

ISSN 0132-3474

Номер 6

Ноябрь - Декабрь 2023

# ПРОГРАММИРОВАНИЕ



[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Номер 6, 2023

---

---

## АНАЛИЗ ДАННЫХ

Введение <i>А. В. Гасников</i>	3
Адаптивные методы для вариационных неравенств с относительно гладкими и относительно сильно монотонными операторами <i>С. С. Аблаев, Ф. С. Стонякин, М. С. Алкуса, Д. А. Пасечнюк</i>	5
Адаптивный вариант алгоритма Франк–Вульфа для задач выпуклой оптимизации <i>Г. В. Айвазян, Ф. С. Стонякин, Д. А. Пасечнюк, М. С. Алкуса, А. М. Райгородский, И. В. Баран</i>	14
Децентрализованный метод условного градиента на переменных во времени графах <i>Р. А. Ведерников, А. В. Rogozin, А. В. Гасников</i>	27
Об ускоренных покомпонентных методах поиска равновесий в двухстадийной модели равновесного распределения транспортных потоков <i>Н. А. Ильтяков, М. А. Обозов, И. М. Дышлевский, Д. В. Яρμοшик, М. Б. Кубентаева, А. В. Гасников, Е. В. Гасникова</i>	36
Устойчивая алгебраическая связность <i>И. А. Курузов, А. В. Rogozin, С. А. Чежегов, А. Б. Купавский</i>	49
Безградиентные алгоритмы для решения стохастических седловых задач оптимизации с условием Поляка–Лоясевича <i>С. И. Садыков, А. В. Лобанов, А. М. Райгородский</i>	60

---

---

# CONTENTS

---

---

No. 6, 2023

---

---

## DATA ANALYSIS

Introduction <i>A. V. Gasnikov</i>	3
Adaptive Methods or Variational Inequalities with Relatively Smooth and Relatively Strongly Monotone Operators <i>S. S. Ablav, F. S. Stonyakin, M. S. Alkousa, D. A. Pasechnyk</i>	5
Adaptive Variant of the Frank-Wolfe Algorithm for Convex Optimization Problems <i>G. V. Aivazian, F. S. Stonyakin, D. A. Pasechnyk, M. S. Alkousa, A. M. Raigorodsky, I. V. Baran</i>	14
Decentralized Conditional Gradient Method on Time-Variable Graphs <i>R. A. Vedernikov, A. V. Rogozin, A. V. Gasnikov</i>	27
On Accelerated Coordinate Descent Methods for Searching Equilibria in Two-Stage Transportation Equilibrium Traffic Flow Distribution Model <i>N. A. Iltyakov, M. A. Obozov, I. M. Dyshevski, D. V. Yarmoshik, M. B. Kubentaeva, A. V. Gasnikov, E. V. Gasnikova</i>	36
Robust Algebraic Connectivity <i>I. A. Kuruzov, A. V. Rogozin, S. A. Chezhegov, A. B. Kupavskii</i>	49
Gradient-Free Algorithms for Solving Stochastic Saddle Optimization Problems with the Polyak–Loyasievich Condition <i>S. I. Sadykov, A. V. Lobanov, A. M. Raigorodskii</i>	60

---

---

УДК 519.85

## ВВЕДЕНИЕ

© 2023 г. А. В. Гасников<sup>a,b,c,\*</sup> (ORCID: 0000-0002-7386-039X)<sup>a</sup>Московский физико-технический институт  
141701 г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия<sup>b</sup>Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича  
127051 Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Россия<sup>c</sup>Кавказский математический центр Адыгейского гос. университета,  
3850006 г. Майкоп, Первомайская ул., 208, Россия

\*E-mail: gasnikov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

DOI: 10.31857/S0132347423060043, EDN: GGIVNO

В данном специальном выпуске журнала были собраны статьи, связанные с разработкой эффективных алгоритмов решения разнообразных задач выпуклой оптимизации.

Работы С.С. Аблаева и др. и Г.В. Айвазяна и др. посвящены разработке адаптивных методов для (относительно) гладких задач. Работы продолжают цикл исследований д.ф.-м.н. Ф.С. Стонякина с учениками по развитию адаптивных по гладкости методов градиентного типа. В том числе метода условного градиента Франк–Вульфа–Левитина–Поляка в частности в условии Поляка–Лоясиевича.

В работе Р.А. Ведерникова предложен децентрализованный вариант метода условного градиента Франк–Вульфа–Левитина–Поляка на меняющихся графах. Ранее про такой метод было известно, что он хорошо работает на постоянных графах. В статье было показано, что на меняющихся графах соответствующая модификация метода также должна хорошо работать.

В работе Н.А. Ильтякова и др. исследовались альтернативные подходы к задаче поиска равновесия в двухстадийной модели транспортных потоков. В частности, было продемонстрировано, что хотя использующийся сейчас на практике “нефизичный” способ поиска равновесия не является теоретически оптимальным (авторы предложили альтернативный “физичный” подход с лучшими теоретическими гарантиями), тем не менее, на практике он все же по-прежнему является наилучшим известным численным методом для данной задачи. Примечательно, что данная статья практически с нуля была написана при самом непосредственном участии первых трех авторов (школьниками, прошедшими отбор на проектную смену в Сириусе “Большие Вызовы.

Большие данные” 1–24 июля 2023 года) по результатам, полученным ими на проектной смене.

В работе И.А. Курузова и др. исследовались различные возможные метрики качества устойчивости/связности/надежности коммуникационной сети. Примечательно, что во многих интересных для практики случаях удавалось сводить вычисление соответствующей метрики к выпуклой задаче полуопределенного программирования.

В работе С.А. Садыкова и др. был предложен безградиентный метод решения седловых задач в условиях повышенной гладкости и условия Поляка–Лоясиевича. Была получена линейная скорость сходимости предложенного в статье безградиентного аналога (на базе ядерного сглаживания Поляка–Цыбакова) метода градиентного подъема–спуска. Отметим, что ранее такие результаты были получены только для задач оптимизации (не для седловых задач).

Все статьи имеют математическую составляющую (получены оценки скорости сходимости предложенных методов). Однако подчеркнем, что во всех статьях, и особенно в статье Н.А. Ильтякова и др., важная работа была проделана в части разработки программного средства. В частности, наработки, сделанные в работе Н.А. Ильтякова и др. планируется использовать в отечественном пакете транспортного моделирования, над созданием которого с 2022 года работают старшие соавторы этой статьи.

В заключение хотелось бы отметить, что больше половины работ этого сборника так или иначе мотивирована исследованиями Бориса Теодоровича Поляка (1935–2023). И так получилось не специально. Кажется, это наблюдение является хорошим подтверждением того, что дело Бориса

Теодоровича живет и активно развивается... На днях завершилась традиционная летняя оптимизационная школа, которая с этого года получила имя Б.Т. Поляка. Информация о школе может быть получена с web-странице <https://ssopt.org/>.

Тематика докладов, на наш взгляд, довольно неплохо отражала интересы Бориса Теодоровича в оптимизации и управлении и может послужить хорошим дополнением к затронутым в данном спец. выпуске темам.

## Introduction

**A.V. Gasnikov<sup>a,b,c</sup>**

*<sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

*<sup>b</sup>Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)  
Bolshoi Karetny lane, 19, build. 1, Moscow, 127051 Russia*

*<sup>c</sup>Caucasian Mathematical Center of the Adyghe State University  
Pervomaiskaya st, 208, Maykop, Republic of Adyghea, 385016 Russia*

УДК 519.85

## АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОТНОСИТЕЛЬНО ГЛАДКИМИ И ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© 2023 г. С. С. Аблаев<sup>a,b,\*</sup> (ORCID: 0000-0002-9927-6503),  
Ф. С. Стонякин<sup>a,b,\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-9250-4438), М. С. Алкуса<sup>a,c,\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0001-5470-0182),  
Д. А. Пасечнюк<sup>a,d,\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-1208-1659)

<sup>a</sup>Московский физико-технический институт,

141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия

<sup>b</sup>Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,

295007, г. Симферополь, проспект академика Вернадского, 4, Россия

<sup>c</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,

101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Россия

<sup>d</sup>Исследовательский центр доверенного искусственного интеллекта ИСП РАН,

109004, г. Москва, ул. Александра Солженицына, 25, Россия

\*E-mail: seydamet.ablaev@yandex.ru

\*\*E-mail: fedyor@mail.ru

\*\*\*E-mail: mohammad.alkousa@phystech.edu

\*\*\*\*E-mail: dmivilensky1@gmail.com

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 15.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Статья посвящена некоторым адаптивным методам для вариационных неравенств с относительно гладкими и относительно сильно монотонными операторами. Отталкиваясь от недавно предложенного проксимального варианта экстраградиентного метода для такого класса задач, мы детально исследуем метод с адаптивно подбираемыми значениями параметров. Доказана оценка скорости сходимости этого метода. Результат обобщен на класс вариационных неравенств с относительно сильно монотонными  $\delta$ -обобщенно гладкими операторами вариационного неравенства. Для задачи гребневой регрессии и вариационного неравенства, связанного с параллелепипедно-симплексными играми, выполнены численные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенной методики адаптивного подбора параметров в ходе реализации алгоритма.

DOI: 10.31857/S013234742306002X, EDN: EIFITN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Свойства относительной гладкости и относительной сильной монотонности для вариационных неравенств были введены довольно недавно в [1] и [2] соответственно как аналоги свойств  $L$ -гладкости и относительной сильной выпуклости для минимизационных задач. В данной работе, отправляясь от неадаптивного варианта проксимального зеркального метода из [2], для относительно гладких относительно сильно монотонных операторов детально исследован адаптивный алгоритм такого типа, анонсированный ранее в трудах конференции “ОРТИМА-2022” [3]. Более того, по аналогии с [1] рассмотрены и аналоги такого подхода на классе вариационных неравенств с относительно сильно монотонными и  $\delta$ -обоб-

щенно гладкими операторами, получены оценки качества выдаваемого решения, описывающие влияние на него параметра  $\delta$ .

Будем рассматривать задачу нахождения решения  $x_*$  (также называемого слабым решением) вариационного неравенства

$$\max_{x \in Q} \langle g(x), x_* - x \rangle \leq 0, \quad (1.1)$$

где  $Q$  – выпуклое замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Предположим, что удовлетворяющее (1.1) решение  $x_*$  существует.

Всюду далее будем предполагать, что нам доступна некоторая выпуклая (вообще говоря, не сильно выпуклая) дифференцируемая проксимальная функция  $d$ , порождающая расстояние, а также со-

ответствующая ей дивергенция (расхождение) Брэгмана

$$V(y, x) := d(y) - d(x) - \langle \nabla d(x), y - x \rangle. \quad (1.2)$$

В работе [4] выделен класс гладких задач относительно произвольной дивергенции Брэгмана (порожденной необязательно сильно выпуклыми  $d$ ) и рассмотрен ряд примеров. Напомним следующий аналог понятия относительной сильной выпуклости функции [5] для вариационных неравенств [2].

**Определение 1.** *Оператор  $g$  называется относительно  $\mu$ -сильно монотонным, где  $\mu > 0$ , если для всяких  $x, y \in Q$  верно неравенство*

$$\mu V(y, x) + \mu V(x, y) \leq \langle g(y) - g(x), y - x \rangle. \quad (1.3)$$

Поясним на следующем примере, почему относительная сильная монотонность оператора вводится именно согласно (1.3).

**Пример 1.** *Если  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  — относительно  $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция*

$$f(x) - f(y) + \mu V(x, y) \leq \langle \nabla f(x), x - y \rangle \quad \forall x, y \in Q, \quad (1.4)$$

то

$$f(y) - f(x) + \mu V(y, x) \leq \langle \nabla f(y), y - x \rangle \quad \forall x, y \in Q. \quad (1.5)$$

После сложения двух последних неравенств получаем  $\forall x, y \in Q$

$$\mu V(x, y) + \mu V(y, x) \leq \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Таким образом, неравенство (1.3) верно при  $g(x) = \nabla f(x)$ , где  $\nabla f(x)$  — градиент  $f$  в точке  $x$ .

Относительно сильно выпуклые функционалы возникают в самых разных ситуациях [5]. Рассмотрение таких задач на ограниченных допустимых множествах естественно приводит к вариационным неравенствам с соответствующим предположением относительной сильной монотонности оператора.

**Пример 2.** *Параллелепипедно-симплексные игры. Рассмотрим задачу централизованного решения вариационного неравенства, связанного с параллелепипедно-симплексными играми (box-simplex games) [2] следующего вида:*

$$\max_{y \in [-1, 1]^n} \max_{z \in \Delta_n} f(y, z), \quad (1.6)$$

$$f(y, z) := z^\top Ay - \langle b, z \rangle + \langle c, y \rangle,$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — положительно определенная матрица,  $a, z \in \Delta_n$ , где  $\Delta_n$  — стандартный единичный симплекс в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Параллелепипедно-симплексные игры обобщают задачу  $\ell_\infty$ -регрессии с параллелепипедными ограничениями, имеющую следующий вид:

$$\min_{y \in [-1, 1]^n} \|Ay - b\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty := \max_k |x_k|, \text{ где } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Приведенная задача эквивалентна задаче (1.1) решения вариационного неравенства, если выбрать для  $x := (y, z)^\top$

$$\hat{g}(x) := (A^\top z + c, b - Ay)^\top. \quad (1.7)$$

Оператор  $\hat{g}$  монотонен, поскольку исходная седловая задача (1.6) является выпуклой по  $y$  (при любом  $z$ ) и вогнутой по  $z$  (при любом  $y$ ).

Рассмотрим оператор  $g$ , его относительно сильно монотонное приближение вида

$$g(x) := (A^\top z + c + \mu_y \nabla_y d(y, z), b - Ay + \mu_z \nabla_z d(y, z))^\top, \quad (1.8)$$

где  $\mu_y, \mu_z > 0$  — некоторые фиксированные параметры с достаточно малыми положительными значениями, а согласно [2] прокс-функция в (1.2) может быть выбрана следующим образом:

$$d(x) = z^\top |A|(y)^2 + 10 \|A\|_\infty \sum_{i=1}^n z_i \ln z_i,$$

где  $|\cdot|$  и  $(\cdot)^2$  действуют покомпонентно,  $\|A\|_\infty := \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$ .

Ясно, что введенный в (1.8) оператор в полученной задаче решения вариационного неравенства —  $\min\{\mu_y, \mu_z\}$  — сильно монотонный относительно выбранной указанным выше способом прокс-функции  $d$ . Поэтому к этой задаче можно непосредственно применить алгоритм 1, что и будет сделано далее в разделе экспериментов.

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу централизованной распределенной минимизации эмпирического риска в предположении схожести слагаемых [6].

**Пример 3.** *Минимизация эмпирического риска.*

Рассмотрим задачу централизованной распределенной минимизации эмпирического риска в предположении схожести слагаемых [6],

$$F(x) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_j(x) = \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \ell(x, z_i^{(j)}) = \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell(x, z_i) \rightarrow \min_{x \in Q}$$

в предположении, что исходные данные представляют из себя набор из  $m$  выборок размера  $n$ , каждая из которых хранится на одном из  $t$  серверов. При этом для достаточно большого  $n$  все  $f_j$  есть  $\mu$ -сильно выпуклые и  $L$ -гладкие (удовлетворяют условию Липшица градиента с константой  $L > 0$ ) функционалы, которые можно считать статистически схожими

[6]. Такая схожесть может быть описана в виде предположения [6] о том, что для всякого  $x$

$$\|\nabla^2 F(x) - \nabla^2 f_j(x)\|_2 \leq \gamma,$$

при всяком  $j$  для некоторого достаточно малого  $\gamma > 0$ . Здесь и далее  $\|A\|_2 := \max_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2$  для евклидовой нормы  $\|\cdot\|_2$ . При этом предполагается, что существует центральный сервер (ему соответствует функционал  $\bar{f}$ ), на который передается информация о градиентах  $f_j$  в текущей точке, но не передается информация о значениях  $f_j$ . В [6] показано, что при таком допущении можно ввести прокс-функцию

$$d(x) := \bar{f}(x) + \frac{\gamma}{2} \|x\|_2^2, \quad (1.10)$$

и для соответствующей дивергенции Брэгмана  $V(y, x) = d(y) - d(x) - \langle \nabla d(x), y - x \rangle$  функция  $F$  будет относительно 1-гладкой и относительно  $\frac{\mu}{\mu + 2\gamma}$ -сильно выпуклой, т.е. для всяких  $x, y \in Q$  верны неравенства

$$F(y) \leq F(x) + \langle \nabla F(x), y - x \rangle + V(y, x),$$

$$F(y) \geq F(x) + \langle \nabla F(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{\mu + 2\gamma} V(y, x).$$

Это означает, что при  $\gamma \ll L$  для задач минимизации эмпирического риска (целевой функционал  $L$ -гладкий и  $\mu$ -сильно выпуклый) можно улучшить оценку

$$O\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\epsilon}\right)$$

сложности неускоренного градиентного метода до

$$O\left(\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) \log \frac{1}{\epsilon}\right),$$

используя, по-прежнему, только информацию первого порядка.

Отметим, что при сопоставимых значениях параметров  $\gamma$  и  $\mu$  (этого ввиду малости  $\gamma$  возможно добиться, к примеру, регуляризацией задачи) такая оценка близка к следующей оценке сложности ускоренных методов:

$$O\left(\sqrt{1 + \frac{\gamma}{\mu}} \log \frac{1}{\epsilon}\right).$$

При этом на каждой итерации метода, выполняемой центральным узлом, доступна информация о градиенте целевого функционала  $F$ , но не доступна информация о значении функционала  $F$ . Доступность информации о градиенте позволяет рассматривать поставленную задачу минимизации эмпирического риска как задачу отыскания решения вариационного неравенства с относительно гладким и относительно сильно монотонным оператором  $g = \nabla F$ . Такой подход позволяет, в частности, предложить метод с полной адаптивной настройкой на параметр гладкости задачи (1.9), чего не удалось добиться для метода в [6].

Статья состоит из введения, заключения и трех основных разделов. В разделе 2 рассматривается адаптивный алгоритм 1 для вариационных неравенств с относительно гладким и относительно сильно монотонным оператором. Показано, что увеличение количества отрешиваний вспомогательных подзадач, вызванное адаптивностью, не критично влияет на количество итераций. Раздел 3 содержит обобщение результатов раздела 2 на случай, когда оператор вариационного неравенства удовлетворяет условию  $\delta$ -обобщенной гладкости [1]. В разделе 4 приведены численные эксперименты, демонстрирующие работоспособность адаптивного подбора параметров для алгоритма 1.

## 2. АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОТНОСИТЕЛЬНО ГЛАДКИМ СИЛЬНО МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В этом разделе, отталкиваясь от недавно предложенного в работе [2] метода, мы рассмотрим анонсированный в [3] алгоритм 1 без использования техники рестартов в случае относительно гладкого сильно монотонного оператора. Напомним, что оператор  $g$  называется  $L$ -гладким, если при любых  $x, y, z \in Q$  справедливо следующее неравенство

$$\langle g(y) - g(z), x - z \rangle \leq LV(x, z) + LV(z, y), \quad (2.1)$$

где  $V(\cdot, \cdot)$  – это дивергенция Брэгмана.

---

**Алгоритм 1.** Адаптивный метод первого порядка для вариационных неравенств с относительно сильно монотонными операторами

---

**Require:**  $x_0 \in Q, L_0 > 0, \mu > 0, d(\cdot), V(\cdot, \cdot)$ .

1:  $z_0 = \operatorname{argmin}_{u \in Q} d(u)$ .

2: **for**  $k \geq 0$  **do**

3: Найти наименьшее целое  $i_k \geq 0$  такое, что

$$\begin{aligned} &\langle g(z_k) - g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle \leq \\ &\leq L_{k+1} (V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $L_{k+1} = 2^{i_k - 1} L_k$ , и

$$w_k = \operatorname{arg min}_{y \in Q} \left\{ \left\langle \frac{1}{L_{k+1}} g(z_k), y \right\rangle + V(y, z_k) \right\}, \quad (2.3)$$

$$z_{k+1} = \arg \min_{z \in Q} \left\{ \left\langle \frac{1}{L_{k+1}} g(w_k), z \right\rangle + V(z, z_k) + \frac{\mu}{L_{k+1}} V(z, w_k) \right\}. \quad (2.4)$$

4: end for

Ensure:  $z_k$ .

**Теорема 1.** Пусть  $g$  —  $\mu$ -относительно сильно монотонный оператор и  $z_*$  — точное решение вариационного неравенства (1.1). Тогда для алгоритма 1 верно следующее неравенство:

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \prod_{i=0}^k \left( 1 + \frac{\mu}{L_{i+1}} \right)^{-1} V(z_*, z_0). \quad (2.5)$$

Если, кроме этого,  $L_0 \leq 2L$ , то имеет место неравенство

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left( 1 + \frac{\mu}{2L} \right)^{-(k+1)} V(z_*, z_0). \quad (2.6)$$

*Доказательство.* Для  $w_k$  и  $z_{k+1}$ ,  $\forall k \geq 0$ , в (2.3) и (2.4) имеем

$$\frac{1}{L_{k+1}} \langle g(z_k), w_k - z_{k+1} \rangle \leq V(z_{k+1}, z_k) - V(z_{k+1}, w_k) - V(w_k, z_k) \quad (2.7)$$

и

$$\frac{1}{L_{k+1}} \langle g(w_k), z_{k+1} - z_* \rangle \leq V(z_*, z_k) - V(z_*, z_{k+1}) - V(z_{k+1}, z_k) + \frac{\mu}{L_{k+1}} (V(z_*, w_k) - V(z_*, z_{k+1})). \quad (2.8)$$

После сложения (2.7) и (2.8) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L_{k+1}} (\langle g(z_k), w_k - z_{k+1} \rangle + \langle g(w_k), z_{k+1} - z_* \rangle) \leq \\ & \leq -(V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)) + V(z_*, z_k) - \\ & - V(z_*, z_{k+1}) + \frac{\mu}{L_{k+1}} (V(z_*, w_k) - V(z_*, z_{k+1})). \end{aligned}$$

Используя неравенство (2.2), имеем

$$\langle g(z_k), z_{k+1} - z_k \rangle \leq \langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle + \langle g(z_k), w_k - z_k \rangle + L_{k+1} (V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)),$$

следовательно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L_{k+1}} (\langle g(w_k), w_k - z_* \rangle - \mu V(z_*, w_k)) \leq \\ & \leq V(z_*, z_k) - \left( 1 + \frac{\mu}{L_{k+1}} \right) V(z_*, z_{k+1}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V(z_*, z_k) \geq \left( 1 + \frac{\mu}{L_{k+1}} \right) V(z_*, z_{k+1}),$$

или

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left( 1 + \frac{\mu}{L_{k+1}} \right)^{-1} V(z_*, z_k).$$

Далее, по рекурсии

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \prod_{i=0}^k \left( 1 + \frac{\mu}{L_{i+1}} \right)^{-1} V(z_*, z_0).$$

Учитывая, что  $L_i \leq 2L$ ,  $\forall i$ , получаем

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left( 1 + \frac{\mu}{2L} \right)^{-(k+1)} V(z_*, z_0). \quad \square$$

**Замечание 1.** Предложенный подход позволяет настраиваться на подходящие локальные параметры  $L_{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) на итерациях алгоритма 1. Однако при этом возможно увеличение числа обращений к вспомогательной подпрограмме п. 3 листинга. Тем не менее можно показать, что такое увеличение не критично. Действительно, ясно, что при условии  $L_0 \leq 2L$  имеем  $L_{k+1} \leq 2L$ . Тогда  $L_{k+1} = 2^{i_k-2} L_k$  (где  $i_k$  — количество вспомогательных шагов п. 3 листинга алгоритма 1 на  $k$ -й итерации). Далее, мы

получаем  $\frac{L_{k+1}}{L_k} = 2^{i_k-2}$ , откуда

$$\frac{L_N}{L_0} = \frac{L_N}{L_{N-1}} \frac{L_{N-1}}{L_{N-2}} \dots \frac{L_1}{L_0} = 2^{i_0+i_1+\dots+i_{N-1}-2N}. \quad (2.9)$$

С другой стороны,

$$\frac{2L}{L_0} \geq \frac{L_N}{L_0} = 2^{i_0+i_1+\dots+i_{N-1}-2N}, \quad (2.10)$$

откуда получаем

$$i_0 + i_1 + \dots + i_{N-1} \leq 2N + \log_2 \frac{2L}{L_0}. \quad (2.11)$$

Это означает, что среднее количество обращений к п. 3 листинга алгоритма 1 сопоставимо с общим количеством итераций  $N$ . Если вместо  $L_0 \leq 2L$  можно допустить лишь  $L_0 \leq CL$  для некоторой  $C > 0$ , то это приведет лишь к изменению констант в рассуждениях выше, а принципиальный вывод сохранится.

Для примера 1 замечание 2 означает, что адаптивность не может привести к резкому росту числа коммуникаций центрального узла сети с периферийными.

### 3. ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА НА ЗАДАЧИ С $\delta$ -ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ ГЛАДКОСТИ ОПЕРАТОРА ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА

В этом разделе мы детально обоснуем анонсированные в [3] теоретические результаты для двух

вариантов алгоритма 1 в случае, когда оператор  $g$  удовлетворяет следующему условию обобщенной гладкости:

$$\langle g(y) - g(z), x - z \rangle \leq LV(x, z) + LV(z, y) + \delta \quad (3.1)$$

для некоторого фиксированного  $\delta > 0$  при произвольных  $x, y, z \in Q$ . Параметр  $\delta$  указывает на возможность применения рассматриваемых подходов на классе задач с обобщенным свойством относительной гладкости для вариационного неравенства. Например, такое обобщение позволяет применять рассматриваемую в этой статье методику к вариационным неравенствам с некоторыми типами нелипшициевых операторов и седловым задачам с некоторыми типами обобщенно гладких функционалов. Более подробно мотивирующие примеры приведены в статье [1] и докладе на конференции [3].

Рассмотрим следующий алгоритм 2 и докажем для него следующий результат, анонсированный в [3].

---

**Алгоритм 2.** Адаптивный метод для вариационных неравенств с  $\delta$ -обобщенно гладкими и относительно сильно монотонными операторами

---

**Require:**  $x_0 \in Q, \delta > 0, L_0 > 0, \mu > 0, d(\cdot), V(\cdot, \cdot)$ .

1:  $z_0 = \arg \min_{u \in Q} d(u)$ .

2: **for**  $k \geq 0$  **do**

3: Найти наименьшее целое  $i_k \geq 0$  такое, что

$$\begin{aligned} \langle g(z_k) - g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle &\leq \\ &\leq L_{k+1}(V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)) + \delta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $L_{k+1} = 2^{i_k-1} L_k$ , и

$$w_k = \arg \min_{y \in Q} \left\{ \left\langle \frac{1}{L_{k+1}} g(z_k), y \right\rangle + V(y, z_k) \right\}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} z_{k+1} = \arg \min_{z \in Q} \left\{ \left\langle \frac{1}{L_{k+1}} g(w_k), z \right\rangle + V(z, z_k) + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{L_{k+1}} V(z, w_k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

4: **end for**

**Ensure:**  $z_k$ .

---

**Теорема 2.** Пусть  $g$  —  $\mu$ -относительно сильно монотонный оператор и  $z_*$  — точное решение вариационного неравенства (1.1). Тогда для алгоритма 2 справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} V(z_*, z_{k+1}) &\leq \prod_{i=1}^{k+1} \left( 1 + \frac{\mu}{L_i} \right)^{-1} V(z_*, z_0) + \\ &+ \frac{\delta}{L_{k+1} + \mu} + \sum_{j=1}^k \frac{\delta}{L_j + \mu} \prod_{i=j+1}^{k+1} \left( 1 + \frac{\mu}{L_i} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Для  $w_k$  и  $z_{k+1}$  при всяких  $k \geq 0$  из (3.3) и (3.4) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(z_k), w_k - z_{k+1} \rangle &\leq V(z_{k+1}, z_k) - \\ &- V(z_{k+1}, w_k) - V(w_k, z_k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(w_k), z_{k+1} - z_* \rangle &\leq V(z_*, z_k) - V(z_*, z_{k+1}) - \\ &- V(z_{k+1}, z_k) + \frac{\mu}{L_{k+1}} (V(z_*, w_k) - V(z_*, z_{k+1})). \end{aligned} \quad (3.7)$$

После сложения (3.6) и (3.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{k+1}} (\langle g(z_k), w_k - z_{k+1} \rangle + \langle g(w_k), z_{k+1} - z_* \rangle) &\leq \\ &\leq -(V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)) + V(z_*, z_k) - \\ &- V(z_*, z_{k+1}) + \frac{\mu}{L_{k+1}} (V(z_*, w_k) - V(z_*, z_{k+1})). \end{aligned}$$

Используя неравенство (3.2), получим

$$\begin{aligned} \langle g(z_k), z_{k+1} - z_k \rangle &\leq \langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle + \\ &+ \langle g(z_k), w_k - z_k \rangle + L_{k+1}(V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)) + \delta, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{k+1}} (\langle g(w_k), w_k - z_* \rangle - \mu V(z_*, w_k) - \delta) &\leq \\ &\leq V(z_*, z_k) - \left( 1 + \frac{\mu}{L_{k+1}} \right) V(z_*, z_{k+1}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V(z_*, z_k) \geq \left( 1 + \frac{\mu}{L_{k+1}} \right) V(z_*, z_{k+1}) - \frac{\delta}{L_{k+1}},$$

или

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left( 1 + \frac{\mu}{L_{k+1}} \right)^{-1} V(z_*, z_k) + \frac{\delta}{L_{k+1} + \mu}.$$

Далее, применяя рекурсию по  $k$  в последнем неравенстве, приходим к требуемому неравенству

$$\begin{aligned}
V(z_*, z_{k+1}) &\leq \left(1 + \frac{\mu}{L_{k+1}}\right)^{-1} V(z_*, z_k) + \frac{\delta}{L_{k+1} + \mu} \leq \\
&\leq \dots \leq \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 + \frac{\mu}{L_i}\right)^{-1} V(z_*, z_0) + \frac{\delta}{L_{k+1} + \mu} + \\
&+ \sum_{j=1}^k \frac{\delta}{L_j + \mu} \prod_{i=j+1}^{k+1} \left(1 + \frac{\mu}{L_i}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим еще одну вариацию алгоритма 1 для вариационных неравенств с  $\delta$ -обобщенно гладкими операторами. За счет модификации критерия выхода из итерации этот подход позволяет улучшить оценку качества выдаваемого методом решения в части влияния на него значения параметра  $\delta > 0$ .

**Алгоритм 3.** Вариант адаптивного метода для вариационных неравенств с  $\delta$ -обобщенно гладкими и относительно сильно монотонными операторами

**Require:**  $x_0 \in Q$ ,  $\delta > 0$ ,  $L_0 > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $d(\cdot)$ ,  $V(\cdot, \cdot)$ .

1:  $z_0 = \arg \min_{u \in Q} d(u)$ .

2: **for**  $k \geq 0$  **do**

3: Найти наименьшее целое  $i_k \geq 0$  такое, что

$$\begin{aligned}
\langle g(z_k) - g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle &\leq \\
&\leq L_{k+1} (V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)) + L_{k+1} \delta,
\end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $L_{k+1} = 2^{i_k-1} L_k$ , и

$$w_k = \arg \min_{y \in Q} \left\{ \left\langle \frac{1}{L_{k+1}} g(z_k), y \right\rangle + V(y, z_k) \right\}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
z_{k+1} = \arg \min_{z \in Q} \left\{ \left\langle \frac{1}{L_{k+1}} g(w_k), z \right\rangle + V(z, z_k) \right. \\
\left. + \frac{\mu}{L_{k+1}} V(z, w_k) \right\}.
\end{aligned} \quad (3.10)$$

4: **end for**

**Ensure:**  $z_k$ .

Для алгоритма 3 докажем следующий результат, анонсированный в [3].

**Теорема 3.** Пусть  $g$   $\mu$ -относительно сильно монотонный оператор и  $z_*$  — точное решение вариационного неравенства (1.1). Тогда для алгоритма 3 справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
V(z_*, z_{k+1}) &\leq \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 + \frac{\mu}{L_i}\right)^{-1} V(z_*, z_0) + \\
&+ \delta \left(1 + \sum_{j=1}^k \prod_{i=j+1}^{k+1} \left(1 + \frac{\mu}{L_i}\right)^{-1}\right).
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Если, кроме этого,  $L_0 \leq 2L$ , то имеет место неравенство

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left(1 + \frac{\mu}{2L}\right)^{-(k+1)} V(z_*, z_0) + \left(1 + \frac{2L}{\mu}\right) \delta. \quad (3.12)$$

*Доказательство.* Для  $w_k$  и  $z_{k+1}$  при всяких  $k \geq 0$  из (3.9) и (3.10) получаем, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L_{k+1}} \langle g(z_k), w_k - z_{k+1} \rangle &\leq V(z_{k+1}, z_k) - \\
&- V(z_{k+1}, w_k) - V(w_k, z_k),
\end{aligned} \quad (3.13)$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L_{k+1}} \langle g(w_k), z_{k+1} - z_* \rangle &\leq V(z_*, z_k) - V(z_*, z_{k+1}) - \\
&- V(z_{k+1}, z_k) + \frac{\mu}{L_{k+1}} (V(z_*, w_k) - V(z_*, z_{k+1})).
\end{aligned} \quad (3.14)$$

После сложения (3.13) и (3.14) получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L_{k+1}} (\langle g(z_k), w_k - z_{k+1} \rangle + \langle g(w_k), z_{k+1} - z_* \rangle) &\leq \\
&\leq -(V(w_k, z_k) + V(z_{k+1}, w_k)) + V(z_*, z_k) - \\
&- V(z_*, z_{k+1}) + \frac{\mu}{L_{k+1}} (V(z_*, w_k) - V(z_*, z_{k+1})).
\end{aligned}$$

Используя неравенство (3.8), получим

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left(1 + \frac{\mu}{L_{k+1}}\right)^{-1} V(z_*, z_k) + \frac{L_{k+1} \delta}{L_{k+1} + \mu},$$

или

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left(1 + \frac{\mu}{L_{k+1}}\right)^{-1} V(z_*, z_k) + \delta,$$

откуда

$$\begin{aligned}
V(z_*, z_{k+1}) &\leq \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 + \frac{\mu}{L_i}\right)^{-1} V(z_*, z_0) + \\
&+ \delta \left(1 + \sum_{j=1}^k \prod_{i=j+1}^{k+1} \left(1 + \frac{\mu}{L_i}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Далее, если  $L_0 \leq 2L$ , то для всякого натурального  $i$  верно  $L_i \leq 2L$ , получаем

$$V(z_*, z_{k+1}) \leq \left(1 + \frac{\mu}{2L}\right)^{-(k+1)} V(z_*, z_0) + \left(1 + \frac{2L}{\mu}\right) \delta,$$

что и требовалось. □

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данном разделе для иллюстрации работоспособности предложенной выше методики приведем результаты вычислительных экспериментов по применению алгоритма 1 к различным задачам.

Программы для проведения экспериментов были реализованы на Python 3.4, все эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-8550U CPU (1.80GHz, 4 ядра, 8 потоков). Оперативная память компьютера составляла 8 ГБ.

1) Первой была рассмотрена задача решения вариационного неравенства, связанная с параллелепипедно-симплексными играми и описанная в примере 2. Фигурирующие в постановке задачи данные были сгенерированы случайным следующим образом:  $A = BB^T$ ,  $B_{ij}$  есть независимые случайные величины с равномерным распределением вероятностей на  $[0, 0.001]$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^n$  – с равномерным распределением вероятностей на  $[0, 1]$ .

К задаче размерности  $n = 200$  с парами коэффициентов  $\mu_z = \mu_y = 10^{-2}$  и  $\mu_z = 10^{-2}$ ,  $\mu_y = 10^{-6}$  были применены алгоритм 1, соответствующий неадаптивный вариант [2] и обычный экстраградиентный метод. Начальная точка выбиралась случайным образом, была одинаковой для всех запусков и имела компоненты с равномерным распределением вероятностей на  $[0, 1]$ .

Результаты сравнения алгоритмов показаны на рис. 1. В качестве метрики качества для построения кривых сходимости используется зазор, определенный как

$$\text{Gap}(y, z) := \max_{z' \in \Delta_n} f(y, z') - \min_{y' \in [-1, 1]^n} f(y', z)$$

и вычисляемый приблизительно с использованием реализации солвера SLSQP из библиотеки `scipy`. Из рис. 1 видно, что предлагаемый адаптивный алгоритм сходится заметно быстрее как своего неадаптивного варианта алгоритма 1 с постоянным шагом, так и классического экстраградиентного метода.

2) Далее, рассмотрена распределенная централизованная задача гребневой регрессии [7], имеющая структуру (1.9) для

$$f_j(x) := \frac{1}{2s} \|A_j x - b_j\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

для некоторого  $\lambda > 0$ . Таким образом, каждый агент  $j$  владеет в качестве локальных данных матрицей  $A_j \in \mathbb{R}^{s \times n}$  и вектором  $b_j \in \mathbb{R}^s$ . Данные были сгенерированы случайно в соответствии со следующими законами:  $A_j \in \mathbb{R}^{s \times n}$  для каждого  $j=1, \dots, m$  имеет компоненты с экспоненциальным распределением вероятностей с коэффициентом масштаба 1 (в данном случае  $\gamma > 1$ ) и со стандартным распределением Коши (тогда параметр схожести слагаемых  $\gamma = 10^{-2}$  в (4.1)), а элементы  $b_j \in \mathbb{R}^s$  – с равномерным распределением вероятностей на  $[0, 1]$ . В качестве множества  $Q$  выберем евклидов

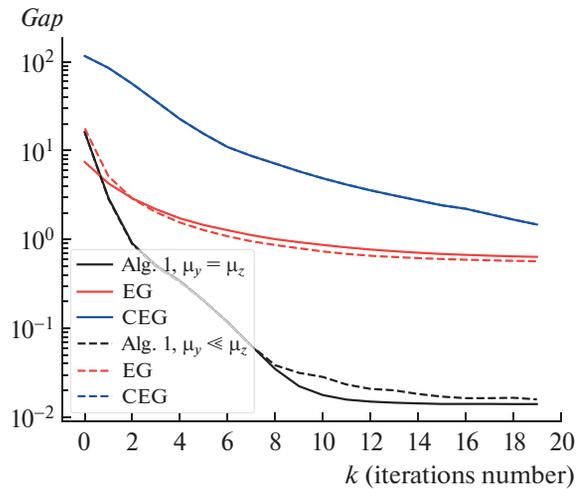


Рис. 1. Результаты эксперимента по сравнению с алгоритмом 1 (Alg. 1) с соответствующим неадаптивным (EG) и классическим экстраградиентным (CEG) методами для задачи (1.1), (1.8) с  $\mu_y = \mu_z$  (сплошная линия) и  $\mu_y \ll \mu_z$  (пунктир).

$\ell_2$ -шар в  $\mathbb{R}^n$  с центром в  $0 \in \mathbb{R}^n$  и радиусом 1. Вслед за [6] выберем в качестве прокс-функции

$$d(x) = f_1(x) + \frac{\gamma}{2} \|x\|_2^2,$$

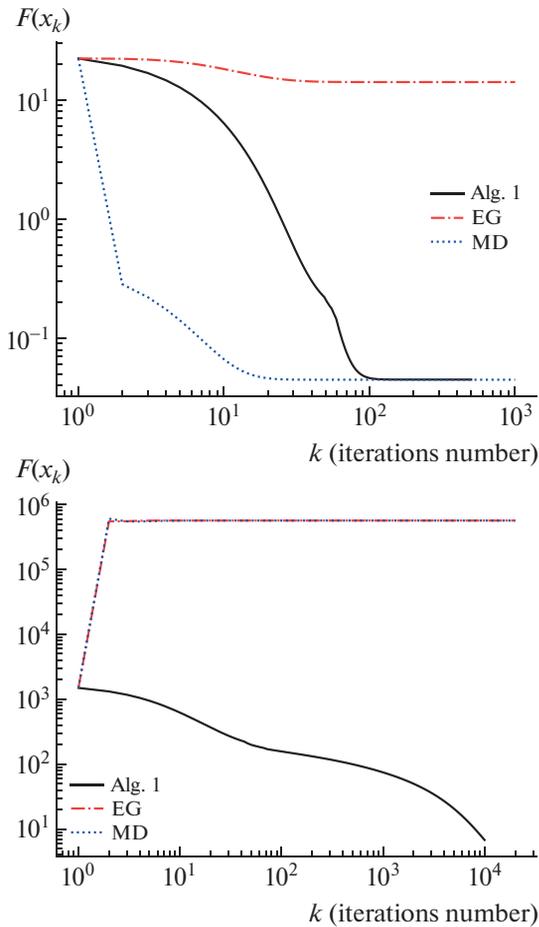
где  $\gamma$  оценивает сверху спектральную норму разности  $\nabla^2 f_1(x) - \nabla^2 F(x)$  (ее наибольшее собственное значение) [6].

Алгоритм 1, так же как соответствующий ему неадаптивный вариант с постоянным шагом и метод зеркального спуска [6], который имеет следующий вид:

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in Q} \{ \langle \nabla F(x_k), x \rangle + V(x, x_k) \}, \quad (4.2)$$

в качестве начальной точки имел  $x_0 = (1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})^T \in \mathbb{R}^n$ , а коэффициенты в задаче были зафиксированы в следующих значениях:  $n = 50, s = m = 100$ .

Результаты сравнения алгоритмов представлены на рис. 2. Построенные кривые сходимости отображают изменение значения целевой функции  $F(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_i(x)$  с увеличением числа итераций алгоритма 1. Из рис. 2 могут быть сделаны следующие наблюдения. Во-первых, среди подходов, основанных на сведениях задачи распределенной оптимизации к задаче решения вариационного неравенства, адаптивный алгоритм 1 сходится за существенно меньшее число итераций, чем его неадаптивный вариант. Во-вторых, оба



**Рис. 2.** Результаты эксперимента по сравнению алгоритма 1 (Alg. 1) с соответствующим неадаптивным методом (EG) и методом зеркального спуска (MD) для задачи (1.9), (4.1) с  $\lambda = 10^{-1}$ ,  $\gamma > 1$  (сверху) и  $\lambda = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 10^{-2}$  (снизу).

