ПРОГРАММИРОВАНИЕ, *2024*, *№ 2*, *с. 79–83*

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6 + 517.55

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЖДЕСТВ ЧАУНДИ-БУЛЛАРДА ДЛЯ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО РАЗБИЕНИЯ С ВЕСОМ

А. Б. Лейнартене[a], *, А. П. Ляпин[a], **

[a]*Сибирский федеральный университет*
660041 Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Россия

**E-mail: aleina@mail.ru*
***E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru*

Поступила в редакцию 28.06.2023
После доработки 10.08.2023
Принята к публикации 01.10.2023

В данной работе предложен алгоритм получения тождества Чаунди–Булларда для функции векторного разбиения с весом с использованием методов компьютерной алгебры. Для автоматизации данного процесса в среде Maple был разработан и реализован алгоритм, вычисляющий значения функции векторного разбиения с весом путем нахождения неотрицательных решений систем линейных диофантовых уравнений, на основе которых происходит составление указанных тождеств. Входными данными алгоритма является набор целочисленных векторов, образующих заостренный решеточный конус, и некоторая точка из данного конуса, выходными данными – тождество Чаунди–Булларда для функции векторного разбиения с весом. Указанный код размещен в депозитории и готов к использованию. Приведен пример, демонстрирующий работу данного алгоритма.

Ключевые слова: тождество Чаунди–Булларда, функция векторного разбиения, решеточный конус

DOI: 10.31857/S0132347424020105 **EDN:** ROHMGQ

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методы компьютерной алгебры показали свою эффективность в исследовании широкого класса задач из теории многомерных разностных уравнений (см., например, [1]–[7]). В данной работе предложен алгоритм получения тождеств Чаунди–Булларда для функции векторного разбиения с весом с использованием системы компьютерной алгебры Maple.

Для целых неотрицательных чисел m,n обозначим

$$P_{m,n}(x) = (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}x^k.$$

Элегантное соотношение

$$P_{m,n}(x) + P_{n,m}(1-x) = 1, \qquad (1.1)$$

известное как тождество Чаунди–Булларда, было получено в работе [8] в 1960 г.

Подробный обзор тождества Чаунди–Булларда и различных подходов к его доказательству приведен в [9]. В [10] подобные тождества были получены с использованием метода производящих функций и свойств композиции Адамара кратных степенных рядов (подробнее о многомерном аналоге композиции Адамара см. [11]). В [12] отмечалось, что Монмор получил это тождество в 1713 г., затем Муавр обнаружил его в 1738 г. и Геринг применял его в 1868 г. Тождество Чаунди–Булларда появляется в теории рекурсивых цифровых фильтров (см. [13]), в теории вейвлетов (см. [14]), в теории гипергеометрических функций Гаусса (см. [15]). В работе [16] соотношение (1.1) называется тождеством Добеши в случае $m=n$.

В настоящее время появилось немало исследований по данной тематике. Например, в 2023 г. в работе [17] несколько тождеств с использованием символа Похгаммера были доказаны при помощи тождества Чаунди–Булларда. В 2016 г. в работе [18] были представлены два новых доказательства данного тождества на основе дифференцирования суммы ряда бесконечной геометрической прогрессии в связи с исследованием комбинаторной задачи о справедливом разделе ставки. В 2014 г. в работе [19] были представлены однородная форма тождества Чаунди–Булларда и ее очевидное обобщение на случай n переменных. Некоторые полезные соотношения, связанные с тождеством Чаунди–Булларда, приведены в работе [20].

Обозначим $\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{\geqslant},\mathbb{C}$ — множества целых, целых неотрицательных и комплексных чисел соответственно, $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n_{\geqslant} = \mathbb{Z}_{\geqslant}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{\geqslant}$.

