

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 621.833.

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ НА ИХ УПРУГОЕ СБЛИЖЕНИЕ ПРИ ЛИНЕЙНОМ КОНТАКТЕ

© 2024 г. Ф. Г. Нахатакян^{1, *}, Д. Ф. Нахатакян¹

¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

*e-mail: filnahat7@mail.ru

Поступила в редакцию 13.11.2023 г.

После доработки 09.12.2023 г.

Принята к публикации 15.12.2023 г.

Исследовано влияние кривизны цилиндрических тел на их упругое сближение при начальном линейном касании. Показано, что сближение двух круговых цилиндров зависит от суммы радиусов их кривизны и не зависит от радиуса кривизны отдельного цилиндра. Показано, что несмотря на то, что приведенный радиус кривизны в полюсе зацепления зубчатых передач больше, чем в точке их входа в зацепление, жесткость контакта не меняется, так как сумма радиусов кривизны в этих точках постоянна. Получены аналитические формулы в общем виде для определения влияния кривизны на сближение упругих тел при начальном касании по линии.

Ключевые слова: силовой контакт, кривизна цилиндрических тел, упругое сближение на линейном контакте, сближение цилиндрических тел, жесткость зубчатых передач, упругое сближение при начальном касании по линии

DOI: 10.31857/S0235711924020135, **EDN:** QVEAER

Силовой контакт упругих тел начальным линейным касанием распространен в инженерных приложениях и имеет важное прикладное значение. На его основе рассчитываются жесткость и нагруженность зубчатых зацеплений, роликовых подшипников, кулачковых механизмов, мостовых катков и т. д. [1–12]. Анализ методов расчета контактной жесткости упругих тел на линейном контакте показывает, что необходимо более точно учитывать влияние кривизны контактирующих тел на параметры нагруженности, нежели принято в традиционных методиках [1, 2, 4], поэтому в настоящей статье рассматривается проблема влияния кривизны контактирующих поверхностей на жесткость контакта.

Сначала определим приведенный радиус кривизны $R_{пр}$ контактирующих тел в зависимости от формы их поверхностей, а также полуширину полоски контакта b_H как функцию кривизны.

Рассматриваются три характерных случая сопряжений:

– контакт цилиндра радиуса R_1 с плоскостью $R_2 = \infty$; в этом случае приведенный

радиус кривизны определяется $R_{пр} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1$, а полуширина b_H будет опре-

деляться [13] $b_H = 2\sqrt{2q\theta R_{пр}}$, где $\theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E}$; здесь E , ν – модуль упругости и коэф-

коэффициент Пуассона материалов соответственно; q – погонная нагрузка; тогда при $\nu = 0.3$ величина полуширины будет $b_H = 1.52\sqrt{\frac{qR_1}{E}}$;

– контакт двух цилиндров радиусов $R_1 = R_2$; здесь приведенный радиус кривизны определяется $R_{пр} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1/2$, а полуширина b_H будет определяться формулой $b_H = 2\sqrt{qR_1 \frac{1-\nu^2}{\pi E}}$ или при $\nu = 0.3$ получаем $b_H = 1.08\sqrt{\frac{qR_1}{E}}$;

– контакт двух цилиндров радиусов $R_1 \neq R_2$; приведенный радиус кривизны определяется $R_{пр} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}$, а полуширина, соответственно, при $\nu = 0.3$ будет $b_H = 1.52\sqrt{qR_{пр}/E}$.

Определим сближение центров цилиндров с радиусами R_1, R_2 (рис. 1) при сжатии погонной нагрузкой q . Сближение α будет складываться из составляющих: α_1 – половина контактной деформации первого цилиндра радиуса R_1 ; α_2 – половина контактной деформации второго цилиндра радиуса R_2 , т. е. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, где α_1 и α_2 определяются [14]:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}4\theta q \left[\ln \frac{4R_1}{b_H} - 0.5 \right], \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}4\theta q \left[\ln \frac{4R_2}{b_H} - 0.5 \right],$$

при этом полуширина полоски контакта определяется (6) $b_H = 1.52\sqrt{\frac{qR_{пр}}{E}}$; следовательно, полное сближение α

будет определяться формулой: $\alpha = \frac{1}{2}4\theta q \left[\ln \frac{4R_1}{b_H} - 0.5 \right] + \frac{1}{2}4\theta q \left[\ln \frac{4R_2}{b_H} - 0.5 \right]$.

Отсюда с учетом приведенных выше зависимостей легко получить зависимость для полного сближения

$$\alpha = 1.16 \frac{q}{E} \left(\ln 1.59 \sqrt{\frac{E(R_1 + R_2)}{q}} \right).$$

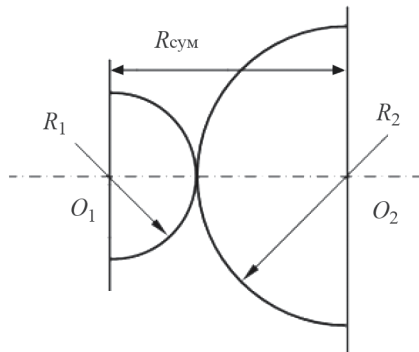


Рис. 1. Контакт двух полуцилиндров.

