

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ**

---

---

**МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.4:534.1

**ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ  
НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ**© 2023 г. Н. С. Азиков<sup>а</sup>, А. В. Зинин<sup>б,\*</sup><sup>а</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*<sup>б</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия**\*e-mail: allzin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 26.06.2023 г.

После доработки 08.08.2023 г.

Принята к публикации 20.08.2023 г.

Представлен анализ устойчивости четырехугольных ортотропных композитных панелей при сжатии и сдвиге. Решение задачи устойчивости выполнено методом Релея–Ритца в перемещениях с аппроксимацией собственных форм прогиба функциями Крылова. Дана оценка влияния условий закреплений и схемы укладки слоев композитной структуры на параметры критического поведения четырехугольных панелей. Точность численных процедур подтверждена сравнением с результатами точного решения основного линеаризованного уравнения теории устойчивости на примере изотропной пластины.

*Ключевые слова:* устойчивость, четырехугольная панель, граничные условия, композитный материал, структура армирования

**DOI:** 10.31857/S0235711923060056, **EDN:** EFMVPY

Накопленный опыт применения полимерных композиционных материалов в различных инженеринговых решениях показывает неограниченные возможности для создания оптимальных как по форме, так и по структуре (содержанию) композитных конструкций. Варьирование структурных параметров для управления механическими свойствами слоистого композита в сочетании с разнообразием геометрического облика дают возможности в полной мере реализовать оптимальные по весовой эффективности и надежности проектные решения [1–3]. Тонкостенные композитные панели непрямоугольной формы, чаще всего являющиеся формообразующими (обшивочными) компонентами узлов и агрегатов авиакосмической техники и строительных конструкций улучшают функциональность и эксплуатационные характеристики техники и повышают технологичность производства [4–7].

Панельные конструктивные элементы в основном подвергаются сжимающим и сдвиговым нагрузкам в плоскости статического и динамического характера во время эксплуатации, что делает анализ устойчивости этих компонентов важным этапом в общем проектировании конструкции. Существующие решения в закрытой форме получены только для нескольких конкретных случаев [2, 8] и относятся к изотропным и ортотропным пластинам правильной формы. Аналитические исследования четырехугольных слоистых пластин с неравными длинами сторон и различными условиями закрепления весьма ограничены [9]. Связано это, прежде всего со сложностями подбора адекватной и не усложняющей решение функции прогиба, корректной для всей области пластины и удовлетворяющей граничным условиям.

**Обзор литературы.** Методы исследования устойчивости четырехугольных пластин во многом схожи с методами анализа закритического поведения и динамического отклика скошенных композитных панелей, обзоры которых представлены в статьях авторов [9–11]. В настоящей статье остановимся на новых исследованиях, учитывающих особенности четырехугольных панелей общей формы.

Среди работ, выполненных аналитическими методами, следует отметить исследование Чена [12], в котором представлено полуаналитическое решение задачи устойчивости многослойных композитных пластин, нагруженных сдвиговыми и сжимающими нагрузками в плоскости. Функции поперечного прогиба и силы разложены в обобщенный двойной ряд Фурье, а функция формы деформации вдоль одного направления построена с помощью уникальной весовой комбинации трех видов тригонометрических рядов. В работе [8] известные аналитические решения линейризованных задач устойчивости прямоугольных пластин с шарнирно опертыми кромками, находящихся в условиях комбинированных видов нагружения, обобщены на аналогичные задачи для косоугольных пластин. В косоугольной системе координат для ковариантных компонентов тензора деформаций получены компактные кинематические соотношения. В [13] использован полуаналитический подход к геометрически нелинейному анализу трапециевидных пластин на основе теории Кармана. Решение определяющих нелинейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами сводится к итерационному решению с использованием многочленного расширенного метода Канторовича.

Наряду с аналитическими методами анализа устойчивости четырехугольных композитных пластин широко используют численные методы решения задачи. Конечно-элементные (КЭ) модели устойчивости четырехугольных панелей обычно построены на теориях пластин Кирхгофа и Миндлина–Рейсснера. Теория пластин Кирхгофа предпочтительна для моделирования тонких структур, т.к. деформацией поперечного сдвига пренебрегают. В теории Миндлина–Рейсснера влияние деформации поперечного сдвига можно учесть, что позволит адекватно моделировать толстые пластины различной конфигурации [14]. А. Кумар [15] применил сглаженный метод конечных элементов (ES-FEM) для аппроксимации мембранных деформаций и сглаживания кривизны граничных ячеек четырехугольных элементов. Деформации поперечного сдвига в четырехугольном элементе Рейсснера–Миндлина вычисляются с использованием метода интерполяции с согласованием по краям. Е. Камари [16] представила КЭ-анализ нелинейного изгиба многослойных композитных трапециевидных пластин под действием равномерно распределенной нагрузки, в котором нелинейное управляющее уравнение решено с использованием итерационной схемы Ньютона–Рафсона. Модель Гюрзеса [17] реализована с помощью метода дискретной сингулярной свертки (DSC) для многослойных трапециевидных пластин. Прямолинейная трапециевидная область отображается при помощи геометрического преобразования в квадратную область в вычислительном пространстве с использованием четырехузловых элементов.