Функция векторного разбиения $P_\Delta(\lambda)$ является числом представлений вектора λ через набор заданных векторов $\Delta = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^n$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Данная функция изучалась в [21] и [22] в связи с исследованиями рациональных многогранников. Функцию векторного разбиения можно также рассматривать как число целых неотрицательных решений диофантова уравнения $Ax = \lambda$, где A – матрица, стобцы которой являются векторами из набора Δ (см. [23]):

$$P_\Delta(\lambda) = \sum_{Ax=\lambda, x\in\mathbb{Z}^n_\geqslant} 1.$$

Аналоги функции векторного разбиения в целочисленном конусе исследовались в [24] и [25] в связи с обобщением теоремы Римана–Роха и теории индексов трансверсальных эллиптических операторов. Структурная теорема для функции векторного разбиения и эффективные инстументы для ее вычисления были даны в работе [26].

Пусть $\varphi : \mathbb{Z}^n_\geqslant \to \mathbb{C}$. В работе [27] была определена функция векторного разбиения с весом φ

$$P_\Delta(\lambda; \varphi) = \sum_{Ax=\lambda, x\in\mathbb{Z}^n_\geqslant} \varphi(x)$$

и доказано тождество Чаунди–Булларда для функции векторного разбиения с весом. Отметим, что в данной работе были получены многомерные разностные уравнения, решения которых являются функциями векторного разбиения с весом $P_\Delta(\lambda; \varphi)$, и найдены их производящие функции (подробнее см. [28], [29], [30]).

2. ТОЖДЕСТВО ЧАУНДИ–БУЛЛАРДА

Пусть $\Delta = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^n$ и решеточный конус

$$K = \left\{ \begin{matrix} \lambda \in \mathbb{Z}^n : \lambda = x_1\alpha^1 + \cdots + x_N\alpha^N, \\ x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{Z}_\geqslant \end{matrix} \right\}$$

– заостренный, то есть такой, для которого выполняется условие $\lambda \in K$ и $-\lambda \in K$, если и только если $\lambda = 0$. Пусть $A = [\alpha^1, \ldots, \alpha^N]$ — матрица из n строк и N столбцов, составленная из векторов-столбцов $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\}$. Для произвольной функции целочисленных аргументов $\varphi : \mathbb{Z}^N_\geqslant \to \mathbb{C}$ определим функцию векторного разбиения с весом $\varphi(x)$ следующим образом:

$$P_A(\lambda; \varphi) = \sum_{\substack{x: Ax=\lambda \\ x\in\mathbb{Z}^N_\geqslant}} \varphi(x), \lambda \in \mathbb{Z}^n.$$

При $\varphi(x) \equiv 1$ данная функция совпадает с классической функцией векторного разбиения P_A.

Обозначим наборы вектор-столбцов $\Delta_j = \Delta \backslash \{\alpha^j\}$, $j = 1, \ldots, N$ матрицы $A_j, j = 1, \ldots, N$, составленные из таких наборов соответственно:

$$A_j = [\alpha^1, \ldots, \alpha^{j-1}, \alpha^{j+1}, \ldots, \alpha^N]$$

и заостренные решеточные конусы

$$K_j = \left\{ \begin{matrix} \nu \in \mathbb{Z}^n : \nu = y_1\alpha^1 + \ldots [j] \ldots + \\ + y_N\alpha^N, y_1, \ldots, [j], \ldots, y_N \in \mathbb{Z}_\geqslant \end{matrix} \right\}.$$

Также обозначим $c^x = c_1^{x_1} \cdots c_N^{x_N}$, $c^{x+e^j} = c_1^{x_1} \cdots c_j^{x_j+1} \cdots c_N^{x_N}$, $|x| = x_1 + \cdots + x_n$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $c_1 + c_2 + \cdots + c_N = 1$ *и* $\varphi_j(x) = \frac{|x|!}{x!} c^{x+e^j}$, *тогда для любого* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$ *выполняется тождество*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\nu\in K_j} P_{A_j}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_j) = P_A(\mu). \qquad (2.1)$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [27].

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Рассмотрим алгоритм получения тождеств Чаунди–Булларда при помощи решения систем линейных диофантовых уравнений вида $Ax = \lambda$ и вычисления функций векторного разбиения с весом $P_A(\lambda; \varphi)$ в системе компьютеной алгебры.

Входными данными для алгоритма являются:

1. Матрица A, составленая из вектор-столбцов из набора $\Delta = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\}$.

2. Некоторая точка $\lambda \in K$, где $K = \langle \alpha^1, \ldots, \alpha^N \rangle$ — конус, образованный векторами из Δ.

