

# СЛИЯНИЕ ДВОЙНЫХ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР В ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩИХ ГАЛО ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

© 2024 г. В. Д. Стасенко<sup>1,2</sup>, Ю. Н. Ерошенко<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет, МИФИ, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию: 13.06.2024 г.

После доработки 13.06.2024 г.; принята к публикации 18.07.2024 г.

Рассмотрено влияние гало темной материи вокруг двойных первичных черных дыр на эволюцию орбит и темп слияния черных дыр. Из-за несферичности сжатия слоев темной материи каждый слой при первом сжатии проходит через центр гало в направлении радиус-вектора, соответствующего нулевому угловому моменту. Так как сжатие слоев — это непрерывный процесс, то в каждый момент времени в центре гало имеется ненулевая плотность темной материи. Эта плотность определяется влиянием приливных гравитационных сил со стороны возмущений плотности инфляционного происхождения и со стороны других первичных черных дыр. Рассеяние частиц темной материи на паре черных дыр приводит к потере энергии ее орбитального движения и к ускоренному слиянию пары. В случае первичных черных дыр с массами  $\sim 30M_{\odot}$  темп слияния черных дыр при наличии гало темной материи в несколько раз выше, чем без учета гало.

*Ключевые слова:* первичные черные дыры, гравитационная динамика, гравитационные волны.

DOI: 10.31857/S0320010824070058, EDN: MBUPOM

## ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза о формировании во Вселенной первичных черных дыр (ПЧД) была высказана почти 60 лет назад Зельдовичем и Новиковым (1966) и Хокингом (1971), и с тех пор было предложено несколько моделей их образования (Хлопов, Полнарев, 1980; Березин и др., 1983; Долгов, Силк, 1993; Джедамзик, 1997; Рубин и др., 2000, 2001). Также было выполнено множество исследований возможной роли ПЧД в различных астрофизических процессах и в космологии. В качестве примеров укажем, что ПЧД могут являться затравками для раннего образования сверхмассивных черных дыр в квазарах, а ПЧД с массами  $M_{\text{РВН}} \sim 30M_{\odot}$  могут объяснять часть гравитационно-волновых событий, регистрируемых детекторами LIGO/Virgo/KAGRA (Накамура и др., 1997; Йока и др., 1998; Сазаки и др., 2016; Долгов и др., 2020).

Хотя еще остаются интервалы масс  $M_{\text{РВН}} \sim 10^{20} - 10^{24}$  и  $M_{\text{РВН}} \sim 10 - 10^3 M_{\odot}$ , в которых ПЧД могут составлять преобладающую часть темной материи (ТМ), при других массах ПЧД могут давать лишь малый вклад  $f \ll 1$  в полную плотность ТМ из-за различных ограничений (см. обзор Карра и Кухнеля, 2020). В настоящей работе мы рассмат-

риваем модель, в которой ПЧД ответственны за значительную долю событий LIGO/Virgo/KAGRA, составляя долю  $f \ll 1$  в ТМ, и рассмотрим влияние остальной ТМ на эволюцию пар ПЧД перед их слиянием с генерацией гравитационных всплесков.

Взаимодействие ТМ с парами ПЧД рассматривалось в различных аспектах в ряде работ. В работе (Ерошенко, 2018) было указано, что космологические возмущения плотности ТМ, возникшие на стадии инфляции, могли влиять на угловой момент пары ПЧД, несколько изменяя итоговый темп слияния. Вокруг ПЧД могут возникать пики ТМ на радиационно-доминированной стадии (Ерошенко, 2016) и более массивные гало ТМ на пылевидной стадии (Докучаев, Ерошенко, 2001, 2003). В частности, такие гало должны были образовываться не только вокруг отдельных ПЧД, но и вокруг пары ПЧД как целого (Хаясаки и др., 2016). В работах Стасенко и Белоцкого 2023 и (Стасенко, 2024) рассмотрена роль ПЧД в формировании возмущений плотности, ведущих к образованию больших гало ТМ и обратное влияние таких гало на кластеризацию ПЧД.

Угловой момент пары ПЧД определяется, прежде всего, гравитационным влиянием третьей ближайшей ПЧД. В работе (Хаясаки и др., 2016) было указано на то, что эта же третья ПЧД должна оказывать гравитационное воздействие на сжатие сло-

\*Электронный адрес: eroshenko@inr.ac.ru

ев ТМ в гало вокруг пары ПЧД, приводя к попаданию частиц ТМ в “конус потерь” пары ПЧД. Это, в свою очередь, ведет к дополнительной потере парой энергии орбитального движения. В (Хаясаки и др., 2016) сделана оценка этого эффекта по порядку величины. В настоящей работе мы рассматриваем влияние третьей ПЧД на гало ТМ более подробно и с учетом несферичности сжатия гало. Также мы рассматриваем влияние на эволюцию гало ТМ возмущений плотности ТМ инфляционного происхождения с масштабами, сопоставимыми с размером самого гало.

Новым эффектом, который ранее в расчетах явно не учитывался, и который мы рассматриваем в рамках приближенной аналитической модели, является ненулевая плотность ТМ в центре гало из-за несферического сжатия слоев ТМ с пролетом этих слоев через центр гало, где находится пара ПЧД. Эволюция гало ТМ с учетом углового момента частиц рассматривалась в работе (Сикив и др., 1997), где для некоторых специальных случаев было найдено автомодельное решение. В (Сикив и др., 1997) было указано, что по теореме о неподвижной точке в сферических слоях ТМ должны существовать направления, в которых угловой момент частиц ТМ равен нулю. В этом направлении частицы из слоя ТМ пролетают через центр гало при первом сжатии. После нескольких колебаний слой ТМ размывается и переходит в общее сферически-симметричное распределение ТМ. В других направлениях угловой момент ненулевой, что ведет при первом сжатии к пролету частиц мимо центра формирующегося гало на некотором характерном расстоянии, которое необходимо найти для расчета плотности слоя ТМ.

