

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 621.833

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АДАПТИРОВАННЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ  
ПРИ РАБОТЕ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕКОСА**

© 2023 г. Ф. Г. Нахатакян<sup>1,\*</sup>, А. К. Пузакина<sup>1</sup>, Д. Ф. Нахатакян<sup>1</sup>,  
Д. С. Блинов<sup>2</sup>, Я. П. Зенкина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*e-mail: filnahat7@mail.ru

Поступила в редакцию 17.01.2023 г.

После доработки 08.02.2023 г.

Принята к публикации 20.02.2023 г.

В статье исследуется так называемая зубчатая передача с адаптированными свойствами. Такие передачи используются для повышения нагрузочной способности зубчатых зацеплений путем уменьшения максимальных контактных напряжений с помощью увеличения контактной податливости зубьев, работающих в условиях перекоса. Предложен подход, и на его основе задача решена аналитически, получены формулы для определения максимальных контактных напряжений зубьев зубчатых колес с кольцевыми канавками. Сделана оценка снижения контактных напряжений у зубьев, с адаптированными свойствами при перекосе, по сравнению с обычными зубьями.

*Ключевые слова:* зубчатая передача, адаптивные свойства, угол перекоса, контактные напряжения, кольцевые канавки, податливость зубчатого зацепления

**DOI:** 10.31857/S0235711923030124, **EDN:** PQMFZK

В зубчатых передачах, в результате погрешностей изготовления и монтажа, а также упругих деформаций элементов механизмов, нарушается симметрия нагружения, из-за чего зубья зубчатых колес взаимодействуют в условиях перекоса осей, т.е. по сути, имеет место кромочный контакт зубьев [1–6]. Известно [1], что при углах перекоса зубьев относительно друг друга  $\gamma = (0.1–1.0) \times 10^{-3}$  рад, обусловленных перекосом зубчатых колес, нагрузочная способность передач редукторов снижается в 2–15 раз, что является недопустимым. Поэтому, основная проблема при расчете нагруженности и прочности передач зацеплением заключается в корректном определении контактных и изгибных напряжений и деформаций зубчатых колес в условиях перекоса.

Для повышения нагрузочной способности зубчатых передач, работающих при наличии перекоса в зацеплении, в машиностроении используют различные методы. Например, в работах [7–14] предлагается продольная модификация боковой поверхности зуба – бочкообразность, ее получают путем замены прямолинейных образующих боковых поверхностей зубьев криволинейными. В работах [15–22] предлагается конструкция зубчатых колес с адаптивными свойствами, в которых зубья имеют три кольцевые канавки глубиной полтора модуля в плоскостях, параллельных плоскостям вра-

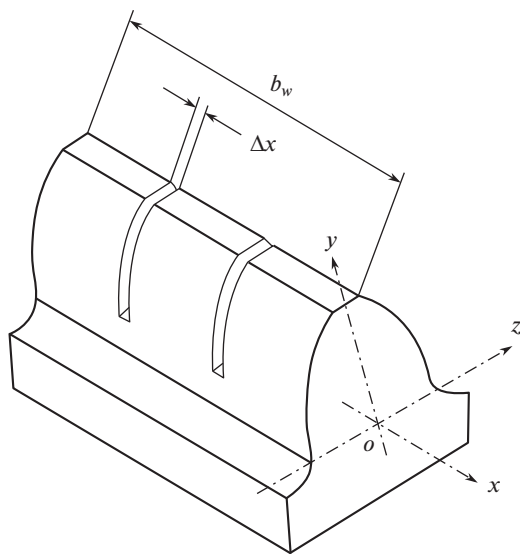


Рис. 1. Зуб зубчатого колеса с кольцевыми канавками.

щения колеса, разделяющие зуб на четыре равных участка, при этом задача решается численными методами для конкретных параметров.

В настоящей статье рассмотрены зубчатые колеса с кольцевыми канавками зубьев (рис. 1), разделенных на произвольное количество  $n$  частей, при этом задачу будем решать в общем виде, аналитически.

