Прямой  $y = 3z/2$  также соответствует простая бесконечная точка пересечения.

#### 4.3. Критическая линия $f_1(y, z) = c_2^* \approx 0.9355$

Из второго идеала  $SP_2(h_1)$  получаем по два действительных и комплексных значения  $c_j$ . Рассматривая только вещественные значения, находим, что критическому значению  $c_2^* \approx 0.9355$  соответствует критическая точка  $(y_5, z_5) \approx (1.8205, 2.6593)$ , координаты которой суть корни многочленов

$$\begin{aligned} &18750y^4 - 285290y^3 + 1217757y^2 - \\ &\quad - 2088009y + 1280664, \\ &8000z^4 - 211120z^3 + 1348356z^2 - \end{aligned}$$



**Рис. 5.** Линии уровня для критического значения  $c_3^* \approx 0.9355$  многочлена  $f_1$ .

$$- 3312315z + 2843316. \tag{4.7}$$

Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора многочлена (4.1) в этой точке:

$$f_1(y_5 + \eta, z_5 + \zeta) \approx 0.93558 - 392.0146\eta^2 + 568.6296\zeta\eta - 209.3918\zeta^2,$$

и получаем, что ее дискриминант  $\Delta \approx -4998.9489$  отрицательный, следовательно, точка (1.8205, 2.6593) является изолированной критической точкой.

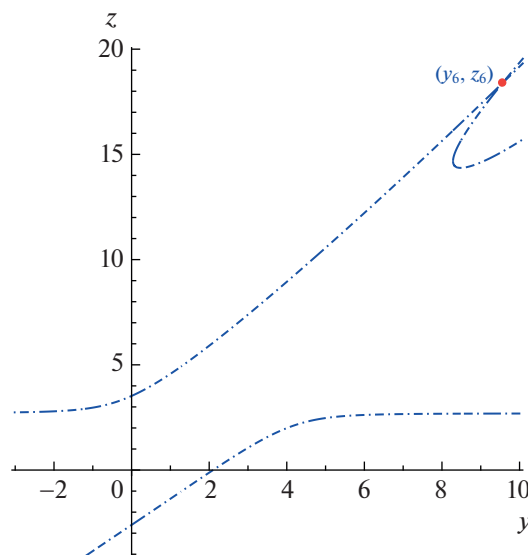
Эта линия пересекается с осями в точках (0, 0) и (0, 2.747016946). Ее асимптотики суть  $y = 3/2z$  и (4.6). Сама линия показана на рис. 5 красной пунктирной линией.

#### 4.4. Критическая линия $f_1(y, z) = c_3^* \approx 523029.1004$

Также из идеала  $SP_2(h)$  находим, что критическому значению  $c_3^* = 523029.1004$  соответствует критическая точка  $(y_6, z_6) \approx (9.5641, 18.3933)$ , координаты которой суть другие вещественные корни многочленов (4.7). Вычисление квадратичной формы ряда Тейлора многочлена (4.1) в этой точке дает результат:

$$f_1(y_6 + \eta, z_6 + \zeta) \approx 523029.101 + 3.108 \times 10^6 \eta^2 - 3.109 \times 10^6 \eta\zeta + 766031.179 \zeta^2.$$

Видно, что в разложении свободный член близок к критическому значению  $c_3^*$ , коэффициенты линейных членов равны нулю, а дискриминант



**Рис. 6.** Линии уровня для критического значения  $c_3^* \approx 523029.1004$  многочлена  $f_1$ .

квадратичной формы  $\Delta \approx 1.4 \times 10^{11}$  положительный, следовательно, точка  $(y_6, z_6)$  является точкой самопересечения.

Эта линия пересекается с осями в точках (2.0996, 0), (0, -2.6070) и (0, 3.5223), ее асимптотики те же, ее эскиз показан на рис. 6 в виде штрихпунктирных синих линий.

#### 4.5. Все критические линии уровня многочлена $f_1$

На рис. 7 показаны все критические линии уровня многочлена  $f_1$  для соответствующих критических значений  $c_j^*$ , а также критические точки. В силу выбранного масштаба, критические точки уровня  $c_1^*$  плохо различимы. Подробнее эти точки показаны на рис. 4. На нем в криволинейном треугольнике с вершинами  $(y_1, z_1)$ ,  $(y_2, z_2)$ ,  $(y_3, z_3)$  лежит точка  $(y_5, z_5)$ . Некритические линии уровня лежат между критическими линиями и критическими точками рис. 7.

### 5. ПРИМЕР 2 ПРИ $y = 0$

#### 5.1. Критические значения

Рассмотрим

$$f_2 = -4x^5z + 40x^4z^2 - 192x^3z^3 + 512x^2z^4 - 768xz^5 + 512z^6 + 2x^5 - 64x^4z + 456x^3z^2 - 1344x^2z^3 + 1344xz^4 - 256z^5 + 13x^4 - \tag{5.1}$$



$$-344x^3z + 2200x^2z^2 - 5088xz^3 + 1872z^4 + 64x^3 - 1152x^2z + 6912xz^2 - 13824z^3.$$

Идеал, определяющий критические точки и кривые и включающий в себя функцию  $f_2 - c$  и его первые производные, состоит из следующих полиномов

$$Id_2 = \{f_2 - c, \partial f_2 / \partial x, \partial f_2 / \partial z\}.$$

Для этого идеала строим базис Гребнера  $\mathcal{GB}\mathcal{F}_2$  с чистым лексикографическим порядком  $c \succ z \succ x$ , найденный с помощью процедуры Groebner[Basis]. Первый полином этого базиса есть

$$h_2(c) = c(16c^2 - 17435c + 15925248) \times (18225 \times 10^8 c^4 + 219593845975 \times 10^5 c^3 - 166039069316301172071c^2 + 199547881177990316949504c - 84569630503397437621665792). \quad (5.2)$$

Он зависит только от  $c$  и определяет критические значения полинома (5.1). Критическое значение  $c_1^* = 0$  является корнем множителя  $h_{21}(c) = c$ . Множитель  $h_{22}(c) = 16c^2 - 17435c + 15925248$  не имеет вещественных корней, значит, не выявляет вещественные критические значения  $c_j$ . Еще два иррациональных критических значения  $c_2^* \approx -17590.60940$  и  $c_3^* \approx 4162.403160$  задаются корнями третьего множителя в (5.2).

Идеал  $\mathcal{GB}\mathcal{F}_2$  имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция дает три идеала. Можно сразу исключить из рассмотрения идеал  $SP_2(h_2)$ , содержащий множитель  $h_{22}(c) = 16c^2 - 17435c + 15925248$ , который не имеет вещественных корней.