В отличие от (Сикив и др., 1997), мы не усредняем угловой момент частиц ТМ по сферическому слою, а рассматриваем сжатие слоя в двух направлениях: в указанном направлении нулевого углового момента и в направлении среднеквадратичного углового момента. Сжатие в первом из указанных направлений ведет к прохождению слоя ТМ через центр гало ТМ, в котором находится пара ПЧД, а сжатие во втором направлении останавливается на некотором типичном радиусе. В результате слой ТМ при его прохождении через центр гало приблизительно можно представить в виде диска, как видно на рис. 2 в работе (Сикив и др., 1997). Мы рассчитываем характерные размеры этого диска и его плотность.

Так как пролет слоев ТМ через центр является непрерывным процессом (со временем изменяются только направление скорости пролета и радиуса “диска”), пара ПЧД в каждый момент погружена в поток ТМ с медленно изменяющейся во вре-

мени плотностью, и мы вычисляем потерю парой энергии орбитального движения за счет взаимодействия с потоком ТМ. Одновременно с этим рассматривается влияние на сжимающийся слой ТМ третьей ближайшей ПЧД. Отметим, что в работе (Хаясаки и др., 2016) не было учтено, что вокруг третьей ПЧД также нарастает свое гало ТМ, массу которого необходимо суммировать с массой третьей ПЧД.

Указанные процессы прохождения слоев ТМ через центр формирующегося гало и их влияние на пару в полной мере можно было бы учесть в численном моделировании с высоким разрешением, и расчеты в рамках численного моделирования проводились в работах (Ткачев и др., 2020) и (Пилипенко и др., 2022). Хотя численное моделирование включает пролеты ТМ через центр гало, из-за малого разрешения в численном моделировании можно учесть пролет лишь достаточно больших сгущений ТМ, но рассматриваемый нами эффект пролета большого количества фоновой ТМ в таком моделировании в значительной степени недоступен рассмотрению. Мы покажем, что учет фоновой ТМ увеличивает общий результат (темп слияний пар ПЧД) еще в несколько раз по сравнению с результатом моделирования (Пилипенко и др., 2022).

### ПЛОТНОСТЬ В ЦЕНТРЕ ГАЛО, ОКРУЖАЮЩЕГО ПАРУ ПЧД

Вблизи момента  $t_{eq}$  перехода Вселенной на пылевидную стадию эволюции вокруг пары ПЧД формируется область с плотностью  $\sim \rho_{eq}$  и радиусом  $\sim (3M_{РВН}/(4\pi\rho_{eq}))^{1/3}$  (здесь и далее величины в момент  $t_{eq}$  помечаем индексом “eq”, а величины в настоящий момент времени  $t_0$  помечаем индексом “0”). Частицы ТМ из этой области, пролетающие через центр, будут некоторое время оказывать влияние на эволюцию орбиты пары, но они будут выброшены на более широкие орбиты. Тем не менее, на пару ПЧД все время будут натекают все новые слои ТМ и плотность ТМ в области центра будет все время ненулевой. Найдем эту плотность.

Уравнения радиального движения слоев ТМ имеют решение в параметрическом виде

$$r = r_s \cos^2 \theta; \quad \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{2}{3} \left( \frac{5\delta_{tm eq}}{3} \right)^{3/2} \frac{t - t_s}{t_{eq}}, \quad (1)$$

где радиус остановки слоя в момент его максимального расширения  $t_s$  обозначен через  $r_s$ ,

$$\frac{t_s}{t_{eq}} = \frac{3\pi}{4} \left( \frac{5\delta_{eq}}{3} \right)^{-3/2}; \quad \frac{r_s}{r_{eq}} = \frac{3}{5\delta_{eq}}, \quad (2)$$

а возмущение плотности ТМ в момент  $t = t_{\text{eq}}$  внутри сферы, содержащей массу ТМ  $M$ , равно  $\delta_{\text{eq}} = 2M_{\text{РВН}}/M$ . Момент формального сжатия слоя в точку  $t_c \simeq 2t_s$ .

Однако в реальности слои ТМ не остаются сферически-симметричными. Существуют направления радиуса-вектора, в которых угловой момент частиц ТМ равен нулю (Сикив и др., 1997). Например, если приливные силы создаются третьей ПЧД, то угловой момент равен нулю в направлении радиус-вектора этой ПЧД. Слой ТМ, сжимающийся вдоль этого направления, будет проходить через центр гало (через пару ПЧД). Процесс несферического сжатия слоев ТМ аналогичен эффекту формирования “блинов Зельдовича” и сжатую барионного вещества в диски в дисковых галактиках вдоль оси вращения. Но, в отличие от барионов, ТМ не фиксируется в диске, а пролетает через центр гало и испытывает несколько затухающих колебаний (пролетов) до перемешивания с другими слоями. С течением времени указанное выше направление нулевого момента будет меняться (оно зависит от распределения неоднородностей, генерирующих угловой момент), но в каждый момент времени, начиная с  $\sim t_{\text{eq}}$ , через центр будут непрерывно пролетать все новые слои ТМ, создавая в центре ненулевую плотность ТМ.