Достаточно точным и математически более простым методом решения задач устойчивости является дифференциально-квадратурный метод. Этот метод использован для оценки влияния факторов окружающей среды на устойчивость трапециевидных композитных пластин в статье [18]. Уравнения устойчивости получены на основе теории деформации сдвига первого порядка с использованием энергетического метода, затем для расчета критической температуры потери устойчивости применяется метод обобщенных дифференциальных квадратур. Для оптимизации расположения слоев для максимальной нагрузки на изгиб используется генетический алгоритм.

Задача устойчивости при сдвиге и сжатии трапециевидных пластин, нетривиально решена в [19] с использованием безэлементного метода Галеркина (EFGM) в сочетании с функцией формы подвижного кригинга — метода интерполяции, на основе гауссовского процесса. На основании принципа Гамильтона формируется система

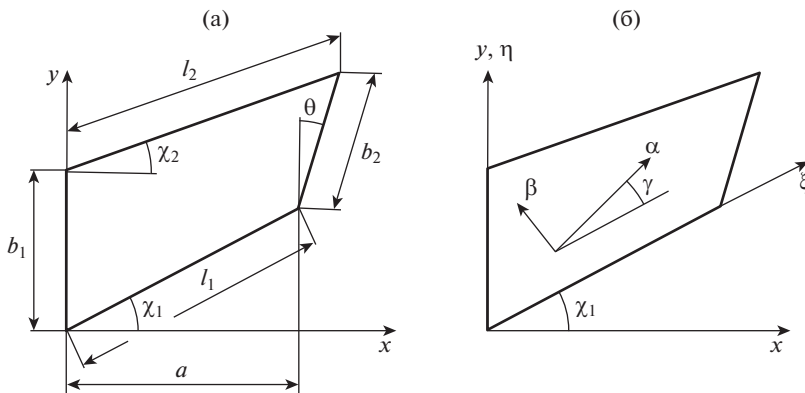


Рис. 1. Геометрические параметры (а) и системы координат (б) четырехугольной панели и элементарного композитного слоя.

определяющих уравнений, которые преобразуются в дискретизированную форму методом EFGM.

Хотя методы дискретизации эффективно применяются для анализа композитных пластин, они неизменно приводят к задачам с большим числом степеней свободы [20, 21], что создает немалые вычислительные трудности. Поэтому распространение получили вариационные подходы, в частности метод Ритца [21–23], не требующий в своей обычной форме создания сетки. Особенность метода Ритца заключается в выборе подходящих функций для аппроксимации изогнутой формы, которые должны удовлетворять только существенным граничным условиям [21]. Прогиб пластины аппроксимируется набором характеристических ортогональных полиномов, которые можно сгенерировать, например, с помощью процедуры Грама–Шмидта [22].

Развитием метода Ритца является [23] метод  $rb$ -2 Рэлея–Ритца, альтернативный методу конечных элементов для анализа тонких пластин. Особенностью метода  $rb$ -2 Рэлея–Ритца является использование функций Ритца, представленных произведением основной функции и двумерной полиномиальной функции. Преимущества метода заключаются в том, что он не требует построения сетки и дискретизации криволинейных границ.

**Постановка задачи.** В настоящей статье выполнено обобщение разработанной ранее аналитической модели устойчивости и параметрической оценки критических состояний косоугольных композитных панелей для четырехугольных ортотропных пластин общей формы с помощью метода Рэлея–Ритца.

Рассмотрим ортотропную слоистую пластину постоянной толщины, имеющую в плане форму четырехугольника с прямолинейными границами (рис. 1а). Пластина состоит из конечного числа элементарных ортотропных однонаправленных слоев, свойства которых в общем случае определяются углом армирования относительно заданного направления армирования и характеристиками упругости и прочности. Геометрия панели характеризуется размерами продольных  $l_1 \neq l_2$  и поперечных  $b_1 \neq b_2$  сторон четырехугольника, углами скоса продольных краев  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , углом  $\theta$  между левой и правой кромками. Пластина с произвольными граничными условиями подвергается сжимающим и сдвигающим нагрузкам, которые действуют в плоскости слоев.