соответствующих алгоритма уступают в эффективности подходу, решающему непосредственно исходную задачу оптимизации: можно видеть, что метод зеркального спуска наиболее эффективен среди подходов, примененных к рассмотренной задаче. Заметим также, что в наших экспериментах выбор параметра  $\gamma$  меньший, чем то предписано теоретической оценкой сходимости функционалов, привел к хорошей сходимости именно исследуемого нами алгоритма 1 для вариационных неравенств. При этом оказалось, что наблюдалась расходимость соответствующего ему неадаптивного метода и метода зеркального спуска (4.2). Представляется, что отмеченные факты интересно исследовать дополнительно. На данный момент основной задачей была демонстрация преимуществ адаптивного подбора шага в алгоритме 1 по сравнению с известным ранее его неадаптивным вариантом [2].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован адаптивный метод (алгоритм 1) решения вариационных неравенств с относительно гладкими и относительно сильно монотонными операторами. Получена оценка скорости сходимости рассматриваемого метода с использованием адаптивно подбираемых параметров. В частности, это дает возможность применять подход и полученные результаты к достаточно популярному классу выпукло-вогнутых седловых задач вида ( $Q_x$  и  $Q_y$  – выпуклые замкнутые множества)

$$\min_{x \in Q_x} \max_{y \in Q_y} f(x, y)$$

с соответствующими предположениями о гладкости функционала  $f$ :

$$\|\nabla_x f(x_1, y) - \nabla_x f(x_2, y)\|_2 \leq L_{xx} \|x_1 - x_2\|_2,$$

$$\|\nabla_x f(x, y_1) - \nabla_x f(x, y_2)\|_2 \leq L_{xy} \|y_1 - y_2\|_2,$$

$$\|\nabla_y f(x_1, y) - \nabla_y f(x_2, y)\|_2 \leq L_{xy} \|x_1 - x_2\|_2,$$

$$\|\nabla_y f(x, y_1) - \nabla_y f(x, y_2)\|_2 \leq L_{yy} \|y_1 - y_2\|_2,$$

$\forall x, x_1, x_2 \in Q_x, y, y_1, y_2 \in Q_y$  и норма  $\|\cdot\|_2$  евклидова. Алгоритм 1 позволяет реализовать адаптивную настройку на все параметры гладкости  $L_{xx}, L_{xy}, L_{yy} > 0$ .

При этом показано (замечание 1), что дополнительные процедуры адаптивного подбора параметров в исследованных выше алгоритмах не приводят к резкому росту сложности метода. Рассмотрено приложение к адаптивному методу для задач централизованной распределенной оптимизации (задача минимизации эмпирического риска из примера 1) со сложностью слагаемых.

Также исследована более общая ситуация, когда оператор вариационного неравенства удовлетворяет условию  $\delta$ -обобщенной гладкости [1] (в статье [1] рассматривался случай класса только монотонных операторов). В этой связи рассмотрен алгоритм 2, получен соответствующий результат о сходимости и описано влияние параметра  $\delta$  на качество выдаваемого решения. Проведены численные эксперименты по реализации алгоритма 1 для решения следующих задач: распределенная централизованная задача гребневой регрессии со сложностью функций-слагаемых и задача решения вариационного неравенства, связанного с параллелепипедно-симплексными играми. Представляется, что выполненные эксперименты продемонстрировали достаточно хорошую эффективность алгоритма 1.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа над разделом 2 выполнена при частичной поддержке программы стратегического академического лидерства “Приоритет-2030” (соглашение № 075-

02-2021-1316 от 30.09.2021). Работа над разделом 4 выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ НШ775.2022.1.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stonyakin F., Tyurin A., Gasnikov A., Dvurechensky P., Agafonov A., Dvinskikh D., Alkousa M., Pasechnyuk D., Artamonov S., Piskunova V.* Inexact Relative Smoothness and Strong Convexity for Optimization and Variational Inequalities by Inexact Model // *Optim. Methods and Software*. 2021. V. 36. № 6. P. 1155–1201.
2. *Cohen M.B., Sidford A., Tian K.* Relative Lipschitzness in Extragradient Methods and a Direct Recipe for Acceleration. arXiv preprint <https://arxiv.org/pdf/2011.06572.pdf> (2020).
3. *Titov A.A., Ablaev S.S., Stonyakin F.S., Alkousa M.S., Gasnikov A.* Some Adaptive First-Order Methods for Variational Inequalities with Relatively Strongly Monotone Operators and Generalized Smoothness. In: *Olenev N., Evtushenko Y., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V., Pospelov I.* (eds) *Optimization and Applications*. OPTIMA 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13781. Springer, Cham, 2022.
4. *Bauschke H.H., Bolte J., Teboulle M.* A descent lemma beyond Lipschitz gradient continuity: first-order methods revisited and applications // *Mathematics of Operations Research*. 2017. V. 42 (1.2). P. 330–348.
5. *Lu H., Freund R.M., Nesterov Y.* Relatively smooth convex optimization by first-order methods, and applications // *SIAM Journal on Optimization*. 2018. V. 28 (1.1). P. 333–354.
6. *Hendrikx H., Xiao L., Bubeck S., Bach F., Massoulié L.* Statistically preconditioned accelerated gradient method for distributed optimization. In *International conference on machine learning*, 4203–4227. PMLR, 2020.
7. *Tian Y., Scutari G., Cao T., Gasnikov A.* Acceleration in Distributed Optimization under Similarity. *Proceedings of The 25th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* // PMLR. 2022. V. 151. P. 5721–5756.
8. *Jin Y., Sidford A., Tian K.* Sharper Rates for Separable Minimax and Finite Sum Optimization via Primal-Dual Extragradient Methods. In *Conference on Learning Theory*, 4362–4415. PMLR, 2022.

## Adaptive Methods or Variational Inequalities with Relatively Smooth and Relatively Strongly Monotone Operators

S. S. Ablaev<sup>a,b</sup>, F. S. Stonyakin<sup>a,b</sup>, M. S. Alkousa<sup>a,c</sup>, and D. A. Pasechnyuk<sup>a,d</sup>

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

<sup>b</sup>*Vernadsky Crimean Federal University Academician  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007 Russia*

<sup>c</sup>*National Research University “Higher School of Economics”  
Myasnitskaya st., 20, Moscow, 101000 Russia*

<sup>d</sup>*Trusted Artificial Intelligence Research Center of ISP RAS  
Alexander Solzhenitsyn st., 25, Moscow, 109004 Russia*

The article is devoted to some adaptive methods for variational inequalities with relatively smooth and relatively strongly monotone operators. Based on the recently proposed proximal version of the extragradient method for this class of problems, we study in detail the method with adaptively selected parameter values. An estimate for the rate of convergence of this method is proved. The result is generalized to a class of variational inequalities with relatively strongly monotone  $\delta$ -generalized smooth variational inequality operators. For the problem of ridge regression and variational inequality associated with box-simplex games, numerical experiments were performed demonstrating the effectiveness of the proposed method of adaptive selection of parameters during the running of the algorithm.

УДК 519.85

## АДАПТИВНЫЙ ВАРИАНТ АЛГОРИТМА ФРАНК–ВУЛЬФА ДЛЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2023 г. Г. В. Айвазян<sup>a,\*</sup> (ORCID: 0009-0008-2625-9332),  
Ф. С. Стонякин<sup>a,b,\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-9250-4438),  
Д. А. Пасечнюк<sup>a,c,\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-1208-1659),  
М. С. Алкуса<sup>a,d,\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0001-5470-0182),  
А. М. Райгородский<sup>a,e,f,\*\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0001-8614-9612),  
И. В. Баран<sup>b,\*\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-2904-1979)

<sup>a</sup>Московский физико-технический институт,  
141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия

<sup>b</sup>Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,  
295007, г. Симферополь, проспект академика Вернадского, 4, Россия

<sup>c</sup>Исследовательский центр доверенного искусственного интеллекта ИСП РАН,  
109004, г. Москва, ул. Александра Солженицына, 25, Россия

<sup>d</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,  
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Россия

<sup>e</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,  
119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, Россия

<sup>f</sup>Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета,  
385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208, Россия

\*E-mail: aivazian.grigory25@yandex.ru

\*\*E-mail: fedyor@mail.ru

\*\*\*E-mail: dmivilensky1@gmail.com

\*\*\*\*E-mail: mohammad.alkousa@phystech.edu

\*\*\*\*\*E-mail: raigorodsky@yandex-team.ru

\*\*\*\*\*E-mail: matemain@mail.ru

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 14.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

В данной работе исследовался вариант метода Франк–Вульфа для задач выпуклой оптимизации с адаптивным подбором параметра шага, соответствующего информации о гладкости целевой функции (константа Липшица градиента). Получены теоретические оценки качества выдаваемого методом приближенного решения с использованием адаптивно подобранных параметров  $L_k$ . На классе задач на выпуклом допустимом множестве с выпуклой целевой функцией гарантируемая скорость сходимости предложенного метода сублинейна. Рассмотрено сужение этого класса задач (целевая функция с условием градиентного доминирования) и получена оценка скорости сходимости с использованием адаптивно подбираемых параметров  $L_k$ . Важной особенностью полученного результата является проработка ситуации, при которой можно гарантировать после завершения итерации уменьшение невязки функции не менее чем в 2 раза. В то же время использование адаптивно подобранных параметров в теоретических оценках позволяет применять метод как для гладких, так и для негладких задач при условии выполнения критерия выхода из итерации. Для гладких задач можно доказать, что теоретические оценки метода гарантированно оптимальны с точностью до умножения на постоянный множитель. Выполнены вычислительные эксперименты, и проведено сравнение с двумя другими алгоритмами, в ходе чего была продемонстрирована эффективность алгоритма для ряда как гладких, так и негладких задач.

DOI: 10.31857/S0132347423060031, EDN: GGFHJZ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод типа условного градиента впервые был

рассмотрен для квадратичных оптимизационных задач на многогранниках в [1]. Принципиальное

отличие метода условного градиента (Франк–Вульфа) от классических методов градиентного спуска состоит в том, что вспомогательная задача является линейной. Это удобно для допустимых множеств, для которых эффективно решать вспомогательные линейные подзадачи минимизации. В последние годы методы условного градиента получили широкое распространение в различных задачах анализа данных со структурными ограничениями. В этом контексте можно отметить задачу регрессии LASSO, бинарную классификацию методом опорных векторов (SVM) и др. [2].

Обзор известных к настоящему времени результатов по методам типа условного градиента имеется, например, в недавно вышедшей книге [3]. В частности, известно, что для выпуклых гладких задач оптимальной оценкой скорости сходимости метода Франк–Вульфа является  $O\left(\frac{1}{k}\right)$ , а для негладких задач метод может расходиться (см. [4], Example 1). В данной работе предложен адаптивный вариант метода Франк–Вульфа по аналогии с работами Ю.Е. Нестерова [5]. Этот метод, по-прежнему, оптимален для класса выпуклых гладких задач. А за счет адаптивной настройки потенциально может быть применен и к негладким задачам. Мы отправляемся от [6], где для гладких выпуклых задач предложен метод первого порядка с адаптивным подбором параметров, соответствующих константе гладкости  $L$  целевой функции. Однако в нашей работе впервые детально описаны результаты о теоретической оценке качества выдаваемого решения с использованием адаптивно подбираемых параметров, включая ситуацию, когда невязка функции уменьшается не менее чем в 2 раза на одной итерации. Более того, полученные результаты о качестве выдаваемого решения с адаптивно подбираемыми параметрами потенциально можно применить и к негладким выпуклым задачам, что численно проиллюстрировано в настоящей работе некоторыми примерами.

Работа состоит из введения и трех разделов. В первом разделе приводится постановка задачи, а также описывается классический метод Франк–Вульфа. Во втором разделе описывается исследуемый адаптивный вариант алгоритма Франк–Вульфа, а также проводится теоретический анализ его сходимости для некоторых типов допущений о целевой функции и допустимом множестве задачи. В третьем разделе продемонстрированы результаты проведенных вычислительных экспериментов и сделаны выводы о практической эффективности предложенного алгоритма. В частности, рассмотрены задачи Ферма–Торричелли–Штейнера и о наименьшем покрывающем шаре, которые относятся к разряду негладких, а также приведены результаты для ряда гладких задач:

минимизация взвешенной суммы квадратов компонент вектора, восстановление матрицы, задача классификаторов методом опорных векторов, а также задача логистической регрессии.

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА АЛГОРИТМА ФРАНК–ВУЛЬФА

Будем рассматривать следующую задачу:

$$\min_{x \in Q} f(x), \quad (2.1)$$

где  $Q$  – выпуклое и компактное (т.е. ограниченное и замкнутое) подмножество  $\mathbb{R}^n$  и  $f$  – выпуклая (суб)дифференцируемая функция и  $\nabla f(x)$  – ее (суб)градиент в т.  $x \in Q$ . Всюду далее  $x^*$  обозначает решение задачи (2.1),  $f^* := f(x^*)$  – соответствующее оптимальное значение  $f$ .

### 2.1. Классический метод Франк–Вульфа

Классический метод Франк–Вульфа для минимизации целевой функции  $f$  порождает последовательность допустимых точек  $x_k$ , соответствующую алгоритму 1.

---

**Алгоритм 1.** Классический метод Франк–Вульфа (метод условного градиента)

---

**Require:** Количество итераций  $N$ , начальная точка  $x_0 \in Q$ .

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  **do**
- 2:   Выбрать некоторое  $\alpha_k \in [0, 1]$ ,
- 3:    $s_k = \arg \min_{x \in Q} \{\nabla f(x_k)^\top x\}$ ,
- 4:    $x_{k+1} = (1 - \alpha_k)x_k + \alpha_k s_k$ ,
- 5: **end for**

**Ensure:**  $x_N$ .

---

На  $k$ -й итерации метод выдает точку, минимизирующую скалярное произведение  $g^\top z$  ( $g$  – вектор) на допустимом множестве  $Q$  вида

$$\text{LMO}_Q(g) \in \arg \min_{z \in Q} g^\top z, \quad (2.2)$$

и направление спуска определяется как

$$d_k = d_k^{FW} := s_k - x_k, s_k \in \text{LMO}_Q(\nabla f(x_k)). \quad (2.3)$$

В частности, обновление в п. 4 листинга алгоритма 1 может быть записано в виде

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k (s_k - x_k) = x_k + \alpha_k d_k.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

**Определение 1.** Дифференцируемая функция  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $L$ -гладкой ( $L > 0$ ) относительно некоторой нормы  $\|\cdot\|$ , если для любых  $x, y \in Q$

$$f(y) - f(x) \leq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|^2. \quad (2.4)$$

Для выпуклых функций условие (2.4) эквивалентно тому, что  $f$  имеет  $L$ -липшицев градиент [3], т.е. для двойственной к  $\|\cdot\|$  нормы  $\|\cdot\|_*$  верно

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_* \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in Q.$$

### 2.2. Известные стратегии выбора параметра шага

Напомним известные правила выбора параметра шага  $\alpha_k \in [0, 1]$  для алгоритма Франк–Вульфа 1 (см., например, [2]).

1. Убывающий шаг

$$\alpha_k = \frac{2}{k+2} \quad \forall k \geq 0. \quad (2.5)$$

Это правило часто используется.

2. Точный линейный поиск

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in [0, \alpha_k^{\max}]} \varphi(\alpha), \quad (2.6)$$

$$\text{где } \varphi(\alpha) := f(x_k + \alpha d_k),$$

где шаг  $\alpha$  выбирается минимизацией  $\varphi$ .

3. Шаг Армихо: при этом подходе итеративно сокращается размер шага, чтобы гарантировать достаточное снижение целевой функции. Он представляет собой хороший способ заменить точный линейный поиск в тех случаях, когда он становится слишком дорогостоящим. На практике устанавливаются параметры  $\delta \in (0, 1)$  и  $\gamma \in (0, 1/2)$ , затем пробуются шаги  $\alpha = \delta^m \alpha_k^{\max}$ ,

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \gamma \alpha \nabla f(x_k)^\top d_k, \quad (2.7)$$

и устанавливается  $\alpha_k = \alpha$ .

4. Шаг, который определяется константой Липшица градиента целевой функции.

$$\alpha_k = \alpha_k(L) := \min \left\{ -\frac{\nabla f(x_k)^\top d_k}{L \|d_k\|^2}, \alpha_k^{\max} \right\}, \quad (2.8)$$

где  $L$  – константа Липшица  $\nabla f$ . Размер соответствующего шага может рассматриваться как результат минимизации квадратичной модели  $m_k(\cdot; L)$ , переоценивающей  $f$  вдоль прямой  $x_k + \alpha d_k$ ,

$$m_k(\alpha; L) = f(x_k) + \alpha \nabla f(x_k)^\top d_k + \frac{L \alpha^2}{2} \|d_k\|^2 \geq f(x_k + \alpha d_k),$$

где последнее неравенство следует из стандартной леммы о спуске. Интерес такого выбора шага

для метода Франк–Вульфа заключается, в частности, в возможности предложить достаточные условия убывания на итерации невязки по функции не менее чем в 2 раза.

## 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АДАПТИВНОГО ВАРИАНТА АЛГОРИТМА ФРАНК–ВУЛЬФА

### 3.1. Случай выпуклых задач

Отталкиваясь от правила выбора шага (2.8), рассмотрим адаптивный вариант алгоритма Франк–Вульфа (см. алгоритм 2 ниже). Его отличительная особенность – подбор “локальных” значений параметров  $L_k$  посредством проверки некоторых неравенств на итерациях метода.

#### Алгоритм 2. Адаптивный метод Франк–Вульфа

**Require:** Количество итераций  $N$ , начальная точка  $x_0 \in Q$ ,  $L_{-1} > 0$ .

1: **for**  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  **do**

2:  $L_k = \frac{L_{k-1}}{2}$ .

3:  $s_k = \arg \min_{x \in Q} \{ \nabla f(x_k)^\top x \}$ .

4:  $d_k = s_k - x_k$ .

5:  $\theta_k = \min \left\{ -\frac{\nabla f(x_k)^\top d_k}{L_k \|d_k\|^2}, 1 \right\}$ .

6: **if**  $\theta_k < 1$  **then**

7: **if**  $f(x_k + \theta_k d_k) \leq f(x_k) - \frac{(\nabla f(x_k)^\top d_k)^2}{2L_k \|d_k\|^2}$ .

**then**

8:  $\alpha_k := \theta_k$ ,

9:  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ .

10: **else**

11:  $L_k = 2L_k$  и переходим к п. 4

12: **end if**

13: **else**

14: **if**  $f(x_k + d_k) \leq f(x_k) + \nabla f(x_k)^\top d_k + \frac{L_k}{2} \|d_k\|^2$ , **then**

15:  $\alpha_k := 1$ ,

16:  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ .

17: **else**

18:  $L_k = 2L_k$  и переходим к п. 4

19: **end if**

20: **end if**

21: **end for**

**Ensure:**  $x_N$ .

**Замечание 1.** Если  $f$  имеет  $L$ -липицев градиент и  $L_{-1} \leq 2L$ , то из ([2], Лемма 1) ясно, что  $L_k \leq 2L$ .

**Замечание 2.** Пусть  $f$  имеет  $L$ -липицев градиент и на шаге  $k$  было осуществлено  $i_k$  проверок неравенства из п. 7 или п. 14. Тогда при условии  $L_{-1} \leq 2L$  для алгоритма 2 в силу замечания 3.1 имеет место следующий факт:

$$\begin{aligned} & i_0 + i_1 + \dots + i_N = \\ & = \left(2 + \log_2 \frac{L_1}{L_0}\right) + \dots + \left(2 + \log_2 \frac{L_N}{L_{N-1}}\right) = \\ & = 2N + \log_2 \left(\frac{L_1 L_2 \dots L_N}{L_0 L_1 \dots L_{N-1}}\right) = \\ & = 2N + \log_2 \frac{L_N}{L_0} \leq 2N + \log_2 \frac{2L}{L_0} = O(N). \end{aligned}$$

Таким образом, общее количество проверок неравенства из п. 7 или п. 14 после  $N$  итераций алгоритма 2 составляет  $O(N)$ .

Приведем теоретические результаты о сходимости алгоритма 2.

Рассмотрим следующий параметр (см., например, [2]), который часто рассматривают в качестве меры сходимости, известный как зазор двойственности:

$$G(x) = \max_{s \in Q} \nabla f(x)^\top (x - s). \quad (3.1)$$

Этот параметр всегда неотрицателен и равен нулю только в стационарных точках  $f$ . Если  $f$  – выпуклая функция, то, используя, что  $\nabla f(x)$  – это субградиент, мы достигаем следующего:

$$G(x) \geq -\nabla f(x)^\top (x - x^*) \geq f(x) - f^*. \quad (3.2)$$

Поэтому  $G(x)$  – это верхняя граница зазора оптимальности в точке  $x$ . Отметим, что  $G(x)$  – это частный случай зазора двойственности Фенхеля.

Докажем вспомогательную лемму, приводящую к достаточным условиям убывания на итерации алгоритма невязки по функции не менее чем в 2 раза.

**Лемма 1.** Если  $f$  – выпуклая функция и в алгоритме 2  $\alpha_k = 1$  и  $d_k = d_k^{FW}$ , то при любых  $k \geq 0$

$$f(x_{k+1}) - f^* \leq \frac{1}{2} \min(L_k \|d_k\|^2, f(x_k) - f^*). \quad (3.3)$$

*Доказательство.* Если  $\alpha_k = 1$ , тогда по определениям (2.3) и (3.1) верно, что

$$G(x_k) = -\nabla f(x_k)^\top d_k \geq L_k \|d_k\|^2, \quad (3.4)$$

где последнее неравенство верно в связи с предположением, что  $\alpha_k = 1$ , а значит,  $\theta_k \geq 1$ . Из леммы алгоритма 2 следует, что при  $\alpha_k = 1$  верно следующее:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f^* &= f(x_k + d_k) - f^* \leq \\ &\leq f(x_k) - f^* + \nabla f(x_k)^\top d_k + \frac{L_k}{2} \|d_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая определение  $d_k$  и выпуклость  $f$ , получаем

$$\begin{aligned} f(x_k) - f^* + \nabla f(x_k)^\top d_k &\leq \\ &\leq f(x_k) - f^* + \nabla f(x_k)^\top (x^* - x_k) \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (3.5), верно, что

$$f(x_{k+1}) - f^* \leq \frac{L_k}{2} \|d_k\|^2.$$

На базе неравенства (3.5) имеем

$$\begin{aligned} f(x_k) - f^* + \nabla f(x_k)^\top d_k + \frac{L_k}{2} \|d_k\|^2 &\leq \\ &\leq f(x_k) - f^* - \frac{1}{2} G(x_k) \leq \frac{f(x_k) - f^*}{2}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где в первом неравенстве было использовано (3.4), а во втором  $G(x_k) \geq f(x_k) - f^*$ .  $\square$

Сформулируем теперь основной результат данного раздела.

**Теорема 1.** Пусть  $f$  – выпуклая функция. Тогда для алгоритма 2, при любых  $k \geq 1$  верно

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2D^2 \max_{j \in \{0, k-1\}} L_j}{k+2}. \quad (3.7)$$

Если  $\alpha_k = 1$ , то

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{f(x_{k-1}) - f^*}{2}. \quad (3.8)$$

*Доказательство.* Докажем (3.7) индукцией по  $k$ . Для  $k = 0$  и  $\alpha_0 = 1$  по лемме 3.1 верно, что

$$f(x_1) - f^* \leq \frac{L_0 \|d_0\|^2}{2} \leq \frac{L_0 D^2}{2}.$$

Если  $\alpha_0 < 1$ , то

$$f(x_0) - f^* \leq G(x_0) \leq L_0 \|d_0\|^2 \leq L_0 D^2.$$

Таким образом, базис индукции верен. Из (3.3) очевидно, что для всех  $k$ , таких, что  $\alpha_k = 1$ , шаг индукции выполняется. Если  $\alpha_k < 1$ , то

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f^* &\leq f(x_k) - f^* - \frac{1}{2L_k} \left( \nabla f(x_k)^\top \frac{d_k}{\|d_k\|} \right)^2 \leq \\ &\leq f(x_k) - f^* - \frac{(\nabla f(x_k)^\top d_k)^2}{2L_k D^2} \leq f(x_k) - f^* - \\ &- \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{2L_k D^2} = (f(x_k) - f^*) \left( 1 - \frac{f(x_k) - f^*}{2L_k D^2} \right). \end{aligned}$$

Если  $\frac{f(x_k) - f^*}{2L_k D^2} \leq \frac{1}{k+3}$ , то  $f(x_k) - f^* \leq \frac{2L_k D^2}{k+3}$ .

Отсюда, с учетом  $1 - \frac{(f(x_k) - f^*)}{2L_k D^2} \leq 1$ , получим оценку

$$f(x_{k+1}) - f^* \leq \frac{2L_k D^2}{k+3} \leq \frac{2D^2 \max_{j \in \overline{0, k}} L_j}{k+3}.$$

Если  $\frac{f(x_k) - f^*}{2L_k D^2} > \frac{1}{k+3}$ , то  $f(x_k) - f^* > \frac{2L_k D^2}{k+3}$ , откуда

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f^* &\leq (f(x_k) - f^*) \left(1 - \frac{1}{k+3}\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{2D^2 \max_{j \in \overline{0, k-1}} L_j}{k+2}\right) \left(\frac{k+2}{k+3}\right) = \\ &= \frac{2D^2 \max_{j \in \overline{0, k-1}} L_j}{k+3} \leq \frac{2D^2 \max_{j \in \overline{0, k}} L_j}{k+3}. \end{aligned}$$

Неравенство (3.8) непосредственно вытекает из (3.3).  $\square$

**Замечание 3.** Если при некотором фиксированном  $\Delta > 0$  верно  $f(x_j) - f^* \geq \Delta \forall j \in \overline{0, k-1}$ , то

$$f(x_k) - f^* \leq (f(x_0) - f^*) \prod_{j=0}^{k-1} \varphi_j, \quad (3.9)$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ 1 - \frac{\Delta}{2L_i D^2}, & \text{если } \alpha_i < 1. \end{cases}$$

*Доказательство.* Неравенство (3.9) получается также индукцией по  $k$ . Для  $k = 1$  неравенство тривиально выполняется. Таким образом, базис индукции верен.

При  $\alpha_k = 1$  шаг индукции очевидным образом следует из (3.8). Если же  $\alpha_k < 1$ , то, применяя индуктивное допущение (соответствующую оценку для  $f(x_k) - f^*$ ), получим

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f^* &\leq (f(x_k) - f^*) \left(1 - \frac{f(x_k) - f^*}{2L_k \|d_k\|^2}\right) \leq \\ &\leq (f(x_k) - f^*) \left(1 - \frac{\Delta}{2L_k \|d_k\|^2}\right) \leq (f(x_1) - f^*) \times \\ &\times \prod_{j=0}^{k-1} \varphi_j \left(1 - \frac{\Delta}{2L_k \|d_k\|^2}\right) \leq (f(x_1) - f^*) \prod_{j=0}^k \varphi_j. \end{aligned}$$

Таким образом, шаг индукции выполняется, что завершает доказательство (3.9).  $\square$

Отметим еще пару замечаний, описывающих потенциально возможные ситуации гарантированного уменьшения невязки по функции не менее чем в 2 раза.

**Замечание 4.** Из (3.7) и (3.8) следует тот факт, что если последние  $t$  итераций ( $t < n$ ) верно, что  $\alpha_k = 1$ , то

$$f(x_n) - f^* \leq \frac{1}{2^{m-1}} \frac{D^2 \max_{j \in \overline{0, n-m-1}} L_j}{n-m+2}.$$

**Замечание 5.** Также примечательно отметить факт, что если на  $t \leq n$  итерациях алгоритма 2 верно  $\alpha_k = 1$ , то

$$f(x_n) - f^* \leq \frac{f(x_0) - f^*}{2^t}.$$

Это следует из (3.8) и того, что при  $\alpha_k < 1$

$$f(x_{k+1}) - f^* \leq (f(x_k) - f^*) \left(1 - \frac{f(x_k) - f^*}{2L_k D^2}\right) \leq \leq f(x_k) - f^*.$$

Заметим, что полученные оценки в (3.8), а также в замечаниях 4 и 5 являются отличительными особенностями предлагаемого в нашей работе подхода по сравнению с известными вариантами методов Франк–Вульфа [3] при других подходах к выбору шагов.

Если предыдущие результаты для выпуклых задач дают только гарантии сублинейной скорости сходимости для выпуклых задач, то следующий подраздел посвящен более узкому классу задач, для которых можно установить сходимость предлагаемой адаптивной модификации метода Франк–Вульфа со скоростью геометрической прогрессии.

### 3.2. Случай выпуклой целевой функции, удовлетворяющей условию градиентного доминирования

Допустим, что помимо выпуклости целевая функция удовлетворяет условию градиентного доминирования Поляка–Лоясевича. Оно введено Б.Т. Поляком в 1963 году в качестве условия (не требующего сильной выпуклости) достаточного для доказательства глобальной линейной скорости сходимости градиентного спуска [7], и является частным случаем неравенства С. Лоясевича [8]. Напомним соответствующее понятие.

**Определение 2.** Дифференцируемая функция  $f$  называется  $c$ -градиентно доминируемой для некоторой константы  $c > 0$ , если для всех  $x$  и  $y$  из ее области определения верно следующее неравенство:

$$\frac{f(x) - f(y)}{c^2} \leq \|\nabla f(x)\|_*^2.$$

Среди примеров таких функций можно отметить сильно выпуклые функции, а также задачу логистической регрессии на любом компакте [9]. Для дальнейшего изложения нам понадобится еще одно определение.

**Определение 3.** *Зазором оптимальности функции  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x$  называется*

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{y \in Q} f(x) - f(y) = f(x) - f^*.$$

Далее, приведем утверждение, позволяющее доказать основную теорему параграфа.

**Предложение 1.** *Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^n$  – компактное выпуклое множество диаметра  $D$  и  $f$  – дифференцируемая выпуклая функция. Если существует радиус  $r > 0$ , такой, что  $B(x^*, r) \subset Q$ , где  $x^*$  – точка минимума  $f$ , то для всех  $x \in Q$  верно*

$$\langle \nabla f(x), x - v \rangle \geq r \|\nabla f(x)\|_* \geq \frac{r \langle \nabla f(x), x - x^* \rangle}{\|x - x^*\|},$$

где  $v = \arg \max_{u \in Q} \langle \nabla f(x), x - u \rangle$ .

Доказательство этого утверждения можно найти в [3].

**Теорема 2.** *Пусть  $Q$  – компактное выпуклое множество диаметра  $D$ , а  $f$  – выпуклая  $s$ -градиентно доминируемая функция. Пусть также существует точка минимума  $f$   $x^* \in \text{Int}(Q)$  во внутренней  $Q$ , т.е. существует радиус  $r > 0$ , такой, что  $B(x^*, r) \subset Q$ . Тогда для алгоритма 2 при любых  $k \geq 1$  верно*

$$f(x_k) - f^* \leq (f(x_0) - f^*) \prod_{i=1}^k \varphi_i, \quad (3.10)$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ 1 - \frac{r^2}{L_i c^2 D^2}, & \text{если } \alpha_i < 1. \end{cases}$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай с  $\alpha_k < 1$ . Применяя предложение 3.2 с  $x = x_k$  и  $v = v_k$  и учитывая, что итерация алгоритма 2 заканчивается тем, что выполняется неравенство из п. 7, для всех  $k \geq 0$  получим

$$\begin{aligned} h_k - h_{k+1} &= f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \\ &\geq \frac{(\nabla f(x_k)^\top (x_k - v_k))^2}{2L_k \|d_k\|^2} \geq \\ &\geq \frac{r^2 \|\nabla f(x_k)\|_*^2}{2L_k \|d_k\|^2} \geq \frac{r^2}{2L_k c^2 D^2} h_k. \end{aligned}$$

Отсюда перегруппировкой слагаемых получим:

$$h_{k+1} \leq h_k \left( 1 - \frac{r^2}{2L_k c^2 D^2} \right). \quad (3.11)$$

Утверждение теоремы теперь получается комбинацией результатов (3.8) и (3.11) и очевидной индукции по  $k$ .  $\square$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для демонстрации производительности предложенного алгоритма 2 были проведены численные эксперименты для ряда задач, как гладких, так и негладких. Как правило, метод условного градиента может не сходиться для негладких задач. Однако благодаря адаптивному подбору параметров  $L_k$  в некоторых случаях алгоритм 2 работает, и тогда становятся применимы результаты приведенных в данной работе теоретических результатов. Все вычисления были реализованы на Python 3.10.12 с помощью сервиса Google Colab. Визуализация выполнялась с помощью библиотеки для визуализации данных Matplotlib. Для всех графиков масштаб осей был сделан логарифмическим.

1) Первый из рассматриваемых примеров естественно связан с хорошо известной задачей Ферма–Торричелли–Штейнера. Для этой задачи целевая функция имеет следующий вид:

$$f(x) := \sum_{k=1}^N \|x - A_k\|_2. \quad (4.1)$$

В качестве допустимого множества  $Q$  для этой задачи используются следующие множества:

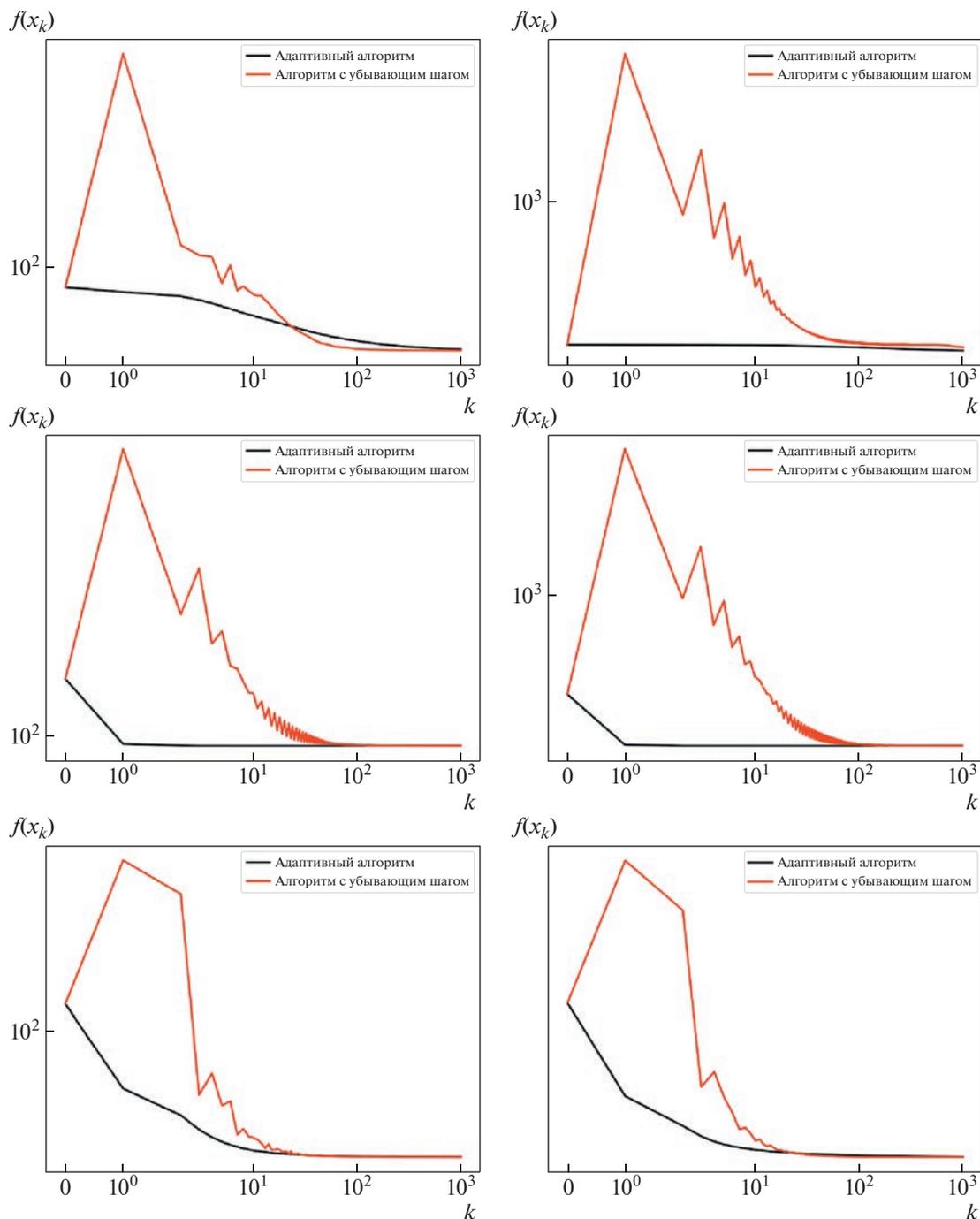
- $\ell_\infty$ -шар с центром в  $0 \in \mathbb{R}^n$  и радиусом  $r > 0$ , то есть

$$B_\infty(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq r\};$$

- $\ell_p$ -шар ( $p \in [1, \infty)$ ) с центром в  $0 \in \mathbb{R}^n$  и радиусом  $r > 0$ , то есть

$$B_p(r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq r^p \right\}.$$

Точки  $A_k, k = 1, \dots, N$ , выбирались случайным образом с нормальным (гауссовским) распределением с центром 0 и стандартным отклонением, равным 1. На  $\ell_1$ -шаре для  $n = 1000$  и  $r = 500$  адаптивный алгоритм 2 показал лучшую сходимость и сошелся к значению  $f = 297.47$ , в то время как алгоритм с убывающим шагом сошелся к значению  $f = 305.93$ . Для  $n = 100$  и  $r = 10$  оба алгоритма показали примерно одинаковую эффективность. На  $\ell_2$ -шаре адаптивный алгоритм 2 достигает хорошего качества приближенного решения всего за несколько итераций, в то время как алгоритм с убывающим шагом показал гораздо более



**Рис. 1.** Результаты эксперимента для целевой функции (4.1) на (сверху вниз)  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  и  $\ell_\infty$ -шаре с  $n = 100$ ,  $r = 10$  (слева) и  $n = 1000$ ,  $r = 500$  (справа).

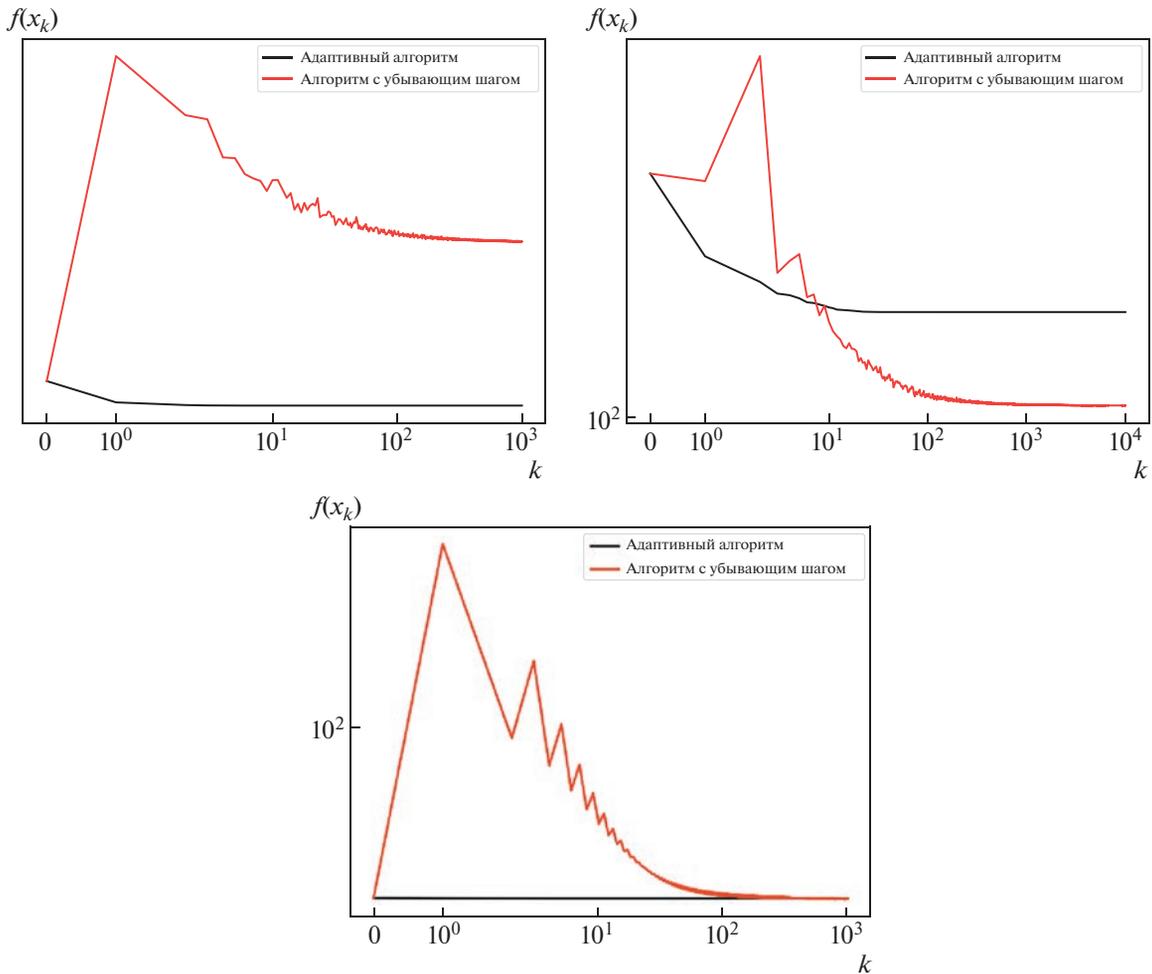
медленную сходимость. На  $\ell_\infty$ -шаре алгоритмы показали примерно одинаковый результат. Однако можно отметить, что на первых итерациях адаптивный алгоритм сработал лучше (рис. 1).