Рассмотрим тонкий слой ТМ между радиусами остановки  $r_s$  и  $r_s + \delta r_s$  в направлении нулевого углового момента. Внутренняя граница слоя пролетит через центр гало в некоторый момент времени  $t_c \simeq 2t_s$ , а внешняя граница пролетит с некоторой задержкой по времени. Обозначим чрез  $\delta r_c$  толщину этого слоя в момент его пролета через центр. Соответственно, коэффициент сжатия слоя вдоль его нормали составит  $\delta r_s / \delta r_c$ . В поперечном же направлении можно для оценки представить слой диском с характерным радиусом  $r_t$ , который мы найдем далее. Таким образом, плотность ТМ в центре гало

$$\rho_c(t) = \rho_s(\tilde{t}) \frac{\delta r_s}{\delta r_c} \left( \frac{r_s(\tilde{t})}{r_t} \right)^2, \quad (3)$$

где  $\tilde{t} \simeq t/2$ , так как рассматриваемый слой, проходящий в момент  $t$  через центр, остановился и начал сжиматься в более ранний момент  $\tilde{t}$ . Плотность  $\rho_s(\tilde{t})$  в 4 раза выше, чем плотность на радиусе остановки в момент  $t$ , и еще в  $(3\pi/8)^2 \approx 1.388$  раз выше, чем средняя плотность ТМ во Вселенной в момент  $\tilde{t}$ .

Толщину слоя в момент пролета можно оценить как  $\delta r_c \sim v_c \delta t_c$ , где скорость пролета через центр

$$v_c \simeq \left( \frac{2GM}{r_s} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где  $M$  — масса ТМ внутри слоя с радиусом  $r_s$ . Таким образом,

$$\frac{\delta r_c}{\delta r_s} \simeq v_c \frac{\delta t_c}{\delta r_s}. \quad (5)$$

Поскольку  $t_s \propto r_s^{9/8}$  и  $t_c \approx 2t_s$ , то  $\delta t_c / \delta r_s = (9/4)t_s / r_s$ . При  $z \gg 1$  (когда мало влияние темной энергии) можно положить  $1 + z_c \simeq 2^{2/3}(1 + z_s)$ .

Заметим также, что масса внутри слоя  $r_s$  в  $(3\pi/4)^2 = 5.552$  раз выше, чем масса ТМ в слое того же радиуса в однородной Вселенной. Собирая все вместе, получаем, что отношение

$$\frac{\delta r_c}{\delta r_s} = \frac{9\pi}{8} \approx 3.5 \quad (6)$$

постоянно, и тогда

$$\rho_c(t) = \frac{\pi}{8} \bar{\rho}(\tilde{t}) \left( \frac{r_s(\tilde{t})}{r_t} \right)^2, \quad (7)$$

где  $\bar{\rho}(t)$  — средняя плотность ТМ во Вселенной, и  $\bar{\rho}(\tilde{t}) \simeq 4\bar{\rho}(t)$  при  $z \gg 1$ .

### ВЛИЯНИЕ ПРИЛИВНЫХ СИЛ, ПРОИЗВОДИМЫХ ИНФЛЯЦИОННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Величина  $r_t$  может содержать вклад от различных приливных процессов. В данном разделе найдем часть  $r_t$ , связанную с влиянием возмущений плотности ТМ инфляционного происхождения. Вокруг ПЧД формируется гало ТМ, слои ТМ последовательно переходят от расширения к сжатию. Но из-за влияния приливных гравитационных сил происходит смещение частиц ТМ от радиальной траектории. Вдоль указанного выше направления, в котором набранный угловой момент равен нулю, слой проходит через центр, а в ортогональном направлении минимальное сближение частиц с парой ПЧД равно некоторой характерной величине  $r_t$ . Оценим эту величину. Рассмотрим систему координат с центром в паре ПЧД. Следуя методу, описанному в (Березинский и др., 2003), разложим гравитационный потенциал

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} \Big|_0 r^i + \frac{1}{6} \varphi_{ll} \Big|_0 \delta_{ij} r^i r^j + \frac{1}{2} T_{ij} \Big|_0 r^i r^j + \dots, \quad (8)$$

где

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial r^i \partial r^j}, \quad T_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{1}{3} \varphi_{ll} \delta_{ij}. \quad (9)$$

Приливные силы создаются третьим слагаемым в (8).

Можно показать (Березинский и др., 2003), что при статистическом усреднении

$$\langle T_{ij} T_{ji} \rangle = \frac{2}{3} (4\pi)^2 G^2 \bar{\rho}^2 \sigma^2(M), \quad (10)$$

где  $\sigma(M)$  — среднеквадратичная величина возмущений плотности темной материи в некотором масштабе масс  $M$ , рассчитываемая с помощью спектра мощности инфляционных возмущений в темной материи. Для расчета  $\sigma(M)$  используем степенной начальный спектр возмущений, нормированный на данные наблюдений космического телескопа Планк.

Будем использовать метод последовательных приближений. В первом приближении траектория частицы радиальная, частица движется только под влиянием пары ПЧД и массы сферически-симметричного гало, которое нарастает вокруг пары. Скорость частицы

$$\frac{d\vec{v}_{\text{rad}}}{dt} = -\nabla\varphi(r), \quad (11)$$

где  $\varphi(r)$  — сферически-симметричная часть потенциала. Решение уравнения (11) дается выражением (1).