Получен любопытный результат: если сумма радиусов $R_{\text{сум}} = R_1 + R_2$ – константа, т. е. расстояние между цилиндрами (между центрами радиусов кривизны сопряжений) не меняется, при этом могут меняться радиусы кривизны самих цилиндров, то сближение (т. е., по сути, жесткость системы), остается постоянным.

Рассмотрим влияние радиуса кривизны на сближение в зубчатых передачах на примере из ГОСТ [15] и рассмотрим расчет в характерных точках – в полюсе зацепления и в точке входа зубьев в зацепление, а также оценим влияние изменения радиуса кривизны на жесткость зацепления. Параметры кинематической пары такой зубчатой передачи: делительный диаметр и количество зубьев шестерни $d_1 = 166.7$ мм и $Z_1 = 32$ соответственно; передаточное число передачи $u = 2$; модуль зацепления $m = 5$ мм; ширина зубчатого венца $b_w = 60$ мм; окружная сила в зацеплении $P_t = 25635$ Н; радиусы кривизны профиля зуба шестерни и колеса в полюсе зацепления $R_1 = 29.5$ мм, $R_2 = 59.1$ мм соответственно; радиусы кривизны профиля зуба шестерни и колеса в точке входа зуба в зацепление $\rho_1 = 16.6$ мм, $\rho_2 = 72.0$ мм соответственно. По этим данным получаем, что приведенный радиус кривизны в полюсе зацепления зубьев $R_{\text{пр}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 20.0$ мм, а в точке входа зубьев в зацепление $\rho_{\text{пр}} = \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2) = 13.5$ мм, т. е. в полюсе зацепления приведенный радиус кривизны больше на 48%, чем приведенный радиус кривизны профиля зуба в точке входа зубьев в зацепление. Однако в силу того, что сумма радиусов кривизны в рассматриваемых точках одинакова – $R_{\text{сум}} = a_w \sin \alpha_w = \rho_{\text{сум}} = 88.6$ мм, где $a_w = (d_1 + d_2)/2 = d_1(1 + u)/2$ – межосевое расстояние, жесткость зацепления в этих точках не меняется.

То же самое нельзя сказать в случае контакта кулачок–тарелка в кулачковых механизмах, где меняется именно сумма радиусов кривизны сопряжений (рис. 2), т. е. в таких механизмах жесткость по мере вращения кулачка непостоянна.

Отметим, что во многих работах, например [12, 16], показано, что сближение за счет деформации в контактной области упругих тел на линейном контакте определяется формулой $\alpha_K = \frac{K_\alpha q}{E}$, где коэффициент K_α со ссылкой на работы [12, 16] равен 1.245 и 1.08, откуда следует, что жесткость контакта не зависит от радиуса кривизны сопряжений в контактной области. Однако, как показано выше, полная контактная жесткость сопряжений не зависит от суммы радиусов кривизны сопряженных поверхностей.

Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу о влиянии кривизны сопряжений на линейном контакте – сжатие цилиндрических тел, поперечные сечения которых имеют произвольную форму (рис. 3), при воздействии на них нагрузкой с интенсивностью распределения по длине цилиндра, равной q .

При такой схеме нагружения сближение точек приложения нагрузки для цилиндра (рис. 3а) будет определяться как сумма сближений: $\alpha_{\text{ц1}}$ – полуцилиндра радиуса R_1 ; α_l – призматического тела размерами $l \times b_w \times R$ и $\alpha_{\text{ц2}}$ – полуцилиндра радиуса R_2 , где b_w – длина цилиндра. Получаем:

$$\alpha = \alpha_{\text{ц1}} + \alpha_l + \alpha_{\text{ц2}}, \quad (1)$$

где с учетом полученных выше соотношений $\alpha_{\text{ц1}} = \frac{1}{2} 4\theta q \left[\ln \frac{4R_1}{b_{H1}} - 0.5 \right]$,

$\alpha_1 = \frac{q}{E} \left(\frac{l}{4R_1} + \frac{l}{4R_2} \right)$, $\alpha_{\text{ц2}} = \frac{1}{2} 4\theta q \left[\ln \frac{4R_2}{b_{H2}} - 0.5 \right]$, $b_{H1} = 2\sqrt{2\theta q R_{\text{пр}}} = 1.08\sqrt{q R_1/E}$, $b_{H2} = 1.08\sqrt{q R_2/E}$, следовательно, из (1) и последних зависимостей получим:

$$\alpha = 0.58 \frac{q}{E} \left[\ln 10.1 \frac{E\sqrt{R_1 R_2}}{q} \right] + \frac{ql(R_1 + R_2)}{4ER_1 R_2}. \quad (2)$$