**Основные соотношения.** Введем систему координат  $\xi\eta z$ , которую свяжем с геометрией панели таким образом, чтобы оси  $\xi$  и  $\eta$  совпадали с нижней и левой гранями панели соответственно, а ось  $z$  направлена нормально к срединной поверхности. Введем

также локальную систему координат  $\alpha\beta z$ , которая связана со структурой армирования слоев панели. Направление армирования определяет угол  $\gamma$ , который составляют оси  $\alpha$  локальной и  $\xi$  глобальной систем координат (рис. 1б).

Уравнения равновесия бесконечно малого элемента панели с глянями, параллельными осям координат  $\xi\eta z$  записываются таким образом:

$$\begin{aligned} N_{\xi,\xi} + N_{\xi\eta,\eta} &= 0, \quad N_{\xi\eta,\xi} + N_{\eta,\eta} = 0, \\ M_{\xi,\xi\xi} + 2M_{\xi\eta,\xi\eta} + M_{\eta,\eta\eta} + N_{\xi}w_{,\xi\xi} + 2N_{\xi\eta}w_{,\xi\eta} + N_{\eta}w_{,\eta\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Подстановкой в первые два уравнения равновесия физических соотношений приведем уравнения равновесия (1) к виду

$$\begin{aligned} B_{11}^{\xi\eta}\epsilon_{\xi,\xi} + B_{12}^{\xi\eta}\epsilon_{\eta,\eta} + B_{33}^{\xi\eta}\epsilon_{\xi\eta,\eta} &= 0, \\ B_{21}^{\xi\eta}\epsilon_{\xi,\eta} + B_{22}^{\xi\eta}\epsilon_{\eta,\eta} + B_{33}^{\xi\eta}\epsilon_{\xi\eta,\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $B_{ij}^{\xi\eta} = 2\sum_{p=1}^{k/2} A_{ij}^{\xi\eta}(z_p - z_{p-1})$  – мембранные жесткости панели [2].

Уравнения будут удовлетворены тождественно, если перемещения искать в виде функций  $u_{\xi} = C_1\xi + C_2\eta$ ;  $u_{\eta} = C_3\xi + C_4\eta$ , для которых неизвестные постоянные  $C_n$  определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad N_{\eta}l_1 &= T_{\eta}l_1, \quad N_{\xi\eta}l_1 = T_{\xi\eta}l_1, \\ \eta = 0: \quad N_{\xi}b_1 &= T_{\xi}b_1, \quad N_{\xi\eta}b_1 = T_{\xi\eta}b_1; \\ \xi = l_2: \quad N_{\xi}b_2 &= T_{\xi}b_2 - T_{\xi\eta}b_2 \operatorname{tg} \theta, \quad N_{\xi\eta}b_2 = T_{\xi\eta}b_2 - T_{\xi}b_2 \operatorname{tg} \theta, \\ \eta = b_2: \quad N_{\eta}l_2 &= T_{\eta}l_2 - T_{\xi\eta}l_2 \operatorname{tg} \chi_{sr}, \quad N_{\xi\eta}l_2 = T_{\xi\eta}l_2 - T_{\eta}l_2 \operatorname{tg} \chi_{sr}. \end{aligned}$$

Здесь  $\chi_{sr} = \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_2)$ , для прямоугольной панели  $\chi_1 = \chi_2 = \theta = 0$ .

**Устойчивость композитной панели при сжатии и сдвиге.** Оценки минимальных значений коэффициентов устойчивости  $K_{\xi}^*$ ,  $K_{\eta}^*$ ,  $K_{\xi\eta}^*$  и критических усилий сжатия и сдвига  $T_{\xi}^*$ ,  $T_{\eta}^*$ ,  $T_{\xi\eta}^*$  получим методом Релея–Ритца, с представлением функции прогиба в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \bar{w}_{1m}(\xi) \bar{w}_{2n}(\eta), \quad (2)$$

где  $A_{mn}$  – амплитуда прогиба для чисел полуволн  $m$  и  $n$ ;  $\bar{w}_{1m}$ ,  $\bar{w}_{2n}$  – собственные формы, определяемые граничными условиями задачи.