Во втором приближении частица отклоняется от радиальной траектории, и ее поперечное смещение нарастает согласно уравнению

$$\frac{d^2 r_{t,i}}{dt^2} = -T_{ij}(t)r^j, \quad (12)$$

где

$$T_{ij}(t) = T_{ij}(t_{\text{eq}}) \left( \frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{-4/3}. \quad (13)$$

Частица сначала удаляется от ПЧД, затем в момент  $t = t_s$  происходит ее остановка, частица начинает двигаться обратно, и вблизи момента  $t = 2t_s$  она сближается с ПЧД на минимальное расстояние. Но из-за поперечного смещения частица не падает в ЧД, а пролетает на некотором минимальном расстоянии. Интегрируя (12) до момента минимального сближения с центром, получаем

$$r_{t,i} = - \int_{t_{\text{eq}}}^{2t_s} dt' \int_{t_{\text{eq}}}^{t'} dt'' T_{ij}(t'') r^j(t''). \quad (14)$$

В численном расчете при интегрировании удобно перейти от времени к параметру  $\theta$ .

Фиксируем массу ПЧД  $M_{\text{РВН}}$ . Если мы рассматриваем космологическое красное смещение  $z$ , то, как следует из (1), коллапсу слоя в этот момент соответствует возмущение плотности в момент  $t_{\text{eq}}$

$$\delta_{\text{eq}} = \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{2/3} \frac{1+z}{1+z_{\text{eq}}}. \quad (15)$$

Такое возмущение ПЧД создает в массе темной материи

$$M = \frac{M_{\text{РВН}}}{\delta_{\text{eq}}}. \quad (16)$$

Это та масса темной материи, которая находится внутри сферы с радиусом, равным радиальному расстоянию от ПЧД рассматриваемой частицы. Начальный радиус этого слоя в момент  $t_{\text{eq}}$  составляет

$$r_{\text{eq}} = \left( \frac{3M}{4\pi\rho_{\text{eq}}} \right)^{1/3}. \quad (17)$$

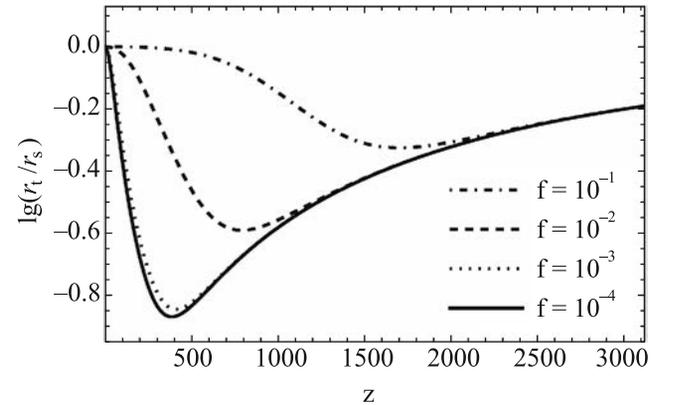
Для оценки примем, что масштаб массы  $M$  дает неоднородность и несферичность, создающие приливные силы, и будем рассматривать среднеквадратичную величину возмущений. В момент  $t_{\text{eq}}$  эта величина равна  $\sigma_{\text{eq}}(M)$ . В итоге, обозначив рассматриваемую в данном разделе часть  $r_t$  через  $r_{t,\text{in}}$ , получаем

$$r_{t,\text{in}} = 2^{9/4} 3^{-1/4} \sigma_{\text{eq}}(M) r_{\text{eq}} \left( \frac{5\delta_{\text{eq}}}{3} \right)^{-2} \kappa(\delta_{\text{eq}}), \quad (18)$$

где функция

$$\begin{aligned} \kappa(\delta_{\text{eq}}) = & \int_{-\pi/2+(5\delta_{\text{eq}}/3)^{1/2}}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta' \int_{-\pi/2+(5\delta_{\text{eq}}/3)^{1/2}}^{\theta'} d\theta \cos^4 \theta \\ & \times \left( \frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)^{-4/3} \end{aligned} \quad (19)$$

имеет порядок  $\simeq 1$  и  $\kappa(\delta_{\text{eq}}) \rightarrow 2.9$  при  $\delta_{\text{eq}} \rightarrow 0$ . Отношение  $r_{t,\text{in}}/r_s$  вместе с вкладом от третьей ПЧД показано на рис. 1.



**Рис. 1.** Характерный радиус слоя темной материи  $r_t$ , определяемый совместным воздействием приливных сил со стороны инфляционных возмущений и третьей ближайшей ПЧД, по отношению к радиусу остановки слоя  $r_s$  на красном смещении  $z$ . Кривые соответствуют массе ПЧД  $M_{\text{РВН}} = 30 M_{\odot}$  и (сверху вниз)  $f = 10^{-1}$ ,  $f = 10^{-2}$ ,  $f = 10^{-3}$ ,  $f = 10^{-4}$ .