2) Вторая задача естественно связана с хорошо известной задачей о наименьшем покрывающем

шаре. Для этой задачи целевая функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \max_{1 \leq k \leq N} \|x - A_k\|_2^2. \quad (4.2)$$

Точки  $A_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, \dots, N$ , выбирались случайным образом с нормальным (гауссовским) рас-



**Рис. 2.** Результаты эксперимента для целевой функции (4.2) на  $\ell_2$ ,  $\ell_\infty$ -шаре (наверху слева направо) и  $\ell_1$ -шаре (внизу) с  $n = 1000$ ,  $r = 500$ .

пределением с центром 0 и стандартным отклонением, равным 1. Для функции (4.2) на всех рассмотренных вариантах допустимых множеств адаптивный алгоритм на начальных итерациях сходится быстрее алгоритма с убывающим шагом, однако затем останавливается, так как для выхода из итерации константа  $L_k$  становится настолько большой, что шаг  $\alpha_k$  становится равным машинному нулю (рис. 2).

3) Теперь для следующей гладкой функции

$$f(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2, \tag{4.3}$$

где  $a_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$ , мы увидим оценку (3.10). Коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$  выбраны равновероятно среди чисел 1, 2, ..., 10. Результаты представлены на рис. 3.

4) Следующая задача заключается в восстановлении малоранговой матрицы из разреженного набора наблюдаемых матричных входов  $\{U_{ij}\}_{(i,j) \in J}$ ,

где  $J \subseteq \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\}$ . Таким образом, задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} f(X) := \sum_{(i,j) \in J} (X_{ij} - U_{ij})^2, \tag{4.4}$$

где

$$\text{rank}(X) \leq \delta.$$

Здесь параметр  $\delta > 0$  характеризует предположение о ранге восстанавливаемой матрицы. На практике для упрощения ограничение на ранг матрицы заменяется ограничением на ядерную норму матрицы, где ядерная норма  $\|X\|_*$  матрицы  $X$  равна сумме ее сингулярных значений. Таким образом, мы получаем следующую задачу выпуклой оптимизации:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} f(X) := \sum_{(i,j) \in J} (X_{ij} - U_{ij})^2, \tag{4.5}$$

где  $\|X\|_* \leq \delta$ .

Допустимое множество представляет собой выпуклую оболочку матриц единичного ранга

$$Q = \{X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} : \|X\|_* \leq \delta\} = \\ = \text{conv}\{\delta uv^\top : u \in \mathbb{R}^{n_1}, v \in \mathbb{R}^{n_2}, \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

Подробнее про задачу см. [10].

Эксперименты были проведены на сгенерированных данных, а также на датасете MovieLens, который представляет из себя матрицу оценок пользователями фильмов [11].

Искусственные данные были сгенерированы в соответствии с моделью  $X = \omega_1 UV^\top + \omega_2 \mathcal{E}$ , где элементы матриц  $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  и  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  выбраны случайным образом с нормальным распределением с матожиданием 0 и стандартным отклонением, равным 1, а скалярные параметры  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  отвечают за соотношение сигнала и шума (SNR), а именно:  $\omega_1 := \frac{1}{\|UV^\top\|_F}$ , а  $\omega_2 := \frac{1}{(SNR\|\mathcal{E}\|_F)}$ ,

где  $\|\cdot\|_F$  обозначает норму Фробениуса матрицы, а именно: для матрицы  $A$  размера  $m \times n$   $\|A\|_F =$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Множество наблюдаемых элементов  $\Omega$  было получено с использованием равномерно случайного сэмпирования элементов с вероятностью  $p$ , где  $p$  — это желаемая доля наблюдаемых элементов. Для эксперимента было выбрано  $m = 250$ ,  $n = 200$ . Используемый датасет MovieLens состоит из 647 строк, соответствующих пользователям и 9300 столбцов, соответствующих фильмам, однако для ускорения вычислений были выбраны только первые 1500 столбцов. На описанной задаче для сгенерированных данных при различных значениях параметров адаптивный алгоритм 2 продемонстрировал лучшую скорость сходимости, чем неадаптивный вариант с постоянным  $L$ , и показал примерно одинаковую эффективность с алгоритмом с убывающим шагом (рис. 4). А на датасете с фильмами адаптивный алгоритм 2 продемонстрировал лучшую динамику, чем неадаптивный алгоритм с убывающим шагом, и сошелся к значению  $f \approx 28601.28$ , в то время как алгоритм с убывающим шагом сошелся к значению  $f \approx 28635.68$ , а неадаптивный к  $f \approx 29604.09$  (рис. 5).

5) Следующий пример связан с методом опорных векторов. Методы опорных векторов представляют собой важный класс инструментов машинного обучения (подробнее, например, тут [12]). Дан размеченный набор точек, обычно называемый тренировочным набором,

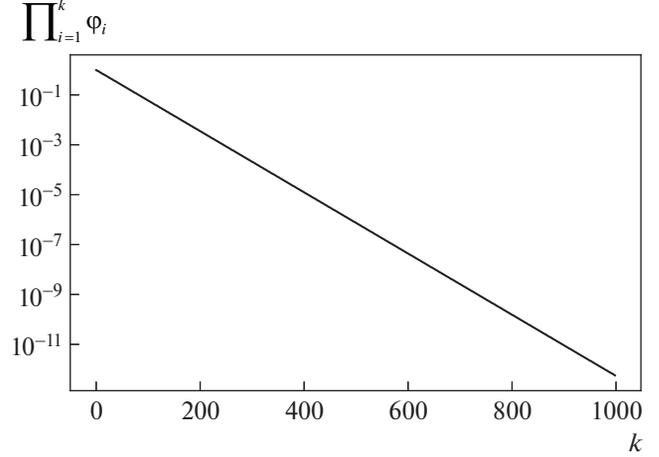


Рис. 3. Оценка (3.10) для целевой функции (4.3) на  $\ell_2$ -шаре (единичный шар) с  $n = 1000$ .

$$TS = \{(p_i, y_i), p_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, n\}. \quad (4.6)$$

Метод опорных векторов состоит в нахождении линейного классификатора  $w \in \mathbb{R}^d$ , такого, что метка  $y_i$  может быть выведена с “наибольшей уверенностью” из  $w^\top p_i$ . Выпуклая квадратичная формулировка этой задачи следующая [13]:

$$\min_{w \in \mathbb{R}^d, \rho \in \mathbb{R}} \rho + \frac{\|w\|^2}{2}, \quad (4.7)$$

где

$$\rho + y_i w^\top p_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

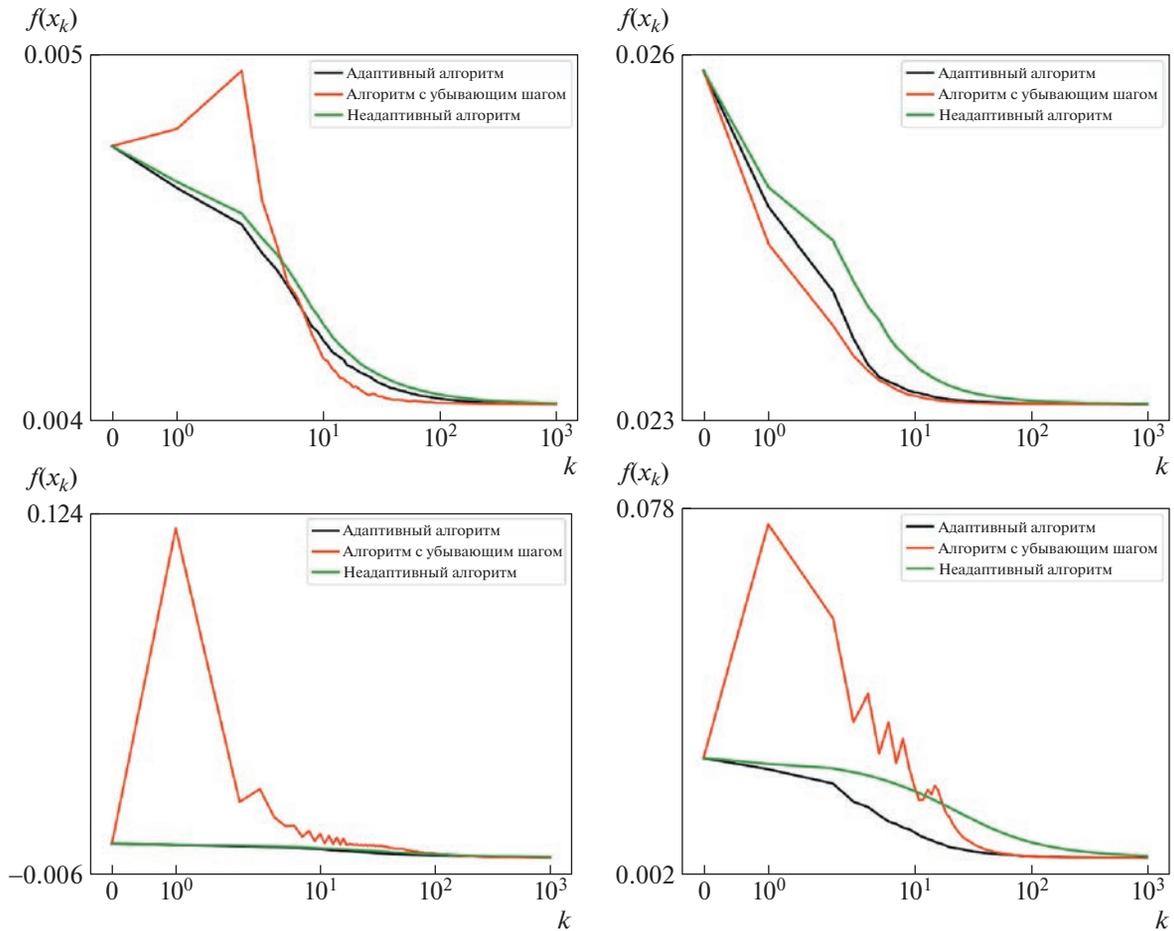
и  $\rho < 0$  может быть тогда и только тогда, когда существует точный линейный классификатор, то есть такой, что  $w^\top p_i = \text{sign}(y_i)$ . Двойственная к (4.7) снова является стандартной задачей квадратичного программирования:

$$\min_{x \in \Delta_n} x^\top A^\top A x, \quad (4.8)$$

где  $A = (y_1 p_1 \dots y_n p_n)$ , а  $\Delta_n$  — единичный  $n$ -мерный симплекс, определяемый как

$$\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 1^\top x = 1\}.$$

В качестве данных для эксперимента использовался датасет из Национального института диабета, заболеваний органов пищеварения и почек, который представляет из себя набор некоторых медицинских измерений для каждого пациента и бинарную целевую переменную — информацию о наличии у пациента диабета [14]. На этой задаче адаптивный алгоритм 2 показал существенно



**Рис. 4.** Результаты эксперимента для целевой функции (4.4) с (слева направо)  $d = 0.08, r = 10, p = 0.01, SNR = 4$ ;  $d = 0.08, r = 10, p = 0.05, SNR = 4$ ;  $d = 0.8, r = 3, p = 0.01, SNR = 4$ ;  $d = 0.8, r = 3, p = 0.05, SNR = 4$ .

лучшую динамику, чем два других алгоритма, и примерно за 500 итераций сошелся к значению  $f \approx 0.01$ , в то время как алгоритм с убывающим шагом за 100000 итераций сошелся лишь к значению  $f \approx 0.146$ , а неадаптивный алгоритм – к  $f \approx 0.155$  (рис. 6).

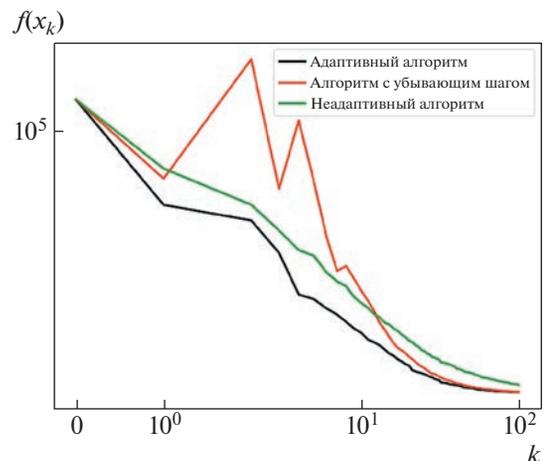
б) Наконец, рассмотрим задачу обучения логистической регрессии для задачи классификации. Ей соответствует целевая функция эмпирического риска с бинарной кросс-энтропией в качестве функции потерь:

$$f(w) := -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i \ln \hat{y}_i(w) + (1 - y_i) \ln(1 - \hat{y}_i(w))), \quad (4.9)$$

$$\hat{y}_i(w) := \frac{1}{1 + \exp(-\langle X_i, w \rangle)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

в которой  $\hat{y}_i \in (0, 1]$  имеет смысл предсказания моделью логистической регрессии, параметризованной весами  $w \in \mathbb{R}^n$ , целевой переменной,

$X_i \in \mathbb{R}^n$  – вектор признакового описания  $i$ -го объекта набора данных,  $y_i \in \{0, 1\}$  – значение целевой



**Рис. 5.** Результаты эксперимента для целевой функции (4.4).

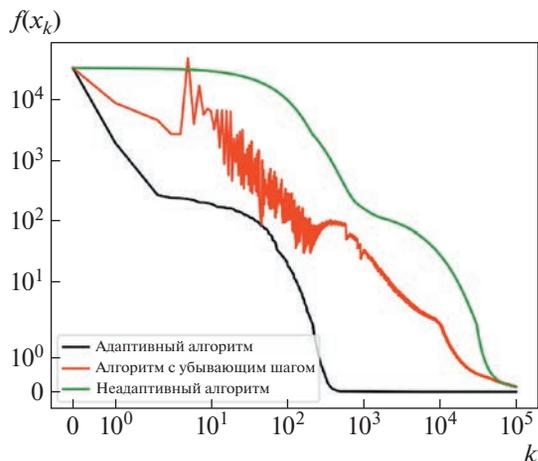


Рис. 6. Результаты эксперимента для целевой функции (4.8).

переменной для  $i$ -го объекта,  $m$  — число объектов в наборе данных. В качестве дополнительного ограничения, накладываемого на  $w$ , требуется выполнение условия  $w \in B_2(r)$ ,  $r > 0$ , которое называется регуляризацией Иванова и эквивалентно

$\ell_2$ -регуляризации Тихонова [15]. В качестве набора данных для этого эксперимента использовался  $a_1$  из библиотеки LibSVM [16].

Для этой задачи адаптивный алгоритм 2 позволяет достигнуть решения задачи с точностью до неустранимой машинной погрешности за существенно меньшее число итераций, чем неадаптивный алгоритм (левая часть рис. 7). Как можно видеть из графика адаптивно выбираемых значений параметра  $\alpha_i$  (правая часть рис. 7), чем ближе текущая точка к решению задачи, тем чаще удается установить  $\alpha_i$  равным  $\frac{1}{2}$ , вследствие чего гарантировать уменьшение невязки по функции вдвое при соответствующем шаге и ускорить приближение к решению. Свобода выбрать более эффективный коэффициент  $\alpha_i$  на  $i$ -той итераций появляется благодаря адаптивности алгоритма 2.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследован адаптивный вариант метода Франк–Вульфа для задач выпуклой минимизации. Его сходимость была обоснована с точ-

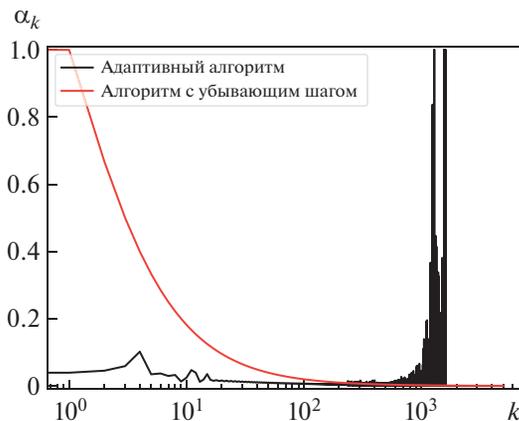
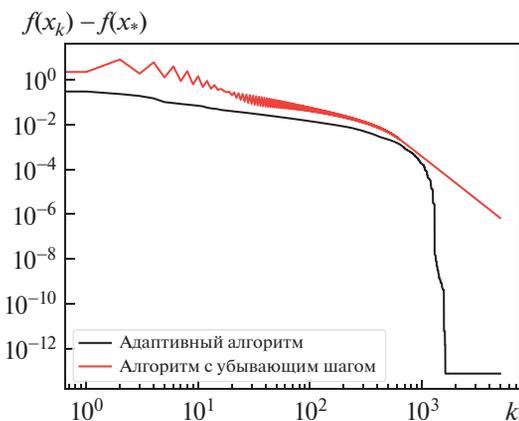
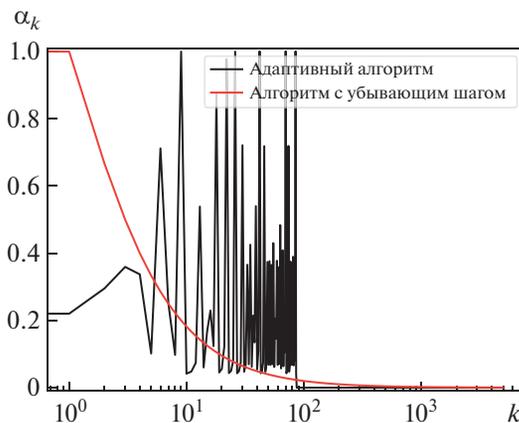
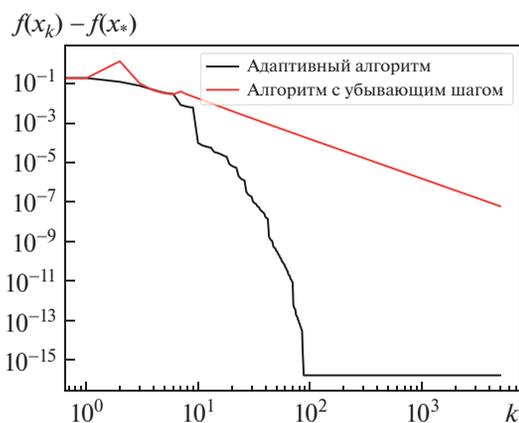


Рис. 7. Результаты эксперимента для целевой функции (4.9) на  $\ell_2$ -шаре с  $n = 119$ ,  $m = 1605$ ,  $r = 1$  (сверху) и  $r = 5$  (снизу).

ки зрения адаптивно подбираемых параметров, соответствующих константе Липшица градиента. Детально проанализирован случай, когда на итерациях алгоритма возможно теоретически гарантировать уменьшение невязки не менее чем в два раза. Для выпуклых гладких задач возможно доказать гарантии сходимости метода с оптимальной сублинейной скоростью. Сходимость метода со скоростью геометрической прогрессии для метода Франк–Вульфа возможна, как известно, при дополнительных предположениях о целевой функции или допустимом множестве. Соответственно, в статье получены также оценки скорости сходимости предлагаемого алгоритма с адаптивно подбираемыми параметрами  $L_k$  в ситуации, когда помимо выпуклости предполагается, что целевая функция удовлетворяет условию градиентного доминирования.

Проведенные эксперименты показали, что адаптивный алгоритм 2 может приводить к лучшим результатам по сравнению со стандартным шагом, зависящим от константы Липшица градиента целевой функции для рассмотренных типов выпуклых гладких задач. Из результатов экспериментов также видно, что зачастую адаптивный алгоритм не уступает в эффективности классическому алгоритму с убывающим шагом, а часто работает намного эффективнее него, причем как для гладких, так и для негладких задач. Так получилось, например, для задачи Ферма–Торричелли–Штейнера, являющейся негладкой, для  $\ell_1$ -шара с  $n = 1000$ ,  $r = 500$  и  $\ell_2$ -шара с  $n = 1000$ ,  $r = 500$  и  $n = 100$ ,  $r = 10$ . А в некоторых случаях, как, например, в задачах, связанных с методом опорных векторов или логистической регрессией, которые являются гладкими, адаптивный алгоритм сходится на порядок быстрее классического алгоритма.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Canon M.D., Cullum C.D.* A tight upper bound on the rate of convergence of Frank–Wolfe algorithm // *SIAM Journal on Control*. 1968. V. 6 (2.4). P. 509–516.
2. *Bomze I.M., Rinaldi F., Zeffiro D.* Frank–Wolfe and friends: a journey into projection-free first-order optimization methods // *4OR-Q J Oper Res*. 2021. V. 19. P. 313–345.
3. *Braun G., Carderera A., Combettes C.W., Hassani H., Karbasi A., Mokhtari A., Pokutta S.* Conditional Gradient Methods. <https://arxiv.org/pdf/2211.14103.pdf>
4. *Nesterov Y.* Complexity bounds for primal–dual methods minimizing the model of objective function // *Math. Program.* 2018. V. 171 (1–2). P. 311–330.
5. *Nesterov Y.* Universal gradient methods for convex optimization problems // *Math. Program. A* 2015. V. 152. P. 381–404.
6. *Pedregosa F., Negiar G., Askari A., Jaggi M.* Linearly convergent Frank–Wolfe with backtracking line-search. In: *International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Proceedings of Machine Learning Research*. 2020. P. 1–10.
7. *Polyak B.T.* Gradient methods for minimizing functionals (in Russian) // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 1963. P. 643–653.
8. *Łojasiewicz S.* A topological property of real analytic subsets (in French) // *Coll. du CNRS, Les équations aux dérivées partielles*. 1963. P. 87–89.
9. *Karimi H., Nutini J., Schmidt M.* Linear convergence of gradient and proximal-gradient methods under the Polyak–Łojasiewicz condition // *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases: European Conference, ECML PKDD 2016, Riva del Garda, Italy, September 19–23, 2016, Proceedings, Part I* 16. Springer International Publishing, 2016. P. 795–811.
10. *Freund R.M., Grigas P., Mazumder R.* An extended Frank–Wolfe method within face directions, and its application to low-rank matrix completion // *SIAM Journal on Optimization*. 2017. V. 27 (2.1). P. 319–346.
11. 100,000 ratings and 3,600 tag applications applied to 9,000 movies by 600 users. Last updated 9/2018. <https://grouplens.org/datasets/movielens/>
12. *Vapnik V.* *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer. 2013.
13. *Clarkson K.L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // *ACM Transactions on Algorithms*. 2010. V. 6 (2.4). P. 1–30.
14. Pima Indians Diabetes Database. <https://www.kaggle.com/datasets/uciml/pima-indians-diabetes-database>
15. *Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.* *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Walter de Gruyter. 2013.
16. LIBSVM Data: Classification (Binary Class). <https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvmtools/datasets/binary.html>
17. *Левунин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // *Журнал вычислит. матем. и матем. физ.* 1966. Т. 6. № 5. С. 787–823.
18. *Candes E.J., Recht B.* Exact matrix completion via convex optimization // *Foundations of Computational Mathematics*. 2009. V. 9 (2.6). P. 717–772.
19. *Combettes C.W., Pokutta S.* Complexity of Linear Minimization and Projection on Some Sets // *Operations Research Letters*. 2021. V. 49 (2.4). P. 565–571.
20. *Frank M., Wolfe P.* An algorithm for quadratic programming // *Naval Research Logistics Quarterly*. 1956. V. 3 (1–2). P. 95–110.

## Adaptive Variant of the Frank-Wolfe Algorithm for Convex Optimization Problems

**G. V. Aivazian<sup>a</sup>, F. S. Stonyakin<sup>a,b</sup>, D. A. Pasechnykh<sup>a,c</sup>,  
M. S. Alkousa<sup>a,d</sup>, A. M. Raigorodsky<sup>a,e,f</sup>, and I. V. Baran<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

<sup>b</sup>*Vernadsky Crimean Federal University Academician  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007 Russia*

<sup>c</sup>*Trusted Artificial Intelligence Research Center of ISP RAS  
Alexander Solzhenitsyn st., 25, Moscow, 109004 Russia*

<sup>d</sup>*National Research University "Higher School of Economics"  
Myasnitskaya st., 20, Moscow, 101000 Russia*

<sup>e</sup>*Moscow State University M. V. Lomonosov, Faculty of Mechanics and Mathematics  
Leninskiye Gory, 1, Moscow, 119991 Russia*

<sup>f</sup>*Caucasian Mathematical Center of the Adyghe State University  
Pervomaiskaya st., 208, Maykop, Republic of Adyghea, 385016 Russia*

In this paper, a variant of the Frank–Wolfe method for convex optimization problems with adaptive selection of the step parameter corresponding to information about the smoothness of the target function (the Lipschitz constant of the gradient) was investigated. Theoretical estimates of the quality of the approximate solution given out by the method using adaptively selected parameters  $L_k$  are obtained. On a class of problems on a convex feasible set with a convex objective function, the guaranteed convergence rate of the proposed method is sublinear. The special subclass of such problems is considered (the objective function with the condition of gradient dominance) and estimate of the convergence rate using adaptively selected parameters  $L_k$  is obtained. An important feature of the obtained result is the elaboration of a situation in which it is possible to guarantee, after the completion of the iteration, a reduction of the discrepancy in the function by at least 2 times. At the same time, the use of adaptively selected parameters in theoretical estimates makes it possible to apply the method for both smooth and non-smooth problems, provided that the exit criterion from the iteration is met. For smooth problems, it can be proved that the theoretical estimates of the method are guaranteed to be optimal up to multiplication by a constant factor. Computational experiments were performed, and a comparison with two other algorithms was carried out, during which the efficiency of the algorithm was demonstrated for a number of both smooth and non-smooth problems.

УДК 519.85

## ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЙ МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА НА ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ ГРАФАХ

© 2023 г. Р. А. Ведерников<sup>a,\*</sup>, А. В. Рогозин<sup>a,\*\*</sup> (ORCID: 0000-0003-3435-268),  
А. В. Гасников<sup>b,c,\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-7386-039X)

<sup>a</sup>Московский физико-технический институт  
141701 г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Россия

<sup>b</sup>Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича  
127051 Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Россия

<sup>c</sup>Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета  
385016 Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, д. 208, Россия

\*E-mail: vedernikov.ra@phystech.edu

\*\*E-mail: aleksandr.rogozin@phystech.edu

\*\*\*E-mail: gasnikov@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 14.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

В данной работе рассматривается обобщение децентрализованного алгоритма Франк–Вульфа на переменные во времени сети, исследуются свойства сходимости алгоритма и проводятся соответствующие численные эксперименты. Меняющаяся сеть моделируется как детерминированная или стохастическая последовательность графов.

DOI: 10.31857/S0132347423060080, EDN: FDENUK

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм Франк–Вульфа [1], (также известен как метод условного градиента или метод Левитина–Поляка [2]) – итеративный алгоритм оптимизации, который часто используется для решения задач выпуклой оптимизации. Он был представлен Маргаритой Франк и Филиппом Вульфом в 1956 году.

**Алгоритм 1.** Классический метод условного градиента

**Require:** Количество итераций  $m$ , начальная точка  $x_0 \in Q$ .

1: **for**  $t = 0, 1, \dots, m - 1$  **do**

2:  $\alpha_t = \frac{2}{t + 1}$

3:  $s_t = \arg \min_{x \in Q} \{\nabla f(x_t)^\top x\}$

4:  $x_{t+1} = (1 - \alpha_t)x_t + \alpha_t s_t$

5: **end for**

**Ensure:**  $x_m$

Основная идея алгоритма Франк–Вульфа заключается в следующем:

Алгоритм инициализируется в пределах допустимого множества  $D$ . После этого начинаются

итерации алгоритма: на каждой итерации мы приближаем целевую функцию линейной функцией в окрестности текущей точки, и ищем точку из допустимого множества, проекция которой на направление антиградиента будет максимальной. Эта точка задает направление шага алгоритма, которое, вообще говоря, может не совпадать с направлением антиградиента, что отличает его от градиентного спуска.

После выбора направления движения, есть два основных способа задать величину шага. Первый – выбрать шаг заранее и задать функцией от номера итерации:

$$\gamma_t = \frac{2}{t + 2}, \quad (1.1)$$

Второй способ – техника short step rule, которая заключается в решении задачи минимизации функции на выбранном направлении по допустимому множеству на каждой итерации:

$$\gamma_t = \arg \min_{\gamma \geq 0} f(x_t + \gamma(s_t - x_t)). \quad (1.2)$$

Подзадача линейной минимизации часто проще, чем исходная задача. Алгоритм может быть особенно полезен, когда допустимая область яв-

ляется компактным и выпуклым множеством в пространстве большой размерности.

В работе рассматривается приложение алгоритма Франк–Вульфа к решению задач на сетях, в силу особенностей топологии не имеющих общего распределяющего центра и требующих применения децентрализованного алгоритма.

## 2. ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольную систему из  $N$  узлов. Узлы могут обмениваться информацией через переменную во времени сеть, каждый узел связан с некоторыми другими, может передавать и получать информацию только от них. Таким образом, систему можно представить последовательностью неориентированных графов  $G^t = (V, E^t)$ , причем в ней нет главного узла, который мог бы агрегировать информацию. Будем требовать, чтобы на каждой итерации граф системы оставался связным.

Будем рассматривать задачу минимизации суммы функции:

$$\min_{x \in D} f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x). \quad (2.1)$$

Эта задача относится к задачам децентрализованной оптимизации. Каждый  $i$ -й узел хранит состояние  $x$ , умеет вычислять свою функцию  $f_i(x)$ , а также ее градиент  $\nabla f(x)$  в этой точке.

Задачи такого типа имеют множество приложений в областях, где ограничена или невозможна агрегация информации из-за ограничений безопасности, архитектуры сети или размеров данных, например, в распределенном машинном обучении [3, 4], системах контроля мощностей [5, 6], контроле и управлении техникой [7].

### 2.2. Коммуникационная матрица

Важную роль в алгоритмах децентрализованной оптимизации играет процесс консенсуса, который реализует обмен информации между узлами.

Коммуникационная матрица [8] – это матрица, используемая в этом процессе, где каждый элемент представляет собой силу связи или вес между двумя узлами. Коммуникационная матрица является важной частью алгоритма консенсуса, который помогает всем узлам достичь согласия относительно оптимального решения.

В процессе децентрализованной оптимизации алгоритм консенсуса работает следующим образом:

- Каждый узел начинает с начальной оценки решения.
- Каждый узел сообщает свою оценку своим соседям.
- Каждый узел обновляет свою оценку на основе полученной от своих соседей информации, взвешенной согласно коммуникационной матрице.

Этот процесс повторяется до тех пор, пока все узлы не достигнут консенсуса, то есть их оценки не сойдутся к одному и тому же значению. Веса в коммуникационной матрице могут быть скорректированы в соответствии с потребностями системы, например, чтобы дать больший вес оценкам узлов, которые известны своей большей точностью или надежностью.

На последовательность коммуникационных матриц накладываются следующие условия:

**Предположение 1.** Для каждого  $t = 0, 1, \dots$  выполняется

1. (Согласованность с графом)  $[W^t]_{ij} = 0$  if  $(i, j) \notin E^t$  и  $i \neq j$ .

2. (Дважды стохастичность)  $W^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}^\top W^t = \mathbf{1}^\top$ .

3. (Свойство сжатия) Найдется такое  $\lambda < 1$ , что для любого  $t = 0, 1, \dots$  выполняется

$$\left\| \left( W^t - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) x \right\| \leq \lambda \|x\|.$$

Построение коммуникационной матрицы такой, чтобы она обладала свойством сжатия, может быть неочевидным. Приведем достаточные условия для выполнения данного свойства. Пусть для любого  $t = 0, 1, \dots$  выполняется:

1.  $W^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}^\top W^t = \mathbf{1}^\top$ .

2. Для любого  $i = 1, \dots, N$  выполняется  $[W^t]_{ii} > 0$ .

3. Если  $(i, j) \in E^t$ , то  $[W^t]_{ij} > 0$ , иначе  $[W^t]_{ij} = 0$ .

4. Существует  $\theta > 0$ , такое что если  $[W^t]_{ij} > 0$ , то  $[W^t]_{ij} \geq \theta$ .

В этой работе мы будем использовать способ выбора весов Metropolis Weights, который имеет следующий вид:

$$[W^t]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\max(\deg(i), \deg(j)) + 1}, & (i, j) \in E^t, \\ 0, & (i, j) \notin E^t, \\ 1 - \sum_{i \neq j} [W^t]_{ij}, & i = j. \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.3. Построение алгоритма

Децентрализованный алгоритм Франк–Вульфа строится из его классической версии [9]. Пусть  $t \in \mathbb{N}$  – номер итерации, а начальная точка  $\theta_0 \in D$  взята из допустимого множества. Напомним, что  $F(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x^i)$  (где  $x$  – матрица, строками которой являются  $(x^i)^\top$ ), тогда централизованный алгоритм действует следующим образом:

$$v_t \in \arg \min_{v \in D^N} \langle \nabla F(x_t), v \rangle, \quad (2.3)$$

$$x_t = x_{t-1} + \gamma_{t-1}(v_{t-1} - x_{t-1}), \quad (2.4)$$

где  $\gamma_{t-1} \in (0, 1]$  – заданная величина шага алгоритма. Заметим, что  $x_t$  – выпуклая комбинация  $x_{t-1}$  and  $v_{t-1}$ , которые лежат в допустимом множестве, поэтому также принадлежит допустимому множеству. Когда шаг алгоритма задается как  $\gamma_t = 2/(t+2)$ , известна оценка скорости сходимости  $O(1/t)$ , если  $F$  является  $L$ -гладкой и выпуклой функцией. Следующим этапом будет децентрализация алгоритма. Для этого необходимо заменить централизованные значения функции и градиента на их локальные приближения. Во-первых, определим среднее координат точек:

$$\bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^i \quad (2.5)$$

и среднее градиентов в координатах узлов:

$$\overline{\nabla}_t F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla f_i(\bar{x}_t^i). \quad (2.6)$$

Эти величины понадобятся нам, чтобы оценить скорость сходимости алгоритма. Во-вторых, определим локальные аппроксимации этих величин, доступные для вычисления в каждом узле.

Вычисление локальной аппроксимации точки консенсуса  $\bar{x}_t^i$  называется шагом консенсуса (consensus step):

$$\bar{x}_t^i = \sum_{j=1}^N W_{ij}^t \cdot x_t^j. \quad (2.7)$$

Здесь реализуется связь соседних узлов, причем информация из несвязанных между собой узлов этими узлами игнорируется, т.к.  $W_{ij}^t = 0$ ,  $(i, j) \notin E^t$ .

Вычисление локальной аппроксимации градиента  $\overline{\nabla}_t^i F$  выполняется по другой схеме. Для этого сначала определим вспомогательный градиент:

$$\nabla^i F = \overline{\nabla}_{t-1}^i F + \nabla f_i(\bar{x}_t^i) - \nabla f_i(\bar{x}_{t-1}^i). \quad (2.8)$$

После того, как каждый узел посчитает свой вспомогательный градиент, выполняется шаг агрегации (aggregate step):

$$\overline{\nabla}_t^i F = \sum_{j=1}^N W_{ij}^t \cdot \nabla^j F. \quad (2.9)$$

В следующей главе приведено описание децентрализованного алгоритма Франка–Вульфа.

## 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

### 3.1. Верхняя оценка скорости сходимости

Как было указано выше, нам нужны величины  $\bar{x}_t$ ,  $\overline{\nabla}_t F$ , чтобы следить, насколько результаты consensus step и aggregation step отличаются от среднего. Введем несколько предположений, чтобы сделать оценку скорости сходимости алгоритма:

**Алгоритм 2.** Децентрализованный метод условного градиента

**Require:** Начальные точки  $x_0^i \in D$  ( $i = 1, \dots, N$ ), целевая функция  $F$ , константа гладкости  $L$ .

1: **for**  $t = 0, 1, \dots$  **do**

2: Консенсусный шаг:

$$\bar{x}_t^i \leftarrow \sum_{j=1}^N W_{ij}^t \cdot x_t^j, \quad \forall i \in V$$

3: Шаг агрегации:

$$\overline{\nabla}_t^i F \leftarrow \sum_{j=1}^N W_{ij}^t \cdot \nabla^j F, \quad \forall i \in V$$

4:  $v_t^i \leftarrow \arg \min_{v \in D} \langle \overline{\nabla}_t^i F, v \rangle$

5:  $\gamma_t \leftarrow 2/(t+2)$

6:  $x_{t+1}^i \leftarrow \bar{x}_t^i + \gamma_t(v_t^i - \bar{x}_t^i)$

7: **end for**

**Предположение 2.** Для каждого  $i = 1, \dots, N$  функция  $f_i$  является выпуклой  $L$ -гладкой, т.е. для всяких  $x, y \in D$  выполняется

$$0 \leq f_i(y) - f_i(x) - \langle \nabla f_i(x), y - x \rangle \leq \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2.$$

**Предположение 3.** Пусть существует  $(\{\Delta p_t\}_{t \geq 1})$ ,  $\forall t \geq 1$  неотрицательная последовательность такая, что  $\Delta p_t \rightarrow 0$  и

$$\max_{i \in [N]} \|\bar{x}_t^i - \bar{x}_t\|_2 \leq \Delta p_t. \quad (3.1)$$

**Предположение 4.** Пусть существует  $(\{\Delta d_t\}_{t \geq 1})$ ,  $\forall t \geq 1$  неотрицательная последовательность такая, что  $\Delta d_t \rightarrow 0$  и

$$\max_{i \in [N]} \|\overline{\nabla}_t^i F - \overline{\nabla}_t F\|_2 \leq \Delta d_t. \quad (3.2)$$

Отметим, что для выполнения предыдущего предположения достаточно определять коммуникационную матрицу способом Metropolis Weights, описанном в (2.2). Отсюда следует [9] следующая оценка:

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения 1, 2, 3, 4, размер шага равен  $\gamma_t = 2/(t+1)$ , а  $C_p, C_g$  – положительные константы, такие что  $\Delta p_t = C_p/t$ ,  $\Delta d_t = C_g/t$ . Тогда

$$F(\bar{x}_t) - F(\bar{x}^*) \leq \frac{8\bar{\rho}(C_g + LC_p) + 2L\bar{\rho}^2}{t+1} \quad (3.3)$$

для любых  $t \geq 1$ , где  $\bar{x}^*$  – оптимальное решение задачи.

Таким образом, при выполнении предположений получаем линейную оценку скорости сходимости алгоритма.

Сформулируем и докажем леммы, которые гарантируют выполнение вышеизложенных предположений. Леммы приведем в общем виде для произвольного параметра  $\alpha \in (0, 1]$ , хотя нам понадобится только  $\alpha = 1$ .

**Лемма 1.** Пусть  $t_0(\alpha)$  – наименьшее положительное целое число такое, что

$$\max_t \lambda_2(W^t) \leq \left( \frac{t_0(\alpha)}{t_0(\alpha) + 1} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{1 + (t_0(\alpha))^{-\alpha}}. \quad (3.4)$$

Зададим шаг  $\gamma_t = 1/t^\alpha$  в алгоритме Франк–Вульфа для  $\alpha \in (0, 1]$ , тогда выполняется:

$$\max_{i \in V} \|\bar{x}_t^i - \bar{x}_t\|_2 \leq \Delta p_t = C_p/t^\alpha, \quad \forall t \geq 1, \quad (3.5)$$

$$C_p = (t_0(\alpha))^\alpha \cdot \sqrt{N\rho}.$$

*Доказательство.* В доказательстве будем писать  $t_0 = t_0(\alpha)$ . Покажем, что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\bar{x}_t^i - \bar{x}_t\|_2^2} \leq \frac{C_p}{t^\alpha}, \quad C_p = (t_0)^\alpha \cdot \sqrt{N\rho}. \quad (3.6)$$

Заметим, что от  $t = 1$  до  $t = t_0$  неравенство выполняется, т.к.  $\bar{x}_t^i, \bar{x}_t$  принадлежат допустимому множеству, и его диаметр ограничен  $\rho$ . Для шага индукции предположим, что неравенство выполняется для  $t \geq t_0$ . По определению,

$$x_{t+1}^i = (1 - t^{-\alpha})\bar{x}_t^i + t^{-\alpha}v_t^i.$$

Обозначим  $\tilde{a}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_t^j$ . Так как для  $\bar{x}_t = \sum_{j=1}^N W_{ij} \cdot x_j$  выполняется

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\bar{x}_t - \bar{x}\|^2} \leq |\lambda_2(W^t)| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \|x_i - \bar{x}\|^2},$$

то получаем

$$\sum_{i=1}^N \|\bar{x}_{t+1}^i - \bar{x}_{t+1}\|_2^2 \leq |\lambda_2(W^t)|^2 \times \\ \times \sum_{j=1}^N \|(1 - t^{-\alpha})(\bar{x}_t^j - \bar{x}_t) + t^{-\alpha}(v_t^j - \tilde{v}_t)\|_2^2$$

Важно отметить, что показанное выше неравенство справедливо только для рассматриваемого шага  $t$ , так как на каждой итерации алгоритма может меняться  $W^t$ , а значит и  $\lambda_2(W^t)$ . С другой стороны, количество случайных графов на  $N$  вершинах конечно, а значит,  $\forall t \lambda_2(W^t) \leq \lambda = \max_t \lambda_2(W^t)$ .