С учетом особенностей формы и закрепления панели в качестве собственных форм  $\bar{w}_{1m}$ ,  $\bar{w}_{2n}$  используем функции Крылова [25], которые точно удовлетворяют геометрическим граничным условиям на контуре панели. Производные от аппроксимирующих функций Крылова не ортогональны друг другу, поэтому исходная задача определения критических усилий сжатия и сдвига сводится к общей задаче на собственные значения однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Полная потенциальная энергия в перемещениях в соответствии с критерием Брайана [22] определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2} \iint_S \{ & D_{11}^{\xi\eta} (w_{,\xi\xi})^2 + 2D_{12}^{\xi\eta} (w_{,\xi\xi})(w_{,\eta\eta}) + D_{22}^{\xi\eta} (w_{,\eta\eta})^2 + 4D_{33}^{\xi\eta} (w_{,\xi\eta})^2 - \\ & - (T_{\xi} - T_{\xi\eta}/i_{\max} \operatorname{tg} \theta) (w_{,\xi})^2 - [T_{\eta} - T_{\xi\eta}j/j_{\max} \operatorname{tg} \chi_{sr}] (w_{,\eta})^2 - \\ & - [T_{\xi\eta} - T_{\xi}i/i_{\max} \operatorname{tg} \theta - T_{\eta}j/j_{\max} \operatorname{tg} \chi_{sr}] 2(w_{,\xi})(w_{,\eta}) \} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где  $S$  – площадь панели.

Для вычисления интегральных слагаемых функционала энергии воспользуемся алгоритмом Симпсона [26]. Для этого область интегрирования разбивается на четырехугольные области с помощью сетки, которая в общем случае геометрии панели имеет переменные шаги разбиения в продольном  $i \in (1, 2, 3, \dots, \xi_{\max})$  и в поперечном  $j \in (1, 2, 3, \dots, \eta_{\max})$  направлениях

$$h_i = \frac{l_i}{\xi_{\max}} = \frac{l_1 + (l_2 - l_1) \frac{j}{j_{\max}}}{\xi_{\max}}; \quad h_j = \frac{b_j}{\eta_{\max}} = \frac{b_1 + (b_2 - b_1) \frac{i}{i_{\max}}}{\eta_{\max}}.$$

Минимизируя получающееся после численного интегрирования выражение по каждому элементу неизвестного вектора амплитуд  $[A]$ , получим однородную систему линейных алгебраических уравнений, которую представим в матричной форме

$$([\Omega] - [\lambda_{\xi}][t_{\xi}] - [\lambda_{\eta}][t_{\eta}] - [\lambda_{\xi\eta}][t_{\xi\eta}])[A] = 0, \quad (3)$$

где  $[\Omega]$ ,  $[t_{\xi}]$ ,  $[t_{\eta}]$ ,  $[t_{\xi\eta}]$  – квадратные матрицы;  $[\lambda_{\xi}]$ ,  $[\lambda_{\eta}]$ ,  $[\lambda_{\xi\eta}]$  – векторы собственных значений соответственно при осевом, поперечном сжатии и сдвиге. Элементы квадратных матриц равны

$$\begin{aligned} [\Omega] &= \left( \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}} \right)^{-1} \iint_S [w_{,\xi\xi}, w_{,\eta\eta}, 2w_{,\xi\eta}]^T [D] [w_{,\xi\xi}, w_{,\eta\eta}, 2w_{,\xi\eta}] d\xi d\eta, \\ [t_{\xi}] &= \iint_S \left[ (w_{,\xi})^2 - \operatorname{tg} \theta \frac{i}{i_{\max}} (w_{,\xi})(w_{,\eta}) \right] d\xi d\eta, \\ [t_{\eta}] &= \iint_S \left[ (w_{,\eta})^2 - \operatorname{tg} \chi_{sr} \frac{j}{j_{\max}} (w_{,\xi})(w_{,\eta}) \right] d\xi d\eta, \\ [t_{\xi\eta}] &= \iint_S \left[ 2(w_{,\xi})(w_{,\eta}) - \operatorname{tg} \theta \frac{i}{i_{\max}} (w_{,\xi})^2 - \operatorname{tg} \chi_{sr} \frac{j}{j_{\max}} (w_{,\eta})^2 \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Однородная система уравнений (3) имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю

$$\det([\Omega] - [\lambda_{\xi}][t_{\xi}] - [\lambda_{\eta}][t_{\eta}] - [\lambda_{\xi\eta}][t_{\xi\eta}]) = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты устойчивости  $K_{\xi}^*$ ,  $K_{\eta}^*$ ,  $K_{\xi\eta}^*$  определяют как минимальные собственные значения

$$\begin{aligned} K_{\xi}^* &= \min[\lambda_{\xi}], \quad K_{\eta}^* = \min[\lambda_{\eta}], \quad K_{\xi\eta}^* = \min[\lambda_{\xi\eta}], \\ T_{\xi}^* &= \frac{\pi^2 K_{\xi}^*}{b_{cp}^2} \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}, \quad T_{\eta}^* = \frac{\pi^2 K_{\eta}^*}{b_{cp}^2} \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}, \quad T_{\xi\eta}^* = \frac{\pi^2 K_{\xi\eta}^*}{b_{cp}^2} \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}, \end{aligned}$$

где  $b_{cp}^* = \max\{b_1, b_2\}$  – максимальный поперечный размер панели.