Выходными данными алгоритма является тождество Чаунди–Булларда для функции векторного разбиения с весом.

Описание входных и выходных данных и работы алгоритма:

1. Строим набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\}$ из столбцов заданной матрицы A.

2. Строим конус $\lambda - K$, где K – конус, натянутый на вектора из набора Δ (строим достаточное количество точек конуса, что обеспечивается выбором достаточно большого значения параметра *interval*).

3. Строим множества точек L_j, образованные пересечением конуса $\lambda - K$ с конусами K_j, натянутыми на вектора из набора $\Delta \setminus \{\alpha^j\}$.

4. Для каждого множества $L_j, j = 1,\ldots,N$ строим соответствующие группы слагаемых, домноженных на c_j, для их вычисления используется функция $\mathrm{VPF}(A,\lambda,j,\mathit{interval},\varphi)$ — сокращение от Vector Partition Function. Для каждой точки $\lambda \in L_j$ функция действует следующим образом: если $j > 0$, то функция возвращает многочлен $P_{A_j}(\lambda,\varphi)$; если $j = 0$, то функция возвращает $P_A(\lambda;\varphi)$ — значение функции векторного разбиения с весом $\varphi(x)$.

5. Объединяем полученные группы слагаемых в общую сумму CBI — сокращение от Chaundy and Bullard Indentity, которая и будет левой частью тождества Чаунди–Булларда для функции векторного разбиения с весом; если $\varphi(x) = 1$, то функция возвращает значение «класссической» функции векторного разбиения.

6. Вычисляем правую часть тожества, используя $\mathrm{VPF}(A,\lambda,0,\mathit{interval},1)$.

Алгоритм был реализован в среде Maple 18. Полный код программы доступен по ссылке https://github.com/lyapinap/ALeinartene2023. Вычисления производились на машине Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 CPU 2.40 GHz, 64bit, ОЗУ 16.00 Гб под управлением Windows 11.

4. ПРИМЕР

Пусть $n = 2$ и $N = 3$. Рассмотрим набор векторов

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \alpha^2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha^3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ и } \lambda = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$

тогда $\Delta = \{\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3\}$, $\Delta_1 = \{\alpha^2,\alpha^3\}$, $\Delta_2 = \{\alpha^1,\alpha^3\}$, $\Delta_3 = \{\alpha^1,\alpha^2\}$, A, A_1, A_2, A_3 — матрицы, составленные из данных векторов соответственно, и K, K_1, K_2, K_3 — целочисленные конусы, натянутые на вектора из данных наборов соответственно.

Тогда тождество Чаунди–Булларда имеет вид:

$$\sum_{\nu \in K_1} P_{A_1}(\nu) P_A(\lambda - \nu; \varphi_1) + \\ + \sum_{\nu \in K_2} P_{A_2}(\nu) P_A(\lambda - \nu; \varphi_2) + \\ + \sum_{\nu \in K_3} P_{A_3}(\nu) P_A(\lambda - \nu; \varphi_3) = P_A(\lambda).$$

Решая соответствующие системы линейных диофантовых уравнений, получим множества точек, связанные с каждым слагаемым (см. рис. 1–3):

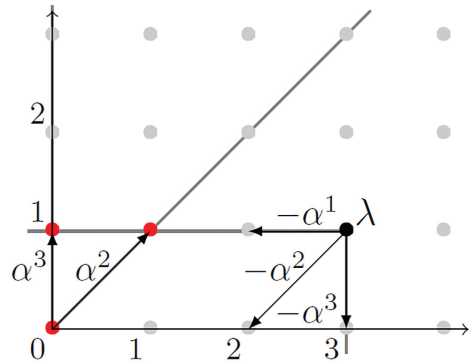

Рис. 1. Пересечение решеточных конусов $K \cap K_1$.