В таком случае,

$$\sum_{i=1}^N \|\bar{x}_{t+1}^i - \bar{x}_{t+1}\|_2^2 \leq \\ \leq \lambda^2 \sum_{j=1}^N \|(1 - t^{-\alpha})(\bar{x}_t^j - \bar{x}_t) + t^{-\alpha}(v_t^j - \tilde{v}_t)\|_2^2 \leq \\ \leq \lambda^2 \sum_{j=1}^N \left( (1 - t^{-\alpha})^2 \|\bar{x}_t^j - \bar{x}_t\|_2^2 + \rho^2 t^{-2\alpha} + \right. \\ \left. + 2t^{-2\alpha}(1 - t^{-\alpha})\rho \|\bar{x}_t^j - \bar{x}_t\|_2 \right) \leq \\ \leq \lambda^2 \sum_{j=1}^N \left( \|\bar{x}_t^j - \bar{x}_t\|_2^2 + \rho^2 t^{-2\alpha} + 2\rho t^{-\alpha} \|\bar{x}_t^j - \bar{x}_t\|_2 \right) \leq \\ \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \lambda^2 t^{-2\alpha} (C_p^2 + N\rho^2) + 2\rho t^{-\alpha} \sqrt{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N \|\bar{x}_t^j - \bar{x}_t\|_2^2} \leq \\ \leq \lambda^2 t^{-2\alpha} (C_p + \sqrt{N}\rho) \leq \left( \lambda C_p \frac{(t_0)^\alpha + 1}{(t_0)^\alpha \cdot t^\alpha} \right)^2.$$

Здесь в  $\textcircled{1}$  был использован тот факт, что для отрицательных  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$  выполняется

$$\sum_{j=1}^N c_j \leq \sqrt{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N c_j^2}.$$

Из (3.4) получаем, что:

$$\lambda \cdot \frac{(t_0)^\alpha + 1}{(t_0)^\alpha \cdot t^\alpha} \leq \frac{1}{(t+1)^\alpha}, \quad (3.7)$$

шаг индукции выполняется, тогда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\bar{x}_t^i - \bar{x}_t\|_2^2} \leq \frac{C_p}{t^\alpha}, \quad C_p = (t_0)^\alpha \cdot \sqrt{N\rho}, \quad (3.8)$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Доказанная лемма гарантирует выполнение условия на скорость сходимости последовательности точек, в следующей лемме рассмотрим скорость сходимости последовательности градиентов.

Напомним обозначения:

$$\nabla_t^i F = \nabla_{t-1}^i F + \nabla f_i(\bar{x}_t^i) - \nabla f_i(\bar{x}_{t-1}^i),$$

$$\overline{\nabla_t^i F} = \sum_{j=1}^N W_{ij}^t \cdot \nabla_t^j F.$$

**Лемма 2.** *Зададим шаг  $\gamma_t = 1/t^\alpha$  в алгоритме Франк–Вульфа для  $\alpha \in (0, 1]$ , каждая из функций  $f_i$   $L$  – гладкая, тогда выполняется:*

$$\begin{aligned} \max \|\overline{\nabla_t^i F} - \overline{\nabla_t F}\|_2 &\leq \frac{C_g}{t^\alpha}, \\ C_g &= 2\sqrt{N}(t_0)^\alpha(2C_p + \bar{\rho})L. \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Заметим, что от  $t = 1$  до  $t = t_0$  неравенство выполняется, что следует из ограниченности градиентов. Для шага индукции предположим, что неравенство выполняется для  $t \geq t_0$ .

Определим вспомогательную переменную  $\delta f_{t+1}^i = \nabla f_i(\bar{x}_{t+1}^i) - \nabla f_i(\bar{x}_t^i)$ . Тогда перепишем  $\nabla_{t+1}^i F = \delta f_{t+1}^i + \nabla_t^i F$ , а также  $\nabla_{t+1}^i F = \sum_{j=1}^N W_{ij} \nabla_{t+1}^j F$ , получаем, оценив  $\lambda_2(W^t)$  аналогично прошлому доказательству:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_{t+1}^i F} - \overline{\nabla_{t+1} F}\|_2^2 \leq \\ &\leq (\lambda_2(W^t))^2 \cdot \sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_t^i F} + \delta f_{t+1}^i - \overline{\nabla_{t+1} F}\|_2^2 \leq \\ &\leq \lambda \cdot \sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_t^i F} + \delta f_{t+1}^i - \overline{\nabla_{t+1} F}\|_2^2. \end{aligned}$$

Аналогично, определим  $\delta F_{t+1} = \overline{\nabla_{t+1} F} - \overline{\nabla_t F}$ , тогда правую часть (3.12) с помощью неравенства Коши–Буняковского–Шварца можно ограничить как

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_t^i F} + \delta f_{t+1}^i - \overline{\nabla_{t+1} F}\|_2^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left( \|\overline{\nabla_t^i F} - \overline{\nabla_t F}\|_2^2 + \|\delta f_{t+1}^i - \delta F_{t+1}\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \|\delta f_{t+1}^i - \delta F_{t+1}\|_2 \cdot \|\overline{\nabla_t^i F} - \overline{\nabla_t F}\|_2 \right). \end{aligned}$$

Кроме того, справедливо

$$\begin{aligned} \|\delta f_{t+1}^i\|_2 &= \|\nabla f_i(\bar{x}_{t+1}^i) - \nabla f_i(\bar{x}_t^i)\|_2 \leq L \|\bar{x}_{t+1}^i - \bar{x}_t^i\|_2 \leq \\ &\leq L \left\| \sum_{j=1}^N W_{ij} ((x_{t+1}^j - \bar{x}_t^j) + (\bar{x}_t^j - \bar{x}_t^i)) \right\|_2 \leq \\ &\leq L \sum_{j=1}^N W_{ij} (t^{-\alpha} \rho + 2C_p t^{-\alpha}) = (2C_p + \rho) L t^{-\alpha}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство записано с помощью результата Леммы 5.

Используя неравенство треугольника, оценим еще одно слагаемое из (3.14):

$$\begin{aligned} \|\delta f_{t+1}^i - \delta F_{t+1}\|_2 &= \left\| \left(1 - \frac{1}{N}\right) \delta_{t+1}^i + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \delta_{t+1}^j \right\|_2 \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \|\delta_{t+1}^i\|_2 + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \|\delta_{t+1}^j\|_2 \leq \\ &\leq 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) (2C_p + \bar{\rho}) L t^{-\alpha} \leq 2(2C_p + \bar{\rho}) L t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Итого, получаем окончательную оценку (3.14):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_t^i F} + \delta f_{t+1}^i - \overline{\nabla_{t+1} F}\|_2^2 \leq \\ &\leq t^{-2\alpha} (C_g^2 + 4N(2C_p + \rho)^2 L^2) + \\ &\quad + t^{-\alpha} 4L(2C_p + \rho) \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_t^i F} - \overline{\nabla_t F}\|_2^2} \leq \\ &\leq t^{-2\alpha} \cdot (C_g + 2L\sqrt{N}(2C_p + \rho))^2 \leq \left( \frac{(t_0)^\alpha + 1}{(t_0)^\alpha \cdot t^\alpha} \cdot C_g \right)^2. \end{aligned}$$

Взяв корень из обеих частей неравенства, получаем:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\overline{\nabla_{t+1}^i F} - \overline{\nabla_{t+1} F}\|_2^2} \leq \lambda \left( \frac{(t_0)^\alpha + 1}{(t_0)^\alpha \cdot t^\alpha} \cdot C_g \right). \quad (3.10)$$

И, с учетом (3.8), окончательно завершаем шаг индукции, откуда следует (3.10).

Таким образом, теорема 1 дает нам верхнюю оценку скорости сходимости алгоритма, а лемма 1 и лемма 2 гарантируют выполнение нужных предположений. Осталось заметить, что для выполнения условия (3.4) достаточно взять

$$t_0 = \left\lceil \frac{2}{1 - \lambda} \right\rceil.$$

Тогда, согласно определениям (3.5) и (3.9), получим

$$LC_p + C_g = O(NL\rho^{-2}\chi^2).$$

Получаем окончательную скорость сходимости.

**Следствие 1.** *Для достижения точности  $\varepsilon$ , т.е. для выполнения условия*

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_N^i) - f(x^*) \leq \varepsilon, \quad (3.11a)$$

$$\max_{i \in [N]} \|\bar{x}_N^i - \bar{x}_N\|_2 \leq \varepsilon, \quad (3.11b)$$

необходимо

$$N = O\left( \frac{1}{(1 - \lambda)^2} \frac{L\rho^{-2}}{\varepsilon} \right)$$

итераций алгоритма 2.

Также заметим, что можно применить консенсусную процедуру, в которой коммуникационная матрица  $W^t$  заменится на последовательность матриц  $W^{t+\tau-1} \dots W^t$ , где  $\tau = \lceil \chi \rceil$ . Это позволит получить следующий результат.

**Следствие 2.** Для достижения точности  $\varepsilon$  (см. (3.11)) с использованием консенсусной процедуры необходимо

$$N_{\text{comm}} = O\left(\frac{1}{1-\lambda} \frac{L\rho^{-2}}{\varepsilon}\right)$$

коммуникационных шагов и

$$N_{\text{orcl}} = O\left(\frac{L\rho^{-2}}{\varepsilon}\right)$$

локальных вызовов линейного минимизационного оракула на каждом узле.

### 3.2. Случайная коммуникационная матрица

Можно провести аналогичные рассуждения, но в случае, когда матрица коммуникации имеет случайное распределение. Доказательство будет строиться на оценке отклонения от консенсуса  $\bar{x}_t$  и  $\overline{\nabla}_t F$ . Так как матрица является стохастической, то во все невязки будут оцениваться по матожиданию. В данном разделе мы не приводим доказательства, так как они во многом повторяют часть с неслучайной матрицей. Введем соответствующие предположения.

**Предположение 5.** На каждом шаге алгоритма матрица  $W^t$  является случайной и имеет распределение  $\mathcal{W}$ . Существует такое  $\lambda < 1$ , что для любого  $t = 0, 1, \dots$  выполняется

1.  $W^t \mathbf{1} = \mathbf{1}, \mathbf{1}^\top W^t = \mathbf{1}^\top$ .
2.  $[W^t]_{ij} = 0$  если  $(i, j) \notin E^t$ .
3. Для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  выполняется

$$\mathbb{E}\left\|\left(W^t - \frac{1}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right)x\right\| \leq \lambda \|x\|.$$

**Предположение 6.** Пусть существует  $(\{\Delta p_t\}_{t \geq 1})$ ,  $\forall t \geq 1$  неотрицательная последовательность такая, что  $\Delta p_t \rightarrow 0$ , тогда

$$\max_{i \in [N]} \mathbb{E}\|\bar{x}_t^i - \bar{x}_t\|_2 \leq \Delta p_t \quad (3.12)$$

**Предположение 7.** Пусть существует  $(\{\Delta d_t\}_{t \geq 1})$ ,  $\forall t \geq 1$  неотрицательная последовательность такая, что  $\Delta d_t \rightarrow 0$ , тогда

$$\max_{i \in [N]} \mathbb{E}\|\overline{\nabla}_t^i F - \overline{\nabla}_t F\|_2 \leq \Delta d_t \quad (3.13)$$

Сформулируем основной результат для случайной матрицы коммуникаций.

**Теорема 2.** Пусть выполняются предположения 2, 5, 6, 7 размер шага равен  $\gamma_t = 2/(t+1)$ , а также каждая из функций  $f_i$  выпуклая и  $L$ -гладкая. Пусть  $C_p, C_g$  – положительные константы, такие что  $\Delta p_t = C_p/t, \Delta d_t = C_g/t$ . Тогда

$$\mathbb{E}F(\bar{x}_t) - F(\bar{x}^*) \leq \frac{8\bar{\rho}(C_g + LC_p) + 2L\bar{\rho}^2}{t+1} \quad (3.14)$$

для любых  $t \geq 1$ , где  $\bar{x}^*$  – оптимальное решение задачи.

Таким образом, при выполнении предположений получаем линейную оценку скорости сходимости алгоритма.

Сформулируем леммы, которые гарантируют выполнение вышеизложенных предположений. Доказательство лемм аналогично доказательствам в разделе 3.1.

**Лемма 3.** Пусть  $t_0$  – наименьшее положительное целое число такое, что

$$\lambda \leq \left(\frac{t_0(\alpha)}{t_0(\alpha)+1}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{1+(t_0(\alpha))^{-\alpha}}. \quad (3.15)$$

Зададим шаг  $\gamma_t = 1/t^\alpha$  в алгоритме Франк–Вульфа для  $\alpha \in (0, 1]$ , тогда выполняется:

$$\max_{i \in V} \mathbb{E}\|\bar{x}_t^i - \bar{x}_t\|_2 \leq \Delta p_t = C_p/t^\alpha, \quad \forall t \geq 1 \quad (3.16)$$

$$C_p = (t_0(\alpha))^\alpha \cdot \sqrt{N\rho} \quad (3.17)$$

**Лемма 4.** Зададим шаг  $\gamma_t = 1/t^\alpha$  в алгоритме Франк–Вульфа для  $\alpha \in (0, 1]$ , каждая из функций  $f_i$   $L$ -гладкая, тогда выполняется:

$$\max_{i \in V} \mathbb{E}\|\overline{\nabla}_t^i F - \overline{\nabla}_t F\|_2 \leq \frac{C_g}{t^\alpha}, \quad (3.18)$$

$$C_g = 2\sqrt{N}(t_0)^\alpha (2C_p + \bar{\rho})L \quad (3.19)$$

Аналогично случаю с детерминированно изменяющейся матрицей, подытожим результаты.

**Следствие 3.** Для достижения точности  $\varepsilon$ , т.е.

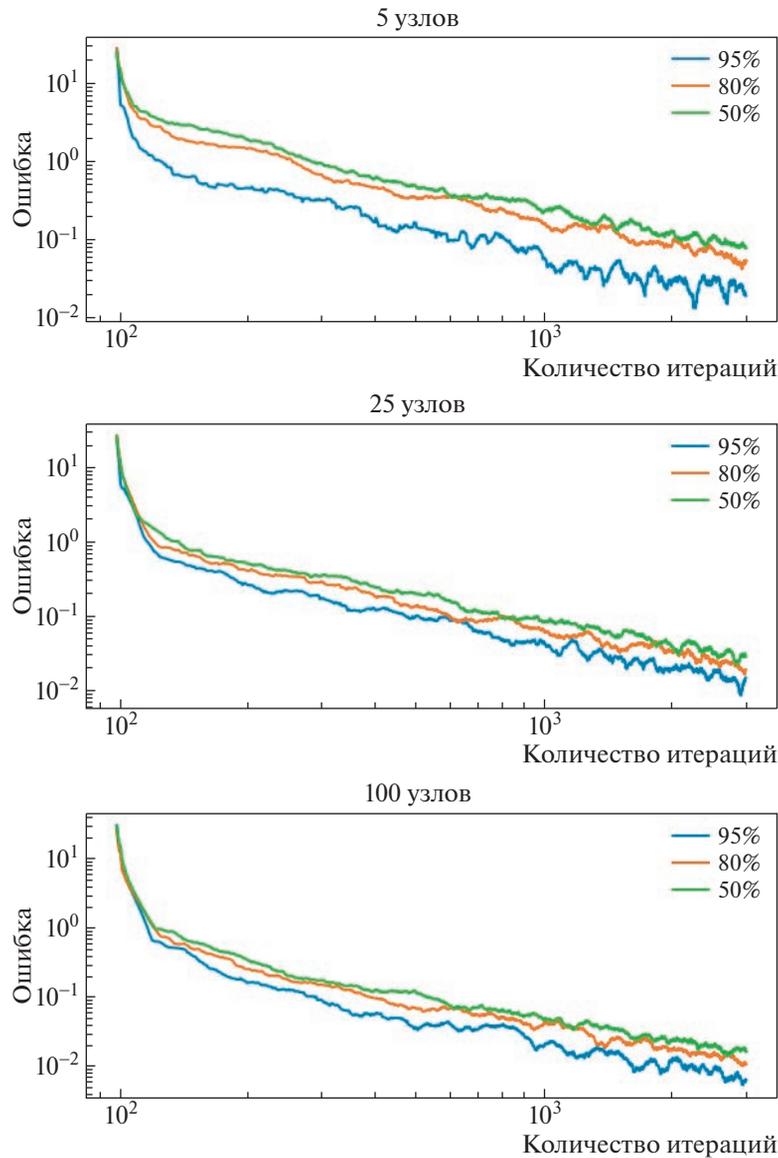
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_N^i)\right] - f(x^*) \leq \varepsilon, \quad (3.20a)$$

$$\max_{i \in [N]} \mathbb{E}\|\bar{x}_N^i - \bar{x}_N\|_2 \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.20b)$$

необходимо

$$N = O\left(\frac{1}{(1-\lambda)^2} \frac{L\rho^{-2}}{\varepsilon}\right)$$

итераций. При использовании консенсусной процедуры необходимо



**Рис. 1.** Синей кривой обозначен график для  $p = 0.95$ , оранжевым – для  $p = 0.8$ , и зеленым – для  $p = 0.5$ . Заметим, что для всех значений вероятностей выполняется  $p > \log N/N$ , что почти наверное гарантирует связность графа [10].

$$N_{comm} = O\left(\frac{1}{1-\lambda} \frac{L\rho^{-2}}{\varepsilon}\right)$$

коммуникационных шагов и

$$N_{orcl} = O\left(\frac{L\rho^{-2}}{\varepsilon}\right)$$

локальных вызовов линейного минимизационного оракула на каждом узле.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Задача лассо-регрессии (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) – разновидность зада-

чи линейной регрессии, метод регуляризации линейной модели (L1-регуляризация). В LASSO к целевой функции добавляется штраф на сумму абсолютных значений параметров модели, что приводит к тому, что коэффициенты признаком с наименьшей информативностью уменьшаются, или, часто, приравниваются к нулю, что отличает метод L1-регуляризации от классической L2-регуляризации.

Использование регуляризации позволяет произвести отбор наиболее важных признаков модели, сделав ее более интерпретируемой.

Ставится задача так: есть выборка из  $n$  наблюдений переменной, значения наблюдений записаны в векторе  $y$ , в матрице  $A$  – значения призна-

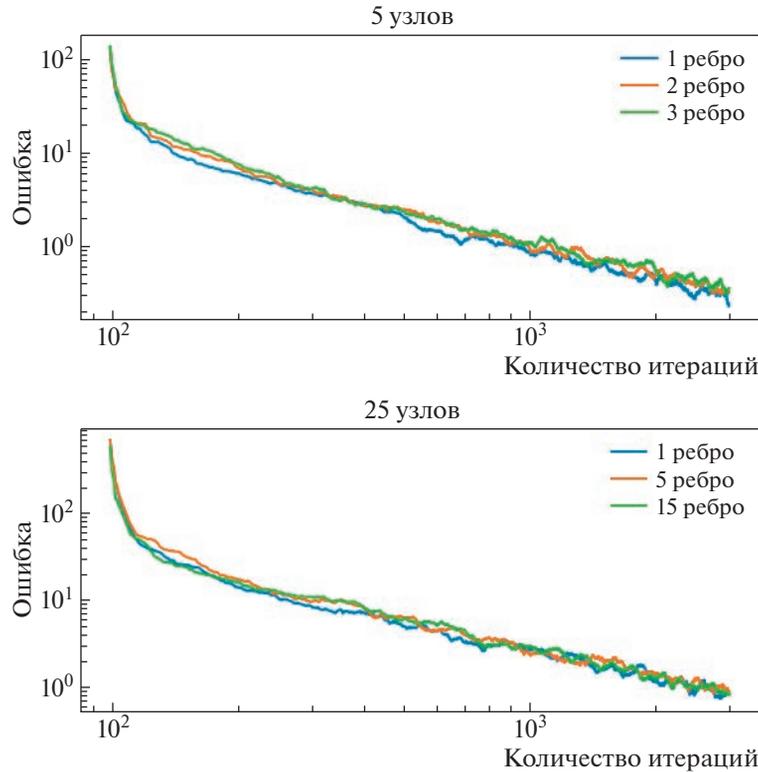


Рис. 2. Изначальный граф сгенерирован с вероятностью появления ребер  $p = 0.5$ .

ков, в векторе  $x$  — параметры (веса) модели, пусть  $\theta$  — штраф на сложность модели.

Тогда задача выглядит следующим образом:

$$F_{LASSO}(x) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \theta \|x\|_1 \rightarrow \min \quad (4.1)$$

Такая постановка задачи эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала на симплексе, что упрощает ее решение.

$$F_{LASSO}(x) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 \rightarrow \min$$

$$\text{s.t. } \|x\|_1 \leq t.$$

Таким образом, действие оракула алгоритма Франк–Вульфа для задачи LASSO можно описать таким образом: алгоритм считает градиент в точке и двигается в сторону, противоположную направлению наибольшей по модулю компоненты градиента.

Опишем гипотезы, которые были проверены при моделировании алгоритма. Во-первых, проверялась зависимость скорости сходимости алгоритма при степенях разреженности графа. Чтобы это сделать, мы воспользовались моделью Эрдеша–Реньи генерации случайных графов, которая заключается в том, что каждое возможное ребро графа генерируется с вероятностью  $p$ .

Итак, для разных значений  $p$  (а значит и для разной разреженности графов) была измерена скорость сходимости алгоритма для одной и той же задачи для  $N = 5$ ,  $N = 25$ ,  $N = 100$  (рис. 1, 2).

Кроме того, была смоделирована ситуация, когда граф, который инициализируется изначально, не генерируется заново на каждой итерации, а меняется слабо, причем количество ребер в нем остается неизменным.

Как видно из графиков, не удается обнаружить зависимости скорости сходимости от количества замененных ребер.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассмотрен метод Франк–Вульфа на переменных во времени графах. С теоретической точки зрения, было рассмотрено два режима изменения графа: детерминированная и стохастическая последовательность графов. Для обоих случаев показано, что алгоритм сходится со скоростью порядка  $O(1/t)$ , где  $t$  — номер итерации. Также были проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-11-00229), <https://rscf.ru/en/project/23-11-00229/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Braun G., Carderera A., Combettes C.W. Hassani H., Karbasi A. Mokhtari A., Pokutta S. arXiv (2022) <https://arxiv.org/pdf/2211.14103.pdf>
2. Левитин Е.С., Поляк Б.Т. Методы минимизации при наличии ограничений. Журнал вычислительной математики и математической физики 6.5. 1966. P. 787–823.
3. Nedic Angelia. Distributed gradient methods for convex machine learning problems in networks: Distributed optimization. IEEE Signal Processing Magazine 37.3. 2020. P. 92–101.
4. Forero Pedro A., Alfonso Cano, and Georgios B. Giannakis. Consensus-based distributed linear support vector machines. Proceedings of the 9th ACM/IEEE International Conference on Information Processing in Sensor Networks. 2010.
5. Gan Lingwen, Ufuk Topcu, and Steven H. Low. Optimal decentralized protocol for electric vehicle charging. IEEE Transactions on Power Systems 28.2. 2012. P. 940–951.
6. Ram Sundhar Srinivasan, Venugopal V. Veeravalli, and Angelia Nedic. Distributed non-autonomous power control through distributed convex optimization. IEEE INFOCOM 2009. IEEE, 2009.
7. Ren Wei, and Randal W. Beard. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control. V. 27. № 2. London: Springer London, 2008.
8. Rogozin A., Gasnikov A., Beznosikov A., Kovalev D. Decentralized convex optimization over time-varying graphs: a survey. arXiv (2022) <https://arxiv.org/pdf/2210.09719.pdf>
9. Wai Hoi-To et al. Decentralized Frank-Wolfe algorithm for convex and nonconvex problems. IEEE Transactions on Automatic Control 62.11. 2017. P. 5522–5537.
10. Райгородский А.М. Модели случайных графов и их применения. Труды Московского физико-технического института, 2010.

## DECENTRALIZED CONDITIONAL GRADIENT METHOD ON TIME-VARIABLE GRAPHS

R. A. Vedernikov<sup>a</sup>, A. V. Rogozin<sup>a</sup>, and A. V. Gasnikov<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia

<sup>b</sup>Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)  
Bolshoi Karetny lane, 19, build. 1, Moscow, 127051 Russia

<sup>c</sup>Caucasian Mathematical Center of the Adyghe State University  
st. Pervomaiskaya, 208, Maykop, Republic of Adyghea, 385016 Russia

In this paper, we consider a generalization of the decentralized Frank-Wulff algorithm for network time variables, study the convergence properties of the algorithm, and carry out the corresponding numerical experiments. The changing network is modeled as a deterministic or stochastic sequence of graphs.

УДК 519.853.62

## ОБ УСКОРЕННЫХ ПОКОМПОНЕНТНЫХ МЕТОДАХ ПОИСКА РАВНОВЕСИЙ В ДВУХСТАДИЙНОЙ МОДЕЛИ РАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

© 2023 г. Н. А. Ильтяков<sup>a,\*</sup> (ORCID: 0009-0004-6090-6469), М. А. Обозов<sup>a,\*\*</sup> (ORCID: 0009-0006-6195-1848), И. М. Дышлевский<sup>a,\*\*\*</sup>, Д. В. Ярмошик<sup>a,b,\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0003-1912-1040), М. Б. Кубентаева<sup>a,\*\*\*\*\*</sup>, А. В. Гасников<sup>a,b,c,\*\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-7386-039X), Е. В. Гасникова<sup>a,\*\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Московский физико-технический институт,  
141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия

<sup>b</sup>Институт проблем передачи информации РАН,  
127051, г. Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Россия

<sup>c</sup>Кавказский математический центр Адыгейского гос. университета,  
385000, г. Майкоп, Первомайская ул., 208, Россия

\*E-mail: iltyakov.nik@gmail.com

\*\*E-mail: obozovmark9@gmail.com

\*\*\*E-mail: igordyslevski@gmail.com

\*\*\*\*E-mail: yarmoshik.dv@phystech.edu

\*\*\*\*\*E-mail: kubentay@gmail.com

\*\*\*\*\*E-mail: gasnikov@yandex.ru

\*\*\*\*\*E-mail: egasnikova@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 16.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Поиск равновесия в двухстадийной модели транспортных потоков сводится к решению специальной негладкой задачи выпуклой оптимизации с двумя группами разных переменных. Для численного решения данной задачи в статье предложено использовать ускоренный блочно-покомпонентный метод Нестерова—Стиха со специальным выбором вероятностей блоков на каждой итерации (одного из двух). Теоретические оценки сложности такого подхода могут заметно улучшать оценки используемых ранее подходов. Однако в общем случае не гарантируют более быстрой сходимости. В статье проведены численные эксперименты с предложенными алгоритмами.

DOI: 10.31857/S0132347423060055, EDN: GHHXBJ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Многостадийная модель транспортных потоков является основой любого современного пакета транспортного моделирования крупных мегаполисов [1, 2]. В основе таких (многостадийных) моделей лежат задачи выпуклой оптимизации (блоки), последовательное решение (прогонка) которых (по циклу) приближает к искомому равновесному распределению [1–3]. Альтернативный путь – попробовать найти такую общую задачу выпуклой оптимизации, решение которой давало бы искомое равновесие [3]. Альтернативный путь, по-видимому, впервые был предложен в 1976 году С.П. Эванс [4]. А в современном варианте обоснован в работах А.В. Гасникова и Ю.Е. Нестерова с соавторами [5, 6].

Современные численные методы решения задачи выпуклой оптимизации, возникающей при альтернативном подходе базируются на сочетаниях ускоренного универсального метода Нестерова (по группе переменных, отвечающих затратам на ребрах/дорогах) и метода балансировки Брэгмана—Шелейховского по матрице корреспонденций. Этот подход вполне успешно работает на практике [7, 8]. Однако, метод совершенно контринтуитивен (“не физичен”) по своей сути. В реальной жизни в медленном времени меняется матрица корреспонденций, а в быстром времени под эти изменения подстраиваются затраты на ребрах [6]. В численном методе все происходит ровно наоборот.

В настоящей статье предложен “физичный” численный метод решения той же самой задачи, в

котором блок балансировки Брэгмана–Шелейховского заменяется блоком ускоренного метода Нестерова. Точнее говоря, для решения задачи предлагается использовать специальную версию ускоренного блочно-покомпонентного метода Нестерова–Стиха [9] со специальным способом выбора вероятностей блоков (одного из двух).<sup>1</sup>

Отметим, что исходная задача выпуклой оптимизации не является гладкой, поэтому, предварительно потребуется либо ее сгладить, т.е. рассматривать, так называемые, стохастические равновесия в блоке равновесного распределения потоков по путям [10], либо использовать универсальный вариант метода Нестерова–Стиха [11], который сам настраивается на гладкость задачи.

## 2. ДВУХСТАДИЙНАЯ МОДЕЛЬ И $\min \min$ ЗАДАЧА ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Данный раздел не является оригинальным во многом базируется на существующей литературе, в частности, на [7, 12].

**Основные определения и обозначения.** Будем рассматривать замкнутую транспортную систему, описываемую графом  $G = \langle V, E \rangle$ , где  $V$  – множество вершин ( $|V| = n$ ), а  $E$  – множество ребер ( $|E| = m$ ). Обозначим ребра графа через  $e \in E$ . Транспортный граф  $G$  считается известным.

Часть вершин  $O \subseteq V$  (*origin*) являются источниками корреспонденций, а часть стоками корреспонденций  $D \subseteq V$  (*destination*). Точнее говоря, вводится множество пар (источник, сток) корреспонденций  $OD \subseteq V \otimes V$ . Сами корреспонденции будем обозначать через  $d_{ij}$ , где  $(i, j) \in OD$ . Как правило  $|OD| \ll n^2$  [5]. Не ограничивая общности, будем далее считать, что  $\sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} = 1$ . Множество пар  $OD$  считается известным. Корреспонденции – не известны! Однако известны (заданы) характеристики источников и стоков корреспонденций. То есть известны величины  $\{l_i\}_{i \in O}, \{w_j\}_{j \in D}$

$$\sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} = l_i, \quad \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} = w_j. \quad (1)$$

Заметим, что  $\sum_{i \in O} l_i = \sum_{j \in D} w_j = 1$ . Условие (8) будем также для краткости записывать в виде  $d \in (l, w)$ .

Обозначим через  $\tau_e(f_e)$  – функцию затрат (например, временных) на проезд по ребру (участку дороги)  $e$ , если поток автомобилей на этом участ-

ке  $f_e$ . Функции  $\tau_e(f_e)$  считаются заданными, например, таким образом: [3, 14, 15]

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \left( 1 + \kappa \left( \frac{f_e}{\bar{f}_e} \right)^\mu \right), \quad (2)$$

где  $\bar{t}_e$  – время прохождения ребра  $e$ , когда участок свободный (определяется разрешенной скоростью на данном участке), а  $\bar{f}_e$  – пропускная способность ребра  $e$  (определяется полосностью: [пропускная способность]  $\leq$  [число полос] \* [2000 авт/час] и характеристиками перекрестков). Считается, что эти характеристики известны [16]. Параметр  $\mu = 0.25$  – BPR-функции [15], но допускается и  $\mu \rightarrow 0+$  – модель стабильной динамики [3, 5, 14, 17, 18]. Параметр  $\kappa > 0$  также считается заданным.

Полезно также ввести  $t_e$  – (временные) затраты на прохождения ребра  $e$ . Согласно вышенаписанному  $t_e = \tau_e(f_e)$ . По этим затратам  $t = \{t_e\}_{e \in E}$  можно определить затраты на перемещение из источника  $i$  в сток  $j$  по кратчайшему пути:

$$T_{ij}(t) = \min_{p \in P_{ij}} T_p(t) := \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e, \quad (3)$$

где  $p$  – путь (без самопересечений – циклов) на графе (набор ребер),  $P_{ij}$  – множество всевозможных путей на графе, стартующих из источника  $i$  и заканчивающихся в стоке  $j$ ,  $\delta_{ep} = 1$ , если ребро  $e$  принадлежит пути  $p$  и  $\delta_{ep} = 0$  – иначе.

Далее также будет полезен вектор  $x = \{x_p\}_{p \in P}$  – вектор распределения потоков по путям, где  $P = \bigcup_{(i,j) \in OD} P_{ij}$ . Заметим, что  $f_e = \sum_p \delta_{ep} x_p$  или в матричном виде  $f = \Theta x$ , где  $\Theta = \|\delta_{ep}\|_{e \in E, p \in P}$ .

### Энтропийная модель расчета матрицы корреспонденций.

Под энтропийной моделью расчета матрицы корреспонденций  $d(T)$  понимается описанный далее (см. задачу (4)) способ вычисления набора корреспонденций  $\{d_{ij}\}_{(i,j) \in OD}$  по известной матрице затрат  $\{T_{ij}(t)\}_{(i,j) \in OD}$ . Этот способ заключается в решении задачи энтропийно-линейного программирования (ЭЛП), которую можно понимать, как энтропийно-регуляризованную транспортную задачу

$$\min_{d \in (l, w); d \geq 0} \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij}, \quad (4)$$

где параметр  $\gamma > 0$  считается известным [3, 14, 19, 20]. Относительно выбора этого параметра, см. [3, 5].

<sup>1</sup> Отметим, что хотя статья Нестерова–Стиха вышла в 2017 году, впервые этот метод был доложен ими на конференции, посвященной 80-летию Б.Т. Поляка в мае 2015 года. Это важно в контексте приоритета Нестерова–Стиха, поскольку почти в то же время, но чуть позже появились близкие работы [11, 13].

### Модели равновесного распределения транспортных потоков по путям.

Матрица корреспонденций  $\{d_{ij}\}_{(i,j) \in OD}$  порождает (вообще говоря, неоднозначно) некий вектор распределения потоков по путям  $x$ . Неоднозначность заключается в том, что балансные ограничения, которые возникают на  $x \in X(d)$ :

$$x \geq 0: \quad \forall (i, j) \in OD \rightarrow \sum_{p \in P_{ij}} x_p = d_{ij},$$

как правило, не определяют вектор  $x$  однозначно. Вектор  $x$ , в свою очередь, порождает вектор потоков на ребрах,  $f = \Theta x$ , который, в свою очередь, порождает вектор (временных) затрат на ребрах  $t(f) = \{\tau_e(f_e)\}_{e \in E}$ . На основе последнего вектора уже можно рассчитать матрицу затрат на кратчайших путях  $T(t) = \{T_{ij}(t)\}_{(i,j) \in OD}$ . Собственно, модель равновесного распределения потоков это формализация принципа Нэша–Вардропы о том, что в равновесии каждый водитель выбирает для себя кратчайший путь [3, 14, 15]. Другими словами, если для заданной корреспонденции  $(i, j) \in OD$  известно, что (условие комплиментарности)

$$x_{p'} > 0, \quad \text{где } p' \in P_{ij},$$

то  $T_{ij}(t) = \min_{p \in P_{ij}} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e = \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e$ .

Задача поиска равновесия сводится, таким образом, к поиску такого вектора  $x \in X(d)$ , который бы порождал такие затраты  $T := T(t(f(x)))$ , что выполняется условие комплиментарности. В написанном выше виде искать равновесный вектор  $x \in X(d)$  представляется сложной задачей, сводящейся к решению системы нелинейных уравнений. Однако, в данном случае (рассматривается потенциальная игра загрузки) можно свести поиск равновесия к решению задачи выпуклой оптимизации

$$\min_{(f,x): f=\Theta x; x \in X(d)} \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz. \quad (5)$$

Решение задачи дает модель вычисления вектора потока на ребрах при заданной матрице корреспонденций  $f(d)$  [3, 5, 14, 15].

Отметим, что подобно (4) можно искать не равновесия Нэша–Вардропы, а стохастические равновесия. Это приводит к дополнительному энтропийному слагаемому в (5) [3, 5, 10, 14]

$$\min_{(f,x): f=\Theta x; x \in X(d)} \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz + \tilde{\gamma} \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{p \in P_{ij}} x_p \ln(x_p/d_{ij}). \quad (6)$$

Хотя в данной статье планируется все-таки работать с равновесиями Нэша–Вардропы, регуляризованная задача (6) нам понадобится, для того,

чтобы сгладить итоговую задачу выпуклой оптимизации, отвечающую двухстадийной модели.

В дальнейшем нам понадобится (двойственная) переформулировка задач (5), (6). Введем (выпуклые) функции  $\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz$ , и обозначим сопряженные к ним функции через  $\sigma_e^*(t_e) = \max_{f_e \geq 0} \{f_e t_e - \sigma_e(f_e)\}$ . Например, для BPR-функции (2)  $\sigma_e^*(t_e) = \text{const}(\mu) \cdot f_e \cdot (t_e - \bar{t}_e)^{1+\mu}$ , при  $t_e \geq \bar{t}_e$  и  $\text{const}(\mu) \rightarrow 1$  при  $\mu \rightarrow 0+$  [5]. Тогда (детали см. в [3, 5])

$$\begin{aligned} \min_{(f,x): f=\Theta x; x \in X(d)} \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) &= \\ &= \min_{(f,x): f=\Theta x; x \in X(d)} \sum_{e \in E} \max_{t_e \in \text{dom} \sigma_e^*} \{f_e t_e - \sigma_e^*(t_e)\} = \\ &= \max_{\substack{t_e \in \text{dom} \sigma_e^*, \\ e \in E}} \left\{ \min_{(f,x): f=\Theta x; x \in X(d)} \sum_{e \in E} f_e t_e \right\} - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) = \quad (7) \\ &= \max_{t_e \in \text{dom} \sigma_e^*, e \in E} \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t) - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e). \end{aligned}$$

Здесь  $\text{dom} \sigma_e^*$  означает область определения функции  $\sigma_e^*(t_e)$ .

Примечательно, что задача (5) имеет самостоятельный и вполне содержательный вывод [17]. А именно, с одной стороны,  $t_e = \tau_e(f_e)$  или  $f_e = \tau_e^{-1}(t_e) = \frac{d}{dt} \sigma_e^*(t_e)$  (уравнение состояния транспортного потока: чем больше поток по ребру, тем больше времени требуется на прохождение ребра), с другой стороны принцип Нэша–Вардропы (условие комплиментарности), по сути означает, следующее  $f \in \partial \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t)$ , где  $\partial$  означает субдифференциал. Осталось заметить, что принцип Ферма (в субдифференциальной форме) для задачи (7) как раз и соответствует двум выписанным соотношениям.

Аналогично можно построить двойственную задачу и к задаче (6) (см. также (11))

$$\max_{t_e \in \text{dom} \sigma_e^*, e \in E} \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t) - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e), \quad (8)$$

$$\text{где } T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t) = -\tilde{\gamma} \ln \left( \sum_{p \in P_{ij}} \exp \left( \frac{-T_p(t)}{\tilde{\gamma}} \right) \right).$$

**Теорема 1.** Функция  $T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t)$  имеет константу Липшица градиента в 2-норме равную  $H_{ij}/\tilde{\gamma}$ , где  $H_{ij}$  – число ребер в самом длинном пути из  $P_{ij}$ .

$$\text{Кроме того, } 0 \leq T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t) - T_{ij}(t) \leq \tilde{\gamma} \ln |P_{ij}|.$$

*Доказательство.* Первое утверждение следует из [10]. Второе из [21].

**Двухстадийная модель.** Стандартный способ поиска равновесий в многостадийных транспортных моделях предполагает последовательную прогонку (отрешивание) двух блоков (двух задач) (4) и (5). Из решения (4) находим зависимость  $d(T)$ , а из решения (5) находим зависимость  $T(t(f(x(d))))$ . Неподвижная точка такой прогонки и будет искомым равновесием. На практике именно такая процедура обычно и реализуется [1–3]. Однако, чтобы такая процедура сходилась на практике часто необходимо достаточно удачно выбрать точку старта. Более надежный численный способ поиска равновесия в двухстадийной модели заключается в том, чтобы посмотреть на задачи (4) и (5) (точнее, лучше использовать двойственное представление (7)), и попытаться объединить эти две задачи оптимизации в одну седловую задачу, учитывая их структуры (здесь для краткости соответствующие композитные члены в функционалах задач (4) и (7) были обозначены  $g$  и  $h$ , ну а общая часть (зависящая от переменных  $d$  и  $t$ ) обозначена через  $G$ ):

$$\begin{aligned} \min_{d \in (l, w)} G(d, T(t)) + g(d), \\ \max_{t \in \text{dom} \sigma^*} G(d, T(t)) - h(t). \end{aligned}$$

Совместное решение этих двух задач можно найти из решения седловой (выпукло-вогнутой) задачи

$$\min_{d \in (l, w)} \max_{t \in \text{dom} \sigma^*} G(d, T(t)) + g(d) - h(t),$$

которую, в свою очередь, можно переписать как (теорема фон Неймана–Сиона–Какутани)

$$\max_{t \in \text{dom} \sigma^*} \min_{d \in (l, w)} G(d, T(t)) + g(d) - h(t).$$

И уже для последней седловой задачи можно построить двойственную по части переменных  $d$ . В результате получается задача (вогнутой) оптимизации с двумя блоками переменных:  $t$  и блок двойственных переменных для  $d$  (множители Лагранжа к ограничениям  $d \in (l, w)$ ). Действительно, возникающую седловую задачу

$$\begin{aligned} \min_{d \in (l, w); d \geq 0} \max_{t \in \text{dom} \sigma^*} \sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t) - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) + \\ + \gamma \sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij} \end{aligned}$$

можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \max_{t \in \text{dom} \sigma^*} \min_{d \in (l, w); \sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} = 1; d \geq 0} \sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t) + \\ + \gamma \sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij} - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e). \end{aligned}$$

Вспомогательную задачу минимизации можно представить через двойственную к ней:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{t \in \text{dom} \sigma^* \\ (\lambda, \mu)}} - \gamma \ln \left( \sum_{(i, j) \in OD} \exp \left( \frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) \right) + \\ + \langle l, \lambda \rangle + \langle w, \mu \rangle - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) = \\ = - \min_{\substack{t \in \text{dom} \sigma^* \\ (\lambda, \mu)}} \gamma \ln \left( \sum_{(i, j) \in OD} \exp \left( \frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) \right) - \\ - \langle l, \lambda \rangle - \langle w, \mu \rangle + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e). \end{aligned} \quad (9)$$

Обратим внимание, что добавленное по  $d$  ограничение  $\sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} = 1$  тавтологично, поскольку следует из  $d \in (l, w)$ . Тем не менее, удобнее его добавить, чтобы при взятии  $\min$  получалась равномерно гладкая функция (типа softmax), а не сумма экспонент, имеющая неограниченные константы гладкости [3]. Множители  $\lambda$  и  $\mu$  являются двойственными множителями (множителями Лагранжа) к ограничениям  $d \in (l, w)$  (см. (1)), которые заносятся в функционал (ограничения  $\sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} = 1; d \geq 0$  не заносятся в функционал). Заметим, что если  $(t, \lambda, \mu)$  – решение задачи (9), то  $(t, \lambda + (C_\lambda, \dots, C_\lambda)^T, \mu + (C_\mu, \dots, C_\mu)^T)$  – также будет решением задачи, т.е. решение задачи (9) не единственное [3]. Заметим также, что, зная  $(\lambda, \mu)$ , можно посчитать матрицу корреспонденций [3]:

$$d_{ij}(\lambda, \mu) = \frac{\exp \left( \frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right)}{\sum_{(k, l) \in OD} \exp \left( \frac{-T_{kl}(t) + \lambda_k + \mu_l}{\gamma} \right)}. \quad (10)$$

Записывая в обратном порядке цепочку равенств (7), получаем, что прямая задача для двойственной задачи (9) имеет вид

$$\min_{\substack{(f, x): f = \Theta x; x \in X(d) \\ d \in (l, w), d \geq 0}} \left\{ P(f, d) = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) + \right. \\ \left. + \gamma \sum_{(i, j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij} \right\}. \quad (11)$$

Для решения (двойственной) задачи выпуклой оптимизации (но, вообще говоря, негладкой, поскольку функции  $T_{ij}(t)$  – негладкие) можно использовать субградиентные методы. А именно, субградиент (далее обозначаем (супер-)субградиент таким же символом, как и градиент  $\nabla$ ) целевого функционала по  $t$  (стоящего под минимумом) (9) можно посчитать по формуле Демьянова–Данскина (см., например, [3]):

<sup>2</sup> Здесь  $C_\lambda$  и  $C_\mu$  – произвольные числа.

$$\begin{aligned} & - \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij}(\lambda, \mu) \nabla T_{ij}(t) + f = \\ & = - \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij}(\lambda, \mu) \nabla T_{ij}(t) + \{\tau_e^{-1}(t_e)\}_{e \in E}, \end{aligned} \quad (12)$$

где, как и ранее,  $\tau_e^{-1}$  – обратная функция к  $\tau_e$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ В ДВУХСТАДИЙНОЙ МОДЕЛИ

Перепишем задачу (9) (убрав знак минус) в немного более компактном виде

$$\begin{aligned} & \min_{t \in \text{dom} \sigma^*; (\lambda, \mu)} \left\{ D(t, \lambda, \mu) = \right. \\ & = \text{softmax}_\gamma \left( \{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j\}_{(i,j) \in OD} \right) - \\ & \quad \left. - \langle l, \lambda \rangle - \langle w, \mu \rangle + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где через  $D(t, \lambda, \mu)$  мы обозначили двойственную функцию со знаком минус.