### 5.2. Критическая линия $f_2(x, z) = c_1^* = 0$

Идеал  $SP_1(h_2)$ , являющийся примарной декомпозицией множителя  $h_{21}(c) = c$ , включает многочлены

$c$ ,

$$262144z^{14} + 3178496z^{13} + 17618944z^{12} + 53712704z^{11} + 83353369z^{10} + 42910541z^9 - 34250732z^8 + 92661536z^7 + 44242816z^6 - 44658432z^5 + 36578304z^4 - 2687921593523634176z^{13} - 34906091624775188480z^{12} -$$

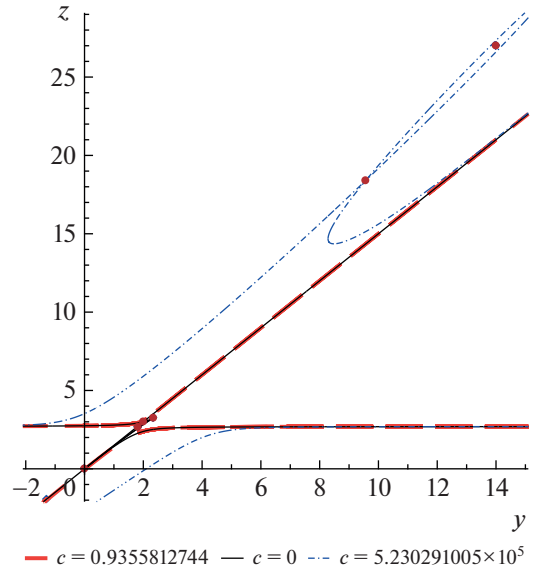


Рис. 7. Все критические линии уровня многочлена  $f_1$ .

$$\begin{aligned} & -209646836565166307328z^{11} - \\ & -717809757784574929984z^{10} - \\ & -1395096902560948574269z^9 - \\ & -1391000168810966419626z^8 - \\ & -414219249823112818193z^7 - \\ & -989978918218726674788z^6 - \\ & -1359995427547542403776z^5 + \\ & +44989667987413693824xz^3 - \\ & -427910073600905300160z^4 + \\ & +44989667987413693824xz^2 - \\ & -179958671949654775296z^3, \\ & -21973906577585552490496z^{13} - \\ & -274219691042743274733568z^{12} - \\ & -1569796991169618160588800z^{11} - \\ & -5004433077233995232707904z^{10} - \\ & -8441114957318849630660081z^9 - \\ & -5521961458811860727741337z^8 + \\ & +2910068553190244608309880z^7 - \\ & -4856586515216271331078816z^6 - \end{aligned}$$

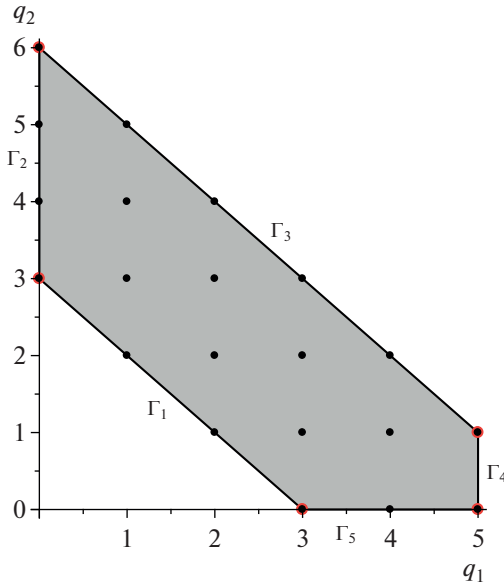


Рис. 8. Многоугольник Ньютона для многочлена  $f_2$ .

$$\begin{aligned}
 & -4913807691571657866494208z^5 + \\
 & +3773420647566644086822656z^4 - \\
 & -70543799404264671916032xz^2 + \\
 & +293932497517769466316800z^3 + \\
 & +17635949851066167979008x^2 - \\
 & -211631398212794015748096xz + \\
 & +634894194638382047244288z^2.
 \end{aligned}$$

а) Корень его первого полинома – вещественное число  $c_1^* = 0$ . Среди корней полиномов идеала  $SP_1(h_2)$  ищем вещественные значения. Таковыми являются две критические точки  $(0, 0)$  и  $(-8, -4)$ .

б) Рассмотрим ВНФ (2.7) или (2.8) вещественных критических точек. При  $c_1 = 0$  в критической точке  $(0, 0)$  квадратичная форма  $h_2$  ряда Тейлора многочлена (5.1) обнуляется и теорема о неявной функции здесь не применима, поэтому применяем анализ особой точки согласно [1, п. 5.2]. Вычисляем выпуклую оболочку носителя многочлена (5.1) с использованием пакета Polyhedral-Sets. Носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 8. Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_1^{(1)} = 64(x - 6z)^3$ . Выполним подстановку  $z = x/6 + z_1$  и получим многочлен в переменных  $x$  и  $z_1$ :

$$\begin{aligned}
 {}_1f_2 = & \frac{100}{729}x^6 - 13824z_1^3 + 1872z_1^4 - 256z_1^5 + 512z_1^6 + \\
 & + \frac{20}{81}x^5z_1 - \frac{8}{27}x^4z_1^2 - \frac{448}{27}x^3z_1^3 - 32x^2z_1^2 - 3840xz_1^3 + \\
 & + \frac{256}{3}x^2z_1^4 - \frac{8}{81}x^4z_1 - \frac{104}{27}x^3z_1^2 - \frac{4672}{9}x^2z_1^3 + \\
 & + \frac{3392}{3}xz_1^4 - 256xz_1^5 - \frac{16}{3}x^4 - \frac{296}{243}x^5.
 \end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 9.

Единственному ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  многоугольника Ньютона, нормальный конус которого попадает в конус нашей задачи  $K = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_1^{(1)} = 13824z_1^3 - 16x^4/3$ . Следовательно, здесь требуется еще одна подстановка  $z_1 = 18^{1/3}x^{4/3}/36 + z_2$ . Она приводит к еще одному многочлену от переменных  $x, z_2$ , который содержит слагаемые с дробными степенями. Дабы избежать больших объемов вычислений, сразу произведем замену вида  $x = x_1^3$  и получим более удобный вид многочлена для вычислений:

$$\begin{aligned}
 {}_2f_2 = & 1152 \times 18^{1/3}x_1^4z_2^2 + \frac{26}{3} \times 18^{2/3}x_1^8z_2^2 - \\
 & - 208 \times 18^{1/3}x_1^4z_2^3 + \frac{1168}{27} \times 18^{1/3}x_1^{10}z_2^2 + \\
 & + \frac{16 \times 18^{1/3}x_1^{10}z_2}{9} - \frac{292 \times 18^{2/3}x_1^{14}z_2}{243} - \\
 & - \frac{160 \times 18^{2/3}x_1^8z_2^3}{81} - 32 \times 18^{2/3}x_1^8z_2 - \frac{256 \times 18^{1/3}x_1^4z_2^5}{3} + \\
 & + \frac{320 \times 18^{1/3}x_1^4z_2^4}{9} + \frac{160 \times 18^{2/3}x_1^8z_2^4}{27} + \frac{2 \times 18^{1/3}x_1^{22}}{2187} + \\
 & + \frac{448x_1^9z_2^3}{27} + \frac{256x_1^6z_2^4}{3} + 256x_1^3z_2^5 - \frac{242x_1^{12}z_2}{81} + \\
 & + \frac{104x_1^9z_2^2}{27} - \frac{4672x_1^6z_2^3}{9} - \frac{3392x_1^3z_2^4}{3} - 32x_1^6z_2^2 + \\
 & + 3840x_1^3z_2^3 - 256z_2^5 + 512z_2^6 - 13824z_2^3 + \\
 & + 1872z_2^4 - \frac{2 \times 18^{2/3}x_1^{14}}{81} + \frac{133 \times 18^{1/3}x_1^{16}}{5832} - \frac{18^{2/3}x_1^{20}}{6561} - \\
 & - \frac{23 \times 18^{1/3}x_1^{19}}{4374} - \frac{18^{2/3}x_1^{23}}{13122} + \frac{13 \times 18^{2/3}x_1^{17}}{4374} - \frac{32x_1^{18}z_2}{243} + \\
 & + \frac{20 \times 18^{1/3}x_1^{16}z_2^2}{243} + \frac{2 \times 18^{1/3}x_1^{16}z_2}{729} - \frac{2 \times 18^{2/3}x_1^{20}z_2}{2187} - \\
 & - \frac{256 \times 18^{1/3}x_1^{10}z_2^3}{27} + \frac{32 \times 18^{2/3}x_1^{14}z_2^2}{81} - \frac{80x_1^{15}z_2^2}{81} -
 \end{aligned}$$

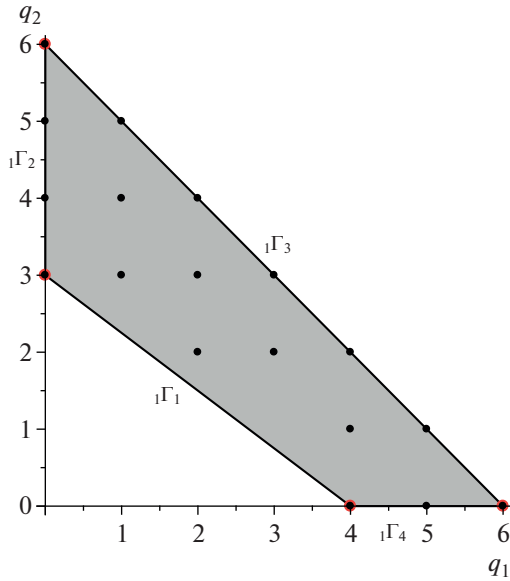


Рис. 9. Многоугольник Ньютона для многочлена  $1f_2$ .

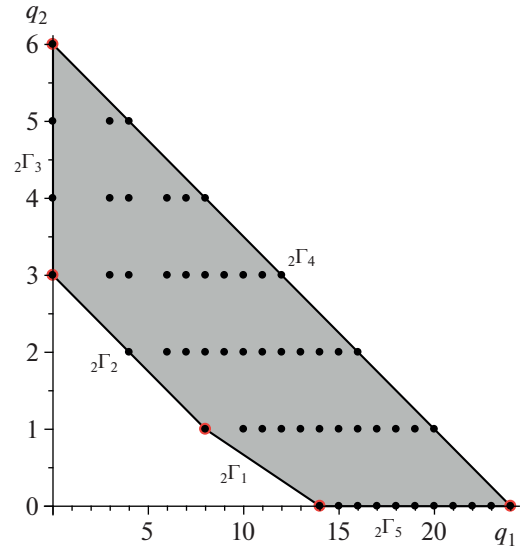


Рис. 10. Многоугольник Ньютона для многочлена  $2f_2$ .

$$\begin{aligned}
 & -\frac{320x_1^{12}z_2^3}{81} + \frac{364x_1^{15}z_2}{243} + \frac{56x_1^{12}z_2^2}{81} + \frac{x_1^{24}}{13122} - \frac{14x_1^{21}}{2187} + \\
 & + \frac{46x_1^{18}}{729} - \frac{64x_1^{15}}{243} - 320 \times 18^{1/3} x_1^7 z_2^2 + \\
 & + \frac{3392 \times 18^{1/3} x_1^7 z_2^3}{27} + \frac{160 \times 18^{2/3} x_1^{11} z_2^3}{81} + \\
 & + \frac{28 \times 18^{2/3} x_1^{17} z_2}{729} - \frac{52 \times 18^{1/3} x_1^{13} z_2}{243} - \frac{112 \times 18^{1/3} x_1^{13} z_2^2}{81} - \\
 & - \frac{320 \times 18^{1/3} x_1^7 z_2^4}{9} + \frac{80 \times 18^{2/3} x_1^{11} z_2}{9} + \frac{10 \times 18^{1/3} x_1^{19} z_2}{729} - \\
 & - \frac{424 \times 18^{2/3} x_1^{11} z_2^2}{81}.
 \end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона (см. рис. 10) имеет два ребра  $2\Gamma_1^{(1)}$  и  $2\Gamma_2^{(1)}$  из конуса нашей задачи, которым соответствуют следующие укороченные многочлены:

$$\begin{aligned}
 2\hat{f}_1^{(1)} &= \frac{2 \times 18^{2/3} (x_1^6 + 1296z_2)x_1^8}{81}, \\
 2\hat{f}_2^{(1)} &= 32 \times 18^{2/3} (-x_1^8 + 2 \times 18^{2/3} z_2 x_1^4 - 24 \times 18^{1/3} z_2^2)x_1^2.
 \end{aligned}$$

Решением первого укороченного уравнения будет  $z_2 = -x_1^6/1296$ . Выполняя обратную подстановку как для  $z$ , так и для  $x$ , получаем разложение ветви вблизи точки  $(0, 0)$ .

$$z = \frac{x}{6} - \frac{18^{1/3} (-x)^{4/3}}{36} - \frac{x^2}{1296}.$$

Поскольку соответствующее ребро содержит точку с ординатой 1, то здесь применима теорема

о неявной функции, которая дает единственную ветвь.

Укороченный многочлен  $2\hat{f}_2^{(1)}$ , соответствующий второму ребру, не имеет нетривиальных вещественных корней, следовательно, ему не соответствует вещественная ветвь. Вычисления с использованием функции `puiseux` из пакета `algcurves` системы Maple приводят к таким же результатам.

б) Также критическому значению  $c_1^* = 0$  соответствует критическая точка  $(x_2, z_2) = (-8, -4)$ . Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора многочлена (5.1) в этой точке, используя команду `mtaylor`:

$$h_2(x_2 + \xi, z_2 + \zeta) = 9216\xi^2 - 28672\xi\zeta + 36864\zeta^2.$$

Дискриминант данной квадратичной формы  $\Delta = -536870912 < 0$ , следовательно, точка  $(-8, -4)$  является изолированной критической точкой.

Для анализа критических линий на бесконечности проанализируем многоугольник Ньютона (рис. 8) многочлена (5.1) и выделим укороченные многочлены, соответствующие ребрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату.