### ВЛИЯНИЕ ТРЕТЬЕЙ ПЧД

Угловой момент пары ПЧД определяется третьей ближайшей ПЧД. Но эта же третья ПЧД ока-

зывает влияние на движение слоев ТМ. Вблизи момента  $t_{\text{eq}}$  масса гало ТМ еще небольшая, а инфляционные возмущения не выросли, поэтому можно ожидать, что при больших  $f$  третья ПЧД будет давать относительно большой вклад. Найдем величину  $r_t$ , возникающую из-за приливного влияния третьей ПЧД. Так как распределение расстояний до третьей ПЧД имеет приблизительно плоский вид, то характерное сопутствующее расстояние до третьей ПЧД  $y_{ch} \sim \bar{x}/2$ , где среднее расстояние между ПЧД

$$\bar{x} \simeq \left( \frac{3M_{\text{ВН}}}{4\pi f \rho_{\text{eq}}} \right)^{1/3}. \quad (20)$$

Эволюция  $r_t$  под влиянием третьей ПЧД определяется уравнением (уравнение для приливной силы)

$$\frac{d^2 r_t}{dt^2} = - \frac{2GM_H(t)}{(y_{ch}s(t))^3} r(t), \quad (21)$$

где  $r(t)$ , как и раньше, определяется первым приближением (строго радиальное движение), а масса гало ТМ вокруг третьей ПЧД нарастает по закону

$$M(z) = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3\pi} \right)^{2/3} \frac{1+z_{\text{eq}}}{1+z} M_{\text{ПВН}}. \quad (22)$$

Интегрируя дважды уравнение (21), получим  $r_t$  в зависимости от  $f$ :

$$r_{t,3} = \frac{12}{\pi^{2/3}} t_{\text{eq}}^2 r_{\text{eq}} \left( \frac{5\delta_{\text{eq}}}{3} \right)^{-2} \frac{GM_{\text{ПВН}}}{y_{ch}^3} \kappa(\delta_{\text{eq}}). \quad (23)$$

При сближении частиц ТМ с парой ПЧД начинает преобладать рассеяние гравитационным полем пары, поэтому радиус  $r_t$  ограничен снизу “радиусом влияния” пары ПЧД:

$$r_{\text{infl}} \simeq \frac{2GM_{\text{ПВН}}}{v_c^2} \simeq r_s(z) \frac{M_{\text{ПВН}}}{M(z)}. \quad (24)$$

Поскольку инфляционные возмущения, третья ПЧД и радиус влияния действуют независимо, и  $r_t$  не может превосходить  $r_s$ , то в итоговом расчете плотности необходимо положить

$$r_t = \min \left\{ r_s, \sqrt{r_{t,in}^2 + r_{t,3}^2 + r_{\text{infl}}^2} \right\}. \quad (25)$$

Этот масштаб показан на рис. 1, где произведено сглаживание  $1/r_t^2 = 1/r_s^2 + 1/(r_{t,in}^2 + r_{t,3}^2 + r_{\text{infl}}^2)$ . Это сглаживание не принципиально для оценочного расчета, так как при  $r_t \sim r_s$  точность приведенного выражения в любом случае мала, но сглаживание полезно при дальнейшем численном интегрировании уравнений движения пары.

Как видно на рис. 1, при  $f \leq 10^{-3}$  зависимость от  $f$  становится слабой. Это связано с тем, что при уменьшении  $f$  растет  $\bar{x}$ , третья ПЧД оказывается все дальше и дальше от рассматриваемой пары ПЧД, и ее гравитационное влияние становится значительно слабее влияния инфляционных возмущений. Граничное значение  $f \sim 10^{-3}$  можно было ожидать, так как  $f$  характеризует относительное возмущение плотности  $\sim M_{\text{ПВН}}/M$ , создаваемое ПЧД вблизи момента  $t_{\text{eq}}$ , а величина инфляционных возмущений в рассматриваемых масштабах в момент  $t_{\text{eq}}$  как раз составляет  $\sim 10^{-3}$ .

Подставляя найденный  $r_t$  в (7), в итоге найдем плотность ТМ в центре гало в каждый момент времени (см. рис. 2). Эта ТМ в центре будет воздействовать на пару ПЧД, отнимая у нее энергию.

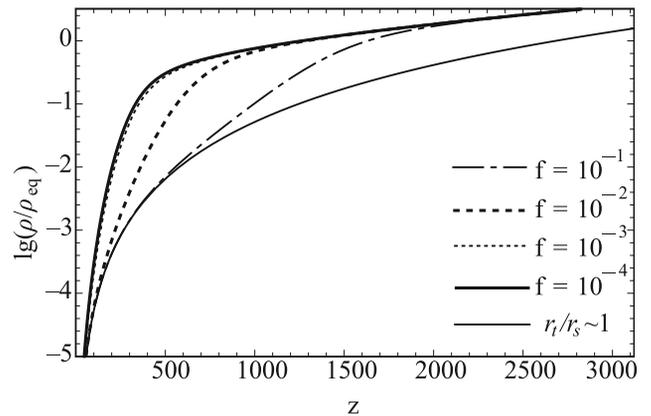


Рис. 2. Плотность в центре гало ТМ, окружающего пару ПЧД. Обозначения как на рис. 1. Нижняя сплошная кривая показывает плотность  $\rho_c(t) = (\pi/2) \bar{\rho}(t)$ .

### ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТЫ ПАРЫ ПЧД

В работе (Квинлан, 1996) с помощью численного эксперимента был получен закон эволюции большой полуоси пары черных дыр под влиянием налетающих с одинаковой скоростью звезд, а затем выполнено усреднение по скоростям в предположении их максвелловского распределения. В нашем случае необходимо использовать выражение для эволюции полуоси до усреднения, так как мы рассматриваем пролет через центр слоев ТМ с одной скоростью  $v_c$ . Таким образом, в рассматриваемом нами случае выражение из (Квинлан, 1996) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{a} \right) = H_1 \frac{G\rho}{v_c}, \quad (26)$$

где  $H_1 \simeq 20$ , а  $v_c$  рассчитывается согласно (4). Темп изменения эксцентриситета орбиты пары ПЧД (Квинлан, 1996)

$$\frac{de}{d \ln(1/a)} = K_1, \quad (27)$$

где величина  $K_1$  зависит от  $e$  (в частности, содержит в виде множителя положительную степень от  $1 - e^2$ ), и фитирующая формула для  $K_1$  приведена в (Квинлан, 1996). В рассматриваемом нами случае  $1 - e^2 \ll 1$ , поэтому с хорошей точностью изменением эксцентриситета под влиянием пролета слоев ТМ можно пренебречь.