Требуемая точность процедуры численного интегрирования слагаемых полной энергии и последующего преобразования исходной матрицы к верхней треугольной матрице обеспечена аппроксимацией функции прогиба 30 членами ряда (2) и применением сетки с  $40 \times 40$  четырехугольных элементов.

Адекватность предлагаемой аналитической модели оценивалась сравнением результатов расчета коэффициентов устойчивости при сжатии и сдвиге изотропных прямоугольных панелей с известными из литературы [20, 21] результатами, полученными другими методами – точным решением основного линеаризованного уравнения теории устойчивости для прямоугольных пластин и приближенным интегрированием этого уравнения методом Галеркина [21]. Эти классические решения задач устойчивости пластин широко используются для отработки и апробирования всех современных приближенных методов расчета пластин на устойчивость.

Таблица 1. Характеристики материалов исследованных панелей

| Характеристика                                    | Изотропный сплав | Ортотропный композит |                 |
|---------------------------------------------------|------------------|----------------------|-----------------|
|                                                   |                  | вдоль волокон        | поперек волокон |
| Модуль упругости, ГПа                             | 72               | 110                  | 17.5            |
| Коэффициент Пуассона                              | 0.30             | 0.260                | 0.041           |
| Модуль сдвига в плоскости слоя, ГПа               | 27.7             | 7.5                  |                 |
| Предел прочности при растяжении, МПа              | 400              | 1350                 | 75              |
| Предел прочности при сжатии, МПа                  | 400              | 860                  | 240             |
| Предел прочности при сдвиге в плоскости слоя, МПа | 240              | 56                   |                 |

Сравнительные расчеты прямоугольных панелей ( $a/b_1 = 1 \dots 5$ ) из изотропного материала (табл. 1) показали полное соответствие результатов расчета значениям коэффициентов устойчивости при сжатии и сдвиге, определенных классическими методами [20].

Граничные условия определяются тремя возможными состояниями краев пластины – шарнирное опирание Ш, защемление З и свободное состояние С. Идентификацию способа закрепления каждого края пластины ведут против часовой стрелки от левой поперечной стороны четырехугольника.

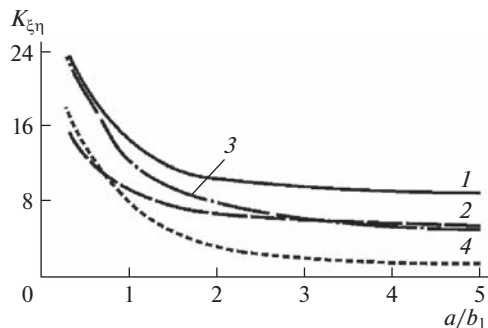
В сравнительных расчетах изотропных прямоугольных пластин исследовано влияние на величину коэффициента устойчивости при сдвиге  $K_{\xi\eta}^*$  соотношения сторон сечения  $a/b_1$  для четырех схем закрепления краев – З–З–З–З; Ш–Ш–Ш–Ш; З–Ш–З–Ш; З–С–З–С. Отмечена общая для всех схем закрепления панелей тенденция снижения коэффициента устойчивости с удлинением панелей в направлении оси  $x$ . Для  $a/b_1 > 3$  влияние соотношения сторон прямоугольника стабилизируется, и коэффициент устойчивости при сдвиге изменяется незначительно (рис. 2).

Граничные условия во многом определяют степень влияния геометрических параметров прямоугольной панели (рис. 3) для вытянутых в поперечном направлении сечений  $a/b_1 < 1$ .