Из этого многоугольника Ньютона можно видеть, что два ребра соответствуют бесконечности  $\Gamma_3^{(1)}$  и  $\Gamma_4^{(1)}$ .

Рассмотрим ребро  $\Gamma_3^{(1)}$ , которому соответствует укорочение

$$\hat{f}_3^{(1)} = -4z(-2z + x)(x^2 - 4xz + 8z^2)^2.$$

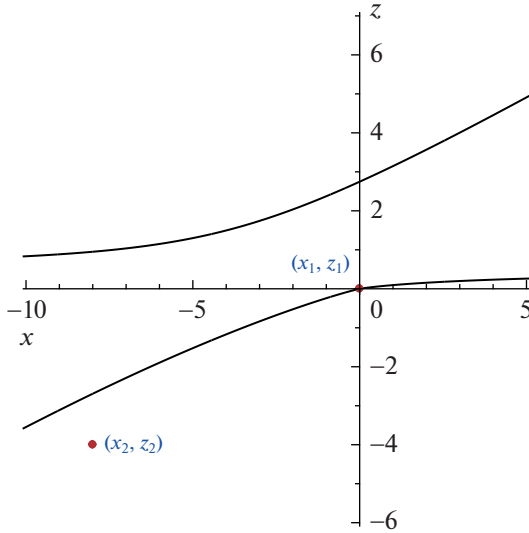


Рис. 11. Линии уровня для критического значения  $c_1^*$  многочлена  $f_2$ .

По нему можно определить первый член разложения  $z = x/2 + z_1$ . Произведя такую замену в (5.1), получаем

$$\begin{aligned} {}_3f_2 = & 4x^5z_1 + 40x^4z_1^2 + 192x^3z_1^3 + 512x^2z_1^4 + \\ & + 768xz_1^5 + 512z_1^6 - 8x^5 - 24x^4z_1 + 136x^3z_1^2 + \\ & + 704x^2z_1^3 + 704xz_1^4 - 256z_1^5 - 128x^4 - 1024x^3z_1 - \\ & - 2624x^2z_1^2 - 1344xz_1^3 + 1872z_1^4 - 512x^3 - \\ & - 4608x^2z_1 - 13824xz_1^2 - 13824z_1^3. \end{aligned}$$

В выпуклой оболочке многочлена выбираем соответствующее бесконечности ребро, тогда его укороченный многочлен будет выглядеть следующим образом:  ${}_1\hat{f}_3^{(1)} = 4x^5(z_1 - 2)$ . Также по этому укорочению определяется второй член разложения:  $z_1 = 2 + z_2$ . Продолжая аналогично, выявляем первую ветвь разложения в бесконечности

$$z = \frac{x}{2} + 2 + \frac{4}{x} \quad (5.3)$$

Аналогично рассмотрим ребро  $\Gamma_4^{(1)}$ , ему соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_4^{(1)} = -2x^5(2z - 1)$ . Значит при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $z \rightarrow 1/2$ . Произведем замену  $z = 1/2 + z_1$  в многочлене (5.1), получаем

$$\begin{aligned} {}_4f_2 = & -4x^5z_1 + 40x^4z_1^2 - 192x^3z_1^3 + 512x^2z_1^4 - \\ & - 768xz_1^5 + 512z_1^6 - 24x^4z_1 + 168x^3z_1^2 - \\ & - 320x^2z_1^3 - 576xz_1^4 + 1280z_1^5 - 9x^4 - 32x^3z_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 952x^2z_1^2 - 4320xz_1^3 + 3152z_1^4 - 18x^3 + 296x^2z_1 + \\ & + 336xz_1^2 - 9440z_1^3 - 162x^2 + 3528xz_1 - \\ & - 17768z_1^2 + 1152x - 9416z_1 - 1611. \end{aligned}$$

У его многоугольника Ньютона возьмем единственное ребро, с нормальным конусом, попадающим в конус нашей задачи. Соответствующее укорочение выглядит так:  ${}_4\hat{f}_2^{(1)} = -x^4(4xz_1 + 9)$ . Для определения 3-го члена разложения произведем еще одну замену вида:  $z_1 = -9/(4x) + z_2$ . После очередных вычислений соответствующий укороченный многочлен будет иметь вид  ${}_5\hat{f}_2^{(1)} = -4x^5z_2 + 36x^3$ . Таким образом, разложение второй ветви в бесконечности выглядит так:

$$z = \frac{1}{2} - \frac{9}{4x} + \frac{9}{x^2}. \quad (5.4)$$

Вычисленные выше разложения ветвей совпадают с результатами использования функции `puiseux` из пакета `algcurves` системы Maple.

Корни укороченных многочленов

$$\begin{aligned} \hat{f}_2^{(1)} &= 16z^3(32z^3 - 16z^2 + 117z - 864), \\ \hat{f}_5^{(1)} &= x^3(2x^2 + 13x + 64), \end{aligned}$$

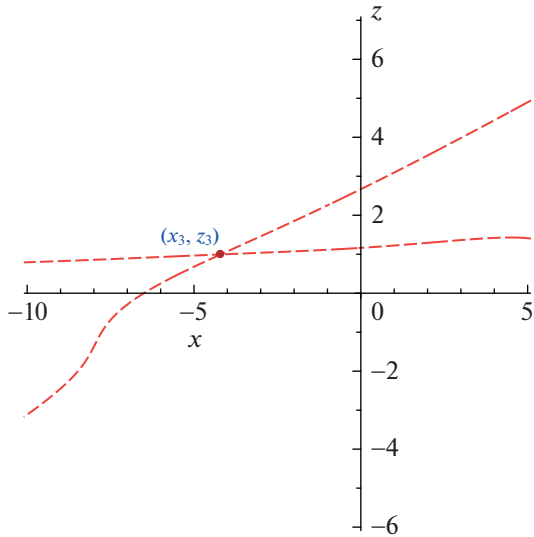
соответствующих ребрам  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_5^{(1)}$  многоугольника Ньютона многочлена (5.1), дают точки пересечения с осями координат. Пересечение с  $Oz$  при  $z = 0$  и  $z \approx 2.747016946$ , а с осью  $Ox$  только при  $x = 0$ .

Для изображения этих линий уровня на плоскости (рис. 11) воспользуемся командой `plot_real_curve` пакета `algcurves`. На этом рисунке критическая линия обозначена сплошной линией черного цвета. Асимптотики (5.3) и (5.4) соответствуют простым бесконечным точкам пересечения. Поэтому здесь работает лемма 4.