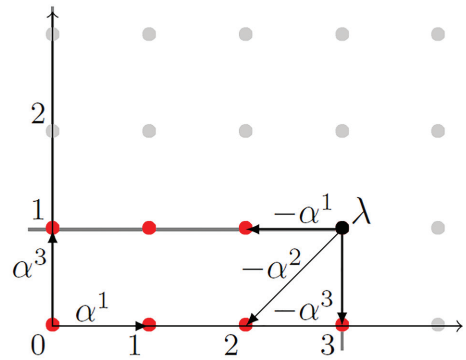

Рис. 2. Пересечение решеточных конусов $K \cap K_2$.

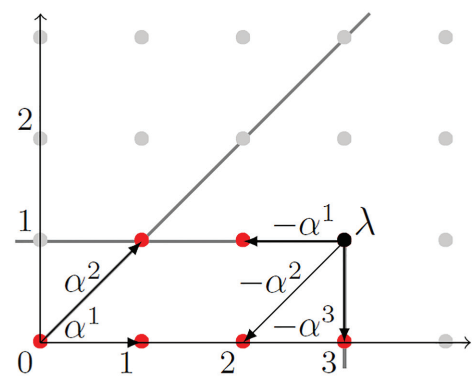

Рис. 3. Пересечение решеточных конусов $K \cap K_3$.

$$K \cap K_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$K \cap K_2 = \left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\},$$

$$K \cap K_3 = \left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}.$$

Так как $P_A(\lambda)=2$, находим тождество Чаунди–Булларда:

$$c_1\left(4c_1^3c_3+c_1^3+3c_1^2c_2+c_1^2\right)+$$
$$+c_2\left(\begin{array}{c}4c_1^3c_3+c_1^3+3c_1^2c_2+3c_1^2c_3+\\+c_1^2+2c_1c_2+2c_1c_3+c_1+c_2+c_3+1\end{array}\right)+$$
$$+c_3\left(\begin{array}{c}4c_1^3c_3+3c_1^2c_2+3c_1^2c_3+c_1^2+\\+2c_1c_2+2c_1c_3+c_1+c_2+c_3+1\end{array}\right)=2,$$

которое выполняется при условии, что c_1+c_2+ $+c_3=1$.

Для получения данного тождества с использованием разработанного алгоритма надо задать матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

точку $\lambda=(3,1)$ и, например, *interval*=5. Выполнение команды

ChaundyBullard(A, *lambda*, *interval*)