Теоретическая основа метода адаптивных зубчатых передач, по сути, заключается в увеличении податливости зацепления путем уменьшения длины зуба с помощью кольцевых канавок [15–22]. Известно [23], что суммарная деформация зубьев, с учетом деформаций обода и от изгиба зубьев зубчатых колес (без учета контактной составляющей деформации) при номинальном контакте, в отсутствие перекоса, определяется как

$$W = \frac{P}{bE} (0.43 + 11.39Y_p^3), \quad (1)$$

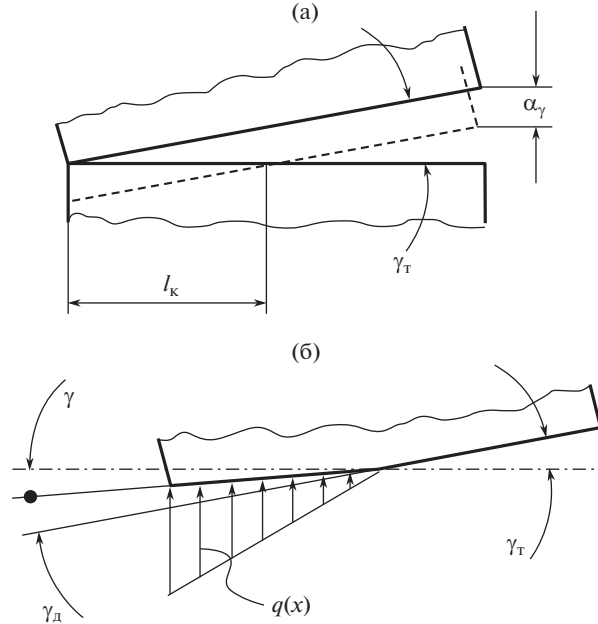
где  $Y_p = \frac{y_p}{h}$  – высота зуба определяется при  $h = 2.25m$ ;  $y_p$  – координата точки приложения силы по высоте зуба;  $m$  – модуль зацепления;  $P$  – сила в зацеплении;  $b$  – длина зуба;  $E$  – модуль упругости материала зуба.

Если рассмотреть контакт в полюсе зацепления, то из (1) получим

$$W = 2.48 \frac{P}{bE}. \quad (2)$$

Что касается контактной деформации зубьев зубчатых колес, то ее можно определить по формуле [24]

$$\alpha_H = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{P}{b} \ln \left[ 2.124 \sqrt{\frac{EC_1C_2}{qR_{\text{пр}}}} \right], \quad (3)$$



**Рис. 2.** Схема контакта двух зубьев при наличии угла перекоса  $\gamma_T$  – (а); расчетная схема деформирования зуба зубчатого колеса при нагружении его неравномерно распределенной погонной нагрузкой  $q(x)$  по длине зуба при наличии угла перекоса  $\gamma_T$  – (б).

где  $C_{1,2}$  – толщина зубьев;  $R_{пр}$  – приведенный радиус кривизны профиля зуба в рассматриваемой точке,  $R_{пр} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ,  $R_{1,2}$  – радиусы кривизны боковых поверхностей зубьев.

При наличии перекоса в зубчатом зацеплении параметры контакта, в том числе и максимальные контактные и изгибные деформации с учетом их концентраций, можно корректно определить, если учесть деформативную  $\gamma_d$  составляющую угла перекоса между образующими зубьев и их кривизну в продольном направлении (рис. 2а, б). Вопрос о  $\gamma_d$  подробно исследован в работе [25], и для этого угла получена формула

$$\gamma_d / \gamma_T = 0.506 (\beta l)^{0.11} \left( \frac{\alpha_H}{b \gamma_T} \right)^{m_0}, \quad (4)$$

где  $\beta l$  – безразмерный параметр длины зуба-балки на упругом основании;  $l$  – длина балки;  $\gamma_T$  – технологический (исходный) угол перекоса;  $\alpha_H$  – контактная деформация зуба при отсутствии перекоса;  $m_0 = 0.296$ .