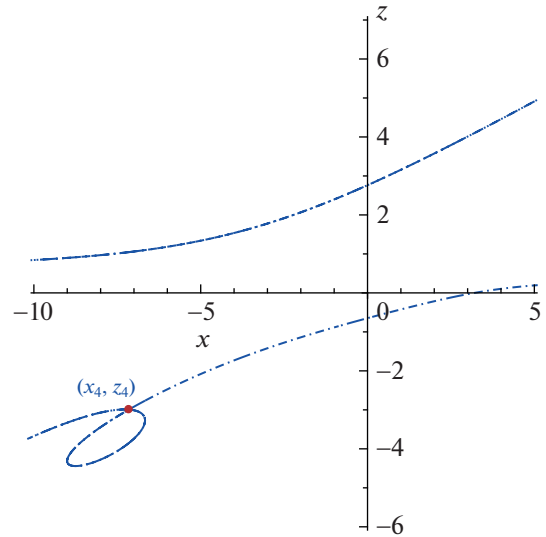
### 5.3. Критическая линия $f_2(x, z) = c_2^* \approx -17590.6094$

Первый из двух наборов вещественных решений уравнений, входящих в идеал  $SP_3$ , есть критическое значение  $c_2^* \approx -17590.6094$  и соответствующая критическая точка с иррациональными координатами  $(x_3, z_3) \approx (-4.2020, 0.9946)$ . Рассмотрим эту точку, координаты которой являются корнями многочленов 4-й степени. Возьмем их значения приблизительно с большой точностью. Найдем квадратичную форму ряда Тейлора в точке  $(x_3, z_3)$ :

$$\begin{aligned} h_2(x_3 + \xi, z_3 + \zeta) = & -17590.6094 + 704.2988\xi^2 - \\ & - 21546.0609\xi\zeta + 50690.9070\zeta^2. \end{aligned}$$



**Рис. 12.** Линии уровня для критического значения  $c = -17590.6094$  многочлена  $f_2$ .



**Рис. 13.** Линии уровня для критического значения  $c^* = 4162.4031$  многочлена  $f_2$ .

Здесь свободный член близок к  $c_2^*$ , коэффициенты линейных членов равны нулю, а дискриминант квадратичной формы  $\Delta \approx 3.2142 \times 10^8$  положительный, следовательно, эта точка по лемме 2 является точкой самопересечения (в ней пересекаются две ветви). Критические линии уровня при  $c_2^*$  пересекают ось  $Ox$  в точке  $(x, z) \approx (-6.5012, 0)$ , а ось  $Oz$  в точках  $(x, z) \approx (0, 1.1627)$  и  $(x, z) \approx (0, 2.6681)$ . Здесь верны асимптотики (5.3) и (5.4). Эскиз этой критической линии показан на рис. 12 штриховой красной линией.

Критическая линия показана на рис. 13 штрих-пунктирной линией синего цвета.

5.5. Все критические линии уровня многочлена  $f_2$

На рис. 14 показаны все критические линии уровня многочлена  $f_2$  для соответствующих критических значений  $c_j^*$ , а также критические точки. Некритические линии уровня расположены между соответствующими критическими согласно (2.3).

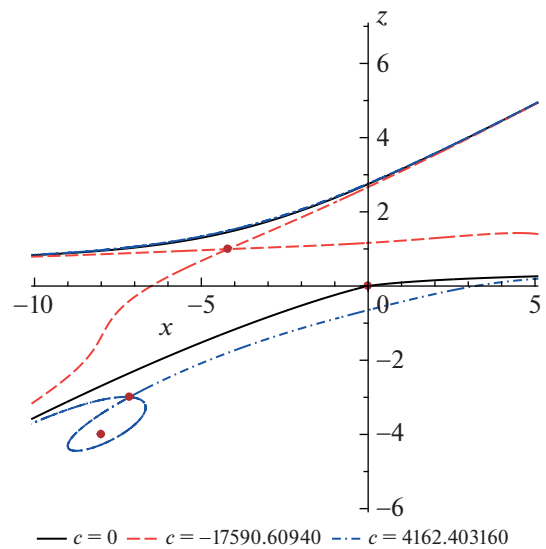
5.4. Критическая линия  $f_2(x, z) = c_3^* \approx 4162.4031$

Второй из двух наборов вещественных решений уравнений, входящих в идеал  $SP_3$ , есть критическое значение  $c_3 \approx 4162.4031$  и соответствующая критическая точка с иррациональными координатами  $(x_4, z_4) \approx (-7.1522, -2.9929)$ . Рассмотрим квадратичную форму разложения ряда Тейлора исходного многочлена (5.1) в критической точке  $(x_4, z_4)$ :

$$h_2(x_4 + \xi, z_4 + \zeta) = 4162.4022 + 350.7520\xi^2 + 4785.9994\xi\zeta - 11228.6467\zeta^2.$$

Здесь свободный член близок к  $c_3^*$ , а ее дискриминант равен  $\Delta \approx 3.8659 \times 10^7 > 0$ . Следовательно это точка самопересечения.

Критические линии уровня пересекают ось  $Ox$  в точке  $(x, z) \approx (3.206553809, 0)$ , а ось  $Oz$  в точках  $(x, z) \approx (0, -0.6481)$  и  $(x, z) \approx (0, 2.7632)$ . Эта кри-



**Рис. 14.** Все критические линии уровня многочлена  $f_2$ .

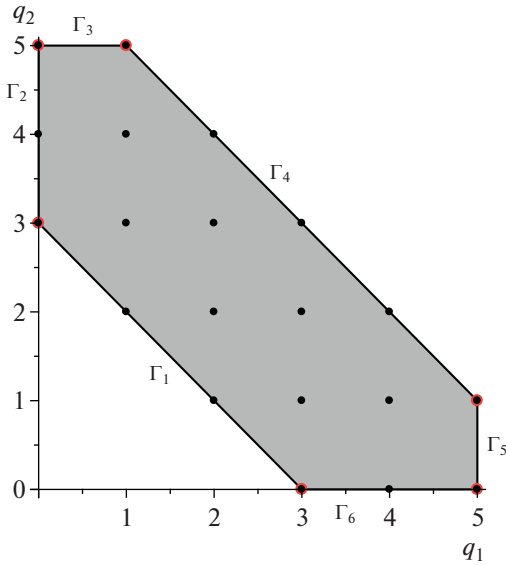


Рис. 15. Многоугольник Ньютона для многочлена  $f_3$ .

6. ПРИМЕР 3 ПРИ  $z = 0$

6.1. Критические значения

Рассмотрим последнее нулевое сечение:

$$f_3 = 4x^5y + 48x^4y^2 + 344x^3y^3 + 1200x^2y^4 + 2500xy^5 + 2x^5 + 82x^4y + 740x^3y^2 + 3156x^2y^3 + 6490xy^4 + 20250y^5 + 13x^4 + 412x^3y + 2782x^2y^2 + 828xy^3 - 37827y^4 + 64x^3 + 1728x^2y + 15552xy^2 + 46656y^3. \quad (6.1)$$

Первый полином базиса Гребнера  $\mathcal{GB}\mathcal{F}_3$  есть

$$h_3(c) = c(1738071441650390625c^6 + 8280321886721438116 \times 10^5c^5 + 13366043451422095808794624c^4 + 226388815999145527309322158080c^3 + 33335217445009148607411951501312c^2 + 14684298419139851546639897167134720c - 876052122097662955869886609920884736). \quad (6.2)$$

Он зависит только от  $c$ , факторизуется на два множителя и определяет критические значения полинома (6.1). Критическое значение  $c_1^* = 0$  является корнем множителя  $h_1(c) = c$ . Второй множитель в (6.2) имеет только два вещественных критических значения  $c_2^* \approx -476393.0349992$  и  $c_3^* \approx 51.5040463$ .