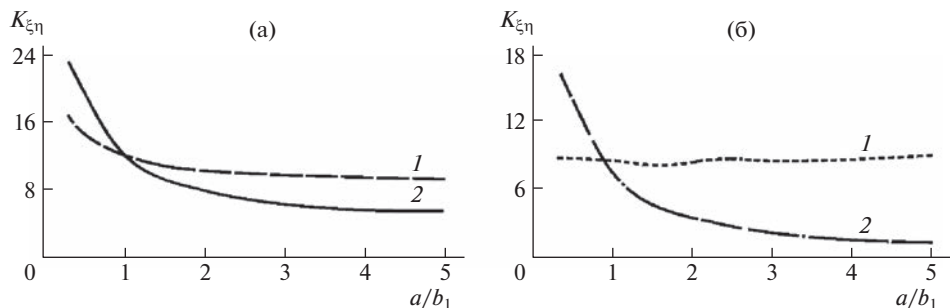
Частичная замена жесткой заделки на шарнирное закрепление (З–З–З–З  $\rightarrow$  З–Ш–З–Ш) приводит к снижению устойчивости панели при  $a/b_1 > 1$  (рис. 3а). Влияние граничных условий на коэффициенты устойчивости при сдвиге особенно сильно в случае со свободными кромками. Устойчивость пластин при закреплении со свободными продольными (длинными) краями не чувствительна к соотношению сторон прямоугольника. Изменение схемы закрепления краев на обратную (рис. 3б, З–С–З–С  $\rightarrow$  С–З–С–З) показывает, что наложение жесткой связи на продольные (длинные) и освобождение поперечных кромок пластины значительно снижает величину коэффициента устойчивости при сдвиге  $K_{\xi\eta}^*$ .

Влияние геометрии первоначально прямоугольной изотропной пластины на устойчивость в условиях сжатия и сдвига оценим, уменьшая размер правой поперечной кромки  $b_2$  до нуля при фиксированном размере нижней продольной стороны  $l_1 = \text{const}$ . Верхняя сторона при этом будет удлиняться и поворачиваться; в итоге форма пластины изменяется от прямоугольной до трапециевидальной и в пределе до треугольной с прямым углом при основании.

Расчеты критических параметров устойчивости изотропной пластины проведены для трех вариантов опирания краев – З–З–З–З; Ш–Ш–Ш–Ш; З–З–С–З и двух вариантов приложения сдвиговой нагрузки при положительном (+)  $K_{\xi\eta}^*$  и отрицатель-



**Рис. 2.** Влияние продольных размеров и граничных условий на коэффициенты устойчивости при сдвиге  $K_{\xi\eta}^*$ : 1 – 3–3–3–3; 2 – Ш–Ш–Ш–Ш; 3 – 3–Ш–3–Ш; 4 – 3–С–3–С.



**Рис. 3.** Влияние граничных условий на коэффициент устойчивости при сдвиге: (а) 1 – 3–3–3–3, 2 – 3–Ш–3–Ш; (б) 1 – 3–С–3–С, 2 – С–3–С–3.

ном  $(-)K_{\xi\eta}^*$  направлениях действия касательных усилий (положительное направление совпадает с направлением оси  $\xi$ ). Результаты вычислений отражены на графиках рис. 4–6.

Анализ полученных результатов показал, что изменение формы изотропной панели не оказывает существенного влияния на коэффициенты устойчивости при сжатии, но приводит к заметному изменению коэффициентов устойчивости при сдвиге по мере преобразования формы панели из прямоугольной в треугольную.

Методику анализа устойчивой формы изотропных панелей применим к исследованиям влияния различных факторов на устойчивость композитной ортотропной панели.

Панель в плане имеет четырехугольную форму с углом скоса нижнего ребра  $\chi_1 = 30^\circ$ , углом  $\theta = 10^\circ$  и размерами сторон  $l_1 = l_2 / \cos \chi_1$ ,  $l_2 = 2$  м,  $b_1 = 3$  м,  $b_2 = 2$  м. Материал панели ортотропный; характеристики механических свойств указаны в табл. 1. Структуру композита определяют двадцать слоев, уложенных под углами  $\pm\varphi$  и направление армирования  $\gamma = 20^\circ$ .

Расчеты показывают, что оптимальная укладка армирующих волокон в слоях, соответствующая наибольшей устойчивости пластины, определяется граничными условиями на контуре панели. При жестком закреплении всего контура панели максимальное значение коэффициента устойчивости при сжатии  $K_{\xi}^*$  достигается при углах армирования  $\pm\varphi = 40^\circ$ , для шарнирного опирания всех сторон  $\pm\varphi = 50^\circ$  (рис. 6). Для смешанной схемы закрепления с одной свободной кромкой получены наименьшие

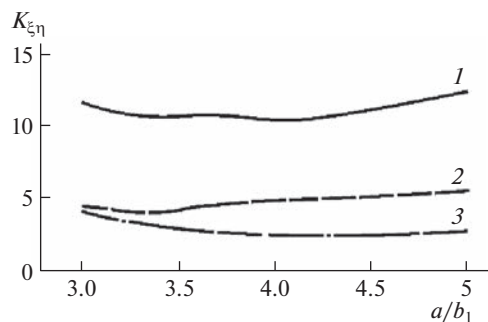


Рис. 4. Зависимости  $K_{\xi\eta}^*$  от соотношения размеров изотропной панели: 1 – 3–3–3–3; 2 – Ш–Ш–Ш–Ш; 3 – 3–3–С–3.