При таком подходе расчетный угол перекоса  $\gamma$  будет определяться по зависимости

$$\gamma = \gamma_T - \gamma_d = \gamma_T (1 - \gamma_d / \gamma_T). \quad (5)$$

Таким образом, проблема по определению параметров зубчатой передачи с кольцевыми канавками сводится к корректному определению расчетного угла перекоса с учетом компенсирующей его величины при повышенной податливости системы.

Согласно работе [26], максимальные контактные напряжения при перекосе  $\sigma_\gamma$  определяются по формуле

$$\sigma_\gamma = K_\sigma \sigma_H, \quad (6)$$

где  $K_\sigma$  – коэффициент концентрации контактных напряжений при перекосе,  $K_\sigma = \sqrt{K_\gamma}$ ;  $K_\gamma$  – коэффициент угла перекоса (по сути – коэффициент концентрации контактных деформаций), который по результатам работы [27] определяется как

$$\begin{aligned} K_\gamma &= 1 + 0.5\xi, & \text{при } \xi \leq 2 \text{ (т.е. } l_k = b), \\ K_\gamma &= \sqrt{2}\xi^{1/2}, & \text{при } \xi \geq 2 \text{ (т.е. } l_k \leq b), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi = b\gamma/\alpha_H$  – безразмерный нагрузочный параметр;  $\alpha_H$  – контактная деформация зубьев при отсутствии перекоса;  $l_k$  – максимальная длина контактной площадки;  $\sigma_H$  – контактные напряжения при номинальном касании зубьев, определяются по формуле Герца

$$\sigma_H = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2q}{R_{\text{пр}}\vartheta}}, \quad (8)$$

где  $q = P/b$  – погонная нагрузка в зацеплении при номинальном контакте;  $R_{\text{пр}}$  – приведенный радиус кривизны зубьев в рассматриваемой точке зацепления; параметр  $\vartheta = (1 - \nu^2)/\pi E$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Для стальных колес из формулы (8) сле-

$$\text{дует } \sigma_H = 0.418 \sqrt{\frac{qE}{R_{\text{пр}}}}.$$

Не сложно показать, что формулы (7) можно обобщить и для коэффициента угла перекоса получить зависимость в виде

$$K_\gamma = 1 + 0.57\xi^{4/5}. \quad (9)$$

В работе [24] показано, что для коротких зубьев изгибом в продольном направлении при перекосе можно пренебречь, (деформативная составляющая угла перекоса для них практически отсутствует), и зуб вместо консольной пластины можно представить в виде консольной балки. Поэтому, при наличии кольцевых канавок, компенсация технологического угла перекоса в результате увеличения податливости будет

$$\gamma_d^{\text{ад}} = \Delta_k^{\text{ад}}/b, \text{ где } \Delta_k^{\text{ад}} = 5.5 \frac{P}{b_{\text{ад}}E} - \text{деформация } 1/n \text{ части зуба с кольцевыми канавками,}$$

здесь  $b_{\text{ад}} = b/n$ . Таким образом, получаем

$$\gamma_d^{\text{ад}} = \frac{5.5nP}{b^2E}, \quad (10)$$

следовательно, безразмерный нагрузочный параметр для рассматриваемой передачи будет определяться

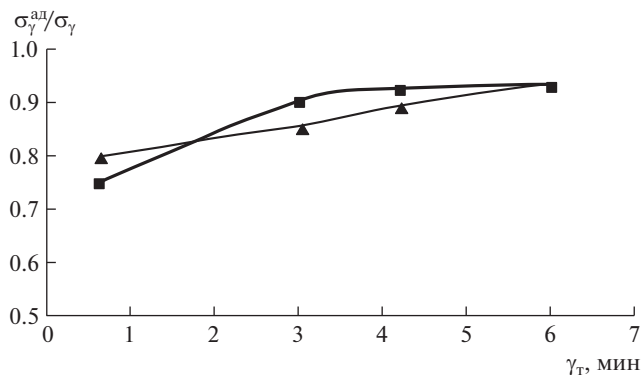
$$\xi^{\text{ад}} = b\gamma/\Delta_k^{\text{ад}}, \quad (11)$$

где расчетный угол перекоса будет определяться как

$$\gamma^{\text{ад}} = \gamma_T - \gamma_d^{\text{ад}} = \gamma_T(1 - \gamma_d^{\text{ад}}/\gamma_T), \quad (12)$$

а коэффициент угла перекоса  $K_\gamma$  определяется по формуле (9).