6.2. Критическая линия  $f_3(x, y) = c_1^* = 0$

Идеал  $\mathcal{GB}\mathcal{F}_3$  имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция дает два идеала. Рассмотрим идеал  $SP_1(h_3)$ , являющийся примарной декомпозицией множителя  $h_3(c) = c$ , выявляет критическое значение  $c_1^* = 0$ . Корни многочленов, входящих в идеал  $SP_1(h_3)$ , определяют критические точки  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  и  $(x_2, y_2) = (-9/2, 3/2)$

а) Рассмотрим ВНФ (2.7) или (2.8) вещественных критических точек. При  $c_1^* = 0$  в критической точке  $(0, 0)$  квадратичная форма  $h_2$  ряда Тейлора многочлена (6.1) обнуляется и теорема о невыпуклой функции здесь не применима, поэтому применяем анализ особой точки. Вычисляем выпуклую оболочку носителя многочлена (6.1). Многоугольник Ньютона показан на рис. 15.

Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$ , внешняя нормаль которого входит в конус нашей задачи  $K = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_1^{(1)} = 64(x + 9y)^3$ . Выполним подстановку  $y = -x/9 + y_1$  и получим многочлен в переменных  $x$  и  $y_1$ :

$${}_1f_3 = \frac{10816}{59049}x^6 + 46656y_1^3 - 37827y_1^4 + 20250y_1^5 + \frac{9152}{6561}x^5y_1 - \frac{8800}{729}x^4y_1^2 + \frac{9664}{81}x^3y_1^3 + 32x^3y_1 - 296x^2y_1^2 + 17640xy_1^3 - \frac{1700}{9}x^2y_1^4 + \frac{10400}{729}x^4y_1 - \frac{2944}{27}x^3y_1^2 + \frac{24944}{9}x^2y_1^3 - 4760xy_1^4 + 2500xy_1^5 - \frac{16}{3}x^4 - \frac{10880}{6561}x^5.$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 16. Его единственному ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  с нормальным конусом в конусе нашей задачи  $K = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  ${}_1\hat{f}_1^{(1)} = 16x^4/3 + 46656y_1^3$ . Следовательно, здесь требуется еще одна подстановка  $y_1 = 18^{1/3}x^{4/3}/54 + y_2$ . Она приводит к еще одному многочлену от переменных  $x, y_2$ . Но при подстановке выявляются дробные степени переменной  $x$ , что в свою очередь приводит к некоторым трудностям. Чтобы упростить дальнейшие действия, тут же произведем еще одну замену вида  $x = x_1^3$ . Так получаем многочлен

$${}_2f_3 = 46656y_2^3 - 37827y_2^4 + 20250y_2^5 - \frac{1700x_1^{18}y_2}{19683} + \frac{6250x_1^{15}y_2^2}{2187} - \frac{5128x_1^{15}y_2}{6561} + \frac{8075x_1^{12}y_2^2}{729} + \frac{9664x_1^9y_2^3}{81}$$

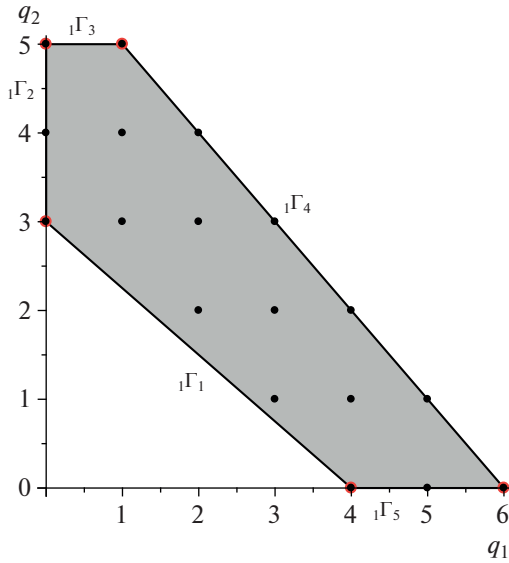


Рис. 16. Многоугольник Ньютона для многочлена  $1f_3$ .

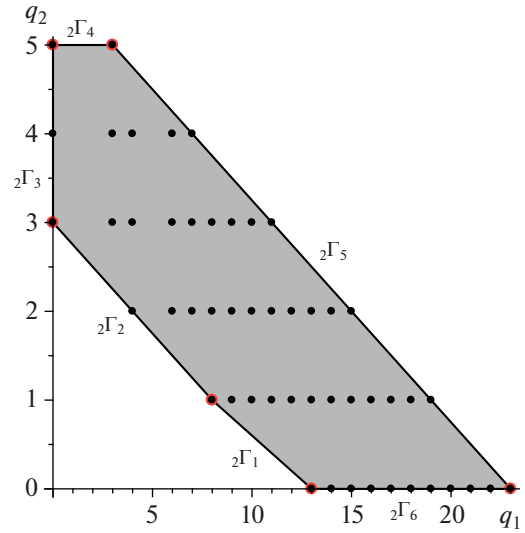


Рис. 17. Многоугольник Ньютона для многочлена  $2f_3$ .

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1700x_1^6y_2^4}{9} + 2500x_1^3y_2^5 - \frac{2209x_1^{12}y_2}{729} - \frac{2944x_1^9y_2^2}{27} + \\
 & + \frac{24944x_1^6y_2^3}{9} - 4760x_1^3y_2^4 + 32x_1^9y_2 - 296x_1^6y_2^2 + \\
 & + 17640x_1^3y_2^3 + \frac{2416x_1^{21}}{177147} + \frac{7892x_1^{18}}{59049} + \frac{2350x_1^{15}}{6561} + \\
 & + \frac{16 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}}{27} - \frac{736 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{17}}{19683} + \frac{28991 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{16}}{157464} - \\
 & - \frac{74 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}}{729} + \frac{2791 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{19}}{177147} - \frac{425 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{22}}{1062882} - \\
 & - \frac{14225 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{20}}{4251528} + \frac{625 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{23}}{6377292} + 2592 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^2 - \\
 & - 2802 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^3 + 48 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2 - \frac{296 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2}{27} + \\
 & + 980 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^2 + \frac{490 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2}{27} - \frac{467 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2^2}{6} - \\
 & - \frac{9520 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^3}{27} + 1875 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^4 + \frac{12472 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2^2}{81} + \\
 & + \frac{625 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2^3}{9} - \frac{2944 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}y_2}{729} + \frac{6236 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}y_2}{2187} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2380 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2^2}{243} + \frac{6250 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^4}{27} + \frac{4832 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}y_2^2}{729} - \\
 & - \frac{3400 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2^3}{243} - \frac{18325 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{16}y_2}{78732} - \frac{850 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}y_2^2}{2187} + \\
 & + \frac{6250 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2^3}{729} + \frac{2416 \times 18^{\frac{2}{3}}x_1^{17}y_2}{19683} + \frac{3125 \times 18^{\frac{1}{3}}x_1^{19}y_2}{118098}.
 \end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 17, и имеет два ребра  $2\Gamma_1^{(1)}$  и  $2\Gamma_2^{(1)}$ , с отрицательными внешними нормальными, которым соответствует следующие укороченные многочлены

$${}_2\hat{f}_1^{(1)} = \frac{16 \times 18^{1/3}(x_1^5 + 81 \times 18^{1/3}y_2)x_1^8}{27}$$

$${}_2\hat{f}_2^{(1)} = 48 \times 18^{2/3}(x_1^8 + 3 \times 18^{2/3}y_2x_1^4 + 54 \times 18^{1/3}y_2^2)y_2.$$