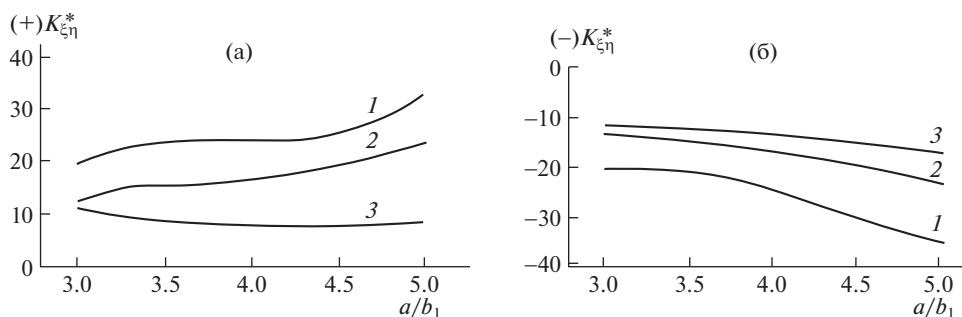


Рис. 5. Зависимости  $(+)K_{\xi\eta}^*$  (а) и  $(-)K_{\xi\eta}^*$  (б) от соотношения размеров изотропной панели: 1 – 3–3–3–3; 2 – Ш–Ш–Ш–Ш; 3 – 3–3–С–3.

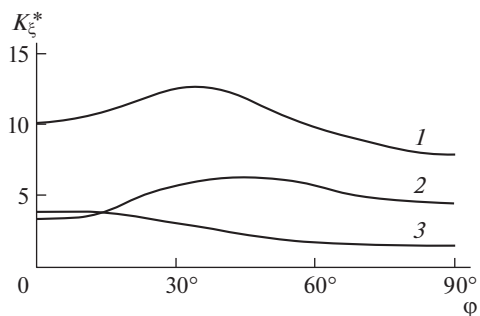
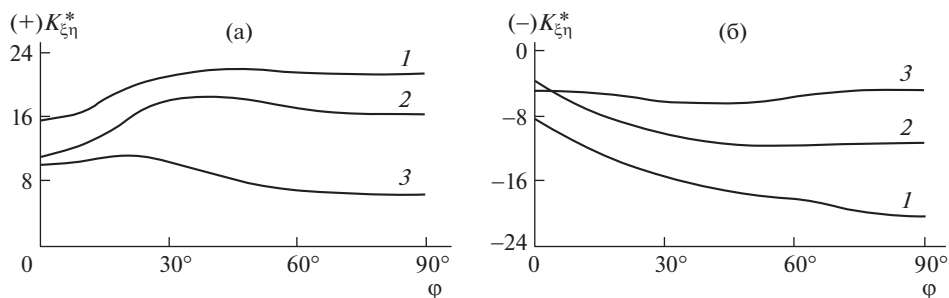


Рис. 6. Зависимости коэффициентов устойчивости  $K_{\xi}^*$  от структуры армирования слоев ортотропной панели: 1 – 3–3–3–3; 2 – Ш–Ш–Ш–Ш; 3 – 3–3–С–3.

значения коэффициента устойчивости при сжатии, слабо изменяющегося при варьировании угла армирования. Наличие свободной кромки снижает стесненность деформации и уменьшает влияние жесткости слоистого материала на критическое поведение панели при сжатии.

На устойчивость ортотропных пластин при сдвиге оказывает существенное влияние направление действия касательных усилий. Коэффициенты устойчивости при на-



**Рис. 7.** Коэффициенты устойчивости при сдвиге  $+K_{\xi\eta}^*$  (а),  $-K_{\xi\eta}^*$  (б) в зависимости от структуры армирования ортотропной панели: 1 – 3–3–3–3; 2 – Ш–Ш–Ш–Ш; 3 – 3–3–С–3.

грузках, имеющих отрицательный знак, для всех схем закрепления и большинства вариантов укладки слоев меньше, чем для нагружения положительными касательными усилиями (рис. 7). Так, для панели с защемленными кромками при  $\pm\varphi = 60^\circ$  критическая сдвиговая нагрузка при отрицательных внешних усилиях на 20% ниже, чем при действии нагрузок противоположного направления. Такое поведение панелей может объясняться чувствительностью композитных слоев к направлению нагрузок в связи с различием в упругих свойствах при деформировании вдоль и поперек армирующих волокон.