Данная задача имеет ярко выраженную блочную  $\min \min$  структуру. В частности, задача

$$\min_{(\lambda, \mu)} D(t, \lambda, \mu) =: D(t) \quad (14)$$

по блоку переменных  $(\lambda, \mu)$  может быть довольно эффективно решена методом альтернированных направлений [22] (балансировка Брэгмана–Шеллеховского–Синхорна) или его ускоренным вариантом [23] с достаточно высокой точностью [24]. При этом по  $t$  задача негладкая и ее предлагается решать (см., например, [8]) универсальным ускоренным методом Нестерова [25, 26], который сам настраивается на гладкость задачи. При таком подходе число итераций определяется, по сути, только гладкостью (Липшицевостью) задачи (13). А стоимость итерации определяется согласно (12) сложностью метода альтернированных направлений (с учетом возможностей теплого старта метода) и (параллельным!) вычислением (с помощью алгоритма Дейкстры или Беллмана–Форда) субградиента по  $t$ . Такой подход эффективен, если сложность метода альтернированных направлений меньше сложности вычисления субградиента по  $t$  [3]. Однако такой метод, как уже отмечалось во введении, контринтуитивен, поскольку не соответствует реальному процессу формирования равновесия в двухстадийной модели “в жизни” [6].

Альтернативным способом решения задачи (13) является двойственное сглаживание (по Ю.Е. Нестерову [21]) функций  $T_{ij}(t) \rightarrow T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t) = -\text{softmax}_{\tilde{\gamma}}(\{-T_{ij}(t)\}_{(i,j) \in P_{ij}})$  – см. теорему 1. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \min_{t \in \text{dom} \sigma^*; (\lambda, \mu)} \text{softmax}_\gamma(\{-T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t) + \lambda_i + \mu_j\}_{(i,j) \in OD}) - \\ & \quad - \langle l, \lambda \rangle - \langle w, \mu \rangle + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e). \end{aligned} \quad (15)$$

**Теорема 2.** *Решение выпуклой задачи (15) с точностью  $\varepsilon/2$  по функции будет решением выпуклой задачи (9) с точностью  $\varepsilon$  по функции, если*

$$\tilde{\gamma} \leq \frac{\varepsilon}{\max_{(i,j) \in P_{ij}} \ln |P_{ij}|}.$$

Более того, первое слагаемое (softmax) целевой функции в (15) имеет константу Липшица в 2-норме по  $t$  равную  $2\sqrt{H}$  ( $H = \max_{(i,j) \in OD} H_{ij}$ ) и константу Липшица градиента в 2-норме по  $t$  равную  $H / \min\{\gamma, \tilde{\gamma}\} = H/\tilde{\gamma}$ . При этом по  $(\lambda, \mu)$  аналогичные константы будут равны, соответственно, 2 и  $1/\gamma$ .

*Доказательство.* Первое утверждение следует из теоремы и свойства функции softmax – константа Липшица в  $\infty$ -норме равна 1, см. также раздел 2.2.7 [3]. Второе утверждение следует из Замечания 1.4.4 [3] и [21, 23].

Теорема 2 дает инструмент для использования ускоренного композитного<sup>3</sup> блочно-покомпонентного метода [9, 11, 13] с двумя блоками ( $t$  и  $(\lambda, \mu)$ ) или тремя блоками ( $t$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ ). Строго говоря, методы, приведенные во всех трех работах, не являются композитными. Однако нужное обобщение получается стандартным образом [26]. Отметим, что у всех методов из перечисленных статей есть гиперпараметр, который разумно выбирать таким образом, чтобы вероятности выбора соответствующих блоков были пропорциональны отвечающим этим блокам константам Липшица градиента целевой функции по группе переменных, входящих в блок. Такой способ выбора вероятностей приводит к полному расщеплению оракульных сложностей по блокам [27]. В теоретическом плане это может привести к существенному сокращению объема вычислений по сравнению с контринтуитивным подходом.<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Композитом будут все слагаемые в (15) кроме первого тривиального слагаемого – softmax. Для ряда конкретных функций  $\sigma_e^*(t_e)$  (в том числе, порожденной BPR-функциями затрат) композитность важна, потому что  $\sigma_e^*(t_e)$  может иметь неограниченную константу Липшица производной.

<sup>4</sup> Тут сложно говорить точно, потому что сложность универсального ускоренного метода варьируется от сходимости обычного ускоренного метода в гладком случае (оптимистичный сценарий) до скорости сходимости субградиентного метода в негладком случае (пессимистичный сценарий) [26]. В частности, при pessimistic сценарии число вычислений  $\nabla T_{ij}(t)$  пропорционально  $-\varepsilon^{-2}$ , в то время как в новом подходе аналогичных по сложности вычислений  $\nabla T_{ij}^{\tilde{\gamma}}(t)$  потребуется  $\sim \max_{(i,j) \in P_{ij}} \ln |P_{ij}| \varepsilon^{-1}$ , где  $\varepsilon$  – желаемая по функции точность решения задачи.

Недостатком нового подхода является возникновение дополнительного фактора  $\max_{(i,j) \in P_{ij}} \ln|P_{ij}|$  в оценке сложности числа вызовов оракула  $\nabla T_{ij}^{\tilde{y}}(t)$ . Для сетей типа Манхэттенских этот множитель может быть порядка корня из числа ребер графа транспортной сети, что может нивелировать выигрыш от возможно лучшей зависимости оценки сложности от  $\varepsilon$ . Также вычисление  $\nabla T_{ij}^{\tilde{y}}(t)$  хотя и сопоставимо в теории по сложности со сложностью вычисления  $\nabla T_{ij}(t)$  [10], но требует во многом самостоятельной реализации, т.е. тут сложнее воспользоваться готовыми пакетами [3]. Зато, как не сложно проверить, новый подход будет соответствовать реальной хронологии событий, то есть будет “физичным” (“интуитивно” более понятным).

Перечисленные недостатки могут быть устранены, если, следуя [11], решать исходную задачу (15) универсальным ускоренным блочно-покомпонентным методом. Строго говоря, теоретического обоснования такого метода на данный момент не известно, однако по аналогии с универсальным ускоренным методом Нестерова можно написать и соответствующую блочно-покомпонентную версию [9, 11, 13]. Полученный в результате метод остается “физичным”, но наследует хорошее свойство адаптивной настройки на параметры гладкости от “нефизичного” метода.

В заключение этого раздела отметим, что все перечисленные подходы по своей структуре являются прямо-двойственными. Это означает, что существует эффективный способ вычисления  $d$  и  $f$  по генерируемым последовательностям точек  $t, \lambda, \mu$  [3, 8].

Подробнее о рассмотренных методах и их работе на практике будет написано в следующем разделе.

#### 4. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИХ РАБОТЫ

Для проведения сравнительного анализа были рассмотрены и имплементированы несколько различных алгоритмов оптимизации, а именно:

- USTM [28] – ускоренный метод подобных треугольников;
- USTM + Sinkhorn (балансировка Брэгмана–Шелейховского–Синхорна, описанная выше) [29] – ускоренный метод подобных треугольников для функции  $D(t)$  (14) и отрешивание задачи по  $\lambda$  и  $\mu$  с помощью алгоритма Синхорна;
- ACRCDD\* [30] – ускоренный, адаптивный покомпонентный метод оптимизации.

Стоит отметить, что, классический USTM, хотя ранее и не применялся в таком виде для поиска равновесий в транспортной сети, ввиду своей естественности был взят именно в качестве “бейзлайна”.

##### Алгоритм USTM

Листинг алгоритма USTM (Universal Method of Similar Triangles) для минимизации произвольной выпуклой, непрерывной по Липшицу функции  $\Phi$  приведен в Алгоритме 1. При этом мы использовали следующие обозначения

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \frac{1}{2} \|t - t^0\|_2^2, \\ \phi_{k+1}(t) &= \phi_k(t) + \\ &+ \alpha_{k+1} \left[ \Phi(y^{k+1}) + \langle \nabla \Phi(y^{k+1}), t - y^{k+1} \rangle \right]. \end{aligned}$$

---

#### Алгоритм 1. Универсальный метод подобных треугольников

---

**Input:**  $L_0 > 0$ , стартовая точка  $t^0$ , точность  $\varepsilon > 0$

- 1:  $u^0 := t^0, A_0 := 0, k := 0$
  - 2: **repeat**
  - 3:  $L_{k+1} := L_k / 2$
  - 4: **while true do**
  - 5:  $\alpha_{k+1} := \frac{1}{2L_{k+1}} + \sqrt{\frac{1}{4L_{k+1}^2} + \frac{A_k}{L_{k+1}}}, A_{k+1} := A_k + \alpha_{k+1}$
  - 6:  $y^{k+1} := \frac{\alpha_{k+1} u^k + A_k t^k}{A_{k+1}}$
  - 7:  $u^{k+1} := \arg \min_{t \in \text{dom} \Phi} \phi_{k+1}(t)$
  - 8:  $t^{k+1} := \frac{\alpha_{k+1} u^{k+1} + A_k t^k}{A_{k+1}}$
  - 9: **if**  $\Phi(t^{k+1}) \leq \Phi(y^{k+1}) + \langle \nabla \Phi(y^{k+1}), t^{k+1} - y^{k+1} \rangle + \frac{L_{k+1}}{2} \|t^{k+1} - y^{k+1}\|_2^2 + \frac{\alpha_{k+1}}{2A_{k+1}} \varepsilon$  **then**
  - 10: **break**
  - 11: **else**
  - 12:  $L_{k+1} := 2L_{k+1}$
  - 13: **end if**
  - 14: **end while**
  - 15:  $k := k + 1$
  - 16: **until** Критерий остановки не выполнен
- 

В этой статье алгоритмом USTM обозначается Алгоритм 1, примененный к функции  $D(t, \lambda, \mu)$ . Градиент функции  $D(t, \lambda, \mu)$  по переменной  $t$  вычисляется по формуле (12), градиент по переменным  $\lambda, \mu$  вычисляется напрямую.

##### Алгоритм USTM-Sinkhorn

Алгоритмом USTM-Sinkhorn мы называем Алгоритм 1, примененный к функции  $D(t)$ . Основное отличие USTM-Sinkhorn от классического USTM – использование Алгоритма 2 (Синхорна)

для решения задачи по  $\lambda$  и  $\mu$ . Градиент функции  $D(t)$  при этом считается так же по формуле (12), куда в качестве  $\lambda$  и  $\mu$  подставляются значения, найденные “Синхорном”.

---

**Алгоритм 2.** Алгоритм Синхорна
 

---

```

1:  $\lambda^0 := \bar{0}, \mu^0 := \bar{0}$ 
2:  $k := 0$ 
3: repeat
4:   if  $k \bmod 2 = 0$  then
5:      $\lambda^{k+1} := \arg \min_{\xi} D(t, \xi, \mu^k)$ 
6:      $\mu^{k+1} := \mu^k$ 
7:   else
8:      $\lambda^{k+1} := \lambda^k$ 
9:      $\mu^{k+1} :=_{\xi} D(t, \lambda^k, \xi)$ 
10:  end if
11:   $k := k + 1$ 
12: until Критерий остановки не выполнен
  
```

---

Одна итерация алгоритма Синхорна имеет арифметическую сложность, примерно равную арифметической сложности вычисления градиентов двойственной функции по  $\lambda$  и  $\mu$ .

**Алгоритм ACRCD\***

Опишем вариант ускоренного покомпонентного метода (Accelerated by Coupling Randomized Coordinate Descent – ACRCD) на базе специального каплинга покомпонентных вариантов ПГМ (Grad) и МЗС (Mirr) ( $x_0 = y_0 = z_0$ ), см. Алгоритм 3.

Определим

$$\text{Grad}_i(x) = \text{Proj}_{\text{dom}f} \left( x - \frac{1}{L_i} \nabla_i f(x) \right),$$

$$\text{Mirr}_z(\xi) = \text{Proj}_{\text{dom}f} \left( \left\{ z_i - \frac{1}{L_i} \xi_i \right\}_{i=1}^n \right),$$

где  $\text{Proj}_Q(x)$  – евклидова проекция вектора  $x$  на множество  $Q$ ,  $\nabla_i$  – градиент по  $i$ -му блоку переменных (компонент),  $L_i$  – константа Липшица градиента  $\nabla_i f(x)$ ,  $n$  – количество блоков переменных. В нашем случае  $n = 2$ , блоками переменных являются  $t$  и  $(\lambda, \mu)$ .

В ACRCD\* количество вычислений градиентов по каждому блоку обратно пропорционально гладкости функции по этому блоку переменных. Так как функция  $D(t, \lambda, \mu)$  негладкая по блоку переменных  $t$  и гладкая по  $(\lambda, \mu)$ , при правильной инициализации констант  $L_i$  метод будет делать

больше вычислений градиентов по  $t$ , чем по  $\lambda, \mu$  (см Раздел 5), что противоположно поведению алгоритма USTM + Sinkhorn, и в то же время согласуется с механизмом установления равновесия в реальной жизни: потоки на путях  $f$  (и времена проезда  $t$ ) меняются чаще, чем корреспонденции  $d$  (и “привлекательности” районов  $\lambda, \mu$ ).

---

**Алгоритм 3.** ACRCD\*
 

---

**Input:**  $\tau \in [0, 1], \alpha > 0, L_i > 0, i \in [1, \dots, n]$ , стартовая точка  $x^0$ .

$$1: y^0 := x^0, z^0 := x^0.$$

$$2: S := \sum_{i=1}^n L_i^{1/2}$$

3: **repeat**

$$4: \tau_k := \frac{2}{k+2}$$

$$5: x_{k+1} := \tau_k z_k + (1 - \tau_k) y_k$$

$$6: \text{Выбрать } i_{k+1} \in [1, \dots, n] \text{ с вероятностью } P(\{i_{k+1} = i\}) = L_i^{1/2} / S$$

$$7: y_{k+1} := \text{Grad}_{i_{k+1}}(x_{k+1})$$

$$8: \alpha_{k+1} := \frac{k+2}{2S^2}$$

$$9: z_{k+1} := \text{Mirr}_{z_k}(\alpha_{k+1} S \nabla_{i_{k+1}} f(x_{k+1}))$$

10: **until** Критерий остановки не выполнен

---

**Численные эксперименты**

Для сравнения эффективности на практике, перечисленные алгоритмы применялись к задаче поиска равновесия двухстадийной модели на транспортных сетях городов *Anaheim* и *Sioux-Falls* [16]. Параметр  $\gamma$  энтропийной модели (формула (4) и последующие) был принят равным 10, что по порядку соответствует типично используемым на практике значениям (это важно, потому что скорость сходимости алгоритма Синхорна сильно зависит от величины этого параметра). Например, в таком случае энтропийная модель эквивалентна гравитационной модели расчета матрицы корреспонденций с функцией тяготения  $\exp(-0.1T_{ij})$  [31], если затраты на межрайонные перемещения  $T_{ij}$  выражены в минутах.

Для оценки сходимости алгоритмов использовалась следующая метрика:

$$\left( 2 \left\| \begin{pmatrix} \nabla_{\lambda} D(t, \lambda, \mu) \\ \nabla_{\mu} D(t, \lambda, \mu) \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \lambda^* \\ \mu^* \end{pmatrix} \right\| + \max\{\text{gap}(t, \lambda, \mu), 0\} \right)^{-1}, \quad (16)$$

где  $\begin{pmatrix} \lambda^* \\ \mu^* \end{pmatrix}$  – оптимальные значения  $\lambda$  и  $\mu$  с минимальной нормой (в экспериментах использова-

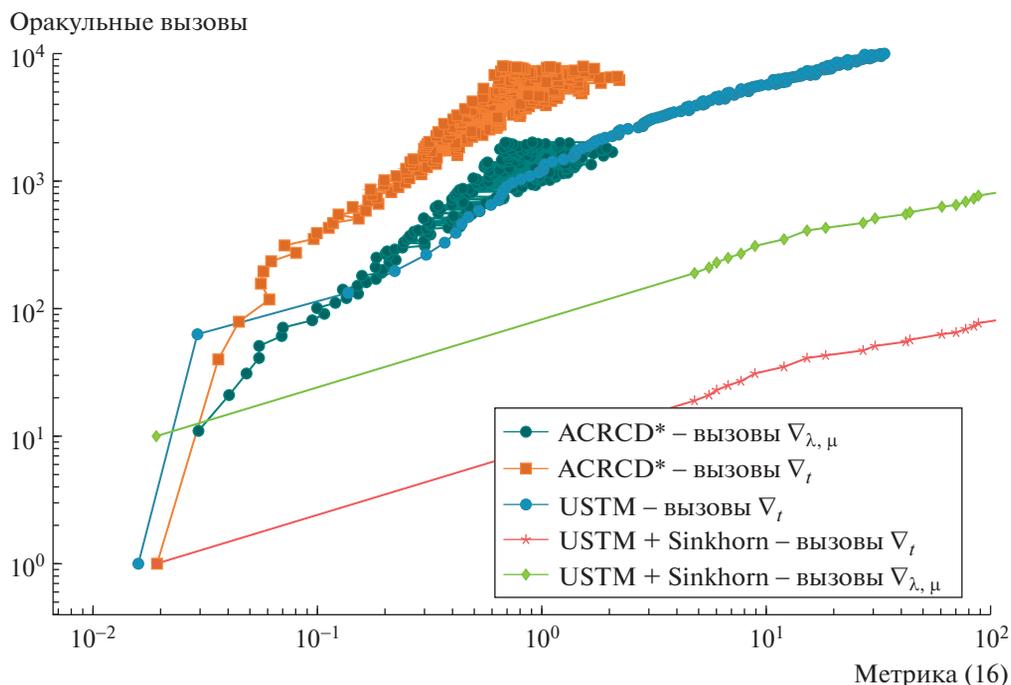


Рис. 1. Сравнение алгоритмов (Транспортная задача, граф “Anaheim”).

лись значения  $\lambda$  и  $\mu$ , полученные на последней итерации), а  $gap$  – зазор двойственности – определяется как разность значений прямой (11) и двойственной (13) функций:

$$gap(t, \lambda, \mu) = P(f, d) + D(t, \lambda, \mu).$$

Такая метрика позволяет учесть оба признака неоптимальности решения: нарушение ограничений и разницу между значением функции в текущей точке и ее оптимальным значением, которая оценивается сверху зазором двойственности.

Введение масштабирующего множителя  $2 \left\| \begin{pmatrix} \lambda^* \\ \mu^* \end{pmatrix} \right\|$  у слагаемого, равного норме невязки по ограничениям, позволяет сравнивать между собой невязки по значению функции и по нарушению ограничений. Обоснованием такого выбора множителя является прямодвойственный анализ метода градиентного спуска, см (4.13) в [32].

Результаты экспериментов приведены на рис. 1, 2, также доступен код вычислительных экспериментов [33].

По рис. 1 видно, что алгоритм USTM + Sinkhorn показал наилучший результат, хотя ему требуются дополнительные итерации, а алгоритм ACRCDD\*, хоть и обладает нужной “физичностью”, но даже не показывает себя лучше “бейзлана”. Тест в данном случае проводился на крупном графе “Anaheim”, для дополнительной проверки результатов мы провели еще один тест (рис. 2) на

маленьком графе “Sioux-Falls”. Результаты ожидаемо подтвердились.

Доминирование алгоритма USTM + Sinkhorn мы связываем с тем, что в результате минимизации  $D(t, \lambda, \mu)$  по переменным  $\lambda, \mu$  получается более гладкая функция  $D(t, \lambda, \mu)$  (общее свойство  $\min \min$  задач). Оказалось, что в транспортной задаче положительный эффект от сглаживания с лихвой окупает дополнительные затраты на отрешивание подзадачи по  $\lambda, \mu$  алгоритмом Синхорна, хотя этот результат нельзя было предсказать без проведения вычислительных экспериментов.

### 5. ПРИЛОЖЕНИЕ. О РАСЩЕПЛЕНИИ ОРАКУЛЬНЫХ СЛОЖНОСТЕЙ ДЛЯ НЕГЛАДКО-ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ СО СТРУКТУРОЙ $\min \min$

Побочным продуктом исследований, проведенных в данной работе, является новый способ решения задач выпуклой оптимизации вида<sup>5</sup> (для наглядности изложение и точности ссылок на ли-

<sup>5</sup> Важно заметить, что выпуклость задачи понимается в данной статье как выпуклость по совокупности всех переменных, а не просто как выпуклость отдельно по блокам. Последнего может быть недостаточно для того, чтобы исходная задача была выпуклой, и к ней можно было применять обсуждаемые численные методы. Хорошо известными примерами таких задачи (выпуклых по блокам, но не выпуклых в целом) являются задач, возникающие в рекомендательных системах, например, matrix factorization.

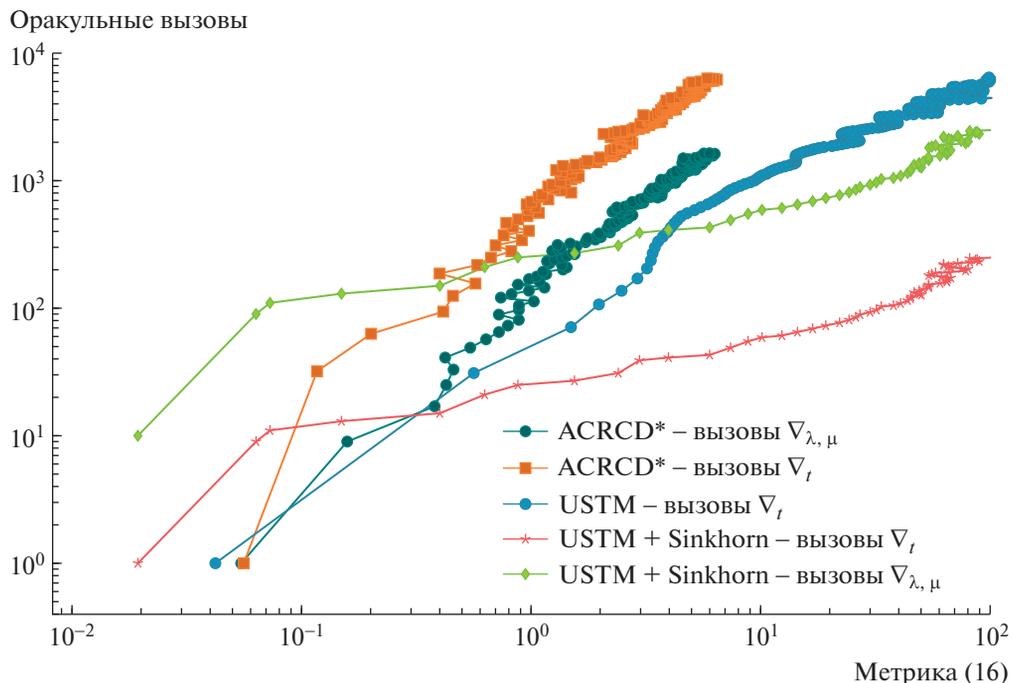


Рис. 2. Сравнение алгоритмов (Транспортная задача, граф “Sioux-Falls”).

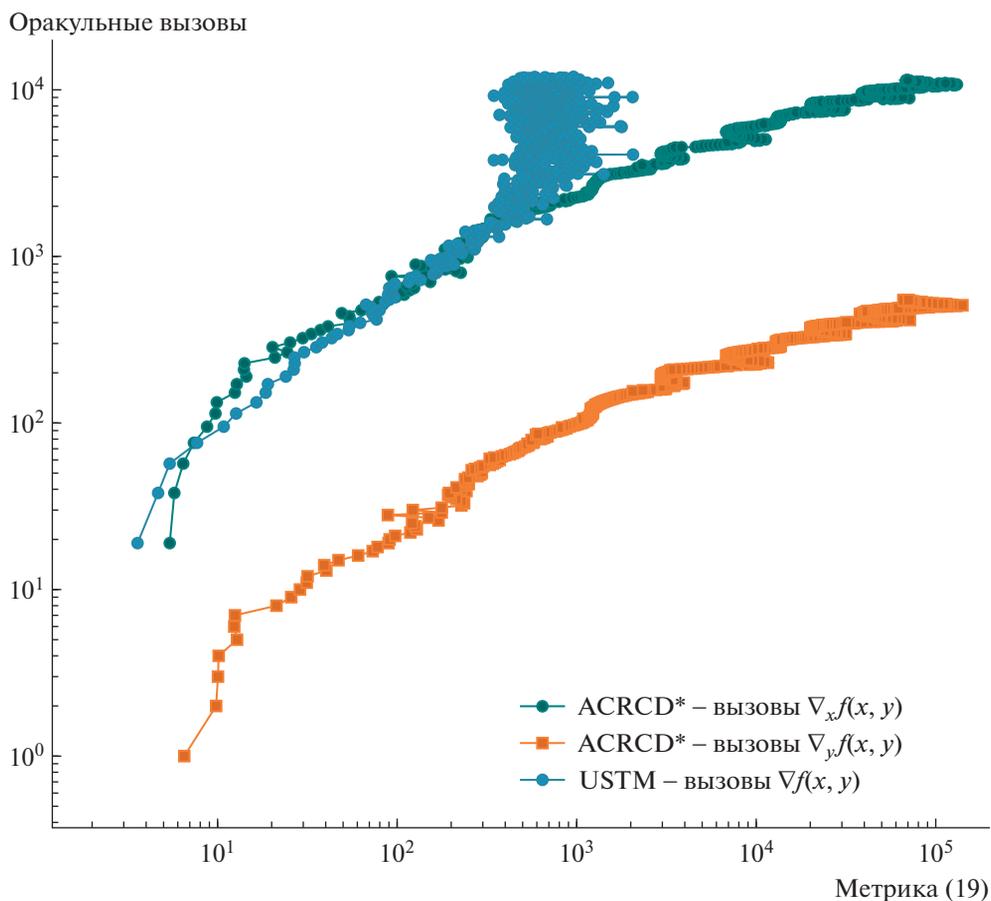


Рис. 3. Сравнение алгоритмов на задаче минимизации функции (18).

тературу рассмотрим задачу без ограничений и композитных членов)

$$\min_x \min_y f(x, y). \quad (17)$$

Если функция  $f$  обладает Липшицевым градиентом  $\nabla_x f$  по  $x$  с константой  $L_x$  в 2-норме и Липшицевым градиентом  $\nabla_y f$  по  $y$  с константой  $L_y$  в 2-норме, то можно решить задачу (17) с (ожидаемой) точно-

стью  $\varepsilon$  по функции за  $O\left(\sqrt{\frac{L_x R^2}{\varepsilon}}\right)$  вычислений  $\nabla_x f$

и  $O\left(\sqrt{\frac{L_y R^2}{\varepsilon}}\right)$  вычислений  $\nabla_y f$ , где  $R^2$  – расстоя-

ние от точки старта до решения в 2-норме [27].

В частности, один из способов получения данного результата – это использование ускоренных блочно-покомпонентных методов линейки [9, 11, 13], в которых при выборе параметра метода равным  $1/2$  ожидаемое число итераций будет рав-

няться  $O\left(\frac{(L_x^{1/2} + L_y^{1/2})R}{\varepsilon^{1/2}}\right)$ , а вероятности выбора

блока  $x$  или  $y$  будут равняться, соответственно,

$\frac{L_x^{1/2}}{L_x^{1/2} + L_y^{1/2}}$  и  $\frac{L_y^{1/2}}{L_x^{1/2} + L_y^{1/2}}$ . Откуда и получается приве-

денный выше результат о расщеплении оракульных сложностей по блокам. Несложно проверить, что данные оценки уже невозможно дальше улучшить [27].

Если, скажем, по блоку переменных  $x$  у нас есть только Липшицевость с константой  $M_x$  в 2-норме, то используя стандартный прием [25] (см. также [11] по части адаптации к блочно-покомпонентным методам) погружения негладкой задачи в класс глад-

ких задач за счет выбора  $L_x = \frac{M_x^2}{2\delta}$  и условия на  $\delta$ :

$N_x \delta = \varepsilon/2$ , где  $N_x \simeq \sqrt{\frac{L_x R^2}{\varepsilon}}$  – число вычислений

$\nabla_x f$ , получаем, что  $N_x \simeq \frac{M_x^2 R^2}{\varepsilon^2}$ , что также соот-

ветствует нижним оценкам [34]. Отметим, что в [11] выписано более грубое условие  $(N_x + N_y)\delta = \varepsilon/2$ , которое, на самом деле, можно переписать так, как это было сделано в данной работе выше.

Таким образом, если в задаче (17) выпуклая целевая функция  $f(x, y)$  негладкая по  $x$ , но гладкая по  $y$  с оракулом  $\nabla_x f$ , который сильно дешевле, чем оракул  $\nabla_y f$ , то описанное расщепление оракульных сложностей:  $\sim \varepsilon^{-2}$  вычислений  $\nabla_x f$  и

$\sim \varepsilon^{-1/2}$  вычислений  $\nabla_y f$ , дает заметное ускорение по сравнению со стандартным подходом, классифицирующим задачу как негладкую и требующим  $\sim \varepsilon^{-2}$  вычислений  $\nabla_x f$  и  $\nabla_y f$ .

К сожалению, на рассмотренной в данной статье задаче поиска равновесия в двухстадийной транспортной модели описанный эффект расщепления не проявляется в полной мере, потому что не верно предположение: “оракул  $\nabla_x f$ , сильно дешевле, чем оракул  $\nabla_y f$ ”. В нашем случае получается ровно наоборот. Однако, ситуация может поменяться, если для вычисления  $\nabla_x f$  можно эффективно (эффективнее, чем для вычисления  $\nabla_y f$ ) использовать GPU/CPU параллелизацию.

Описанный выше подход с изначально заданными  $L_x$  и  $L_y$  можно строго теоретически обосновать. Проблемы начинаются при обосновании адаптивных (универсальных) версий данного подхода, в которых по блоку  $x$  метод должен сам настраиваться на текущий уровень гладкости целевой функции по этому блоку переменных. Возникновение проблемы обусловлено зависимостью вероятностей выбора блоков от адаптивно меняющихся параметров  $L_x$  и  $L_y$ . При этом интересно заметить, что проблема связана именно с выбранным классом ускоренных блочно-покомпонентных методов, обеспечивающих расщепление оракульных сложностей. Для других покомпонентных методов адаптивная настройка на константы Липшица градиента по блокам вполне возможна [35]. В данной работе, рассматривались различные практические способы решения отмеченной теоретической проблемы. В перспективе интересно было бы попробовать получить здесь и теоретическое обоснование полноценной возможности использования конструкции универсальных методов.

Дополнительно, для демонстрации эффективности покомпонентного метода на описанном классе задач была введена тестовая задача минимизации функции

$$f(x, y) = \gamma \ln \left( \sum_{k=1}^m \exp \left( \frac{A_k^T x - b_k}{\gamma} \right) \right) + \frac{1}{2} (x \ y) B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $B \in \mathbb{R}^{210}$  – симметричная положительно полуопределенная матрица,  $A_k$  –  $k$ -й столбец матрицы  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 100}$ .

Выбором размерность переменных  $x \in \mathbb{R}^{10}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{200}$  достигалась разница сложности вычисления градиентов по разным блокам переменных.

Задача решалась при достаточно маленьком  $\gamma = 10^{-3}$  и небольшом максимальном собственном числе матрицы  $B$ ,  $\lambda_{\max}(B) = 10^{-1}$ , а все сингулярные числа матрицы  $A$  были равны нулю. В таком случае, по переменной  $x$  задача менее гладкая, то есть имеет большую константу Липшица градиента ( $L_x = \lambda_{\max}(B) + 1/\gamma$ ,  $L_y = \lambda_{\max}(B)$ ). В то же время, из-за существенного различия в размерности переменных  $x$  и  $y$ , вычисление градиента по  $x$  требует намного меньше арифметических операций. В этом случае применение ACRCД\* позволяет “расщепить” оракульные сложности, делая меньше вычислений градиента по “дорогому”, но гладкому блоку переменных  $y$  при решении в целом “негладкой” задачи (по совокупности переменных).

Для сравнения запускались описанные выше алгоритмы ACRCД\* [30] и USTM [28]. В качестве метрики, оценивающей качество приближенного решения, использовалась обратная норма градиента:

$$\|\nabla f(x, y)\|^{-1}. \quad (19)$$

Графики сходимости изображены на рис. 2. Для ACRCД\* приведены значения метрики в зависимости от количества обращений к каждому из оракулов для визуализации расщепления оракульной сложности. Сходимость по норме градиента существенно немонотонная, поэтому для удобства визуализации траектории сходимости ACRCД\* были сглажены: точки, изображенные на графике, соответствуют значениям метрики, усредненным по соседним 30 итерациям.

Результаты экспериментов показали что метод эффективен на данной задаче — достичь одного и того же значения метрики можно за значительно меньшее количество обращений к “дорогому” оракулу. Это означает что с помощью данного метода для описанных задач достигается общее ускорение по времени работы алгоритма.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача поиска равновесия в двухстадийной модели транспортных потоков. Задача поиска равновесия сводится к задаче выпуклой минимизации со структурой  $\min \min$ , где целевая функция обладает существенно разными свойствами по разным группам переменных. Теоретическое исследование показало, что наиболее эффективные методы

решения задач такого типа со структурой (в том числе новые, предложенные в данной статье) могут существенно улучшать эффективность стандартных (универсальных) ускоренных процедур. Однако применительно к задаче поиска равновесий в двухстадийной модели, из-за того, что оракул по негладкому блоку переменных сильно дороже оракула по гладкому блоку, получается, что эффект от расщепления оракульных сложностей проявляется не так ярко, как потенциально мог бы проявляться в целом на рассматриваемом классе  $\min \min$  задач. Поэтому ключевую роль играют именно численные эксперименты, которые показали, что алгоритм ACRCД\*, хоть и является “физичным” в контексте транспортной задачи, однако работает хуже, чем обычный USTM и USTM-Sinkhorn! Принципиальная возможность уменьшения времени вычислений при решении гладко-негладких задач продемонстрирована на синтетическом примере.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование в части теории в разделах 3, 5 было проведено А.В. Гасниковым за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00229, <https://rscf.ru/project/23-11-00229/>).

Работа Д.В. Ярмошика в разделе 2 выполнена при финансовой поддержке гранта поддержки ведущих научных школ НШ775.2022.1.1.

Практическая часть исследований была выполнена при поддержке ежегодного дохода ФЦК МФТИ (целевого капитала № 5 на развитие направлений искусственного интеллекта и машинного обучения в МФТИ, <https://fund.mipt.ru/capitals/ck5/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ortúzar J.D., Willumsen L.G.* Modelling transport. John Wiley and Sons. West Sussex, England. 2002.
2. *Boyles S.D., Lownes N.E., Unnikrishnan A.* Transportation network analysis. Volume I: Static and Dynamic Traffic Assignment, 2020.
3. *Гасников А.В., Гасникова Е.В.* Модели равновесного распределения потоков в больших сетях. М.: УРСС, 2023.
4. *Evans S.P.* Derivation and analysis of some models for combining trip distribution and assignment // Transportation Research. 1976. V. 10 (1). P. 37–57.
5. *Гасников А.В. и др.* О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 6. С. 34–70.
6. *Gasnikova E. et al.* An evolutionary view on equilibrium models of transport flows // Mathematics. 2023. V. 11. № 4. P. 858.
7. *Котлярова Е.В. и др.* Поиск равновесий в двухстадийных моделях распределения транспортных по-

- токов по сети // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13. № 2. С. 365–379.
8. *Kubentaeva M. et al.* Primal-Dual Gradient Methods for Searching Network Equilibria in Combined Models with Nested Choice Structure and Capacity Constraints. arXiv:2307.00427
  9. *Nesterov Y., Stich S.* Efficiency of the accelerated coordinate descent method on structured optimization problems // SIAM Journal on Optimization. 2017. V. 27. № 1. P. 110–123.
  10. *Баймурзина Д.Р. и др.* Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 1. С. 21–36.
  11. *Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Усманова И.Н.* О нетривиальности быстрых (ускоренных) рандомизированных методов // Труды Московского физико-технического института. 2016. Т. 8. № 2 (30). С. 67–100.
  12. *Gasnikova E. et al.* Sufficient conditions for multi-stages traffic assignment model to be the convex optimization problem. arXiv:2305.09069.
  13. *Allen-Zhu Z. et al.* Even faster accelerated coordinate descent using non-uniform sampling // International Conference on Machine Learning. PMLR. 2016. V. 1110–1119.
  14. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова с приложениями М.Л. Бланка, К.В. Воронцова и Ю.В. Чеховича, Е.В. Гасниковой, А.А. Замятина и В.А. Малышева, А.В. Колесникова, Ю.Е. Нестерова и С.В. Шпирко, А.М. Райгородского, с предисловием руководителя департамента транспорта г. Москвы М.С. Ликсутова. М.: МЦНМО, 2013. 427 с., 2-е изд.
  15. *Patriksson M.* The traffic assignment problem: models and methods. Courier Dover Publications, 2015.
  16. *Stabler B., Bar-Gera H., Sall E.* Transportation Networks for Research Core Team. Transportation Networks for Research. Accessed Month, Day, Year. [Electronic resource]: <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks> (accessed 16.02.2021).
  17. *Nesterov Y., De Palma A.* Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // Networks and spatial economics. 2003. Т. 3. № 3. P. 371–395.
  18. *Котлярова Е.В. и др.* Обоснование связи модели Бэкмана с вырождающимися функциями затрат с моделью стабильной динамики // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14 : 2. С. 335–342.
  19. *Вильсон А.Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.
  20. *Гасников А.В. и др.* Эволюционные выводы энтропийной модели расчета матрицы корреспонденций // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 4. С. 111–124.
  21. *Nesterov Y.* Smoothing technique and its applications in semidefinite optimization // Mathematical Programming. 2007. V. 110. № 2. P. 245–259.
  22. *Peyré G., Cuturi M.* Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science // Foundations and Trends® in Machine Learning. 2019. V. 11. № 5–6. P. 355–607.
  23. *Guminov S. et al.* Accelerated alternating minimization // ICML 2021.
  24. *Tupitsa N. et al.* Numerical Methods for Large-Scale Optimal Transport. arXiv:2210.11368.
  25. *Nesterov Y.* Universal gradient methods for convex optimization problems // Mathematical Programming. 2015. V. 152. № 1–2. P. 381–404.
  26. *Гасников А.В., Нестеров Ю.Е.* Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 1. С. 51–68.
  27. *Kovalev D., Gasnikov A., Malinovsky G.* An Optimal Algorithm for Strongly Convex Min-min Optimization. arXiv:2212.14439.
  28. Gasnikov–Nesterov A universal method for stochastic problems composite optimization. arxiv preprint arXiv:1604.05275. 2016
  29. *Meruza Kubentayeva et al.* Primal-Dual Gradient Methods for Searching Network Equilibria in Combined Models with Nested Choice Structure and Capacity Constraints. arXiv:2307.00427.
  30. *Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Усманова И.Н.* О нетривиальности быстрых (ускоренных) рандомизированных методов. arxiv preprint arXiv:1508.02182. 2015.
  31. *Алиев А.С., Мазурин Д.С., Максимова Д.А., Швецов В.И.* Структура комплексной модели транспортной системы г. Москвы // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2015. Т. 65 (1). С. 3–15.
  32. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. arXiv:1711.00394.
  33. Ссылка на репозиторий с исходным кодом вычислительных экспериментов [https://github.com/Lareton/transport\\_network\\_optimization](https://github.com/Lareton/transport_network_optimization)
  34. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
  35. *Nesterov Y.* Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems // SIAM Journal on Optimization. 2012. V. 22. № 2. P. 341–362.
  36. *De Cea J., Fernandez J. E., Dekock V., Soto A.* Solving network equilibrium problems on multimodal urban transportation networks with multiple user classes // Transport Reviews. 2005. V. 25(3). P. 293–317.