Для  ${}_2\hat{f}_1^{(1)}$  корнем будет  $y_2 = -18^{2/3}x_1^5/1458$ . Выполняя обратную подстановку по  $x$  и  $y$ , получаем разложение ветви вблизи точки  $(0, 0)$

$$y = -\frac{x}{9} + \frac{18^{1/3}x^{4/3}}{54} - \frac{8748^{1/3}x^{5/3}}{4374}.$$

Поскольку первое ребро имеет верхнюю точку с ординатой 1, то здесь применима теорема о неявной функции, которая дает единственную ветвь.

Второе укорочение  ${}_2\hat{f}_2^{(1)}$  не имеет нетривиальных вещественных корней, следовательно, ему не соответствует вещественная ветвь.

б) Также критическому значению  $c_1^* = 0$  соответствует критическая точка  $(x_2, y_2) = (-9/2, 3/2)$ . Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора

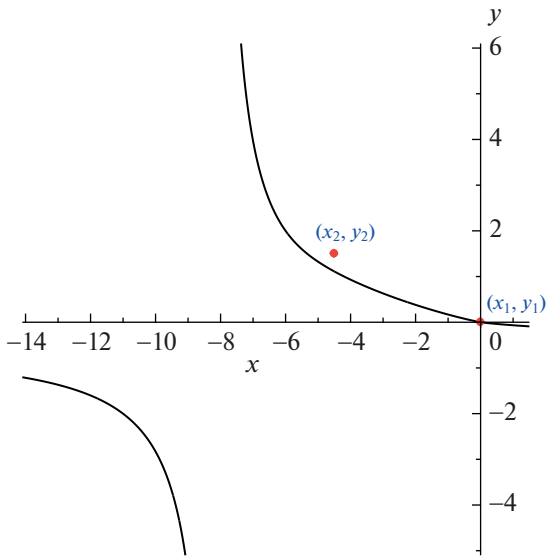


Рис. 18. Линии уровня для критического значения  $c_1^* = 0$  многочлена  $f_3$ .

многочлена (6.1) в этой точке с использованием команды `mtaylor`:

$$h_2(x_2 + \xi, y_2 + \eta) = 576\xi^2 + 1728\xi\eta + 5184\eta^2.$$

Дискриминант  $\Delta = -8957952$  отрицательный, следовательно, точка  $(x_2, y_2)$  является изолированной критической точкой.

в) Для анализа критических линий на бесконечности рассмотрим многоугольник Ньютона (рис. 15) многочлена (6.1). Выделим укороченные многочлены, соответствующие ребрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату. Из этого многоугольника Ньютона можно видеть, что таковых три:  $\Gamma_3^{(1)}$ ,  $\Gamma_4^{(1)}$  и  $\Gamma_5^{(1)}$ .

з) Рассмотрим ребро  $\Gamma_3^{(1)}$ , ему соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_3^{(1)} = 250y^5(10x + 81)$ . Значит, при  $y \rightarrow \infty$  имеем  $x \rightarrow -81/10$ . Произведем замену  $x = -81/10 + x_1$  в многочлене и возьмем соответствующее ребро, попадающее в конус нашей задачи. Соответствующее укорочение выглядит так:  ${}_3\hat{f}_2^{(1)} = 4y^4(625ux_1 - 2916)$ . Для определения 2-го члена разложения произведем еще одну замену вида:  $x_1 = 2916/625y + x_2$ . После очередных вычислений соответствующий укороченный многочлен будет иметь вид

$${}_4\hat{f}_3^{(1)} = 2500y^5x_2 + \frac{472392}{125}y^3.$$

Таким образом, разложение первой ветви в бесконечности выглядит так:

$$x \approx -\frac{81}{10} + \frac{2916}{625y} - \frac{118098}{78125y^2}.$$

Ей соответствует простая бесконечная точка пересечения.

д) Ребру  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_4^{(1)} = 4xy(x^2 + 6xy + 25y^2)^2$ , который не имеет нетривиальных вещественных корней. Следовательно, ветвей в бесконечности не имеет.

е) Аналогично рассмотрим ребро  $\Gamma_5^{(1)}$ , которому соответствует укорочение  $\hat{f}_5^{(1)} = 2x^5(2y + 1)$ . По нему можно определить, что первая замена будет  $y = -1/2 + y_1$ , а также, что при  $x \rightarrow \infty$  имеем горизонтальную асимптоту  $y = -1/2$ . Произведя такую замену, в многоугольнике Ньютона полученного многочлена выбираем соответствующее бесконечности ребро, его укороченный многочлен есть:  ${}_1\hat{f}_5^{(1)} = 4x^4(xy_1 - 4)$ . Также по этому укорочению определяется второй член разложения:  $y_1 = 4/x + y_2$ . Продолжая аналогично, выявляем очередное укорочение  ${}_2\hat{f}_5^{(1)} = 4x^5y_2 + 136x^3$  и, соответственно, вторую ветвь разложения в бесконечности

$$y \approx -\frac{1}{2} + \frac{4}{x} - \frac{34}{x^2}.$$

Ей также соответствует простая бесконечная точка пересечения.

Пересечение с осями координат можно определить по ребрам  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_6^{(1)}$ , таковым и единственным для осей  $Ox$  и  $Oy$  является точка  $(0, 0)$ . Вычисленные выше разложения ветвей совпадают с результатами использования функции `puiseux` из пакета `algsurves` системы `Maple`.

Теперь изобразим линии уровня на плоскости. Для этого воспользуемся командой `plot_real_curve` пакета `algsurves`. Критическую линию уровня и точки для  $c_1^* = 0$  см. на рис. 18, критическая линия обозначена сплошной линией черного цвета.