В численном расчете мы разделяем процесс эволюции на две части: начальный этап, когда преобладает потеря энергии пары согласно (26), и последующий этап сжатия орбиты под действием потерь на гравитационное излучение. На первом этапе уравнение (26) интегрируется численно с использованием найденных в предшествующих разделах законах эволюции со временем величин  $\rho$  и  $v_c$ . Для рассмотрения второго этапа используется известное выражение для времени сжатия пары под влиянием гравитационного излучения

$$t_c = \frac{3c^5}{170G^3 M_{\text{BH}}^3} a^4 (1 - e^2)^{7/2}. \quad (28)$$

В это выражение в качестве  $a$  и  $e$  подставляются величины, найденные на момент окончания первого этапа эволюции. Затем сумма (28) и длительности первого этапа сравниваются с текущим моментом  $t_0$  и находится производная по времени вероятности слияния  $dP(t_0)/dt_0$ , которая используется в следующем разделе для расчета темпа гравитационных всплесков.

### ТЕМП СЛИЯНИЙ ПЧД

Следуя подходу (Накамура и др., 1997; Йока и др., 1998), выпишем основные соотношения, требуемые для расчета статистики слияния ПЧД в парах с учетом влияния гало ТМ. Обозначим через  $x$  и  $y$  сопутствующие расстояния между компонентами пары ПЧД и между центром масс пары и третьей ПЧД соответственно. Пара ПЧД формируется на радиационно-доминированной стадии при  $t < t_{\text{eq}}$ , и предполагаем, что масштабный фактор Вселенной  $s(t)$  нормирован как  $s(t_{\text{eq}}) = 1$ . Условие формирования гравитационно-связанной пары (Накамура и др., 1997; Йока и др., 1998)

$$\frac{M_{\text{BH}}}{x^3 s_m^3} \sim \rho_r, \quad (29)$$

где  $s_m = (1/f)(x/\bar{x})^3$  и  $\rho_r$  — плотность излучения. Согласно модели (Накамура и др., 1997; Йока и др., 1998), величина малой полуоси орбиты определяется приливным влиянием третьей ПЧД (вклад инфляционных возмущений мал, (Ерошенко, 2018)).

В результате, большая и малая полуоси пары (Накамура и др., 1997; Сазаки и др., 2016)

$$a = \alpha \frac{1}{f} \frac{x^4}{\bar{x}^3}, \quad b = \beta a \left( \frac{x}{y} \right)^3, \quad (30)$$

где  $\alpha \sim 1$  и  $\beta \sim 1$ . Эксцентриситет орбиты  $e = (1 - \beta^2 x^6/y^6)^{1/2}$ . Величины  $x$  и  $y$  имеют плоское распределение вероятностей

$$dP = \frac{18x^2 y^2}{\bar{x}^6} dx dy. \quad (31)$$

С помощью этого распределения можно найти вероятность слияния пары за время  $< t$ :

$$P(< t) = \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{37}{29} \left( \frac{t}{t_{\text{max}}} \right)^{3/7} - \frac{8}{29} \left( \frac{t}{t_{\text{max}}} \right)^{3/8} \right], \quad (32)$$

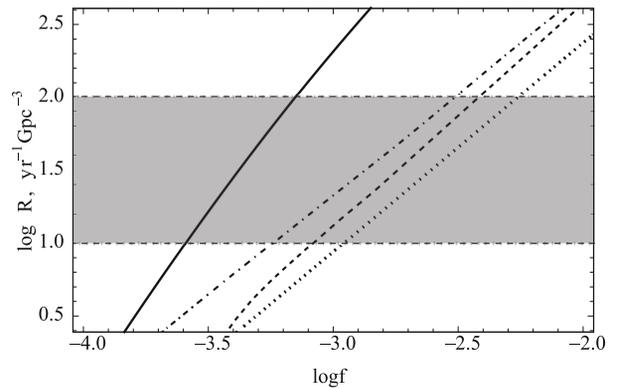
где

$$t_{\text{max}} = \frac{5c^5}{512G^3 M_{\text{BH}}^3} \frac{\alpha^4 \bar{x}^4}{\beta^{16/3} f^4}. \quad (33)$$

В итоге, вычисляется темп слияний пар

$$R = \frac{\rho_c \Omega_m f}{M_{\text{BH}}} \frac{dP(< t)}{dt} \Big|_{t=t_0}, \quad (34)$$

где  $\rho_c = 9.3 \times 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$  — критическая плотность,  $\Omega_m \approx 0.27$  — космологический параметр плотности ТМ. Темп слияний для решения (32) показан на рис. 3 точечной кривой.



**Рис. 3.** Темп гравитационных всплесков от слияний ПЧД в парах. Точечная кривая показывает темп без учета влияния гало ТМ на пару ПЧД. Сплошная кривая — с учетом гало. Серым цветом помечена область, допускаемая наблюдениями гравитационных всплесков. Штрихованная кривая показывает темп слияний, рассчитанный в работе (Хаясаки и др., 2016). Штрихпунктирная кривая получена в консервативном оценочном расчете.