## On Accelerated Coordinate Descent Methods for Searching Equilibria in Two-Stage Transportation Equilibrium Traffic Flow Distribution Model

N. A. Ilyakov<sup>a</sup>, M. A. Obozov<sup>a</sup>, I. M. Dyshlevski<sup>a</sup>, D. V. Yarmoshik<sup>a,b</sup>,  
M. B. Kubentaeva<sup>a</sup>, A. V. Gasnikov<sup>a,b,c</sup>, and E. V. Gasnikova<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology*

*Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

<sup>b</sup>*Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)*

*Bolshoi Karetny lane, 19, build. 1, Moscow, 127051 Russia*

<sup>c</sup>*Caucasian Mathematical Center of the Adyghe State University*

*st. Pervomaiskaya, 208, Maykop, Republic of Adyghea, 385016 Russia*

The search for equilibrium in a two-stage traffic flow model reduces to the solution of a special nonsmooth convex optimization problem with two groups of different variables. For numerical solution of this problem, the paper proposes to use the accelerated block-coordinate Nesterov-Stich method with a special choice of block probabilities at each iteration. Theoretical estimates of the complexity of this approach can markedly improve the estimates of previously used approaches. However, in the general case they do not guarantee faster convergence. Numerical experiments with the proposed algorithms are carried out in the paper.

УДК 519.85

## УСТОЙЧИВАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

© 2023 г. И. А. Курузов<sup>a,b,\*</sup> (ORCID: 0000-0002-2715-5489), А. В. Рогозин<sup>a,\*\*</sup> (ORCID: 0000-0003-3435-268), С. А. Чежегов<sup>a,\*\*\*</sup> (ORCID: 0009-0003-7378-3210), А. Б. Купавский<sup>a,\*\*\*\*</sup> (ORCID: 0000-0002-8313-9598)<sup>a</sup>Московский физико-технический институт  
141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия<sup>b</sup>Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича  
127051, г. Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Россия

\*E-mail: kuruzov.ia@phystech.edu

\*\*E-mail: aleksandr.rogozin@phystech.edu

\*\*\*E-mail: chezhegov.sa@phystech.edu

\*\*\*\*E-mail: kupavskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Алгебраическая связность графа определяется как второе собственное число лапласиана. Данная величина является одной из численных характеристик, показывающих насколько граф связан. Однако данная метрика не учитывает возможных изменений для графа. При этом, стоит заметить, что удаление даже одной вершины или ребра может сделать граф несвязным. Данная работа посвящена разработке метрик на основе алгебраической связности, которые принимают во внимание возможность таких модификаций и дают представление об устойчивости сети. Кроме этого, мы приводим обобщения некоторых известных методов оптимизации для наших версий робастной алгебраической связности. Также данная работа содержит некоторые численные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенных подходов.

DOI: 10.31857/S0132347423060067, EDN: FWLNGZ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для любого ненаправленного графа мы можем определить его матрицу Лапласа. Спектр такой матрицы характеризует некоторые свойства этого графа. В частности, второе наименьшее собственное число показывает насколько данный граф связан [1–3]. Данная величина известна, как алгебраическая связность. Заметим, что данная метрика обобщена на случай взвешенных графов с неотрицательными весами [4]. Эта метрика обладает следующими свойствами. Если и только если исходный граф не связан, то ее значение равно нулю [1]. Кроме этого, при добавлении ребра в граф или увеличении веса на любом из ребер данная метрика не убывает. Более того, если исходный граф был связан, то в таком случае она будет строго возрастать. Кроме этого, в работе [5] показано, что увеличение алгебраической связности тесно связано с повышением как вершинной связности, так и реберной.

Однако во многих приложениях сети могут меняться. Так, могут исчезать единичные ребра или вершины вместе со смежными ребрами. Вопросам измерения и повышения устойчивости сетей

посвящено множество работ. Кроме этого, есть ряд работ, показывающих, что некоторые классы сетей устойчивы к удалению ребер в том смысле, что они остаются связными. Так в работе [6] рассматриваются различные классы сетей, устойчивых к атакам на ребрах. Работа [7] посвящена изучению сетей Нэша и эффективных сетей.

Также стоит отметить, что некоторые работы рассматривают устойчивость с другой стороны. Так, в работе [8] авторы изучают вопрос устойчивости сети не к удалению ее элементов, а к перегрузке мощностей на ребрах при пропускании потоков.

Отдельным направлением является вопрос добавления ребер или увеличения весов на ребрах с целью повышения значения алгебраической связности. Заметим, что вопрос добавления ребер является комбинаторной проблемой, и не может быть решен перебором даже для небольших сетей на ста вершинах. Так в работе [3] предложен алгоритм добавления ребер через решение SDP-релаксации. Однако данный подход не применим для достаточно больших графов ввиду его высокой вычислительной сложности. Однако в этой

же работе была предложена жадная эвристика на основе суперградиента алгебраической связности и вектора Фидлера. Данная эвристика в дальнейшем была обобщена для взвешенных графов [10], и в недавней работе [11] на случай направленных графов. Кроме этого в работе [11] было предложено обобщение на случай добавления нескольких ребер на одной итерации.

Данная работа посвящена разработке численной метрики устойчивости графа к удалению ребер на основе алгебраической связности. Так, в разделе 2.1 будут рассмотрены случаи удаления одного или нескольких ребер как в худшем случае, так и в среднем. В разделе 2.2 будут предложены обобщения подходов оптимизации алгебраической связности из работы [3] для ее робастной версии. Наконец, в разделе 3 будут продемонстрированы результаты численных экспериментов на графах из коллекции `sndlib` [12].

## 2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим ненаправленный взвешенный граф  $G = (V, E)$  с неотрицательными весами на ребрах  $W_{ij} \geq 0$ . В рамках данной статьи мы считаем, что возможны следующие атаки на графы:

1. Удаление одного ребра.
2. Уменьшение веса на одном ребре.

Целью данной статьи является рассмотрение различных метрик, которые показывают, насколько данный граф устойчив к таким модификациям.

Кроме этого, мы рассматриваем сценарий, в котором необходимо повысить устойчивость графа, увеличивая веса на ребрах и/или добавляя новые ребра. Будем считать, что у нас есть следующие ограничения на модификации структуры при оптимизации:

1. Каждый вес на каждом ребре можно увеличить на любую положительную величину  $\Delta w_{ij} \geq 0$ .

2. Добавление нового ребра происходит с некоторым минимальным весом  $w_{\min} \geq 0$ .

3. Суммарные затраты на изменение структуры графа задаются следующей формулой:

$c_1 \sum_{i,j=1}^n \Delta w_{ij} + c_2 \sum_{i,j=1}^n \mathbb{1}(w_{ij} = 0, \Delta w_{ij} > 0)$ , т.е. есть некоторая плата  $c_1$  за увеличение веса и есть дополнительные затраты  $c_2$  на добавление нового ребра.

Далее мы будем использовать определение алгебраической связности взвешенного графа  $G$ . Пусть матрица  $D$  есть диагональная матрица вида

$D_{ii} = \sum_{j=1}^n w_{ij}$ . Тогда мы можем ввести лапласиан для матрицы весов  $W : L = D - W$ . Заметим, что матрица лапласиана является симметричной, неотрицательно определенной и  $\lambda_1(L(W)) = 0$  [3]. Тогда мы можем ввести алгебраическую связность графа  $G$ , как второе минимальное собственное число лапласиана  $\lambda_2(G) := \lambda_2(L(W))$ .

Заметим, что функция  $\lambda_2(L(W))$  является вогнутой функцией по  $W$  [9]. И задачу оптимизации алгебраической связности над некоторым множеством матриц  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{S}^n$  можно записать в форме полуопределенного программирования (SDP):

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W}} \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \cdot \left( I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \preceq L(W). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В случае, если множество  $\mathcal{W}$  является выпуклой, то данную задачу можно решить множеством стандартных пакетов.

### 2.2. Робастная алгебраическая связность

В случае удаления одного ребра из графа, естественной метрикой является рассмотрение наилучшего случая. Иными словами, для измерения устойчивости предлагается рассмотреть набор графов, получающихся при удалении одного ребра из исходного, и определить робастную алгебраическую связность, как минимальную алгебраическую связность среди этих графов.

Введем обозначение  $G \setminus e$  ( $e \in E$ ) для графа с вершинами  $V$  и ребрами  $E \setminus \{e\}$ . В таком случае, определим *робастную алгебраическую связность*, как  $\lambda_{2,R}(G) = \min_{e \in E} \lambda_2(G \setminus e)$ . Из свойств алгебраической связности, можно получить следующие свойства ее устойчивой версии:

1.  $0 \leq \lambda_{2,R}(G) \leq \lambda_2(G)$ .
2.  $\lambda_{2,R}(G)$  равна нулю, если и только если, в исходном графе  $G$  существует мост, т.е. ребро, удаление которого приводит к увеличению связных компонент, или исходный граф был не связан.
3.  $\lambda_{2,R}(G) = \lambda_2(G)$ , если и только если, исходный граф был не связан. В таком случае,  $\lambda_{2,R}(G) = \lambda_2(G) = 0$ .

Таким образом, предложенная выше метрика показывает, насколько связным остается граф после выкидывания одного ребра в худшем случае. Заметим, что данная метрика равна нулю для всех графов с мостом. Таким образом, два связанных графа с мостом относительно этой метрики одинаковые. Также, заметим, что если исходный граф имеет мосты и мы можем только увеличи-

вать веса на ребрах, то оптимизация робастной алгебраической связности ни к чему не приведет.

Далее мы определим другую модификацию, которая не обладает выше описанными недостатками. Пусть  $G \setminus \alpha e$  ( $e \in E$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ) есть граф с такими же вершинами и ребрами, как в исходном графе, но вес на ребре  $e$  уменьшен с  $w_e$  до  $\alpha w_e$ . Тогда определим  $\alpha$ -робастную алгебраическую связность в виде:  $\lambda_{2,\alpha R}(G) = \min_{e \in E} \lambda_2(G \setminus \alpha e)$ . Далее мы можем выписать следующие свойства для данной метрики:

1.  $0 \leq \lambda_{2,\alpha R}(G) \leq \lambda_2(G)$ ,
2.  $\lambda_{2,\alpha R}(G) = 0$  для связных графов, тогда и только тогда, когда  $\alpha = 0$  и в исходном графе есть мост.

Первое утверждение следует из того, что суперградиент функции  $\lambda_2(W)$  равен  $v v^\top$ , где  $v$  — есть собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_2(W)$ . Тогда  $v_\alpha v_\alpha^\top$  будет являться суперградиентом функции  $\lambda_{2,\alpha R}(G)$ , где  $v_\alpha$  вектор Филдера для матрицы весов графа  $G \setminus e_\alpha$ . Тогда по определению суперградиента мы имеем следующее неравенство:

$$\lambda_{2,\alpha R}(G) \leq \lambda_2(G \setminus \alpha e) \leq \lambda_2(G \setminus e) + \alpha w_e (v_{\alpha,i} - v_{\alpha,j})^2 = \lambda_{2,R}(G) + \alpha w_e (v_{\alpha,i} - v_{\alpha,j})^2$$

Также из 1 утверждения и свойств робастной алгебраической связности следует второе свойство  $\alpha$ -робастной метрики.

Наконец, рассмотрим случай, когда случайно выбирается ребро с вероятностью  $p_e > 0$  ( $\sum_{e \in E} p_e = 1$ ) и удаляется. В таком случае, введем *среднюю алгебраическую связность*:  $\lambda_{2,mean}(G) = \sum_{e \in E} p_e \lambda_2(G \setminus e)$ . В случае равномерного распределения имеем следующее выражение:  $\lambda_{2,mean}(G) = \frac{1}{|E|} \sum_{e \in E} \lambda_2(G \setminus e)$ . Заметим, что данная метрика обнуляется только в том случае, если каждое ребро является мостом. Иными словами, средняя алгебраическая связность при равномерном распределении равна нулю только на дереве. Вместе с тем, для графа с большими связными компонентами и мостами между ними эта метрика близка к обычной алгебраической связности, что является ее недостатком.

### 2.3. Возможные обобщения

В данном разделе мы обсудим возможные обобщения ранее обозначенных метрик. В первую очередь, можно ввести  $k$ -робастную алгебраическую связность ( $k = 1, |E|$ ), равную алгебраической связ-

ности при удалении  $k$  наихудших ребер. Данная метрика задает более высокие требования к устойчивости графа, однако ее сложность вычисления равна  $\frac{|E|!}{k!(|E| - k)!}$  вычислений собственного числа матрицы.

Кроме этого, можно рассмотреть случай, в котором нам задан некоторый бюджет на ухудшения графа. В таком случае, можно ввести следующую метрику:  $\lambda_{2,B,R}(G) = \min_{\|\hat{W} - W\| \leq B} \lambda_2(\hat{W})$ .

Также отметим, что можно рассматривать устойчивость по отношению не к удалению единичных ребер, а к удалению вершин и инцидентных ей ребер. В таком случае, будет достаточно произвести  $|V|$  вычислений собственного числа матрицы. Заметим, что здесь также возможно обобщение до частичного удаления ребер, инцидентных вершине. Обсуждаемые в следующем разделе методы оптимизации при небольших изменениях также применимы для метрик, устойчивых к удалению вершин.

### 2.4. Методы оптимизации робастной алгебраической связности

По аналогии с (2.1), мы можем выписать задачу оптимизации весов на ребрах для повышения  $\lambda_{2,R}(G)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W}} \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \cdot \left( I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \preceq L(W \setminus e), \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметим, что в такой форме, в отличие от постановки (2.1), мы имеем  $|E|$  матричных неравенств вместо 1, что существенно повышает сложность каждой итерации.

Аналогично, мы можем поставить задачу для оптимизации  $\alpha$ -робастной алгебраической связности:

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W}} \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \cdot \left( I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \preceq L(W \setminus \alpha e), \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сложность задачи (2.3) совпадает со сложностью задачи (2.2). Если множество  $\mathcal{W}$  есть выпуклое множество, то данные задачи можно решать стандартными пакетами для SDP. В случае, если множество  $\mathcal{W}$  является дискретным, то можно построить выпуклую релаксацию (см. [3]).

Далее мы предложим обобщение жадного алгоритма из работ [3, 10] на случай оптимизации робастной связности.

**Таблица 1.** Параметры графов из библиотеки `sndlib`

Graph	$ V $	$ E $	$\max W_{i,j}$	$\min W_{i,j}$
Abilene	12	15	9920000	2480000
Ebone	23	38	500	31
Geant	23	37	1000000	1000000
germany50	50	88	40.0	40.0

В жадном алгоритме мы будем увеличивать вес на ребрах на некоторую фиксированную величину  $\Delta w_q$ . Пусть  $\Omega_e(G)$  есть оценка на улучшение метрики при увеличении веса на ребре  $e \in E$  на  $\Delta w_q$  или при добавлении ребра  $e \notin E$  с весом  $w_{\min} \geq 0$ . Данную оценку для отдельных метрик мы введем ниже. Тогда рассмотрим следующую жадную эвристику:

1. Для робастной и  $\alpha$ -робастной алгебраической связности  $E_\lambda := \{e_\lambda\}$ , где  $e_\lambda$  — одно из ребер, на котором достигается минимальное значение связности. Для средней алгебраической связности  $E_\lambda = \emptyset$ .

2. Если  $w_{\min} \leq B$ , то  $e^* = \max_{e \in (V \times V) \setminus E_\lambda} \Omega_e(G)$ . Если  $w_{\min} > B$ , то  $e^* = \max_{e \in E \setminus E_\lambda} \Omega_e(G)$ .

3. Если  $e \in E$ , то  $w_e := w_e + \min(\Delta w_q, B)$ ;  $B := B - c_1 \Delta w_q$ .

4. Если  $e \notin E$ , то  $E := E \cup \{e\}$ ;  $w_e = w_{\min}$ ;  $B := B - c_1 w_{\min} - c_2$ .

Используя свойство суперградиента функции  $\lambda_2(G)$ , мы можем получить следующую оценку:

$$\lambda_2(G \cup \{(i, j)\}) \leq \lambda_2(G) + (v_i - v_j)^2$$

Таким образом, в работе [3] использовалась метрика  $\Omega_{(i,j)}(G) = (v_i - v_j)^2$  для добавления ребра. Естественным образом, она была обобщена для взвешенных графов в работе [10].

Для робастной алгебраической связности мы можем получить оценку:

$$\lambda_{2,R}(G \cup \{(i, j)\}) \leq \lambda_2(G \setminus e_\lambda) + c(v_i - v_j)^2.$$

Здесь под обозначением  $G \cup \{(i, j)\}$  подразумевается увеличение веса на ребре  $(i, j)$  ( $c = \Delta w_q$ ) или добавление нового ребра с минимальным весом ( $c = w_{\min}$ ). Таким образом, получаем, что  $\Omega_{(i,j)}(G) = c(v_i - v_j)^2$  для робастной алгебраической связности.

Заметим, что для  $\alpha$ -робастной алгебраической связности мы получим такую же верхнюю оценку

для всех ребер, кроме  $e_\alpha$ . Однако на первом шаге нашей эвристики мы исключаем его из рассмотрения. Следовательно, метрика для  $\alpha$ -робастной алгебраической связности имеет такой же вид.

Наконец, мы можем вывести метрику для средней алгебраической связности

$$\lambda_2(G \cup \{(i, j)\} \setminus e) \leq \lambda_2(G \setminus e) + c_{i,j}(v_i^e - v_j^e)^2, \quad \forall e \in E,$$

где  $v^e$  — вектор Филдера для графа без ребра  $e$ . Вес  $c_{i,j}$  равен  $w_{\min}$  для ребра  $(i, j)$  из графа или  $\Delta w_q$  в противном случае. Тогда усреднив все неравенства по всем  $e \in E$ , мы получаем следующую оценку:

$$\lambda_{2,\text{mean}}(G \cup (i, j)) \leq \lambda_{2,\text{mean}}(G) + \frac{c_{i,j}}{|E|} \sum_{e \in E} (v_i^e - v_j^e)^2$$

Таким образом, получаем  $\Omega_{(i,j)}(G) = \frac{c_{i,j}}{|E|} \sum_{e \in E} (v_i^e - v_j^e)^2$  для средней алгебраической связности при равномерном распределении.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В наших экспериментах мы будем рассматривать четыре графа из библиотеки `sndlib` [12]: Abilene, Ebone, Geant и germany50. В таблице 1 можно найти их следующие параметры: число вершин, число ребер, а также максимальное и минимальное значения весов на ребрах.

В первых экспериментах мы продемонстрируем результаты решения SDP задачи для различных метрик. В данной постановке мы не рассматриваем возможность добавления ребер. Для этих целей мы возьмем множество допустимых матриц в виде  $\mathcal{W} = \{W : \|W - W_0\|_1 \leq B; W_{i,j} = 0, \forall (i, j) \notin E\}$ , где  $B \in \mathbb{R}_+$  есть бюджет для модификаций графа. Здесь  $\|\cdot\|_1$  обозначает поэлементную

$\ell_1$ -норму, т.е.  $\|X\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |x_{ij}|$ .

Во всех наших экспериментах для различных графов мы введем бюджет, как  $B = \gamma \max_{i,j} W_{i,j}$ , и параметр  $\gamma$  будет варьироваться.

На рис. 1 показана зависимость алгебраической связности и ее робастной связности для графа, полученного из графа Ebone при оптимизации робастной алгебраической связности, от различных параметров бюджета. Для удобства на этом графике и на всех последующих значения метрик были разделены на значение алгебраической связности исходного графа. Как мы можем видеть, для всех параметров бюджета робастная алгебраическая связность равна нулю. Это проис-

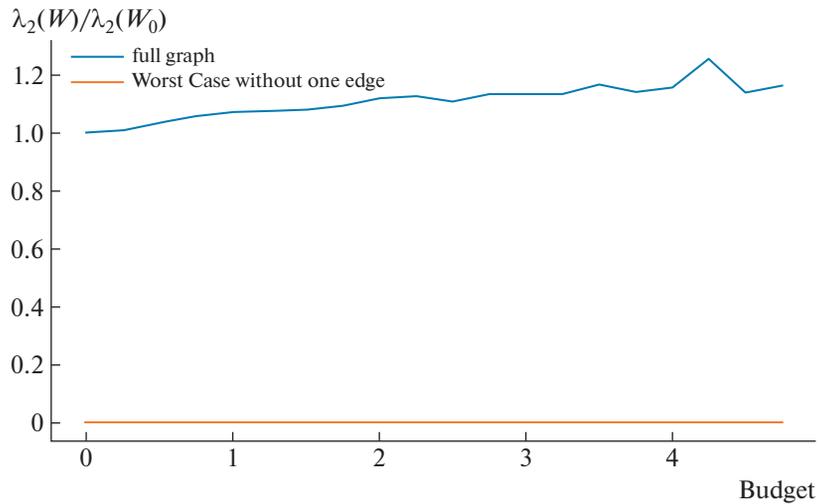


Рис. 1. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,R}(G)$  для графа Ebone при различных значениях параметра  $\gamma$ .

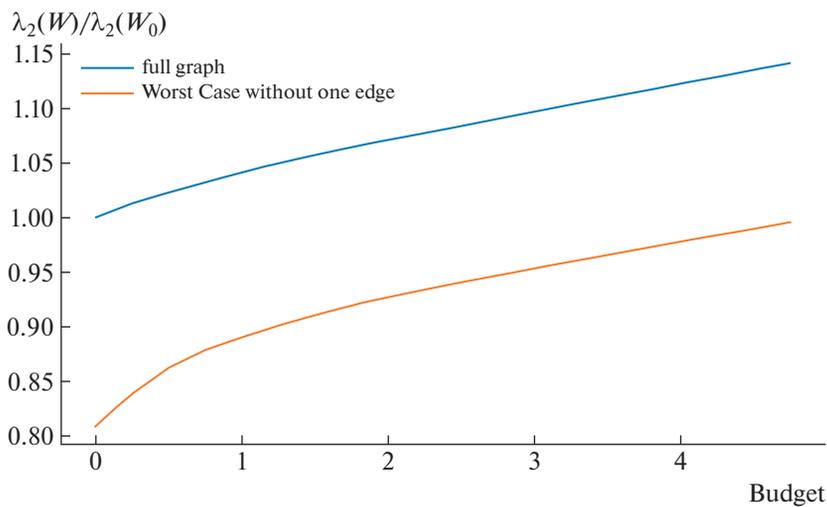


Рис. 2. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,R}(G)$  для графа germany50 при различных значениях параметра  $\gamma$ .

ходит поскольку в графе есть мост. Здесь мы видим одну из основных проблем данной метрики для таких графов. Ее оптимизация не приводит к улучшению графа, если возможность добавлять ребра отсутствует.

В свою очередь мы можем увидеть другую ситуацию на рис. 2 для графа germany50. Данный граф не содержит моста и робастная алгебраическая связность отлична от нуля для всех значений бюджета. Во-первых, можно заметить, что оптимизация робастной алгебраической связности приводит к увеличению алгебраической связности. Во-вторых, обе метрики начиная с некоторого момента начинают увеличиваться почти линейно. Кроме этого, мы видим, что с какого-то

момента зазор между этими двумя метриками почти не меняется.

Результаты для графа Geant, показанные на рис. 3 похожи на результаты для germany50. Мы видим, что выше обозначенные наблюдения верны для графа Geant. Единственным отличием является то, что выход на режим линейного улучшения метрик происходит раньше. При этом заметим, что веса на всех ребрах как в графе Geant, так и в графе germany50 равны одному и тому же значению (см. таблицу 1). Естественным предположением в таком случае может быть, что веса на всех ребрах продолжают увеличиваться равномерно или почти равномерно, что и приводит к линейному увеличению. Поэтому далее мы срав-

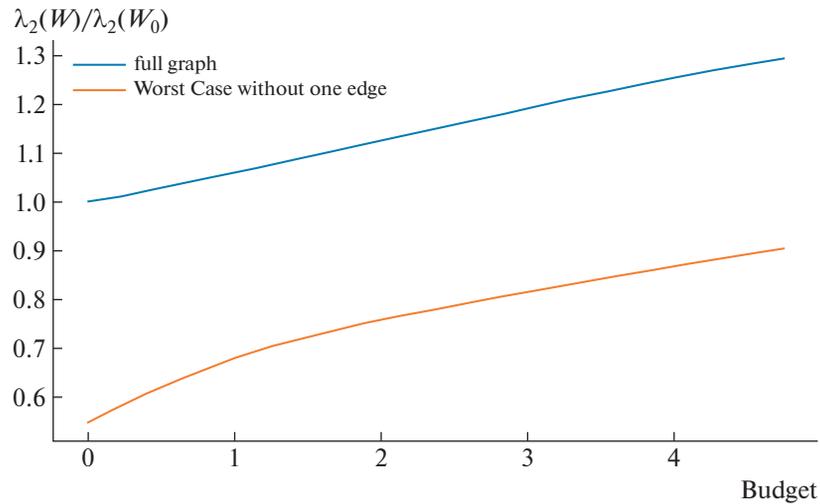


Рис. 3. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,R}(G)$  для графа Geant при различных значениях параметра  $\gamma$ .

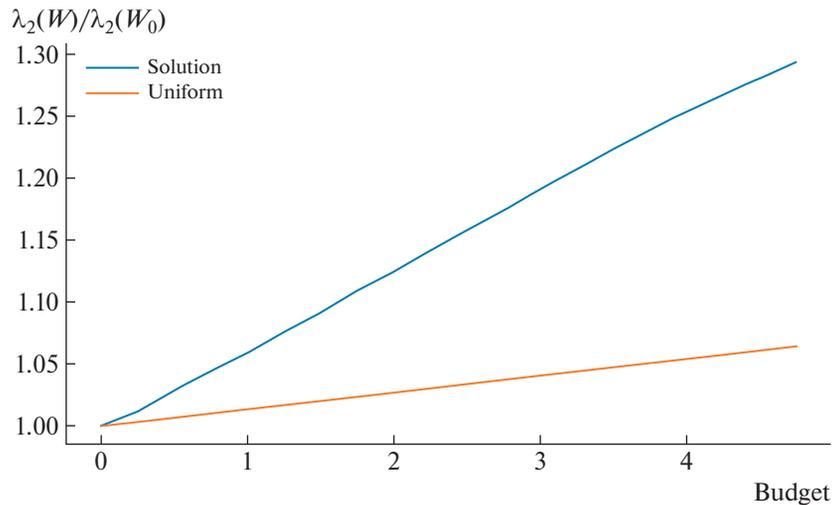


Рис. 4. Сравнение решений по метрике  $\lambda_2$  с равномерным улучшением на сети Geant.

ним результаты между оптимизацией робастной алгебраической связности и равномерным увеличением всех весов на всех ребрах на величину  $\frac{B}{|E|}$ .

Результаты такого сравнения для графа Geant показаны на рис. 4 и 5. На рис. 4 показаны значения алгебраической связности для весов, полученных через оптимизацию робастной алгебраической связности и через равномерное улучшение. Здесь мы можем видеть, что вторая стратегия приводит к существенно худшему результату. Из этого можно сделать вывод, что решение найденное через SDP-постановку существенно отличается от равномерного улучшения.

Более того, на рис. 5 мы можем видеть, что равномерное улучшение почти не увеличивает робастную алгебраическую связность. Таким образом, результат оптимизации робастной алгебраической связности существенно превосходит равномерное улучшение как по значению алгебраической связности, так и по значению ее робастной версии.

Однако как было показано на графе Ebone, оптимизация данной метрики на графах с мостом ни к чему не приводит. Поэтому далее мы рассмотрим  $\alpha$ -робастную алгебраическую связность.

Так на рис. 6 показаны результаты оптимизации  $\alpha$ -робастной алгебраической связности на

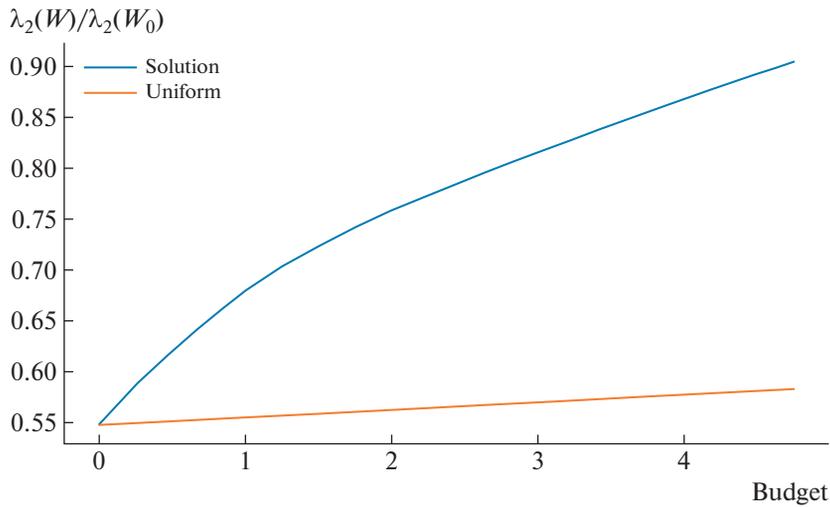


Рис. 5. Сравнение решений по метрике  $\lambda_{2,R}$  с равномерным улучшением на сети Geant.

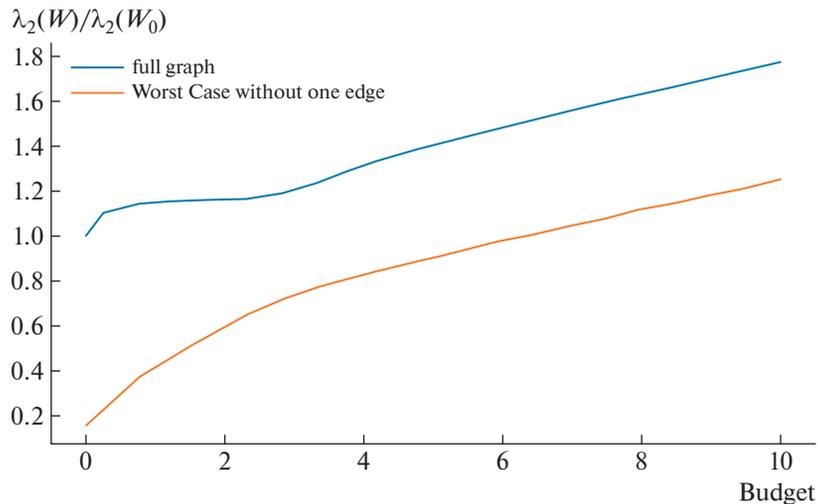


Рис. 6. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,\alpha,R}(G)$  для графа Ebone при различных значениях параметра  $\gamma$ .

графе Ebone с  $\alpha = 0.1$ . Мы видим, что в отличие от оптимизации робастной алгебраической связности, которая тождественно равна нулю на графе с мостом, оптимизация  $\alpha$ -робастной метрики приводит к существенному увеличению связности. Кроме этого, как и ранее с некоторого момента наблюдается почти линейное увеличение значения метрик.

Аналогичную ситуацию мы можем увидеть для графа Abilene на рис. 7. Исходно данный граф содержит мост и его оптимизация через робастную алгебраическую связность лишена смысла. В свою очередь, релаксация данной метрики приводит к тому, что растет алгебраическая связность. Тем не менее важно понимать, что такого

вида оптимизации не решает проблемы, что при удалении одного ребра граф может стать несвязным.

Как уже было показано, на графах с мостом  $\alpha$ -робастная метрика не обращается в ноль. При этом при ее сравнении с исходной алгебраической связностью мы можем сделать вывод об устойчивости графа. Однако более естественной ситуацией является выпадение целого ребра, а не отдельной части.

На рис. 8 показаны результаты сравнения робастной алгебраической связности и  $\alpha$ -робастной алгебраической связности при оптимизации последней при различных бюджетах на графе Geant, который не имеет ребер. Мы можем ви-

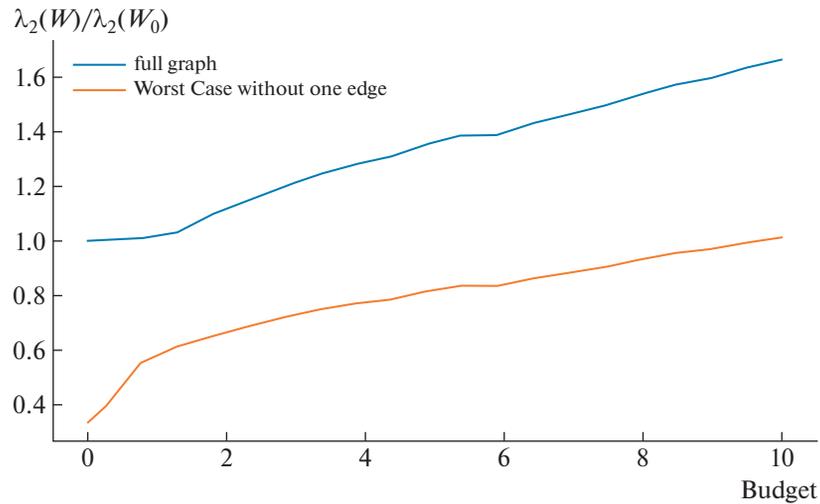


Рис. 7. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,\alpha,R}(G)$  для графа Abilene при различных значениях параметра  $\gamma$ .

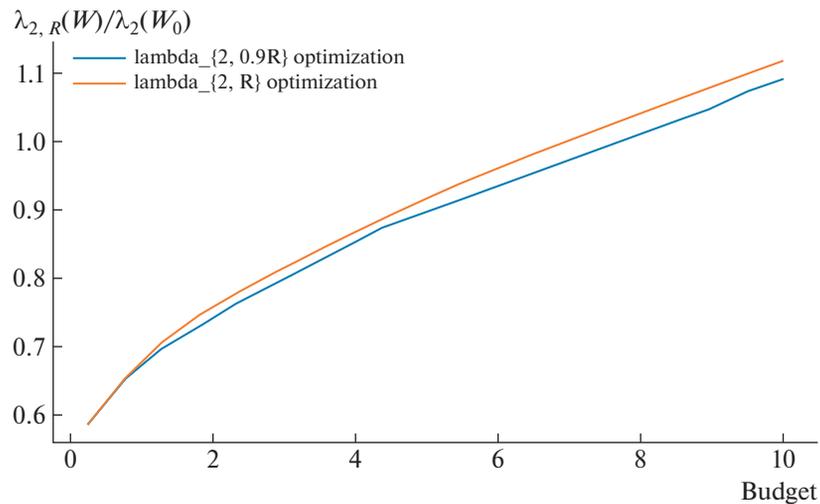


Рис. 8. Сравнение значений  $\lambda_{2,R}$  и  $\lambda_{2,\alpha,R}$  для результатов оптимизации  $\alpha$ -робастной алгебраической связности графа Geant.

деть, что данные метрики близки на всем диапазоне. Таким образом, использование  $\alpha$ -робастной алгебраической связности позволяет сравнивать графы даже с мостом, и более того дает схожие результаты с робастной версией на графах без моста. Далее мы рассмотрим результаты оптимизации средней алгебраической связности.

На рис. 9 показаны результаты средней алгебраической связности. Можно заметить, что зазор между усреднением и исходной связностью значительно меньше, чем для робастной алгебраической связности. Также мы видим, что оптимизация

средней алгебраической связности позволяет улучшать связность даже графов с мостом.

На рис. 10 показаны результаты аналогичного эксперимента для графа Geant. Как можно видеть, оптимизация средней алгебраической связности приводит к более существенному росту алгебраической связности, чем ранее рассматриваемые метрики.

Как было выше отмечено, что метрика  $\lambda_{2,R}(G)$  не может быть улучшена на графах с мостом только изменением весов на ребрах. Однако добавлением ребер можно избавиться от мостов. Для этих целей можно использовать предложенный в ра-

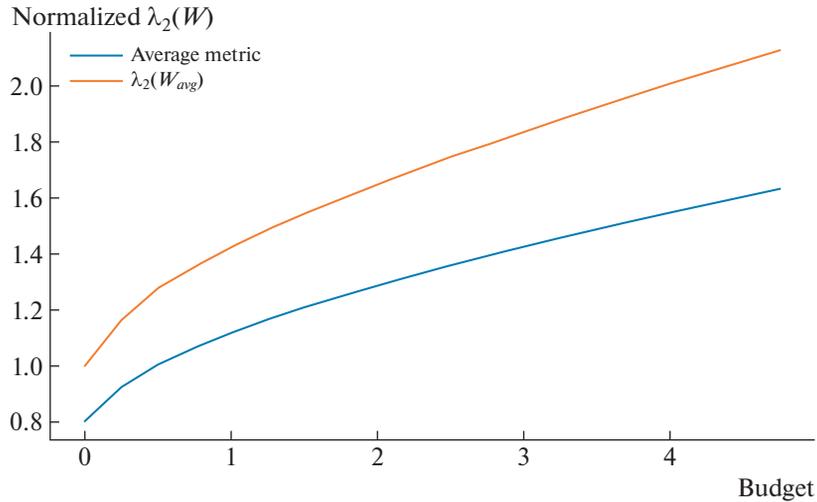


Рис. 9. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,mean}(G)$  для графа Ebone при различных значениях параметра  $\gamma$ .

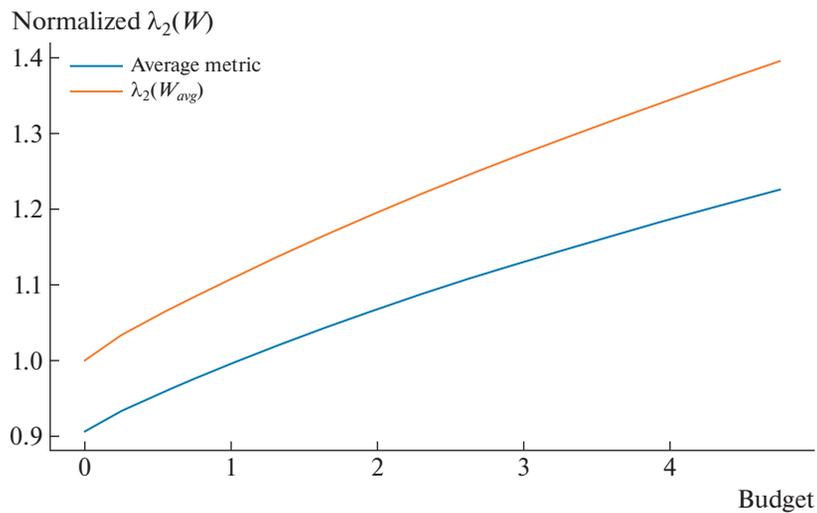


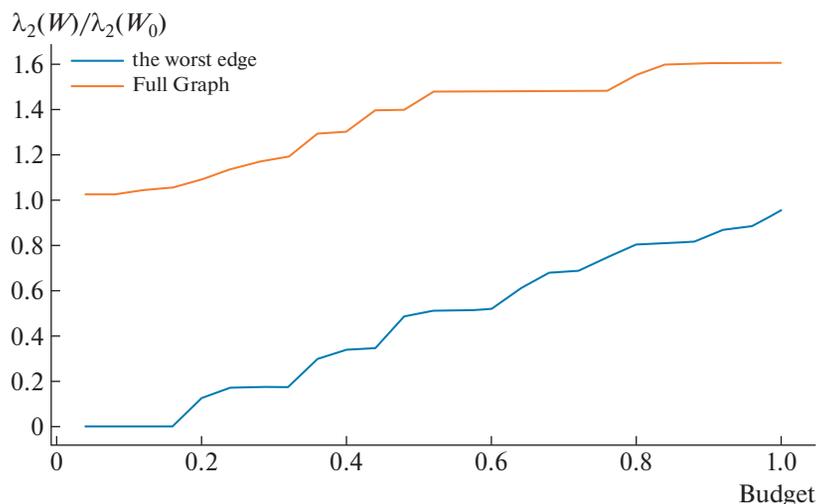
Рис. 10. Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,mean}(G)$  для графа Geant при различных значениях параметра  $\gamma$ .

боте [3] жадный алгоритм. Однако он не способен изменять веса на уже существующих ребрах. Поэтому в данной работе была предложена модификация, способная на это. Результаты применения нового жадного алгоритма на граф Ebone показана на рис. 11. Параметры следующие  $w_{min} = w_q = \frac{1}{10} \min_{e \in E} W_e$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ . Как мы можем видеть, первые несколько итераций робастная алгебраическая связность равна нулю, поскольку в этом графе есть несколько мостов. Однако с некоторой итерации метрика начинает расти, и зазор между метриками сокращаться.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были предложены возможные обобщения известной метрики алгебраической связности. Данные обобщения должны учесть, что граф может претерпевать изменения, которые могут существенно ухудшить связность. Были предложены робастные метрики, основанные на рассмотрении худшего случая, а также обсуждены их недостатки. Кроме этого, было рассмотрено усреднение по модификациям.

Дополнительно были обобщены подходы оптимизации алгебраической связности на случай оптимизации робастных версий. В частности, были рассмотрены возможность модификации ве-



**Рис. 11.** Результаты оптимизации метрики  $\lambda_{2,R}(G)$  жадным алгоритмом для графа Ebone при различных значениях параметра  $\gamma$ .

сов на ребрах через SDP-постановку задачи оптимизации. Также был обобщен жадный алгоритм на случай добавления ребер и модификации весов. Детали этих подходов описаны для каждой из предложенных метрик.