Таким образом, получена замкнутая система уравнений для определения максимальных контактных напряжений в зубчатом зацеплении в условиях перекоса. И если для прямозубых зубчатых зацеплений максимальные контактные напряжения при пе-



**Рис. 3.** Отношения контактных напряжений зубьев зубчатых передач с кольцевыми канавками и без них по данным МКЭ (■) [28]. Здесь же показаны расчетные значения по предлагаемой методике (▲).

рекосо  $\sigma_{\gamma}$  определяются из решения системы (2)–(6), (8), (9), то для зубчатых передач с адаптивными свойствами  $\sigma_{\gamma}^{ад}$  – (3), (6), (8)–(12).

Для верификации предложенного решения поступим следующим образом. В работе [28] приведено численное решение задачи с адаптивными свойствами зубчатого зацепления методом конечных элементов (МКЭ) с параметрами передачи: делительный диаметр  $d_1 = 200$  мм; модуль зацепления  $m = 5$  мм; передаточное число  $u = 1$ ; крутящий момент  $T = 500$  Н·м; ширина зубчатого венца  $b_w = 60$  мм; глубина кольцевой канавки  $f = 1.5m = 7.5$  мм; угол зацепления  $\alpha = 20^\circ$ ; количество кольцевых канавок  $n = 3$ ; модуль упругости материалов зубьев  $E = 21000$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ; приведенный радиус кривизны зубьев в полюсе зацепления  $\rho = 16.92$  мм. Угол перекоса  $\gamma_T$  варьировался:  $0.01^\circ$ ;  $0.05^\circ$ ;  $0.07^\circ$ ;  $0.10^\circ$ .

На рис. 3 показаны результаты расчетов отношения максимальных контактных напряжений  $\sigma_{\gamma}^{ад}/\sigma_{\gamma}$  зубьев указанной передачи с кольцевыми канавками и без них от угла перекоса  $\gamma_T$ . Здесь же показаны результаты работы [28], подсчитанных по МКЭ.

**Вывод.** В результате увеличения податливости зуба с помощью кольцевых канавок (рис. 3), контактные напряжения уменьшаются на 8–24% в зависимости от угла перекоса, тем самым повышается нагрузочная способность передачи.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов А.П., Кауров А.С. Контактная прочность эвольвентного зацепления с учетом перекоса зубчатых колес // Прогресивні технології і системи машинобудування. 2007. № 2 (34). С. 183.
2. Sobiepański M., Nieszporek T. Spur gears with longitudinal tooth profile modification mesh creating which is suitable for stress analysis // Technical Gazette. 2017. № 6 (24). P. 1657.
3. Wei Y.G., Tang W.C. The Edge Effect and Longitudinal Modification of Involute Gear Drive Used in Automobile // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 367. P. 136.