В нашем расчете вместо (32) производится численное вычисление вероятности на основе (31). При этом на плоскости параметров  $x$  и  $y$  находится площадь той области, в которой время слияния пары меньше современного момента времени  $t_0$  с учетом двух этапов эволюции орбиты пары, описанных в предыдущем разделе. Результат расчета, приведенный на рис. 3, показывает, что учет несферичности сжатия гало усиливает темп слияния в несколько раз по сравнению с расчетами, в которых этот эффект не учитывается.

### КОНСЕРВАТИВНАЯ ОЦЕНКА ТЕМПА СЛИЯНИЙ

В данном разделе мы для сравнения приведем более консервативную оценку темпа слияний без учета одномерного сжатия слоя ТМ, но с учетом распределения частиц ТМ по угловым моментам, начиная от нулевой величины. Частицы с малым угловым моментом могут пролетать через орбиту пары ПЧД, вызывая потери энергии орбитального движения.

Обособляющийся от космологического расширения слой ТМ с массой  $dM$  содержит частицы с различными значениями углового момента, в том числе и с нулевым. Частицы ТМ, у которых угловой момент  $l^2 < l_{\text{crit}}^2 = 4aGM_{\text{BH}}$  находятся в конусе потерь и летят внутрь орбиты двойной ПЧД. Эти частицы после рассеяния на двойной вытягивают из нее энергию  $\delta E = \eta GM_{\text{BH}} dM f_{\text{lc}}/a$ , где  $\eta \sim 1$  и  $f_{\text{lc}}$  показывает какая доля частиц ТМ находится внутри конуса потерь. Тогда темп сжатия большой полуоси определяется следующим уравнением

$$\dot{a}_{\text{lc}} = -a f_{\text{lc}} \frac{\dot{M}_{\text{H}}}{M_{\text{BH}}}, \quad (35)$$

где  $\dot{M}_{\text{H}}$  — темп роста массы гало ТМ, который получается дифференцированием по времени выражения (22). По тем же соображениям, что и выше, мы пренебрегаем изменением эксцентриситета из-за взаимодействия с частицами ТМ.

Определим теперь  $f_{\text{lc}}$ . Будем считать, что распределение по угловому моменту имеет почти изотропную форму  $dp \propto dl$ , но обрезано сверху некоторым значением  $l_{\text{max}}$  (как в работе (Сикив и др., 1997)), который в нашем случае определяется приливными эффектами от инфляционных возмущений и третьей ПЧД. Поскольку наибольший прирост углового момента частицы ТМ происходит вблизи времени остановки расширения слоя ТМ, когда слой имеет максимальный радиус, то угловой момент, создаваемый инфляционными возмущениями, можно оценить как

$$l_{\text{t,in}} = \sqrt{\langle T_{ij} T_{ji} \rangle} r_s^2 t. \quad (36)$$

Угловой момент от третьей ПЧД будет

$$l_{\text{t,3}} \sim r_s F_t t = \frac{2r_s^2 GM_{\text{H}}}{(y_s(t))^3} t, \quad (37)$$

где  $F_t$  — приливная сила на единицу массы от третьей ПЧД (21), и  $y$  — расстояние до третьей ПЧД на момент  $t_{\text{eq}}$ . Напомним, что это расстояние фиксирует эксцентриситет двойной системы. Таким образом, полный максимальный угловой момент будет

$$l_{\text{max}} = \sqrt{l_{\text{t,3}}^2 + l_{\text{t,in}}^2}. \quad (38)$$

Отметим, что угловой момент частиц ТМ не может быть больше, чем момент на круговой орбите с радиусом  $r_s$ , т.е.  $l_{\text{circ}}^2 = GM_{\text{H}} r_s$ . Поэтому необходимо учитывать естественное ограничение  $l_{\text{max}} < l_{\text{circ}}$ , однако последнее справедливо только при относительно малых красных смещениях, где вклад частиц ТМ в эволюцию орбиты пренебрежимо мал.

Для вычисления темпа слияний необходимо найти время жизни двойной системы. Для этого решается следующая система уравнений:

$$\dot{a} = \dot{a}_{\text{gw}} + \dot{a}_{\text{lc}}, \quad (39)$$

$$\dot{e} = \dot{e}_{\text{gw}}, \quad (40)$$

где темп изменения большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  двойной системы при излучении гравитационных волн описываются уравнениями

$$\dot{a}_{\text{gw}} = -\frac{128}{5} \frac{G^3 M_{\text{BH}}^3}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \times \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right), \quad (41)$$

$$\dot{e}_{\text{gw}} = -\frac{608}{15} \frac{G^3 M_{\text{BH}}^3}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right). \quad (42)$$

Затем численно находится область в пространстве начальных значений  $a, e$  двойных систем, которые сливаются к моменту времени  $t$ , вычисляется двойной интеграл от выражения (32) по полученной области, и в итоге находится темп слияний ПЧД. Результат расчета показан на рис. 3 штрихпунктирной линией.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено влияние на эволюцию пары ПЧД потока ТМ, непрерывно пролетающего через центр гало ТМ. Частицы ТМ в гало, формирующемся вокруг пары ПЧД, приобретают угловой момент под влиянием приливных гравитационных сил. Источником этих сил являются соседние ПЧД, прежде всего, третья ближайшая ПЧД, и возмущения плотности инфляционного происхождения. Если угловой момент не равен