Наконец, были проведены численные эксперименты, показывающие работоспособность предложенных подходов. Также были обсуждены детали использования различных метрик на графах с мостами и без них. Было показано, что предложенная робастная алгебраическая связность и ее  $\alpha$ -релаксация дают близкие результаты на графах без мостов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fiedler Miroslav*. Algebraic Connectivity of Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1973. V. 23. P. 298–305. <https://doi.org/10.21136/CMJ.1973.101168>
2. *Fallat Shaun, Kirkland Steve, Pati Sukanta*. On graphs with algebraic connectivity equal to minimum edge density. *Linear Algebra and its Applications*. 2003. V. 373. P. 31–50. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00538-4](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00538-4)
3. *Ghosh Arpita, Boyd Stephen*. Growing Well-connected Graphs. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. 2007. P. 6605–6611. <https://doi.org/10.1109/CDC.2006.377282>
4. *Kirkland Steve, Neumann M*. On Algebraic Connectivity as a Function of an Edge Weight. *Linear and Multilinear Algebra*. 2004. V. 052. P. 17–33. <https://doi.org/10.1080/0308108031000119663>
5. *Feddema John, Byrne Raymond, Abdallah Chaouki*. Algebraic connectivity and graph robustness. 2005. <https://doi.org/10.2172/973665>
6. *Goyal Sanjeev, Vigier Adrien*. *Robust Networks*. 2011.
7. *Bala Venkatesh, Goyal, Sanjeev*. A Strategic Analysis of Network Reliability. *Review of Economic Design*. 2000. V. 5. P. 205–228. <https://doi.org/10.1007/s100580000019>
8. *Ghayoori A., Leon-Garcia A.*, “Robust network design,” 2013 IEEE International Conference on Communications (ICC), Budapest, Hungary, 2013. P. 2409–2414. <https://doi.org/10.1109/ICC.2013.6654892>
9. *Lipovetsky Stan*. Matrix Analysis, 2nd edition, Roger A. Horn and Charles R. Johnson, book review, *Technometrics*. 2013. V. 55. № 3. 2013, 376. *Technometrics*. V. 55. P. 376. book review
10. *Gregoire Spiers, Peng Wei, Dengfeng Sun*, Algebraic Connectivity Optimization of Large Scale and Directed Air Transportation Network, *IFAC Proceedings Volumes, Volume 45, Issue 24, 2012, Pages 103-109, ISSN 1474-6670, ISBN 9783902823137*, <https://doi.org/10.3182/20120912-3-BG-2031.00019>
11. *Zhidong He*. Optimization of convergence rate via algebraic connectivity. 2019.
12. *Orlowski S., Wessaly R., Pioro M., Tomaszewski A*. SNDlib 1.0—Survivable network design library. *Networks: An International Journal* 55.3. 2010. P. 276–286.

**ROBUST ALGEBRAIC CONNECTIVITY****I. A. Kuruzov<sup>a,b</sup>, A. V. Rogozin<sup>a</sup>, S. A. Chezhegov<sup>a</sup>, and A. B. Kupavskii**

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

<sup>b</sup>*Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)  
Bolshoi Karetny lane, 19, build. 1, Moscow, 127051 Russia*

The second smallest eigenvalue of a graph Laplacian is known as algebraic connectivity of the graph. This value shows how much this graph is connected. But this metric does not take into attention possible changes in graph. Note, that deletion of even one node or edge can lead the graph to be disconnected. This work is devoted to development of a metric that should describe robustness of the graph to such changes. All proposed metrics are based on algebraic connectivity. Besides, we provide generalization of some famous optimization methods for our robust modifications of algebraic connectivity. Moreover, this work contains some numerical experiments demonstrated efficiency of proposed approaches.

УДК 519.85

## БЕЗГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С УСЛОВИЕМ ПОЛЯКА–ЛОЯСИЕВИЧА

© 2023 г. С. И. Садыков<sup>a,\*</sup> (ORCID: 0009-0008-7101-6532),  
А. В. Лобанов<sup>a,b,\*\*</sup> (ORCID: 0000-0003-1620-9581), А. М. Райгородский<sup>a,b,c,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Московский физико-технический институт,  
141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия

<sup>b</sup>Исследовательский центр доверенного искусственного интеллекта ИСП РАН,  
109004, г. Москва, ул. Александра Солженицына, 25, Россия

<sup>c</sup>Кавказский математический центр Адыгейского гос. университета,  
385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208, Россия

\*E-mail: sadykov.si@phystech.edu

\*\*E-mail: lobbsasha@mail.ru

\*\*\*E-mail: mraigor@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 10.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Данная работа фокусируется на решения подкласса стохастической невыпукло-невогнутой задачи оптимизации черного ящика с седловой точкой, которая удовлетворяет условию Поляка–Лоясиевича. Для решения такой задачи мы предоставляем первый, насколько нам известно, безградиентный алгоритм, подход к созданию которого основывается на применении градиентной аппроксимации (ядерной аппроксимации) к алгоритму стохастического градиентного спуска подъема со смещенным оракулом. Мы представляем теоретические оценки, гарантирующие глобальную линейную скорость сходимости к желаемой точности. Теоретические результаты мы проверяем на модельном примере, сравнивая с алгоритмом, использующую Гауссовскую аппроксимацию.

DOI: 10.31857/S0132347423060079, EDN: DSVULZ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучается стандартная стохастическая задача оптимизации с седловой точкой, которая имеет следующий вид:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{y \in \mathcal{Y}} f(x, y) := \mathbb{E}[f(x, y, \xi)]. \quad (1.1)$$

Такая минимаксная задача широко распространена и активно исследуется в области теории игр и исследований операций, а также в современных задачах машинного обучения: генеративно-состязательные нейросети (GANs) [1], обучение с подкреплением (Reinforcement learning) [2]. В частности, стоит отметить другие приложения, включающие в себя надежную оптимизацию (Robust optimization) [3], обучение без учителя (Unsupervised learning) [4], состязательное машинное обучение (Adversarial machine learning) [5] и другие. Мы рассматриваем более узкую задачу оптимизации с седловой точкой (1.1), предполагая, что целевая функция  $f$  является не просто гладкой, а имеет повышенную гладкость, а также предпола-

гаем, что оракул может вернуть при обращении только зашумленное значение целевой функции  $\tilde{f} = f + \delta$  (шум ограничен). Такой класс задач имеет различные названия, в частности, часто упоминающее в литературе: задача “черного ящика” (Black box problem) [6]. Где в качестве черного ящика выступает тот самый оракул  $\tilde{f}$ , который в дальнейшем будет иметь название “оракул нулевого порядка” (zero-order oracle) [7].

Существуют различные техники решения задач черного ящика [8], основная идея которых состоит в использовании оптимального (ускоренного пробатченного) алгоритма первого порядка, заменяя истинный градиент на соответствующую градиентную аппроксимацию. Выбор градиентной аппроксимации зачастую зависит от предположений на целевую функцию, например в работах [9] и [10] используется схема сглаживания с  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, поскольку предполагается, что целевая функция является негладкой. В нашем случае функция  $f$  является не только глад-

кой, но может иметь и повышенную гладкость, поэтому в качестве градиентной аппроксимации мы будем использовать ту, которая учитывает преимущество порядка гладкости [11]

$$\frac{d}{2\gamma}(\tilde{f}(z + \gamma r e, \xi) - \tilde{f}(z - \gamma r e, \xi)) K(r) e. \quad (1.2)$$

В работах [12] и [13] авторы предложили безградиентный метод для решения седловой задачи в выпукло-вогнутой настройке и для решения задачи оптимизации в (сильно) выпуклой настройке соответственно, используя ядерную аппроксимацию (1.2). Однако наибольший интерес с точки зрения приложений возникает в задачах с невыпуклой настройкой. Тогда на помощь приходит, пожалуй, одно из немногих условий позволяющих для подкласса невыпуклых задач доказать глобальную сходимость. Данное условие имеет следующее название: условие Поляка–Лоясиевича [14, 15]. Для задачи оптимизации в статье [16] авторы предложили смещенный алгоритм первого порядка biased SGD, а уже совсем недавно в [17] предложили безградиентный алгоритм, который основывается на алгоритме [16]. Стоит обратить внимание, что при условии Поляка–Лоясиевича неускоренные алгоритмы уже являются оптимальными [18], именно поэтому авторы статьи [17] основывались на смещенном SGD при создании нового безградиентного алгоритма для решения невыпуклых задач оптимизации черного ящика. Также совсем недавно был предложен алгоритм Stoc-AGDA [19] для решения стохастической задачи оптимизации с седловой точкой, удовлетворяющей условию Поляка–Лоясиевича. Но в настоящее время нет алгоритма, который решит минимаксную задачу черного ящика, целевая функция которой удовлетворяет условию Поляка–Лоясиевича.

Таким образом, мы можем сформулировать наш основной вклад в данную статью. Мы фокусируемся на решении стохастической седловой задачи оптимизации, когда вычисление градиента недоступно. Для создания безградиентного алгоритма мы обобщаем результаты сходимости алгоритма Stoc-AGDA из статьи [19] на случай со смещенным оракулом (данный результат может вызывать независимый интерес). Мы предоставляем новый безградиентный алгоритм нулевого порядка стохастического градиентного спуска подъема (Zero-Order SGDA). Мы анализируем сходимость предложенного алгоритма при различных вариантах безградиентного оракула. В качестве основных результатов мы предоставляем следующие оценки: общее число последовательных итераций  $N$ , общее число обращений к оракулу нулевого порядка  $T$ , а также максимально допустимый уровень враждебного шума  $\Delta$ . С помощью практического эксперимента мы

подтверждаем теоретические результаты, показывая преимущество “ядерной” аппроксимации над Гауссовской в задаче с седловой точкой в безградиентной настройке.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

**Обозначения.** На протяжении всей статьи мы используем следующие обозначения. Мы используем  $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i$  для обозначения стандартного скалярного произведения  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Мы используем  $\|\cdot\|$  для обозначения евклидовой нормы вектора  $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Для обозначения евклидова шара и сферы мы используем следующие обозначения:

$$\mathcal{B}^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$$

$$\mathcal{S}^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}.$$

Для любого  $\beta \geq 2$  мы обозначаем через  $\lfloor \beta \rfloor$  наибольшее целое число, строго меньшее  $\beta$ . Через  $\mathcal{O}(\cdot)$  мы обозначаем верхнюю границу с точностью до константы. Также мы используем  $\tilde{\mathcal{O}}(\cdot)$ , чтобы скрыть логарифмический множитель.

### 2.1. Предположения

Для начала необходимо определить три понятия оптимальности для минимаксной задачи (1.1). Самое прямое понятие оптимальности – это глобальная минимаксная точка, в которой  $x^*$  – оптимальное решение задачи минимизации функции  $\max_y f(x, y)$ , а  $y^*$  – оптимальное решение для  $\max_y f(x^*, y)$ . Для седловой точки  $(x^*, y^*)$   $x^*$  является оптимальным решением для  $\min_x f(x, y^*)$  и  $y^*$  – оптимальным решением для  $\max_y f(x^*, y)$ .

**Определение 1** (Глобальное решение).

1.  $(x^*, y^*)$  *глобальная минимаксная точка (global minitax point)*, если для любых  $(x, y)$ :

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq \max_y f(x, y'). \quad (2.1)$$

2.  $(x^*, y^*)$  *седловая точка (saddle point)*, если для любых  $(x, y)$ :

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*). \quad (2.2)$$

3.  $(x^*, y^*)$  *стационарная точка (stationary point)*, если:

$$\nabla_x f(x^*, y^*) = \nabla_y f(x^*, y^*) = 0. \quad (2.3)$$

Такое определение используется в [19].

На протяжении всей статьи предполагается, что функция  $f$  в (1.1) непрерывно дифференцируема и имеет Липшицев градиент.

**Предположение 1** (Градиент Липшица). *Существует положительное число  $l > 0$  такое что:*

$$\|\nabla_x f(x_1, y_1) - \nabla_x f(x_2, y_2)\| \leq L_2 [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|],$$

$$\|\nabla_y f(x_1, y_1) - \nabla_y f(x_2, y_2)\| \leq L_2 [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|],$$

выполняется для всех  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{d_x}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{d_y}$ .

Такое предположение используется в [19].

Введем прямое обобщение PL условия на минимаксную задачу: функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условию PL с константой  $\mu_x$  относительно  $x$ , а  $-f(x, y)$  удовлетворяет условию PL с константой  $\mu_y$  относительно  $y$ . Мы формально сформулируем это в следующем предположении.

**Предположение 2** (Двустороннее PL условие). *Непрерывно дифференцируемая функция  $f(x, y)$  удовлетворяет двустороннему условию PL, если существуют константы  $\mu_x, \mu_y > 0$  такие что  $\forall x \in \mathbb{R}^{d_x}, y \in \mathbb{R}^{d_y}$  выполняется:*

$$\|\nabla_x f(x, y)\|^2 \geq 2\mu_x [f(x, y) - \min_x f(x, y)],$$

$$\|\nabla_y f(x, y)\|^2 \geq 2\mu_y [\max_y f(x, y) - f(x, y)].$$

Такое предположение используется в [19, 17].

Для всех наших теоретических результатов мы предполагаем, что  $f$  не просто гладкая, а имеет высокий порядок гладкости.

**Предположение 3** (Условие Гельдера). *Зафиксируем некоторые  $\beta \geq 2$  и  $L_\beta > 0$ . Обозначим через  $\mathcal{F}_\beta(L_\beta)$  множество всех функций  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , которые являются  $l = \lfloor \beta \rfloor$  раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют для всех  $x, x' \in \mathbb{R}^{d_x}, y, y' \in \mathbb{R}^{d_y}$  условию Гельдера*

$$\|f^{(l)}(x, y) - f^{(l)}(x', y)\| \leq L_\beta \|x - x'\|^{\beta-l},$$

$$\|f^{(l)}(x, y) - f^{(l)}(x, y')\| \leq L_\beta \|y - y'\|^{\beta-l}.$$

Такое предположение используется в [20].

Теперь сформулируем стандартные предположения для смешенного градиентного оракула. Для этого введем следующее определение.

**Определение 2** (Смещенный градиентный оракул). *Для отображений  $\mathbf{G}_x: \mathbb{R}^{d_x+d_y} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_x}, \mathbf{G}_y: \mathbb{R}^{d_x+d_y} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_y}$  выполнено:*

$$\mathbf{G}_x(x, y, \xi) = \nabla_x f(x, y) + \mathbf{b}_x(x, y) + \mathbf{n}_x(x, y, \xi),$$

$$\mathbf{G}_y(x, y, \xi) = \nabla_y f(x, y) + \mathbf{b}_y(x, y) + \mathbf{n}_y(x, y, \xi),$$

где  $\mathbf{b}_x: \mathbb{R}^{d_x+d_y} \rightarrow \mathbb{R}^{d_x}, \mathbf{b}_y: \mathbb{R}^{d_x+d_y} \rightarrow \mathbb{R}^{d_y}$  смещения (bias),  $\mathbf{n}_x: \mathbb{R}^{d_x+d_y} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_x}, \mathbf{n}_y: \mathbb{R}^{d_x+d_y} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_y}$  нулевой средний шум (zero-mean noise), то есть  $\mathbb{E}_\xi \mathbf{n}_x(x, y, \xi) = \mathbb{E}_\xi \mathbf{n}_y(x, y, \xi) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^{d_x}, y \in \mathbb{R}^{d_y}$ .

Такое определение используется в [16, 17]. А также предполагается, что этот градиентный оракул имеет ограниченные смещение и шум.

**Предположение 4** ( $(M, \sigma^2)$ -ограничение на шум). *Существуют константы  $M, \sigma^2 \geq 0$  такие что  $\forall x \in \mathbb{R}^{d_x}, \forall y \in \mathbb{R}^{d_y}$*

$$\mathbb{E}_\xi \|\mathbf{n}_x(x, y, \xi)\|^2 \leq M \|\nabla_x f(x, y) + \mathbf{b}_x(x, y)\|^2 + \sigma^2,$$

$$\mathbb{E}_\xi \|\mathbf{n}_y(x, y, \xi)\|^2 \leq M \|\nabla_y f(x, y) + \mathbf{b}_y(x, y)\|^2 + \sigma^2$$

Такое определение используется в [16, 17].

**Предположение 5** ( $\zeta^2$ -ограничение на смещение). *Существуют константа  $\zeta^2 \geq 0$  такая что  $\forall x \in \mathbb{R}^{d_x}, \forall y \in \mathbb{R}^{d_y}$*

$$\|\mathbf{b}_x(x, y)\|^2 \leq \zeta^2,$$

$$\|\mathbf{b}_y(x, y)\|^2 \leq \zeta^2.$$

Такое определение используется в [16, 17]. Здесь используются общие оценки  $M$  и  $\zeta^2$  для аппроксимации по  $x$  и по  $y$  для удобства. Далее используется обозначение  $d = \max(d_x, d_y)$ .

### 3. СМЕЩЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТНЫЙ СПУСК ПОДЪЕМ

Теперь мы можем представить алгоритм 1. Этот алгоритм является модификацией метода SGDA [19]. Основная идея данного алгоритма заключается в том, чтобы использовать “зашумленное” значение, которое возвращается градиентным оракулом (см. Определение 2) вместо истинного градиента (градиентного оракула). Кроме того, для достижения оптимальной итерационной сложности мы добавляем размер батча  $B$ .

**Algorithm 1** Biased Mini-Batch Stochastic Gradient Descent Ascent (BMB-SGDA)

**Вход:** 2 последовательности размера шага  $(\tau_{xk})_{k \geq 0}, (\tau_{yk})_{k \geq 0}$ , размер батча  $B, x_0 \in \mathbb{R}^{d_x}, y_0 \in \mathbb{R}^{d_y}$ ;  
**for**  $k = 0$  **to**  $N - 1$  **do**

$$\text{Вычислить } \mathbf{G}_{xk} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \tilde{\mathbf{G}}_x(x_k, y_k, \mathbf{e}_i)$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k - \tau_{xk} \mathbf{G}_{xk}$$

Вычислить  $\mathbf{G}_{y_k} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \tilde{\mathbf{G}}_y(x_{k+1}, y_k, \mathbf{e}_i)$   
 $y_{k+1} \leftarrow y_k + \tau_{y_k} \mathbf{G}_{y_k}$

end for

**Return:**  $x_N, y_N$

Мы хотим получить некоторый результат, говорящий о сходимости алгоритма, который основан на аппроксимации, имеющей смещение и шум. Для этого определим следующие функции:

$$g(x) = \max_y f(x, y), \quad g^* = \min_x \max_y f(x, y)$$

$$a_t = \mathbb{E}[g(x_t) - g^*], \quad b_t = \mathbb{E}[g(x_t) - f(x_t, y_t)].$$

Легко видеть, что  $a_t, b_t \geq 0$ . Поэтому имеет смысл минимизировать следующую величину

$$P_t = a_t + \lambda b_t. \quad (3.1)$$

При двустороннем условии PL можно показать, что функция  $g(x) := \max_y f(x, y)$  удовлетворяет условию PL с  $\mu_x$  (см. приложение). Более того,  $g$  имеет Липшицев градиент с константой  $L := L_2 + L_2^2/\mu_y$  [21].

В следующей теореме говорится о том, что при такой постановке задачи, сходимость алгоритма линейная и можно подобрать параметр  $\lambda$  таким образом, что знаменатель геометрической прогрессии будет меньше единицы.

**Теорема 1.** *Предположим, что выполняются предположения 1–5 и  $f(x, y)$  удовлетворяет двустороннему PL-условию с  $\mu_x$  и  $\mu_y$ . Определим  $P_t := a_t + \frac{1}{10} b_t$ . Если мы запустим алгоритм 1 с  $\tau_y^t = \tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$*

$$\text{и } \tau_x^t = \tau_x = \frac{\mu_y \tau_y}{12L_2^2}, \text{ то}$$

$$P_t \leq (1 - \mu_x \tau_x)^t P_0 + \frac{\tau_y^2 L_2 \frac{\sigma^2}{B} + \tau_y \zeta^2}{10\mu_x \tau_x}.$$

Доказательство см. в приложении

Из теоремы 1 видно, что дисперсию шума аппроксимации ( $\sigma^2$ ) можно уменьшить, увеличивая размер батча  $B$ , но второй момент смещения ( $\zeta^2$ ) так уменьшить не получится. И в целом второе слагаемое в свободном члене сложнее уменьшить хотя бы потому что перед смещением стоит размер шага в первой степени в отличие от первого слагаемого, где размер шага возводится в квадрат, благодаря чему можно уменьшить это слагаемое, уменьшая размер шага. А так как на каждой итерации решается еще и внутренняя задача максимизации, то размер шага по игрек должен быть на

порядок больше, о чем прописано в условии теоремы.

#### 4. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Применение стандартных методов градиентного спуск-подъема может столкнуться с проблемой невозможности получения градиента функции. В таких случаях возникает необходимость использовать безградиентные методы аппроксимации градиента. Безградиентные методы предлагают альтернативные подходы к оптимизации, которые не требуют полного вычисления градиента функции и могут быть применимы к седловым задачам.

##### 4.1. Градиентная аппроксимация с двухточечной обратной связью

В данном разделе мы описываем наш подход к решению задачи (1.1), учитывая, что оракул градиента (см. Определение 2) не предоставляет информацию о производных целевой функции. Наш подход состоит в разработке нового алгоритма под названием ZO-BMB-SGDA, который является оптимальным безградиентным методом, учитывающим сложность оракула, сложность итерации и максимальный уровень шума. Этот алгоритм основан на методе первого порядка, в частности, на SGDA. Для достижения этой цели, мы применяем вместо градиентного оракула (см. Определение 2) аппроксимацию градиента, которая использует оракул нулевого порядка  $\tilde{f}$ . Этот оракул предоставляет значение целевой функции  $f(x, y, \xi)$  с добавлением враждебного детерминированного шума  $\delta(x, y)$ , удовлетворяющего условиям  $|\delta(x, y)| \leq \Delta$  и  $\Delta > 0$ .

$$\tilde{f}(x, y, \xi) = f(x, y, \xi) + \delta(x, y). \quad (4.1)$$

Эта концепция враждебного шума хорошо описана в [8]. Для решения данной задачи мы применяем безградиентную ядерную аппроксимацию градиента, которая представляет собой предпочтительный выбор, поскольку учитывает повышенную гладкость функции.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_x(x, y, \xi, \mathbf{e}) &= \\ &= d_x \frac{\tilde{f}(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, y, \xi) - \tilde{f}(x - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, y, \xi)}{2\gamma} K(r) \mathbf{e}, \\ \tilde{\mathbf{G}}_y(x, y, \xi, \mathbf{e}) &= \\ &= d_y \frac{\tilde{f}(x, y + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, \xi) - \tilde{f}(x, y - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, \xi)}{2\gamma} K(r) \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{e}$  равномерно распределен на сфере  $S_2^d(1)$ ,  $r$  равномерно распределен на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $\mathbf{e}$  и  $r$

независимы,  $K : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — это ядро функции, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbb{E}[K(u)] = 0, \quad \mathbb{E}[uK(u)] = 1,$$

$$\mathbb{E}[u^j K(u)] = 0, \quad j = 2, \dots, p, \quad \mathbb{E}[|u|^\beta |K(u)|] < \infty.$$

В следующей теореме представлены результаты сходимости алгоритма 1 Zero-Order Biased Mini-Batch Stochastic Gradient Descent Ascent с аппроксимацией градиента (4.2) с помощью оракула нулевого порядка (4.1).

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x, y)$  удовлетворяет предположениям 1–3 и градиентная аппроксимация (4.2) удовлетворяет предположениям 4–5 и

пусть размер шага  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$  и  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ , тогда существуют параметры

$$M = 4d\beta^3 \quad \sigma^2 = 4d\beta^3 L_2 \gamma^2 + \frac{d^2 \Delta^2 \beta^3}{\gamma^2},$$

$$\zeta^2 = \beta^2 \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!d + \beta - 1} \frac{d}{\gamma^{\beta-1}} + d \frac{\Delta}{\gamma} \right)^2$$

такие, что Алгоритм 1 с параметром сглаживания  $\gamma = \mathcal{O}(d^{1/\beta} \Delta^{1/\beta})$  достигает следующего уровня ошибки

$$P_t = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\mu_x \mu_y^2} d^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \Delta^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \right),$$

для доказательства смотри раздел В. Результат сходимости, установленный в теореме 2, демонстрирует, что алгоритм 1, использующий градиентную аппроксимацию (4.2), достигает мини-

мальной ошибки  $\mathcal{O} \left( \frac{1}{\mu_x \mu_y^2} d^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \Delta^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \right)$  с линейной

скоростью сходимости. Это происходит из-за накопления состязательного шума в смещении  $\mathbf{b}_x(x, y)$  и  $\mathbf{b}_y(x, y)$ .

**Следствие 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  удовлетворяет предположениям 1–3 и градиентная аппроксимация (4.2) удовлетворяет предположениям 4–5 и пусть

размеры шагов  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$  и  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ , а пара-

метр сглаживания имеет вид  $\gamma = \mathcal{O} \left( (\mu_x \mu_y^2 \epsilon)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \right)$ ,

тогда алгоритм 1 достигает точности  $\epsilon$  для задачи (1.1) со следующими параметрами:

$$\Delta = \mathcal{O} \left( (\mu_x \mu_y^2)^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} \epsilon^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} d^{-1} \right);$$

$$N = \mathcal{O} \left( \mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\epsilon} \right); \quad T = \mathcal{O} \left( \beta^3 d \mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\epsilon} \right),$$

где  $\Delta$  — максимальный уровень шума,  $N$  — количество итераций и  $T$  — оракульная сложность.

#### 4.2. Градиентная аппроксимация с односточечной обратной связью

В такой настройке оракул нулевого порядка может иметь следующий вид

$$\tilde{f}(x, y, \xi) = f(x, y) + \xi, \quad (4.3)$$

а градиентная аппроксимация тогда примет следующую форму

$$\tilde{\mathbf{G}}_x(x, y, \xi, \mathbf{e}) = d_x \frac{f(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, y) + \xi_1 - f(x - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, y) - \xi_2}{2\gamma} K(\mathbf{r}) \mathbf{e}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_y(x, y, \xi, \mathbf{e}) = d_y \frac{\tilde{f}(x, y + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, \xi_1) - \tilde{f}(x, y - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, \xi_2)}{2\gamma} K(\mathbf{r}) \mathbf{e},$$

где  $\xi_1 \neq \xi_2$  — это враждебные стохастические шумы такие, что  $\mathbb{E}[\xi_1^2] \leq \tilde{\Delta}^2$  и  $\mathbb{E}[\xi_2^2] \leq \tilde{\Delta}^2$ , где  $\tilde{\Delta} \geq 0$ . Случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы от  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{r}$ . Кроме того, для этой концепции не требуется предположение о нулевом среднем  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Достаточно, чтобы  $\mathbb{E}[\xi_1 \mathbf{e}] = 0$  и  $\mathbb{E}[\xi_2 \mathbf{e}] = 0$ . В следующей теореме представлены результаты сходимости алгоритма 1 с аппроксимацией градиента (4.4) через оракул нулевого порядка (4.3).

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(x, y)$  удовлетворяет предположениям 1–3 и градиентная аппроксимация (4.4) удовлетворяет предположениям 4–5,

пусть размеры шагов  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$  и  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ , тогда существуют параметры

$$M = 4d\beta^3 \quad \sigma^2 = 4d\beta^3 L_2 \gamma^2 + \frac{d^2 \tilde{\Delta}^2 \beta^3}{\gamma^2},$$

$$\zeta^2 = \beta^2 \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!d + \beta - 1} \frac{d}{\gamma^{\beta-1}} \right)^2$$

так что метод ZO-BMB-SGD имеет следующую скорость сходимости

$$P_t = \mathcal{O}((1 - \mu_x \tau_x)^t P_0).$$

Доказательство см. в приложении С. Результаты теоремы 3 показывают, что алгоритм 1 с градиентной аппроксимацией (4.4) имеет линейную скорость сходимости. Также, в отличие от предыдущей теоремы 3, она не имеет ярко выраженной асимптоты. Этот эффект наблюдается потому, что концепция оракула нулевого порядка (4.3) не

предполагает накопления составляющего шума в смещении, а также уменьшает дисперсию за счет большого размера партии  $V$ .

**Следствие 2.** Пусть функция  $f(x, y)$  удовлетворяет предположениям 1–3 и градиентная аппроксимация (4.4) удовлетворяет предположениям 4–5,

пусть размеры шагов  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$  и  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ , а параметр сглаживания имеет вид  $\gamma = \mathcal{O}\left(\left(\mu_x \mu_y^2 \varepsilon\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}\right)$ , тогда алгоритм 1 достигает точности  $\varepsilon$  для задачи (1.1) со следующими параметрами:

$$\tilde{\Delta} = \mathcal{O}\left(d^{\frac{-1}{2}}(\mu_x \mu_y^2 \varepsilon)^{\frac{1}{\beta-1}}\right);$$

$$N = \mathcal{O}\left(\mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right); \quad T = \mathcal{O}\left(\beta^3 d \mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где  $\tilde{\Delta}$  – максимальный уровень шума,  $N$  – количество итераций и  $T$  – оракульная сложность.

### 5. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В этом разделе выполняется проверка того, согласуются ли теоретически полученные границы с числовыми характеристиками метода Zero-order Biased Mini-Batch Stochastic Gradient Descent Ascent (ZO-BMB-SGDA). В частности, сравнивается алгоритм 1 с безградиентным аналогом из [16], в котором вместо точного градиента используется аппроксимация сглаживания по Гауссу. Во всех тестах мы понимаем враждебный шум как вычислительную ошибку (мантисса). Рассмотрим стандартную задачу, удовлетворяющую условию PL. А именно решение системы  $p$  нелинейных уравнений, аналогично как в [17], только для седловых задач. Задача оптимизации (1.1) имеет следующий вид:

$$\min_{x \in Q_1 \subset \mathbb{R}^{d_x}} \max_{y \in Q_2 \subset \mathbb{R}^{d_y}} \{f(x, y) := \|A \sin(x) + B \sin(y) - c\|^2 - 2\|B \sin(y) - B \sin(y_0)\|^2\},$$

где множества  $Q_1$  и  $Q_2$  являются многомерными кубами, где каждая координата лежит в отрезке  $[-100, 100]$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times d_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times d_y}$ . В качестве ядра  $K(r)$  используются взвешенные суммы полиномов Лежандра. Например, ниже приведены следующие значения для  $\beta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  [11]:

$$K_\beta(r) = 3r \quad \beta = 1, 2;$$

$$K_\beta(r) = \frac{15r}{4}(5 - 7r^2) \quad \beta = 3, 4;$$

$$K_\beta(r) = \frac{195r}{64}(99r^4 - 126r^2 + 35) \quad \beta = 5, 6.$$

На рис. 1 представлена зависимость от количества уравнений. На каждом графике разное количество итераций для лучшей наглядности. Можно увидеть, что разработанный алгоритм сходится лучше Гауссовой аппроксимации, которая имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x(x, y, \mathbf{u}) &= \frac{\tilde{f}(x + \gamma \mathbf{u}, y) - \tilde{f}(x, y)}{2\gamma} \mathbf{u}, \\ \tilde{G}_y(x, y, \mathbf{u}) &= \frac{\tilde{f}(x, y + \gamma \mathbf{u}) - \tilde{f}(x, y)}{2\gamma} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

На рис. 2 представлена зависимость от размера гладкости  $\beta$ . Можно видеть, что при меньшем  $\beta$  скорость, с которой сходится алгоритм выше. Это объясняется тем, что свободный член в формуле сходимости содержит коэффициент  $\beta^3$ .

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

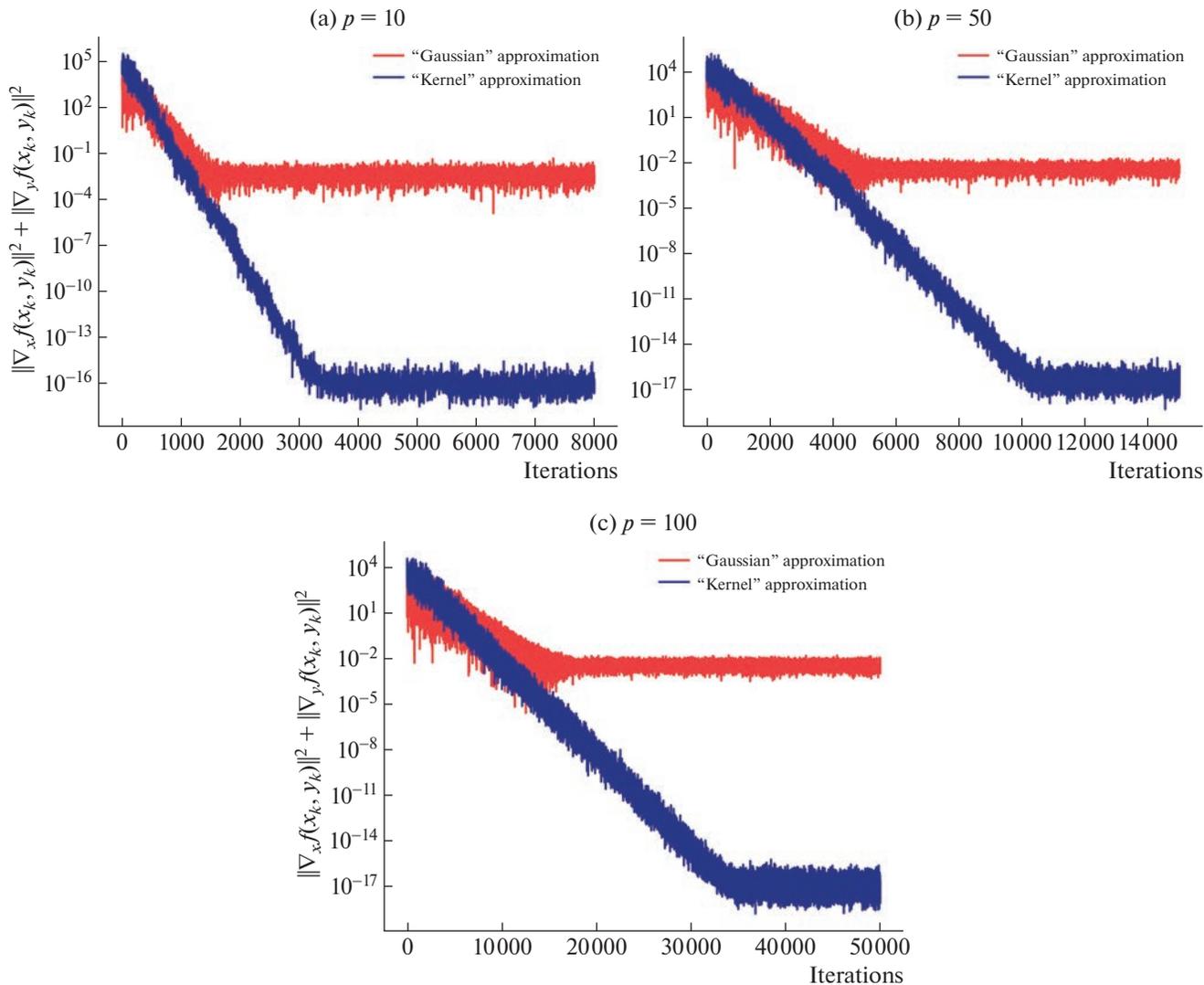
В данной работе был предложен новый безградиентный алгоритм для решения стохастических невыпукло-невогнутых в общем случае задач оптимизации черного ящика с седловой точкой, удовлетворяющих условию Поляка–Лоясиевича. Данный алгоритм является надежным при различных видах враждебного шума: детерминированного и стохастического. Для создания безградиентного алгоритма мы обобщили результат сходимости Stoch-AGDA на случай со смещенным градиентным оракулом (данный результат может вызывать независимый интерес). Также мы показали, что наш алгоритм, аналогично стандартной оптимизационной настройке сходится с линейной скоростью к асимптоте, однако данную асимптоту можно регулировать, тем самым достигая желаемой точности. Наши теоретические результаты подтвердились на модельном примере, где использовался тот факт, что в качестве враждебного шума выступала машинная неточность.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### А. Вспомогательные Леммы для доказательства Теоремы 1

Пусть  $\kappa_\beta = \int |u|^\beta |K(u)| du$  и положим  $\kappa = \int K^2(u) du$ . Тогда, если  $K$  – взвешенная сумма полиномов Лежандра, то в [11], см. Приложение А.3, доказано, что  $\kappa_\beta$  и  $\kappa$  не зависят от  $d$ , они зависят только от  $\beta$ , для  $\beta \geq 1$ :

$$\kappa_\beta \leq 2\sqrt{2}(\beta - 1), \quad (A.1)$$



**Рис. 1.** Зависимость скорости сходимости от количества уравнений в системе. Параметры задачи:  $d_x = 10000$ ,  $d_y = 5000$ ,  $\tau_x = 0.02$ ,  $\tau_y = 0.1$ ,  $\beta = 5$ ,  $B = 5$ ,  $\gamma = 0.001$ .

$$\kappa_{\leq} 3\beta^3. \tag{A.2}$$

Сначала необходимо предоставить несколько ключевых лемм.

**Лемма 1** ([24]). *Если  $f(\cdot)$  является  $L_2$ -гладкой и удовлетворяет условию PL с константой  $\mu$ , то она также удовлетворяет условию ограниченности ошибки с  $\mu$ , т.е.*

$$\|\nabla f(x)\| \geq \mu \|x_p - x\|, \quad \forall x,$$

где  $x_p$  — проекция  $x$  на оптимальное множество, она также удовлетворяет условию квадратичного роста с  $\mu$ , т.е.

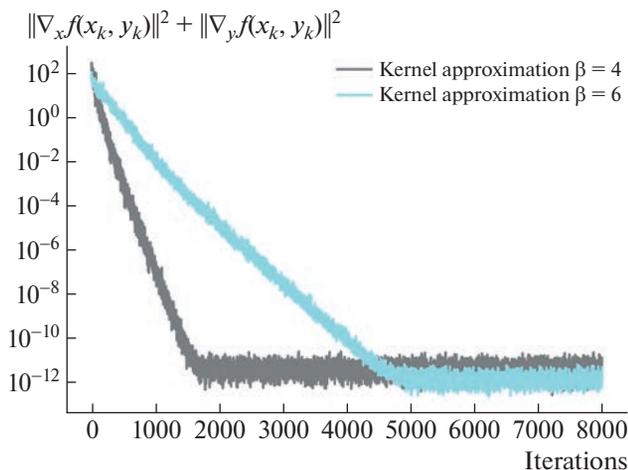
$$f(x) - f^* \geq \frac{\mu}{2} \|x_p - x\|^2, \quad \forall x.$$

Наоборот, если  $f(\cdot)$  является  $L_2$ -гладкой и удовлетворяет условию ограниченности ошибки с константой  $\mu$ , то она удовлетворяет условию PL с константой  $\mu/L_2$ .

Из вышеуказанной леммы легко увидеть, что  $L_2 \geq \mu$ .

**Лемма 2** ([21]). *В минимаксной задаче, когда  $-f(x, \cdot)$  удовлетворяет условию PL с константой  $\mu_y$  для любого  $x$  и  $f$  удовлетворяет предположению 1, тогда функция  $g(x) := \max_y f(x, y)$  является  $L$ -гладкой с  $L := L_2 + L_2^2/\mu_y$  и  $\nabla g(x) = \nabla_x f(x, y^*(x))$  для любого  $y^*(x) \in \arg \max_y f(x, y)$ .*

Для следующей леммы необходимо рассмотреть задачу  $\min_x f(x)$



**Рис. 2.** Зависимость скорости сходимости от количества уравнений в системе. Параметры задачи:  $d_x = 200$ ,  $d_y = 200$ ,  $p = 250$ ,  $\beta = \{4, 6\}$ ,  $B = 50$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\tau_x = 0.04$ ,  $\tau_y = 0.2$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  обозначает количество итераций алгоритма Mini-batch SGD, сгенерированных на функции  $f(\cdot)$  при предположениях 1–5.

Тогда существует размер шага  $\eta \leq \frac{1}{(M+1)L_2}$  такой, что он выполняется для всех  $N \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_N)] - f^* &\leq \\ &\leq (1 - \eta\mu)^N (f(x_0) - f^*) + \frac{\zeta^2}{2\mu} + \frac{\eta L_2 \sigma^2}{2B\mu}, \end{aligned}$$

где  $L_2$  – константа Липшица градиента такая, что  $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L_2 \|x - y\|$ .

*Доказательство.* В силу  $L_2$ -гладкости  $f$  и выбора размера шага  $\eta \leq \frac{1}{(M+1)L_2}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_{k+1})] &\leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \\ &+ \frac{L_2}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq f(x_k) - \eta \langle \nabla f(x_k), \mathbb{E}[\mathbf{G}_k] \rangle + \\ &+ \frac{\eta^2 L_2}{2} (\mathbb{E}[\|\mathbf{G}_k - \mathbb{E}[\mathbf{G}_k]\|^2] + \mathbb{E}[\|\mathbb{E}[\mathbf{G}_k]\|^2]) = \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} f(x_k) - \eta \langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_k) + \mathbf{b}(x_k) \rangle + \\ &+ \frac{\eta^2 L_2}{2} (\mathbb{E}[\|\mathbf{n}(x_k, \xi)\|^2] + \mathbb{E}[\|\nabla f(x_k) + \mathbf{b}(x_k)\|^2]) \leq \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{\leq} f(x_k) - \eta \langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_k) + \mathbf{b}(x_k) \rangle + \\ &+ \frac{\eta^2 L_2}{2} ((M+1)\mathbb{E}[\|\nabla f(x_k) + \mathbf{b}(x_k)\|^2] + \sigma^2) = \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &= f(x_k) + \frac{\eta}{2} (\pm \|\nabla f(x_k)\|^2 - \\ &- 2\langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_k) + \mathbf{b}(x_k) \rangle + \|\nabla f(x_k) + \mathbf{b}(x_k)\|^2) + \\ &+ \frac{\eta^2 L_2}{2} \sigma^2 = f(x_k) + \frac{\eta}{2} (-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\mathbf{b}(x_k)\|^2) + \\ &+ \frac{\eta^2 L_2}{2} \sigma^2 \stackrel{\textcircled{3}}{\leq} (1 - \eta\mu)(f(x_k) - f^*) + \\ &+ \frac{\eta \zeta^2}{2} + \frac{\eta^2 L_2}{2} \sigma^2 + f^*, \end{aligned}$$

где в  $\textcircled{1}$  мы использовали Определение 2, в  $\textcircled{2}$  мы использовали Предположение 4, а в  $\textcircled{3}$  мы использовали Предположение 5.