**Вывод.** Разработанная аналитическая модель оценки устойчивости композитных панелей при сжатии и сдвиге позволяет учитывать особенности критического поведения типовых композитных элементов и может служить инструментом оптимального проектирования тонкостенных конструкций, работающих в подобных условиях.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А. Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения // Инженерный журнал. 2015. № S11. С. 1.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
3. Ganiev R.F. Fundamental and Applied Problems of Nonlinear Wave Mechanics and Engineering: Groundbreaking Wave Technologies and Wave Engineering // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2019. V. 48. № 6. P. 477.
4. Глазунов В.А., Филиппов Г.С., Ганиев Р.Ф. Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения. Волновые и аддитивные технологии, станкостроение, роботехника // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 16.
5. Irisarri F.X., Julien C., Bettebghor D. et al. A general optimization strategy for composite sandwich structures // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2021. V. 63. P. 3027. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02849-8>
6. Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Ендогоур А.И., Фирсанов В.В. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 20.
7. Alhajahmad A., Mittelstedt C. Buckling and postbuckling performance of composite fuselage panels with cutouts using continuous streamline fibres // Int. J. of Mechanical Sciences. 2021. V. 212 (4). P. 106841.

8. Акишев Н.И., Закиров И.И., Иванов В.А. и др. О приближенных аналитических решениях задач устойчивости косоугольных пластин при комбинированных видах нагружения // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2011. № 2. С. 3.
9. Азиков Н.С., Зинин А.В., Гайдаржи Ю.В., Сайфуллин И.Ш. Прочность при закритическом деформировании косоугольных композиционных панелей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 5. С. 62.
10. Azikov N.S., Zinin A.V. Analysis of Free Vibrations of a Skew Orthotropic Composite Panel // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2022. V. 51 (5). P. 406.
11. Azikov N., Zinin A., Gaidarzhi Y. Buckling and free vibration analysis of skew shallow composite panel // AIP Conference Proceeding, 14 June 2023. V. 2507 (1). 040013.  
<https://doi.org/10.1063/5.0109355>
12. Chen Q., Qiao P. Buckling and postbuckling of rotationally-restrained laminated composite plates under shear // Thin-Walled Structures. 2021. V. 161. 107435.  
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107435>
13. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberge M. A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates // Int. J. of Mechanical Sciences. 2010. V. 52 (12). P. 1588.
14. Cen S., Shang Y. Developments of Mindlin-Reissner Plate Elements // Mathematical Problems in Engineering. 2015. V. 1. P. 1.  
<https://doi.org/10.1155/2015/456740>
15. Kumar A., Singha M.K., Tiwari V. Stability Analysis of Shear Deformable Trapezoidal Composite Plates // Int. J. of Structural Stability and Dynamics. 2019. V. 19 (8). P. 1971004.  
<https://doi.org/10.1142/S0219455419710044>
16. Kumari E., Lal S. Nonlinear bending analysis of trapezoidal panels under thermo-mechanical load // Forces in Mechanics. 2022. V. 8. P. 100097.  
<https://doi.org/10.1016/j.finmec.2022.100097>
17. Gürses M., Civalek O., Ersoy H., Kiracioglu O. Analysis of shear deformable laminated composite trapezoidal plates // Materials and Design. 2009. V. 30 (8). P. 3030.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.12.016>
18. Yas M.H., Bayat A., Kamarian S., Malekshahi A., Song J.I. Buckling Analysis and Design Optimization of Trapezoidal Composite Plates under Hygrothermal Environments // Composite Structures. 2023. V. 315 (3). P. 116935.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116935>
19. Watts G., Kumar R., Patel S. N., Singh S. Dynamic instability of trapezoidal composite plates under non-uniform compression using moving kriging based meshfree method // Thin-Walled Structures. 2021. V. 164. P. 107766.
20. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
21. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3-х т. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера и Я.И. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
22. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 620 с.
23. Nallim L.G., Martinez S.O., Grossi R.O. Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005. V. 194 (17). P. 1797.
24. Liew K.M., Wang C.M. pb-2 Rayleigh–Ritz method for general plate analysis // Engineering Structures. 1993. V. 15 (1). P. 55.
25. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: АН СССР, 1931. 154 с.
26. Калиткин Н.Н., Алышина Е.А. Численные методы. В 2 кн. Кн. 1. Численный анализ. М.: Академия, 2013. 304 с.