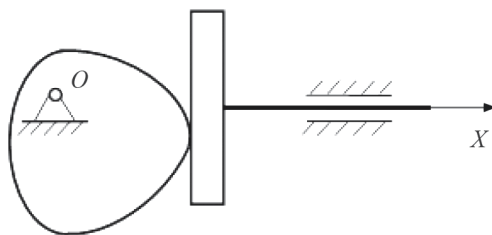
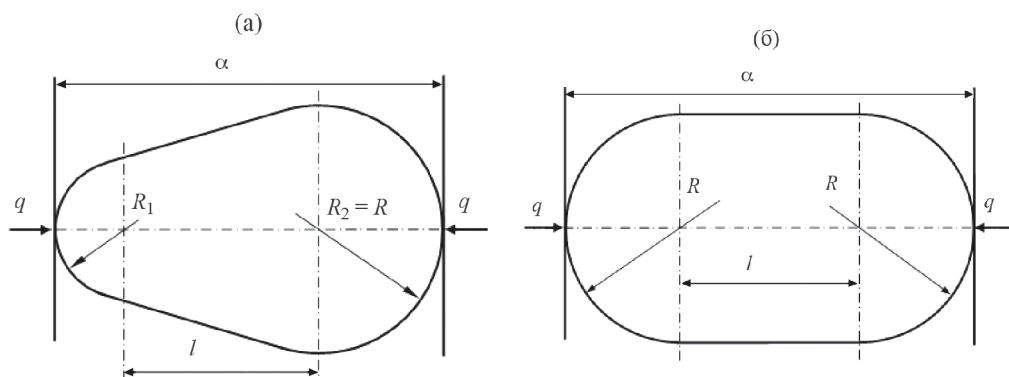


Рис. 2. Силовой контакт в кулачковом механизме.

Рис. 3. Контактное взаимодействие упругих тел при начальном касании по линии: (а) — $R_1 < R_2$; (б) — $R_1 = R_2 = R$.

Для второго цилиндра (рис. 3б) сближение точек приложения нагрузки можно определить из формулы (2) как частный случай, подставив туда $R_1 = R = R_2$. Получим

$$\alpha = 0.58 \frac{q}{E} \left[\ln 10.1 \frac{ER}{q} \right] + \frac{ql}{2ER}. \quad (3)$$

Анализ полученных формул (2)–(3) показывает, что для таких цилиндрических тел (рис. 3), в отличие от круговых цилиндров, изменение радиуса кривизны влияет на их сближение, т. е. на жесткость сопряжений.

Вывод. Таким образом, в работе показано, что: 1) если расстояние между центрами двух круговых цилиндров — константа, то жесткость силового контакта не меняется при изменении радиусов кривизны цилиндров; 2) несмотря на то что приведенный радиус кривизны зубьев в полюсе зацепления больше, чем приведенный радиус кривизны профилей зубьев в точке входа их в зацепление, жесткость зацепления в этих точках не меняется, так как сумма радиусов кривизны в этих точках одинакова; 3) полученные формулы позволяют определить сближение цилиндрических тел произвольной формы при начальном касании по линии в зависимости от радиуса кривизны.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Института машиноведения им. А.А. Благоднарова РАН. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азаров А. Д., Журавлев Г. А., Бабенко И. С.* Анализ влияния кривизны контактирующих упругих цилиндров на их напряженное состояние // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. № 2. С. 21.
2. *Журавлев Г. А.* О несоответствиях классических решений контактных задач Герца контакту реальных тел // Современные проблемы теории машин. 2015. № 3. С. 232.
3. *Бутов Э. С., Журавлев Г. А.* О путях увеличения несущей способности и ресурса тяжелонагруженных зубчатых передач // Вестник РГУПС. 2012. № 2. С. 7.
4. *Журавлев Г. А.* Сближение упругих тел, моделируемых круговыми цилиндрами // Техника машиностроения. 2000. № 6 (28). С. 51.
5. *Матлин М. М., Мозгунова А. И., Стариков А. А., Куликова М. А.* К вопросу расчетного определения упругого сближения при первоначально линейном контакте деталей машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 1. С. 44.
6. *Нахатакян Ф. Г.* Сближение упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии // Вестник машиностроения. 2014. № 2. С. 24.
7. *Хоприх М. Р., Цантопулос Г.* Контактные деформации вдоль прямой линии: цилиндр между двумя плоскими плитами // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Проблемы трения и смазки. М.: Мир, 1974. № 3. С. 193.
8. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
9. *Орлов А. В.* Упругие деформации и напряжения на линейном контакте // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 6. С. 31.
10. *Дорофеев В. Л.* Применение теории Г. Герца и метода виртуальных внешних нагрузок для обобщенного решения контактных задач // Вестник машиностроения. 2017. № 3. С. 19.
11. *Матлин М. М., Бабаков А. В.* Механика контактного взаимодействия твердых тел при начальном контакте по линии // Механика. 2000. № 3 (23). С. 5.
12. *Динник А. Н.* Избранные труды. Киев: АН УССР, 1952. Т. 1. 151 с.
13. *Нахатакян Ф. Г.* Решение плоской контактной задачи теории упругости с помощью модели упругого полупространства // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 5. С. 63.
14. ГОСТ 21354–87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность. М.: Изд-во стандартов, 1988. 127 с.
15. *Кистьян Я. Г., Френкель И. Н.* Экспериментальное определение жесткости зубьев прямо-зубых цилиндрических колес внешнего зацепления. М.: ЦНИИТМАШ, Машгиз, 1956. С. 172.