### 6.3. Критическая линия

$$f_3(x, y) = c_2^* \approx -476393.0349$$

При этом  $c_2^*$  имеется только одна критическая точка  $(x_3, y_3) \approx (-11.3777, -1.0391)$ . Ее координаты являются первым набором корней многочленов 6-й степени:

$$\begin{aligned} &12000x^6 + 376640x^5 + 4789184x^4 + \\ &+ 32751568x^3 + 128618398x^2 + 276229080x + \\ &+ 255518145, \end{aligned} \tag{6.3}$$



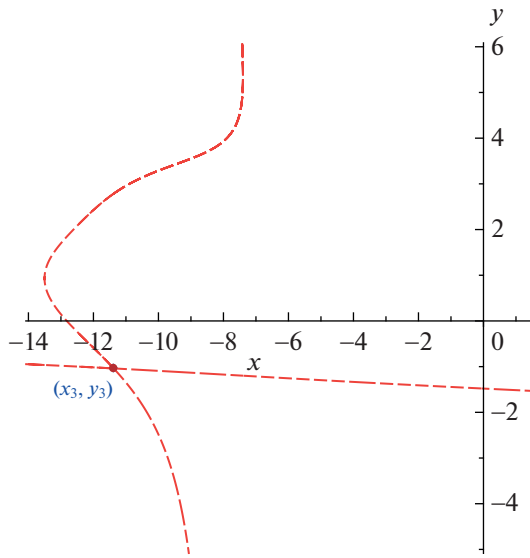


Рис. 19. Линии уровня для критического значения  $c_2^* \approx -476393.035$  многочлена  $f_3$ .

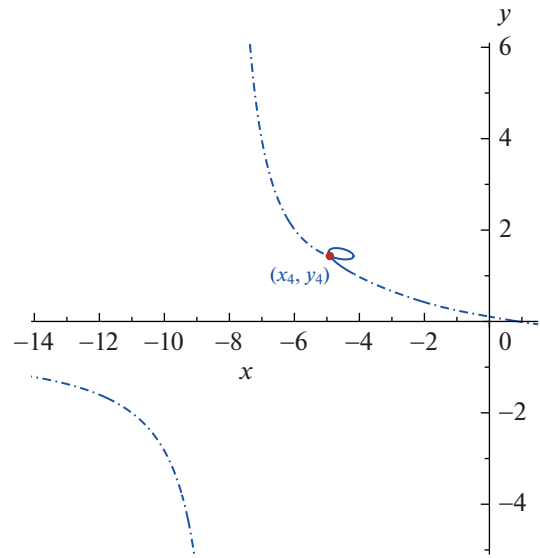


Рис. 20. Линия уровня для критического значения  $c_3^* \approx 51.5040$  многочлена  $f_3$ .

$$3 \times 10^5 y^6 - 607040 y^5 + 56704 y^4 + 505904 y^3 - 403522 y^2 + 143976 y - 26487,$$

которые получаются при примарной декомпозиции идеала  $SP_2(h_3)$ , включающего множитель  $h_{32}$ , при лексикографических порядках  $c \succ y \succ x$  и  $c \succ x \succ y$  соответственно. Корни многочленов (6.3) суть иррациональные числа, поэтому также возьмем их приближительные значения с большой точностью. Найдем квадратичную форму ряда Тейлора в точке  $(x_3, y_3)$ :

$$h_2(x_3 + \xi, y_3 + \eta) = -476393.0342 + 373296.3064 \eta \xi + 13334.3035 \xi^2 + 462406.3700 \eta^2.$$

Здесь постоянная близка к  $c_2^*$ , коэффициенты линейных членов равны нулю, а дискриминант этой формы  $\Delta \approx 1.1468 \times 10^{11}$  положительный. Следовательно, эта точка по лемме 2 является точкой самопересечения (в ней пересекаются две ветви). Также критическая линия уровня при  $c_2^*$  пересекает ось  $Oy$  при  $y \approx -1.4798$  и ось  $Ox$  при  $x \approx -12.82060973$ . Она показана на рис. 19 штриховой линией красного цвета.

#### 6.4. Критическая линия $f_3(x, y) = c_3^* \approx 51.5040$

При этом  $c_3^*$  критическая точка  $(x_4, y_4) \approx (-4.8952, 1.4224)$ . Ее координаты являются вторым набором корней многочленов (6.3). Аналогично рассмотрим квадратичную форму разложения

ряда Тейлора исходного многочлена в критической точке  $x_4 \approx -4.8952, y_4 \approx 1.4224$  соответствующей критическому значению  $c_3 = 51.5040$ :

$$h_2(x_4 + \xi, y_4 + \eta) = 51.5041 - 2046.65935 \eta \xi - 408.778677 \xi^2 - 1602.0119 \eta^2.$$

Здесь постоянная близка к  $c_3^*$  и коэффициенты линейных членов равны нулю. Дискриминант  $\Delta \approx 1.5693 \times 10^6$  положительный, что по лемме 2 означает точку, в которой пересекаются две ветви

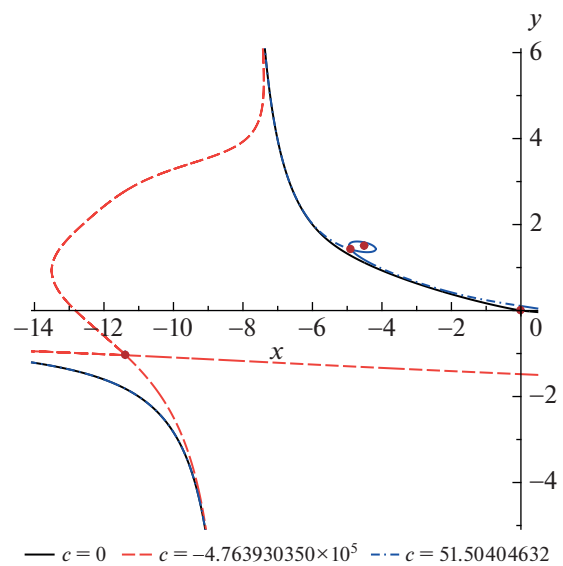


Рис. 21. Все критические линии уровня многочлена  $f_3$ .

кривой. Критические линии уровня при  $c_3^*$  пересекают оси  $Ox$  и  $Oy$  при  $x \approx 0.8749$  и  $y \approx 0.1063$  соответственно. Линия уровня и критическая точка изображены на рис. 20, где критическая линия показана штрих-пунктирной линией синего цвета.

### 6.5. Все критические линии уровня многочлена $f_3$

На рис. 21 показаны все критические линии уровня многочлена  $f_3$  для соответствующих критических значений  $c_j^*$ , а также критические точки. Некритические линии уровня расположены между соответствующими критическими линиями и критическими точками.

Отметим, что для всех трех многочленов  $f_1, f_2, f_3$  все бесконечные точки пересечения имеют первую кратность. Поэтому применима лемма 4 и все некритические линии уровня расположены между найденными критическими и топологически эквивалентны в интервалах (2.3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А.Д., Батхин А.Б. Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22–43.
2. Брюно А.Д., Батхин А.Б. Линии уровня многочлена на плоскости // Программирование. 2022. № 1. С. 22–33.
3. Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. № 1. С. 80–133.
4. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
5. Kollár J. Lectures on Resolution of Singularities. Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2007.
6. Милнор Дж. Теория Морса: Пер. с англ. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ, 2011. 184 с.
7. Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.