Применяя рекурсию к (A.3) и добавляя батчи-рование (с размером пакета  $B$ ), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_N)] - f^* &\leq \\ &\leq (1 - \eta\mu)^N (f(x_0) - f^*) + \frac{\zeta^2}{2\mu} + \frac{\eta L_2 \sigma^2}{2B\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

□

**Лемма 4.** Пусть выполняются предположения 1–5 и  $f(x, y)$  удовлетворяет условию двустороннего PL с  $\mu_x$  и  $\mu_y$ . Если мы запустим одну итерацию алгоритма 1 с  $\tau'_x = \tau_x \leq \frac{1}{(M+1)L}$  ( $L$  указано в лемме 2)

и  $\tau'_y = \tau_y \leq \frac{1}{(M+1)L_2}$ , то

$$\begin{aligned} a_{t+1} + \lambda b_{t+1} &\leq \max\{k_1, k_2\} (a_t + \lambda b_t) + \\ &+ \lambda \left( \tau_y^2 L_2 \frac{\sigma^2}{B} + \tau_y \zeta^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$k_1 := 1 - \mu_x \tau_x [1 + \lambda(1 - \mu_y \tau_y)], \quad (\text{A.5})$$

$$k_2 := 1 + \frac{L_2^2 \tau_x}{\mu_y \lambda} - \mu_y \tau_y + \sigma^2 \frac{L_2^2}{\mu_y} \tau_x - \tau_x \tau_y L_2^2 \sigma^2. \quad (\text{A.6})$$

*Доказательство.* Поскольку  $g$  является  $L$ -гладкой по лемме 2 и выбрав размер шага такой, что

$\tau_x \leq \frac{1}{(M+1)L}$ , мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(x_{k+1})] &\leq g(x_k) + \langle \nabla g(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \\ &+ \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq g(x_k) - \tau_x \langle \nabla g(x_k), \mathbb{E}[\mathbf{G}_k] \rangle + \\ &+ \frac{\tau_x^2 L}{2} (\mathbb{E}[\|\mathbf{G}_k - \mathbb{E}[\mathbf{G}_k]\|^2] + \mathbb{E}[\|\mathbb{E}[\mathbf{G}_k]\|^2]) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\textcircled{1}}{=} g(x_k) - \tau_x \langle \nabla g(x_k), \nabla_x f(x_k, y_k) + \mathbf{b}(x_k) \rangle + \frac{\tau_x^2 L}{2} \times \\
& \times (\mathbb{E}[\|\mathbf{n}(x_k, y_k, \xi)\|^2] + \mathbb{E}[\|\nabla g(x_k) + \mathbf{b}_x(x_k, y_k)\|^2]) \leq \\
& \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} g(x_k) - \tau_x \langle \nabla g(x_k), \nabla_x f(x_k, y_k) + \mathbf{b}_x(x_k, y_k) \rangle + \\
& + \frac{\tau_x^2 L}{2} ((M+1)\mathbb{E}[\|\nabla_x f(x_k, y_k) + \mathbf{b}_x(x_k, y_k)\|^2] + (A.7) \\
& + \sigma^2) = g(x_k) + \frac{\tau_x}{2} (\pm \|\nabla g(x_k)\|^2 - \\
& - 2\langle \nabla g(x_k), \nabla f(x_k, y_k) + \mathbf{b}_x(x_k, y_k) \rangle + \\
& + \|\nabla_x f(x_k, y_k) + \mathbf{b}_x(x_k, y_k)\|^2) + \frac{\tau_x^2 L}{2} \sigma^2 = \\
& = g(x_k) + \frac{\tau_x}{2} (-\|\nabla g(x_k)\|^2 + \\
& + \|\nabla g(x_k) + \mathbf{b}_x(x_k, y_k) + \nabla_x f(x_k, y_k)\|^2) + \frac{\tau_x^2 L}{2} \sigma^2,
\end{aligned}$$

где в  $\textcircled{1}$  мы использовали Определение 2, в  $\textcircled{2}$  мы использовали Предположение 4.

Теперь достаточно выразить  $\|g(x_t)\|^2$  и  $\|\nabla_x f(x_t, y_t) - \nabla g(x_t)\|^2$  через  $a_t$  и  $b_t$ . Используя лемму 2, мы имеем:

$$\begin{aligned}
& \|\nabla_x f(x_t, y_t) - \nabla g(x_t)\|^2 = \\
& = \|\nabla_x f(x_t, y_t) - \nabla_x f(x_t, y^*(x_t))\|^2 \leq (A.8) \\
& \leq L_2^2 \|y^*(x_t) - y_t\|^2
\end{aligned}$$

для любого  $y^*(x_t) \in \arg \max_y f(x_t, y)$ . Теперь можно зафиксировать  $y^*(x_t)$  как проекцию  $y_t$  на множество  $\arg \max_y f(x_t, y)$ . Поскольку  $-f(x_t, \cdot)$  удовлетворяет условию PL с  $\mu_y$ , а лемма 1, следовательно, указывает, что функция также удовлетворяет условию квадратичного роста с  $\mu_y$ , т.е.

$$\|y^*(x_t) - y_t\|^2 \leq \frac{2}{\mu_y} [g(x_t) - f(x_t, y_t)], (A.9)$$

вместе с (A.8), мы получаем

$$\|\nabla_x f(x_t, y_t) - \nabla g(x_t)\|^2 \leq \frac{2L_2^2}{\mu_y} [g(x_t) - f(x_t, y_t)]. (A.10)$$

Поскольку  $g$  удовлетворяет условию PL с  $\mu_x$ ,

$$\|\nabla g(x_t)\|^2 \geq 2\mu_x [g(x_t) - g^*]. (A.11)$$

Взяв математическое ожидание у обеих сторон A.7 и подставляя A.10, A.11, мы получаем

$$a_{t+1} \leq (1 - \tau_x \mu_x) a_t + \tau_x \frac{L_2^2}{\mu_y} b_t + \frac{\tau_x}{2} \|\mathbf{b}_x\|^2 (A.12)$$

Поскольку  $-f(x_{t+1}, y)$   $L_2$ -гладкая и  $\mu_y$ -PL, по неравенству (A.3) из леммы 3 при  $\tau_y \leq \frac{1}{(M+1)L_2}$  имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[g(x_{t+1}) - f(x_{t+1}, y_{t+1})] \leq (1 - \mu_y \tau_y) \mathbb{E}[g(x_{t+1}) - \\
& - f(x_{t+1}, y_t)] + \frac{\tau_y \zeta^2}{2} + \frac{\tau_y^2 L_2}{2} \sigma^2 \leq (A.13) \\
& \leq (1 - \mu_y \tau_y) \mathbb{E}[g(x_t) - f(x_t, y_t) + f(x_t, y_t) - \\
& - f(x_{t+1}, y_t) + g(x_{t+1}) - g(x_t)] + \frac{\tau_y \zeta^2}{2} + \frac{\tau_y^2 L_2}{2} \sigma^2
\end{aligned}$$

Используя выкладки из леммы 3 можно ограничить  $f(x_t, y_t) - f(x_{t+1}, y_t)$  следующим образом

$$f(x_t, y_t) - f(x_{t+1}, y_t) \leq \frac{\tau_x}{2} \zeta^2 + \frac{\tau_x^2 L_2}{2} \sigma^2. (A.14)$$

Также из A.12,

$$\mathbb{E}[g(x_{t+1}) - g(x_t)] \leq -\tau_x \mu_x a_t + \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y} b_t + \frac{\tau_x}{2} \zeta^2. (A.15)$$

Комбинируя (A.13), (A.14) и (A.15),

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[g(x_{t+1}) - f(x_{t+1}, y_{t+1})] \leq (1 - \mu_y \tau_y) (-\tau_x \mu_x a_t + \\
& + \left(1 + \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y} \sigma^2\right) b_t) + (1 - \mu_y \tau_y) \left(\tau_x \zeta^2 + \frac{\tau_x^2 L_2}{2} \sigma^2\right) + (A.16) \\
& + \frac{\tau_y^2 L_2}{2} \sigma^2 + \frac{\tau_y \zeta^2}{2} \leq (1 - \mu_y \tau_y) \times \\
& \times \left(-\tau_x \mu_x a_t + \left(1 + \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y} \sigma^2\right) b_t\right) + \tau_y^2 L_2 \sigma^2 + \frac{3}{4} \tau_y \zeta^2,
\end{aligned}$$

где в последнем неравенстве учитывается, что  $\tau_x$  меньше чем  $\tau_y$ . Даже можно предполагать, что  $\tau_x \leq \frac{\lambda}{2} \tau_y$ . Комбинируя (A.12) и (A.16), имеем  $\forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned}
& a_{t+1} + \lambda b_{t+1} \leq a_t [1 - \mu_x \tau_x - \lambda(1 - \mu_y \tau_y) \mu_x \tau_x] + \\
& + \lambda b_t \left[1 + \frac{L_2^2 \tau_x}{\mu_y \lambda} - \mu_y \tau_y + \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y} \sigma^2 - \tau_x \tau_y L_2^2 \sigma^2\right] + \\
& + \lambda \left(\tau_y^2 L_2 \sigma^2 + \tau_y \zeta^2\right).
\end{aligned}$$

Добавляя батчирование (с размером батча  $B$ ), получим:

$$\begin{aligned}
& a_{t+1} + \lambda b_{t+1} \leq a_t [1 - \mu_x \tau_x - \lambda(1 - \mu_y \tau_y) \mu_x \tau_x] + \\
& + \lambda b_t \left[1 + \frac{L_2^2 \tau_x}{\mu_y \lambda} - \mu_y \tau_y + \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y} \frac{\sigma^2}{B} - \tau_x \tau_y L_2^2 \frac{\sigma^2}{B}\right] + (A.17) \\
& + \lambda \left(\tau_y^2 L_2 \frac{\sigma^2}{B} + \tau_y \zeta^2\right).
\end{aligned}$$

□

**Доказательство теоремы 1.**

*Доказательство.* В условиях леммы 4  $\tau'_x = \tau_x$  и  $\tau'_y = \tau_y, \forall t$  нужно только выбрать  $\tau_x, \tau_y, \lambda$ , чтобы  $k_1, k_2 < 1$ . Здесь сначала выбирается  $\lambda = 1/10$ . Затем

$$k_1 = 1 - \mu_x[\tau_x + \lambda(1 - \mu_y\tau_y)\tau_x] \leq 1 - \tau_x\mu_x. \quad (\text{A.18})$$

Также,

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 + \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y \lambda} - \mu_y \tau_y + \frac{\tau_x L_2^2 \sigma^2}{\mu_y B} - \tau_x \tau_y L_2^2 \frac{\sigma^2}{B} = \\ &= 1 - \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y} \left\{ \frac{\mu_y^2 \tau_y}{\tau_x L_2^2} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{B} (1 - \mu_y \tau_y) \right\} \leq \quad (\text{A.19}) \\ &\leq 1 - \frac{\tau_x L_2^2}{\mu_y}, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве подставляется  $\lambda$  и используется  $\frac{\mu_y^2 \tau_y}{\tau_x L_2^2} \geq 12$  за счет выбора  $\tau_x$ . Выбирая большое  $B$  порядка  $d^2$ , можно сделать  $\frac{\sigma^2}{B} \leq 1$ .

Обратите внимание, что  $\tau_x \mu_x < \frac{l^2 \tau_x}{\mu_y}$ , потому что  $(\tau_x \mu_x) / \left( \frac{l^2 \tau_x}{\mu_y} \right) = \frac{\mu_x \mu_y}{l^2} < 1$ . Пусть  $P_t := a_t + \frac{1}{10} b_t$ , и по теореме 4,

$$P_{t+1} \leq (1 - \tau_x \mu_x) P_t + \frac{1}{10} \left( \tau_y^2 L_2 \frac{\sigma^2}{B} + \tau_y \zeta^2 \right).$$

С помощью некоторых простых вычислений, получим:

$$P_t \leq (1 - \mu_x \tau_x)^t P_0 + \frac{\tau_y^2 L_2 \frac{\sigma^2}{B} + \tau_y \zeta^2}{10 \mu_x \tau_x}. \quad (\text{A.20})$$

Проверка, что  $\tau_x \leq \frac{1}{(M+1)L}$  осуществляется за

счет того, что  $\tau_x \leq \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2} \leq \frac{\mu_y^2}{12(M+1)L_2^3} \leq \frac{\mu_y}{2(M+1)L_2^2}$

и  $L = L_2 + \frac{L_2^2}{\mu_y} \leq \frac{2L_2^2}{\mu_y}$ . □

**Доказательства для методов нулевого порядка.**

В этом разделе мы доказываем леммы для разных случаев вида задачи. В следующих леммах мы не привязываемся к седловой задаче, а больше рассматриваем ядерную аппроксимацию градиента, поэтому для следующих лемм рассмотрим задачу  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

**Лемма 5** (Сведение интеграла по области к интегралу по поверхности). Пусть  $D$  – открытое связное подмножество  $\mathbb{R}^d$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D$ , ориентированное по внешней единичной нормали  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)^\top$ . Пусть  $f$  – гладкая функция в  $D \cup \partial D$ , тогда

$$\int_D \nabla f(x) dx = \int_{\partial D} f(x) \mathbf{n}(x) dS(x).$$

**Remark 4.** Мы ссылаемся на [25, раздел 12.3.2, определения 4 и 5] для определения кусочно-гладких поверхностей и их ориентации соответственно.

**Лемма 6.** Пусть  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывно дифференцируемая функция. Пусть  $r, \mathbf{h}, \mathbf{e}$  равномерно распределены на  $[-1, 1], \mathbb{B}_2^d$  и  $\mathcal{S}^d$  соответственно. Тогда для любого  $\gamma > 0$  имеем

$$\mathbb{E}[\nabla f(x + \gamma r \mathbf{h}) r K(r)] = \frac{d}{\gamma} \mathbb{E}[f(x + \gamma r \mathbf{e}) \mathbf{e} K(r)].$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $r \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Определим  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  как  $\phi(\mathbf{h}) = f(x + \gamma r \mathbf{h}) K(r)$  и заметим, что  $\nabla \phi(\mathbf{h}) = \gamma r \nabla f(x + \gamma r \mathbf{h}) K(r)$ . Следовательно, у нас есть

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\nabla f(x + \gamma r \mathbf{h}) K(r) | r] &= \frac{1}{\gamma r} \mathbb{E}[\nabla \phi(\mathbf{h}) | r] = \\ &= \frac{d}{\gamma r} \mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}) \mathbf{e} | r] = \frac{d}{\gamma r} K(r) \mathbb{E}[f(x + \gamma r \mathbf{e}) \mathbf{e} | r], \end{aligned}$$

где второе равенство получается из теоремы 5. Доказательство завершается умножением на  $r$  с обеих сторон, использованием того факта, что  $r$  следует за непрерывным распределением, и принятием полного матожидания. □

**В. Доказательство теоремы 2**

**Лемма 7** (Смещение ядерной аппроксимации). Пусть выполняются предположения 1–3. Пусть  $x_t$  и  $\mathbf{G}(x_t, \mathbf{e})$  определены алгоритмом 1 в момент времени  $t \geq 1$  с аппроксимацией градиента (4.2) для ордула нулевого порядка (4.1). Тогда,

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e}) | x_t] - \nabla f(x_t)\| \leq \\ &\leq \kappa_\beta \frac{L_\beta}{(l-1)!} \cdot \frac{d}{d + \beta - 1} \gamma^{\beta-1} + \kappa_\beta d \frac{\Delta}{\gamma}, \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

где мы напоминаем, что  $l = \lfloor \beta \rfloor$ .

*Доказательство леммы 7.* Используя лемму 6, тот факт, что  $\int_{-1}^1 r K(r) dr = 1$ , и вариационное представление евклидовой нормы, мы можем написать

$$\|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e}) | x_t] - \nabla f(x_t)\| =$$

$$= \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{G}^d} \mathbb{E}[(\nabla_{\mathbf{v}} f(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{h}, \xi) - \nabla_{\mathbf{v}} f(x, \xi) + \frac{d}{2\gamma r} (\delta(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{h}) - \delta(x - \gamma \mathbf{r} \mathbf{h})) r K(r)] \leq \quad (\text{B.2})$$

$$\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{G}^d} \mathbb{E}[(\nabla_{\mathbf{v}} f(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{h}) - \nabla_{\mathbf{v}} f(x)) r K(r)] + \kappa_{\beta} d \frac{\Delta}{\gamma},$$

где мы напоминаем, что  $\mathbf{h}$  равномерно распределена на  $\mathcal{B}_2^d$ . Так как  $f(x)$  удовлетворяет условию Гельдера с константами  $\beta$  и  $L_{\beta}$ , то для любого  $\mathbf{v} \in \mathcal{G}^d$  направленный градиент  $\nabla_{\mathbf{v}} f(\cdot)$  удовлетворяет условию Гельдера с константами  $\beta - 1$  и  $L_{\beta}$ . Таким образом справедливо следующее разложение Тейлора

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(x_i + \gamma \mathbf{r} \mathbf{h}) = \nabla_{\mathbf{v}} f(x_i) + \sum_{1 \leq |\mathbf{m}| \leq l-1} \frac{(r\gamma)^{|\mathbf{m}|}}{\mathbf{m}!} D^{\mathbf{m}} \nabla_{\mathbf{v}} f(x_i) (\mathbf{h})^{\mathbf{m}} + R(\gamma \mathbf{r} \mathbf{h}), \quad (\text{B.3})$$

где остаточный член  $R(\cdot)$  удовлетворяет условию  $|R(x)| \leq \frac{L_{\beta}}{(l-1)!} \|\mathbf{x}\|^{\beta-1}$ .

Подставляя уравнение (B.3) в уравнение (B.2) и используя свойства “обнуления” ядра  $K$ , получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_i, \xi, \mathbf{e}) | x_i] - \nabla f(x_i)\| \leq \\ & \leq \kappa_{\beta} \gamma^{\beta-1} \frac{L_{\beta}}{(l-1)!} \mathbb{E}[\|\mathbf{h}\|^{\beta-1}] = \\ & = \kappa_{\beta} \gamma^{\beta-1} \frac{L_{\beta}}{(l-1)! d + \beta - 1} + \kappa_{\beta} d \frac{\Delta}{\gamma}, \end{aligned}$$

где последнее равенство получается из того, что  $\mathbb{E}[\|\mathbf{h}\|^q] = \frac{d}{d+q}$  для любого  $q \geq 0$ .

□

**Лемма 8** (Дисперсия ядерной аппроксимации).

Пусть выполняются предположения 1–3. Пусть  $x_i$  и  $\mathbf{G}(x_i, \xi, \mathbf{e})$  определены алгоритмом 1 с аппроксимацией градиента (4.2) для оракула нулевого порядка (4.1). Предположим, что  $f \in \mathcal{F}_2(L_2)$ , тогда если  $d \geq 2$

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{G}(x_i, \xi, \mathbf{e})\|^2] \leq \frac{d^2 \kappa}{d-1} \mathbb{E}[\|\nabla f(x_i)\| + L_2 \gamma^2] + \frac{d^2 \Delta^2 \kappa}{\gamma^2},$$

где мы вспоминаем, что  $\kappa = \int_{-1}^1 K^2(r) dr$ .

Результат леммы 8 может быть дополнительно упрощен как

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\mathbf{G}(x_i, \xi, \mathbf{e})\|^2] & \leq 4d\kappa \mathbb{E}[\|\nabla f(x_i)\|^2] + \\ & + 4d\kappa L_2^2 \gamma^2 + \frac{d^2 \Delta^2 \kappa}{\gamma^2}, \quad d \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

*Доказательство леммы 8.* Для простоты мы опускаем индекс  $t$  у всех величин. Распишем второй момент следующей величины.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\|\mathbf{G}(x, \xi, \mathbf{e})\|^2] = \\ & = \frac{d^2}{4\gamma^2} \mathbb{E}[(f(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, \xi) - f(x - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}, \xi) + \\ & + (\delta(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}) - \delta(x - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e})) K^2(r)] \leq \quad (\text{B.5}) \\ & \leq \frac{d^2}{4\gamma^2} (\mathbb{E}[(f(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}) - \\ & - f(x - \gamma \mathbf{r} \mathbf{e}))^2 K^2(r)] + 4\kappa \Delta^2). \end{aligned}$$

В дальнейшем все возникающие ожидания следует понимать условно на  $x_i$ . Обратите внимание, что поскольку  $\mathbb{E}[f(x + h \mathbf{r} \mathbf{e}) - f(x - h \mathbf{r} \mathbf{e}) | r] = 0$  и  $f \in \mathcal{F}_2(L_2)$ , то используя неравенство Виртингера–Пуанкаре [22, 23], см. Eq. (3.1) или теорему 2 соответственно получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(f(x + h \mathbf{r} \mathbf{e}) - f(x - h \mathbf{r} \mathbf{e}))^2 | r] \leq \\ & \leq \frac{h^2}{d-1} \mathbb{E}[\|\nabla f(x + h \mathbf{r} \mathbf{e}) + \nabla f(x - h \mathbf{r} \mathbf{e})\|^2 | r]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Так как  $f \in \mathcal{F}_2(L_2)$ , то из неравенства треугольника далее следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\|\nabla f(x + h \mathbf{r} \mathbf{e}) + \nabla f(x - h \mathbf{r} \mathbf{e})\|^2 | r] \leq \\ & \leq 4(\|\nabla f(x)\| + L_2 \gamma)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

В заключение мы подставим приведенную выше оценку в уравнение (B.6) и примем во внимание уравнение (B.5).

□

Теперь мы можем вычислить шум и смещение ядерной аппроксимации:

$$M = 4d\beta^3 \quad \sigma^2 = 4d\beta^3 L_2 \gamma^2 + \frac{d^2 \Delta^2 \beta^3}{\gamma^2} \quad (\text{B.8})$$

$$\zeta^2 = \beta^2 \left( \frac{L_{\beta}}{(l-1)! d + \beta - 1} \gamma^{\beta-1} + d \frac{\Delta}{\gamma} \right)^2 \quad (\text{B.9})$$

Или же более грубая оценка на смещение:

$$\zeta^2 = \beta^2 \left( \frac{L_{\beta}}{(l-1)!} \right)^2 \gamma^{2\beta-2} + \beta^2 d^2 \frac{\Delta^2}{\gamma^2}$$

Теперь мы можем оценить скорость сходимости для ядерной аппроксимации, подставив значения найденных констант в итоговую оценку для сходимости:

$$P_t \leq (1 - \mu_x \tau_x)^t P_0 + \frac{\tau_y^2 L_2 \frac{\sigma^2}{B} + \tau_y \zeta^2}{10 \mu_x \tau_x} = (1 - \mu_x \tau_x)^t P_0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{12 L_2^3 d \gamma^2}{5B \mu_x \mu_y^2} + \frac{3 L_2^2 d^2 \Delta^2}{5B \mu_x \mu_y^2 \gamma^2} + \\
 & + \frac{12 L_2 \beta^2}{5 \mu_x \mu_y^2} \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!} \right)^2 \gamma^{2\beta-2} + \frac{12 L_2 \beta^2 d^2 \Delta^2}{5 \mu_x \mu_y^2 \gamma^2} = \\
 & = \mathbb{O} \left( \frac{L_2^2 d \gamma^2}{B \mu_x \mu_y^2} + \frac{L_2 \beta^2}{\mu_x \mu_y^2} \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!} \right)^2 \gamma^{2\beta-2} + \frac{L_2 \beta^2 d^2 \Delta^2}{\mu_x \mu_y^2 \gamma^2} \right).
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Здесь мы подставляем значения для  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$

$$\text{и } \tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}.$$

Поскольку  $B$  можно взять большим, второе и третье слагаемые отвечают за асимптоту. Найдем оптимальный параметр сглаживания  $\gamma$ , минимизирующий последние два члена:

$$\begin{aligned}
 P_t & = \mathbb{O} \left( \frac{L_2 \beta^2 d^2}{\mu_x \mu_y^2} \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!} \right)^{\frac{2}{\beta}} \left( \frac{\beta-1}{d+\beta-1} \right)^{\frac{2}{\beta}} \Delta^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \right) = \\
 & = \mathbb{O} \left( \frac{1}{\mu_x \mu_y^2} d^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \Delta^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}} \right),
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

где  $\gamma_k = \left( \frac{(l-1)! d + \beta - 1}{L_\beta \beta - 1} \Delta \right)^{1/\beta}$  – параметр оптимального сглаживания. Тогда из (B.11) мы можем найти максимальный уровень шума, предполагая, что  $(d\Delta)^\beta \leq \varepsilon$ , для  $\varepsilon > 0$  тогда имеем

$$\Delta = \mathbb{O} \left( (\mu_x \mu_y^2)^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} \varepsilon^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} d^{-1} \right).$$

При таком максимальном шуме  $\gamma_k = \mathbb{O} \left( (\mu_x \mu_y^2 \varepsilon)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \right)$ . Таким образом мы гарантируем, что второе и третье слагаемые в (B.10) меньше  $\varepsilon$  (с точностью до константы) при выбранных параметрах. Для уменьшения количества итераций, мы выберем размер батча порядка  $\beta^3 d$ . Определим минимальное количество итераций. Это можно сделать, решив неравенство:

$$(1 - \mu_x \tau_x)^N P_0 \leq \varepsilon$$

Откуда мы получим минимальное число итераций

$$\begin{aligned}
 N & \geq \frac{1}{\tau_x \mu_x} \ln \frac{P_0}{\varepsilon} = 12 \frac{(\beta^3 d/B + 1)L_2^3}{\mu_x \mu_y^2} \ln \frac{P_0}{\varepsilon} = \\
 & = \mathbb{O} \left( \mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right),
 \end{aligned}$$

где во втором неравенстве мы использовали то, что  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ ,  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$  и  $M = \mathbb{O}(\beta^3 d/B)$ ,  $d = \max(d_x, d_y)$ . При достаточно большом  $B$  порядка  $\beta^3 d$  зависимость от размерности пропадает.

Оракульная сложность получается из итерационной путем домножения на размер батча, то есть:

$$T = \mathbb{O} \left( \beta^3 d \mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Таким образом все слагаемые в формуле (B.10) меньше  $\varepsilon$ .

### С. Доказательство теоремы 3

**Лемма 9** (Смещение ядерной аппроксимации). Пусть выполняются предположения 1–5. Пусть  $x_t$  и  $\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e})$  определены алгоритмом 1 в момент времени  $t \geq 1$  с аппроксимацией градиента (4.4) для оракула нулевого порядка (4.3). Тогда,

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e}) | x_t] - \nabla f(x_t)\| \leq \\
 & \leq \kappa_\beta \frac{L_\beta}{(l-1)!} \cdot \frac{d}{d + \beta - 1} \gamma^{\beta-1},
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

где мы напоминаем, что  $l = \lfloor \beta \rfloor$ .

*Доказательство леммы 9.* Используя лемму 6, тот факт, что  $\int_{-1}^1 rK(r)dr = 1$ , и вариационное представление евклидовой нормы, мы можем написать

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e}) | x_t] - \nabla f(x_t)\| = \\
 & = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}^d} \mathbb{E}[\langle \nabla_{\mathbf{v}} f(x + \gamma \mathbf{r} \mathbf{h}) - \nabla_{\mathbf{v}} f(x), \mathbf{r} K(\mathbf{r}) \rangle],
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

где мы напоминаем, что  $\mathbf{h}$  равномерно распределена на  $\mathcal{B}_2^d$ . Так как  $f(x)$  удовлетворяет условию Гельдера с константами  $\beta$  и  $L_\beta$ , то для любого  $\mathbf{v} \in \mathcal{S}^d$  направленный градиент  $\nabla_{\mathbf{v}} f(\cdot)$  удовлетворяет условию Гельдера с константами  $\beta - 1$  и  $L_\beta$ . Таким образом справедливо следующее разложение Тейлора

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{\mathbf{v}} f(x_t + \gamma \mathbf{r} \mathbf{h}) = \nabla_{\mathbf{v}} f(x_t) + \\
 & + \sum_{1 \leq |\mathbf{m}| \leq l-1} \frac{(r\gamma)^{|\mathbf{m}|}}{\mathbf{m}!} D^{\mathbf{m}} \nabla_{\mathbf{v}} f(x_t) (\mathbf{h})^{\mathbf{m}} + R(\gamma \mathbf{r} \mathbf{h}),
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

где остаточный член  $R(\cdot)$  удовлетворяет условию

$$|R(x)| \leq \frac{L_\beta}{(l-1)!} \|x\|^{\beta-1}.$$

Подставляя уравнение (C.3) в уравнение (C.2) и используя свойства “обнуления” ядра  $K$ , получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e}) | x_t] - \nabla f(x_t)\| \leq \\ & \leq \kappa_\beta \gamma^{\beta-1} \frac{L_\beta}{(l-1)!} \|\mathbb{E}[\mathbf{h}]\|^{\beta-1} = \kappa_\beta \gamma^{\beta-1} \frac{L_\beta}{(l-1)!} \frac{d}{d+\beta-1}, \end{aligned}$$

где последнее равенство получается из того, что

$$\|\mathbb{E}[\mathbf{h}]\|^q = \frac{d}{d+q} \text{ для любого } q \geq 0.$$

□

**Лемма 10** (Дисперсия ядерной аппроксимации). Пусть выполняются предположения 1–3. Пусть  $x_t$  и  $\mathbf{G}(x_t, \mathbf{e})$  определены алгоритмом 1 с аппроксимацией градиента (4.4) для оракула нулевого порядка (4.3). Предположим, что  $f \in \mathcal{F}_2(L_2)$ , тогда если  $d \geq 2$

$$\|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e})]\|^2 \leq \frac{d^2 \kappa}{d-1} \mathbb{E}[\|\nabla f(x_t)\| + L_2 \gamma^2] + \frac{d^2 \tilde{\Delta}^2 \kappa}{\gamma^2},$$

где мы вспоминаем, что  $\kappa = \int_{-1}^1 K^2(r) dr$ .

Результат леммы 10 может быть дополнительно упрощен как

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x_t, \xi, \mathbf{e})]\|^2 & \leq 4d\kappa \mathbb{E}[\|\nabla f(x_t)\|]^2 + \\ & + 4d\kappa L_2^2 \gamma^2 + \frac{d^2 \tilde{\Delta}^2 \kappa}{\gamma^2}, \quad d \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

*Доказательство леммы 10.* Для простоты мы опускаем индекс  $t$  у всех величин. Распишем второй момент следующей величины.

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}[\mathbf{G}(x, \xi, \mathbf{e})]\|^2 & = \frac{d^2}{4\gamma^2} \mathbb{E}[(f(x + \gamma \mathbf{r}\mathbf{e}) - f(x - \gamma \mathbf{r}\mathbf{e}) + \\ & + (\xi_1 - \xi_2))^2 K^2(r)] \leq \frac{d^2}{4\gamma^2} (\mathbb{E}[(f(x + \gamma \mathbf{r}\mathbf{e}) - \\ & - f(x - \gamma \mathbf{r}\mathbf{e}))^2 K^2(r)] + 4\kappa \tilde{\Delta}^2). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

В дальнейшем все возникающие ожидания следует понимать условно на  $x_t$ . Обратите внимание, что поскольку  $\mathbb{E}[f(x + h\mathbf{r}\mathbf{e}) - f(x - h\mathbf{r}\mathbf{e}) | r] = 0$  и  $f \in \mathcal{F}_2(L_2)$ , то используя неравенство Виртингера–Пуанкаре [22, 23], см. Eq. (3.1) или теорему 2 соответственно получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(f(x + h\mathbf{r}\mathbf{e}) - f(x - h\mathbf{r}\mathbf{e}))^2 | r] \leq \\ & \leq \frac{h^2}{d-1} \mathbb{E}[\|\nabla f(x + h\mathbf{r}\mathbf{e}) + \nabla f(x - h\mathbf{r}\mathbf{e})\|^2 | r]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Так как  $f \in \mathcal{F}_2(L_2)$ , то из неравенства треугольника далее следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\|\nabla f(x + h\mathbf{r}\mathbf{e}) + \nabla f(x - h\mathbf{r}\mathbf{e})\|^2 | r] \leq \\ & \leq 4(\|\nabla f(x)\| + L_2 \gamma)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

В заключение мы подставим приведенную выше оценку в уравнение (C.6) и примем во внимание уравнение (C.5).

□

Теперь мы можем вычислить шум и смещение ядерной аппроксимации:

$$M = 4d\beta^3 \quad \sigma^2 = 4d\beta^3 L_2 \gamma^2 + \frac{d^2 \tilde{\Delta}^2 \beta^3}{\gamma^2} \quad (\text{C.8})$$

$$\zeta^2 = \beta^2 \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!} \frac{d}{d+\beta-1} \gamma^{\beta-1} \right)^2 \quad (\text{C.9})$$

Теперь мы можем оценить скорость сходимости для ядерной аппроксимации, подставив значения найденных констант в итоговую оценку для сходимости:

$$\begin{aligned} P_t & \leq (1 - \mu_x \tau_x)^t P_0 + \frac{\tau_y^2 L_2 \sigma^2 + \tau_y \zeta^2}{10\mu_x \tau_x} = (1 - \mu_x \tau_x)^t P_0 + \\ & + \frac{12L_2^3 d \gamma^2}{5B\mu_x \mu_y^2} + \frac{3L_2^2 d^2 \tilde{\Delta}^2}{5B\mu_x \mu_y^2 \gamma^2} + \frac{12L_2^2 \beta^2}{5\mu_x \mu_y^2} \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!} \right)^2 \gamma^{2\beta-2} = (\text{C.10}) \\ & = \mathcal{O} \left( \frac{L_2^3 \gamma^2}{B\mu_x \mu_y^2} + \frac{L_2^2 d \tilde{\Delta}^2}{B\mu_x \mu_y^2 \gamma^2} + \frac{L_2^2 \beta^2}{\mu_x \mu_y^2} \left( \frac{L_\beta}{(l-1)!} \right)^2 \gamma^{2\beta-2} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы подставляем значения для  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$

и  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ . Найдем ограничения на параметр сглаживания  $\gamma$ , минимизируя смещение аппроксимации. Получим оптимальный параметр  $\gamma_k =$

$\sqrt[4]{\frac{d\tilde{\Delta}^2}{4L_2}}$ . Максимальный уровень шума найдем из последнего слагаемого в (C.10). Получим  $\tilde{\Delta} = \mathcal{O} \left( d^{\frac{-1}{2}} (\mu_x \mu_y^2 \epsilon)^{\frac{1}{\beta-1}} \right)$ . Тогда параметр сглаживания

примет следующий вид  $\gamma_k = \mathcal{O} \left( (\mu_x \mu_y^2 \epsilon)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \right)$ . При

таких параметрах последнее слагаемое меньше  $\epsilon$ .

При выборе  $B$  порядка  $\beta^3 d$  первые два слагаемых в (C.10) будут меньше  $\epsilon$ . Определим минимальное количество итераций. Это можно сделать, решив неравенство:

$$(1 - \mu_x \tau_x)^N P_0 \leq \epsilon$$

Откуда мы получим минимальное число итераций

$$N \geq \frac{1}{\tau_x \mu_x} \ln \frac{P_0}{\varepsilon} = \\ = 12 \frac{(\beta^3 d/B + 1) L_2^3}{\mu_x \mu_y^2} \ln \frac{P_0}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где во втором неравенстве мы использовали то,

что  $\tau_x = \frac{\mu_y^2 \tau_y}{12L_2^2}$ ,  $\tau_y = \frac{1}{(M+1)L_2}$  и  $M = \mathcal{O}(\beta^3 d/B)$ ,

$d = \max(d_x, d_y)$ . При достаточно большом  $B$  порядка  $\beta^3 d$  зависимость от размерности пропадает.

Оракульная сложность получается из итерационной, путем домножения на размер батча, то есть:

$$T = \mathcal{O}\left(\beta^3 d \mu_x^{-1} \mu_y^{-2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

При таких параметрах алгоритм 1 с градиентной аппроксимацией (4.4) в данной модели безградиентного оракула (4.3) сходится с требуемой точностью.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа А.М. Райгородского в разделах 1–3 была выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ НШ775.2022.1.1, в разделах 4–6 выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heaton J.* Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville: Deep learning: The MIT Press, 2016, 800 pp, ISBN: 0262035618 // Genetic programming and evolvable machines. 2018. V. 19. № 1–2. P. 305–307.
2. *Dai B. et al.* SBEEED: Convergent reinforcement learning with nonlinear function approximation // International Conference on Machine Learning. PMLR, 2018. P. 1125–1134.
3. *Namkoong H., Duchi J.C.* Variance-based regularization with convex objectives // Advances in neural information processing systems. 2017. V. 30.
4. *Xu L. et al.* Maximum margin clustering // Advances in neural information processing systems. 2004. V. 17.
5. *Sinha A. et al.* Certifying some distributional robustness with principled adversarial training // arXiv preprint arXiv:1710.10571. 2017.
6. *Audet C., Hare W.* Derivative-free and blackbox optimization. 2017.
7. *Rosenbrock H.H.* An automatic method for finding the greatest or least value of a function // The computer journal. 1960. V. 3. № 3. P. 175–184.
8. *Gasnikov A. et al.* Randomized gradient-free methods in convex optimization // arXiv preprint arXiv:2211.13566. 2022.
9. *Lobanov A. et al.* Gradient-Free Federated Learning Methods with  $l_1$  and  $l_2$ -Randomization for Non-Smooth Convex Stochastic Optimization Problems // arXiv preprint arXiv:2211.10783. 2022.
10. *Gasnikov A. et al.* The power of first-order smooth optimization for black-box non-smooth problems // International Conference on Machine Learning. PMLR, 2022. P. 7241–7265.
11. *Bach F., Perchet V.* Highly-smooth zero-th order online optimization // Conference on Learning Theory. PMLR, 2016. P. 257–283.
12. *Beznosikov A., Novitskii V., Gasnikov A.* One-point gradient-free methods for smooth and non-smooth saddle-point problems // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: 20th International Conference, MOTOR 2021, Irkutsk, Russia, July 5–10, 2021, Proceedings 20. Springer International Publishing, 2021. P. 144–158.
13. *Akhavan A., Pontil M., Tsybakov A.* Exploiting higher order smoothness in derivative-free optimization and continuous bandits // Advances in Neural Information Processing Systems. 2020. V. 33. P. 9017–9027.
14. *Polyak B.T.* Gradient methods for the minimisation of functionals // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963. V. 3. № 4. P. 864–878.
15. *Lojasiewicz S.* Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels // Les équations aux dérivées partielles. 1963. V. 117. P. 87–89.
16. *Ajalloeian A., Stich S.U.* On the convergence of SGD with biased gradients // arXiv preprint arXiv:2008.00051. 2020.
17. *Lobanov A., Gasnikov A., Stonyakin F.* Highly Smoothness Zero-Order Methods for Solving Optimization Problems under PL Condition // arXiv preprint arXiv:2305.15828. 2023.
18. *Yue P., Fang C., Lin Z.* On the Lower Bound of Minimizing Polyak-Łojasiewicz functions // arXiv preprint arXiv:2212.13551. 2022.
19. *Yang J., Kiyavash N., He N.* Global convergence and variance-reduced optimization for a class of nonconvex-nonconcave minimax problems // arXiv preprint arXiv:2002.09621. 2020.
20. *Akhavan A. et al.* Gradient-free optimization of highly smooth functions: improved analysis and a new algorithm // arXiv preprint arXiv:2306.02159. 2023.
21. *Nouiehed M. et al.* Solving a class of non-convex minimax games using iterative first order methods // Advances in Neural Information Processing Systems. 2019. V. 32.
22. *Osserman R.* The isoperimetric inequality // Bulletin of the American Mathematical Society. 1978. V. 84. № 6. P. 1182–1238.
23. *Beckner W.* A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures // Proceedings of the American Mathematical Society. 1989. V. 105. № 2. P. 397–400.
24. *Karimi H., Nutini J., Schmidt M.* Linear convergence of gradient-E,ojasiewicz condition // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases: European Conference, ECML PKDD 2016, Riva del Garda, Ita-

ly, September 19–23, 2016, Proceedings, Part I 16. 25. Zorich V.A., Paniagua O. Mathematical analysis II. Berlin : Springer International Publishing, 2016. P. 795–811.

lin : Springer, 2016. V. 220.

## GRADIENT-FREE ALGORITHMS FOR SOLVING STOCHASTIC SADDLE OPTIMIZATION PROBLEMS WITH THE POLYAK–LOYASIEVICH CONDITION

S. I. Sadykov<sup>a</sup>, A. V. Lobanov<sup>a,b</sup>, and A. M. Raigorodskii<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

<sup>b</sup>*Trusted Artificial Intelligence Research Center of ISP RAS  
Alexander Solzhenitsyn st., 25, Moscow, 109004 Russia*

<sup>c</sup>*Caucasian Mathematical Center of the Adyghe State University  
st. Pervomaiskaya, 208, Maykop, Republic of Adyghea, 385016 Russia*

This paper focuses on solving a subclass of a stochastic nonconvex-concave black box optimization problem with a saddle point that satisfies the Polyak–Loyasievich condition. To solve such a problem, we provide the first, to our knowledge, gradient-free algorithm, the approach to which is based on applying a gradient approximation (kernel approximation) to the oracle-shifted stochastic gradient descent algorithm. We present theoretical estimates that guarantee a global linear rate of convergence to the desired accuracy. We check the theoretical results on a model example, comparing with an algorithm using Gaussian approximation.