4. Короткин В.И., Газзаев Д.А. Влияние технологических отклонений осей зубчатых колес на напряженное состояние в галтели зуба эвольвентных зубчатых передач // Вестник машиностроения. 2011. № 9. С. 12.
5. Горленко О.А., Макаров Г.Н. Методика расчета износостойкости зубьев зубчатых передач при перекосе осей сопрягаемых колес // Трение и износ. 2019. Т. 40. № 5. С. 568.
6. Xiaochun S., Riming Z., Weidong H. Research on Gear Tooth Longitudinal Modification of Locomotive Traction Gear with Shaft Structure // Periodica Polytechnica Transportation Engineering. 2018. № 4 (46). P. 222.
7. Антонюк В.Е., Павловский В.Я., Поддубко С.Н., Александрова В.С., Николаенкова И.Н. Продольная модификация зубчатых колес планетарных передач мобильных машин // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 4 (17). С. 37.
8. Артамонов В.Д., Попков А.А. Методика определения продольной модификации зубьев цилиндрических колес при зубонарезании дельтовидными резцовыми головками // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 8. Ч. 2. С. 153.
9. Тимофеев Н.А. Выбор оптимальных параметров продольной модификации зуба прямозубых зубчатых колес // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2022. № 13. С. 88.
10. Грубка Р.М., Михайлов А.Н., Петряева И.А. Классификация видов продольной модификации зубьев цилиндрических зубчатых колес в зависимости от функционального назначения // Механика XXI века. 2019. № 18. С. 187.
11. Антонюк В.Е., Поддубко С.Н., Скороходов А.С., Александрова В.С. О продольной модификации зубьев цилиндрических зубчатых колес // Актуальные вопросы машиноведения. 2016. Вып. 5. С. 241.
12. Романов В.В., Спицын В.Е., Дейнекин А.С., Мироненко А.И. Зубчатые передачи редукторов с профильно-продольной модификацией зубьев // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2009. Т. 4. № 6 (40). С. 39.
13. Попов А.П., Мироненко А.И., Савенков О.И. Контактная жесткость зубчатых передач с учетом влияния перекосов зубьев // Вестник национального технического университета "Харьковский политехнический институт". Серия: Проблемы механического привода. 2016. № 23 (1195). С. 121.
14. Антонюк В.Е., Мариев П.Л., Павловский В.Я. Особенности конструирования и изготовления планетарных передач колесных редукторов отечественных мобильных машин // Механика машин, механизмов и материалов. 2010. № 4 (13). С. 29.
15. Korotkin V.I. Increasing the useful life and load-bearing capacity of the drives of oil pumping units // Chemical and Petroleum Engineering. 2018. V. 54. № 3–4. С. 165.
16. Макаров Г.Н., Гриб В.В., Шалыгин М.Г. Повышение нагрузочной способности зубчатых муфт // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2020. № 2. С. 19.
17. Горленко О.А., Макаров Г.Н. Проектирование прямозубых цилиндрических передач при условии минимизации контактных напряжений // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2017. № 9 (204). С. 12.
18. Горленко О.А., Шалыгин М.Г., Макаров Г.Н. Устранение кромочного контакта зубьев зубчатых колес планетарных передач // Строительные и дорожные машины. 2017. № 8. С. 38.
19. Бородин А.В., Тарута Д.В., Вельгодская Т.В. Повышение несущей способности зубчатой передачи тягового редуктора тепловоза // Известия Транссиба. 2010. № 3. С. 7.
20. Макаров Г.Н., Шныриков И.О., Горленко О.А. Повышение контактной выносливости зубьев прямозубых цилиндрических зубчатых передач // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2014. № 6. С. 25.

21. *Бородин А.В., Вельгодская Т.В., Рязанцева И.Л.* Влияние кольцевых прорезей на податливость зубчатых колес // *Техника машиностроения*. 2001. № 2. С. 78.
22. *Малинкович М.Д.* Исследование процесса зацепления цилиндрических зубчатых передач // *Вестник Брянского государственного технического университета*. 2008. № 3. С. 32.
23. *Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д., Ряснов Ю.А.* Статика зубчатых передач. М.: Наука, 1983. 142 с.
24. *Нахатакян Ф.Г.* Напряженно-деформированное состояние упругих элементов зубчатых механизмов и сооружений при их линейном и кромочном контакте: Дис. ... докт. техн. наук. М.: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 2014. 213 с.
25. *Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г.* Влияние изгибной деформации зубьев прямозубых цилиндрических передач на параметры контакта зубьев // *Вестник машиностроения*. 1990. № 8. С. 21.
26. *Айрапетов Э.Л.* Состояние и перспективы развития методов расчета нагруженности и прочности передач зацеплением. Ижевск—Москва: ИжГТУ, 2000. 116 с.
27. *Нахатакян Ф.Г.* Контактные напряжения и деформации цилиндров при перекосе // *Вестник машиностроения*. 2011. № 10. С. 45.
28. *Макаров Г.Н.* Повышение надежности зубчатых передач трансмиссий сельскохозяйственной техники // *Аэкономика: экономика и сельское хозяйство*. 2017. № 7 (19). С. 8.