и дает указанный результат.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2024-1429).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S.A., Barkatou M.A., van Hoeij M., Petkovsek M.* Subanalytic Solutions of Linear Difference Equations and Multidimensional Hypergeometric Sequences // Journal of Symbolic Computation. 2011. № 46(11). P. 1205–1228.
2. *Abramov S.A., Petkovšek M., Ryabenko A.A.* Hypergeometric Solutions of First-order Linear Difference Dystems with Rational-function Coefficients // Lecture Notes in Computer Science. 2015. № 9301. P. 1–14.
3. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Petkovšek M.* Linear difference operators with coefficients in the form of infinite sequences // Comput. Math. Math. Phys. 2021. № 61(10). P. 1582–1589.
4. *Abramov S.A., Ryabenko A.A., Khmelnov D.E.* Regular solutions of linear ordinary differential equations and truncated series // Comput. Math. Math. Phys. 2020. № 60(1). P. 1–14.
5. *Kytmanov A.A., Lyapin A.P., Sadykov T.M.* Evaluating the Rational Generating Function for the Solution of the Cauchy Problem for a Two-dimensional Difference Equation with Constant Coefficients // Programming and computer software. 2017. V. 43. № 2. P. 105–111.
6. *Kruchinin D., Kruchinin V., Shablya Y.* Method for Obtaining Coefficients of Powers of Multivariate Generating Functions // Mathematics, 2023. № 11. P. 2859.
7. *Chandragiri S.* Counting Lattice Paths by Using Difference Equations with Non-constant Coefficients // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. № 44. P. 55–70.
8. *Chaundy T.W., Bullard J.E.* John Smith's problem // Math. Gazette. 1960. V. 44. P. 253–260.
9. *Koornwinder T.H., Schlosser M.J.* On an identity by Chaundy and Bullard. I // Indag. Math.(N.S.). 2008. № 19. P. 239–261.
10. *Krivokolesko V.P., Leinartas E.K.* On identities with polynomial coefficients // Irkutsk Gos. Univ. Mat. 2012. № 5(3). P. 56–63 (in Russian).
11. *Leinartas E.K.* Multidimensional Hadamard Composition And Sums With Linear Constraints On The Summation Indices // Sib. Math. J. 1989. № 30. P. 250–255.
12. *Koornwinder T.H., Schlosser M.J.* On an identity by Chaundy and Bullard. II. More history // Indag. Math. (N.S.). 2013. № 24. P. 174–180.
13. *Herrmann O.* On the approximation problem in nonrecursive digital filter design // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. V. 18. P. 411–413.
14. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
15. *Vidunas R.* Degenerate Gauss hypergeometric functions // Kyushu J. Math. № 61. 2007. P. 109–135.
16. *Zeilberger D.* On an Identity of Daubechies // Amer. Math. Monthly. 1993. № 100. P. 487.
17. *Kouba O.* A Chaundy-Bullard type identity involving the Pochhammer symbol // Indag. Math. New ser. 2023. № 34(1). P. 186–189.
18. *Zhang H.* New proofs of Chaundy-Bullard identity in "the problem of points" // Math. Intell. 2016. № 38(1). P. 4–5.
19. *Aharonov D., Elias U.* More on the identity of Chaundy and Bullard // J. Math. Anal. Appl. 2014. № 419(1). P. 422–427.
20. *Alzer H.* On a combinatorial sum // Indag. Math. New Ser. 2015. № 26(3). P. 519–525.
21. *Brion M., Vergne M.* Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes // J. American Math. Soc. 1997. V. 10. № 4. P. 797–833.
22. *Beck M., Gunnells P.E., Materov E.* Weighted lattice point sums in lattice polytopes, unifying Dehn-Sommerville and Ehrhart-Macdonald // Discrete Comput. Geom. 2021. № 65(2). P. 365–384.
23. *Stanley R.* Enumerative Combinatorics, V. 1. 1990.
24. *Pukhlikov A.V., Khovanskii A.G.* The Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes // St. Petersburg Mathematical Journal. 1993. № 4. P. 789–812.

25. *De Concini C., Procesi C., Vergne M.* Vector partition functions and generalized Dahmen and Micchelli spaces // Transform. Groups. 2010. № 15(4). P. 751–773.
26. *Sturmfels B.* On vector partition functions // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1995. № 72. P. 302–309.
27. *Lyapin A.P., Chandragiri S.* Generating Functions For Vector Partition Functions And A Basic Recurrence Relation // Journal of Difference Equations & Applications. 2019. № 25(7). P. 1052–1061.
28. *Leinartas E.K., Nekrasova T.I.* Constant Coefficient Linear Difference Equations On The Rational Cones Of The Integer Lattice // Siberian Math. J. 2016. № 57(1). P. 74–85.
29. *Lyapin A.P., Cuchta T.* Sections of the generating series of a solution to the multidimensional difference equation // Bulletin of Irkutsk State University-Series mathematics. 2022. №. 42. P. 75–89
30. *Leinartas E.K.* Multiple Laurent Series And Difference Equations // Siberian Mathematical Journal. 2004. № 45(2). P. 321–326.

APPLYING COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS TO STUDY CHAUNDY-BULLARD IDENTITIES FOR THE VECTOR PARTITION FUNCTION WITH WEIGHT

© 2024 A. B. Leinartene[a], A. P. Lyapin[a]

[a] *Siberian Federal University, pr. Svobodny 79, Krasnoyarsk, 660041 Russia*

An algorithm for obtaining the Chaundy-Bullard identity for a vector partition function with weight that uses computer algebra methods is proposed. To automate this process in Maple, an algorithm was developed and implemented that calculates the values of the vector partition function with weight by finding non-negative solutions of systems of linear Diophantine equations that are used to form the identities involved. The algorithm's input data is represented by the set of integer vectors that form a pointed lattice cone and by some point from this cone, and the Chaundy-Bullard identity for the vector partition function with weight is its output. The code involved is stored in the depository and is ready-to-use. An example demonstrating the algorithm's operation is given.

Keywords: Chaundy-Bullard identitiy, vector partition function, lattice cone