нулю, то частица ТМ пролетит не через центр гало, а на некотором минимальном расстоянии. Однако в распределении углового момента всегда есть направление с нулевым угловым моментом (Сикив и др., 1997). В этом направлении слой ТМ пролетает через центр, хотя он может в некоторой степени деформироваться. После нескольких колебаний слой рассеивается и переходит в состав сферически-симметричного распределения ТМ в гало. Мы вычисляем характерное сжатие слоя при его пролете через центр по сравнению с толщиной того же слоя в момент остановки его расширения. Также мы рассчитываем указанное характерное расстояние пролета частиц мимо центра гало. Это позволяет оценить плотность потока ТМ, непрерывно пролетающего через центр гало во время его формирования. Поток прекращается только тогда, когда прекращается рост гало и обособление новых слоев ТМ от космологического расширения.

Наши расчеты подтверждают вывод, полученный в (Пилипенко и др., 2022) методом численного моделирования, о том, что гало ТМ ускоряет слияние пар ПЧД. В отличие от (Пилипенко и др., 2022), в наших расчетах учтены пролеты через центр гало фоновой (не сильно кластеризованной) ТМ и показано, что эта компонента ТМ еще в несколько раз усиливает эффект влияния гало. В итоге, при учете только указанных эффектов, для объяснения данных наблюдений LIGO/Virgo/KAGRA оказывается достаточно доли ПЧД в составе ТМ  $f \sim (3 \div 7) \times 10^{-4}$ . Отметим, однако, что на полный темп гравитационных всплесков могут оказывать влияния дополнительные факторы, например, связанные с кластеризацией ПЧД (Стасенко, Белоцкий, 2023; Стасенко, 2024) и ведущие к уменьшению допустимых значений  $f$ . Учет всех эффектов может быть произведен в будущем в численном моделировании с высоким разрешением по массе, способным описать неоднородности темной материи как в масштабе больших гало ТМ, содержащих много ПЧД, так и в масштабах, которые соответствуют градиенту плотности в слоях ТМ, пролетающих через центр малых гало вокруг пар ПЧД.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-22-00013, <https://rscf.ru/project/23-22-00013/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Березин и др. (V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev), *Phys. Lett. B* **120**, 91 (1983).
- Березинский и др. (V. Berezinsky, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko), *Phys. Rev. D* **68**, 103003 (2003).
- Джедамзик (K. Jedamzik), *Phys. Rev. D* **55**, R5871(R) (1997).
- Докучаев, Ерошенко (V. I. Dokuchaev and Y. N. Eroshenko), *Письма в Астрон. журн.* **27**, 883 (2001).
- Докучаев, Ерошенко (K. Jedamzik), *Astron. Astrophys. Transact.* **22**, 727 (2003).
- Долгов, Силк (A. Dolgov and J. Silk), *Phys. Rev. D* **47**, 4244 (1993).
- Долгов и др. (A. D. Dolgov, A. G. Kuranov, N. A. Mitichkin, S. Porey, K. A. Postnov, O. S. Sazhina, and I. V. Simkin), *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12**, 017 (2020).
- Ерошенко (Yu. N. Eroshenko), *J. Phys.: Conf. Ser.* **1051**, 012010 (2018).
- Ерошенко (Yu. N. Eroshenko), *Письма в Астрон. журн.* **42**, 389 (2016a).
- Ерошенко (Yu. N. Eroshenko), *Astron. Lett.* **42**, 347 (2016b).
- Зельдович, Новиков (Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков), *Астрон. журн.* **43**, 758 (1966).
- Йока и др. (K. Ioka, T. Chiba, T. Tanaka, and T. Nakamura), *Phys. Rev. D* **58**, 063003 (1998).
- Карр, Кухнелль (B. Carr and F. Kuhnel), *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **70**, 355 (2020).
- Квинлан (G. D. Quinlan), *New Astron.* **1**, 35 (1996).
- Накамура и др. (T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka, and K. S. Thorne), *Astrophys. J.* **487**, L139 (1997).
- Пилипенко и др. (S. Pilipenko, M. Tkachev, and P. Ivanov), *Phys. Rev. D* **105**, 123504 (2022).
- Рубин и др. (S. G. Rubin, M. Yu. Khlopov, and A. S. Sakharov), *Grav. Cosmol.* **6**, 51 (2000).
- Рубин и др. (С. Г. Рубин, А. С. Сахаров, М. Ю. Хлопов), *ЖЭТФ* **119**, 1067 (2001).
- Сазаки и др. (M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, and S. Yokoyama), *Phys. Rev. Lett.* **117**, 061101 (2016).
- Сикив и др. (P. Sikivie, I. I. Tkachev, and Y. Wang), *Phys. Rev. D* **56**, 1863 (1997).
- Стасенко, Белоцкий (V. Stasenko and K. Belotsky), *MNRAS* **526**, 4308 (2023).
- Стасенко (V. Stasenko), arXiv:2403.11325.
- Ткачев и др. (M. V. Tkachev, S. V. Pilipenko, and G. Yepes), *MNRAS* **499**, 4854 (2020).
- Хаясаки и др. (K. Hayasaki, K. Takahashi, Y. Sendouda, and S. Nagataki), *Publ. Astron. Soc. Japan* **68**, 66 (2016).
- Хлопов, Полнарев (M. Yu. Khlopov and A. G. Polnarev), *Phys. Lett. B* **97**, 383 (1980).
- Хокинг (S. Hawking), *MNRAS* **15**, 75 (1971).