

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЙ ИМПЕДАНС

© 2023 г. Н. Г. Канев^{a, b, *}

^aАкустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия

^bМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул. 5, стр. 1, Москва, 105005 Россия

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 07.10.2022 г.

После доработки 11.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Решена задача об отражении плоской звуковой волны от жесткой поверхности, покрытой дипольными резонаторами. Показано, что такая поверхность реагирует на наклонно падающие волны, при этом найденная угловая зависимость коэффициента отражения не может быть получена для поверхностей, свойства которых описываются обычным импедансом. В связи с этим предложено понятие тангенциального импеданса — отношения касательного акустического воздействия на поверхность к ее нормальной скорости. Показано, что тангенциальный импеданс может быть как изотропным, так и анизотропным, т.е. величина последнего зависит от направления падающей волны. Соответствующие поверхности предложено называть неполяризованными и поляризованными. В некоторых случаях тангенциальный импеданс может быть полезен для макроскопического описания метаповерхностей со сложной структурой.

Ключевые слова: метаповерхность, дипольный резонатор, коэффициент отражения, поляризация, граничные условия

DOI: 10.31857/S0320791922600445, **EDN:** ITDVVH

ВВЕДЕНИЕ

Акустическими метаматериалами называют сложноустроенные структуры, обладающие необычными свойствами и состоящие из элементов малого волнового размера — метаатомов, связанных между собой определенным образом. Поверхность, покрытую метаатомами, называют метаповерхностью. Метаповерхности могут обладать высокими звукопоглощающими свойствами [1, 2], иногда даже большими по сравнению с обычными материалами [3]. Также резонансные структуры предлагается использовать для покрытия объектов [4, 5], чтобы делать их акустически невидимыми.

Согласно недавним обзорам по акустическим метаматериалам [6–8] в качестве метаатомов чаще всего используются резонаторы различного устройства: резонаторы Гельмгольца, четверть и полуволновые резонаторы [9, 10], мембранные элементы [11, 12]. Если метаатомы являются рассеивателями звука монопольного типа, то взаимодействие метаповерхностей со звуковой волной может быть описано привычными параметрами — импедансом или адмитансом [13].

Однако для создания метаматериалов исследователи почти не используют резонаторы, обладающие иным типом рассеяния звука, например,

дипольным, квадрупольным и т.д. Хотя можно ожидать, что метаповерхности из резонаторов немонопольного типа будут иметь другие свойства. Резонатор дипольного типа был предложен, а также теоретически и экспериментально изучен для гашения звука в узкой трубе в работе [14]. Впоследствии дипольный резонатор успешно применен для гашения звука, излучаемого из открытой трубы [15], а также вместе с монопольным резонатором для поглощения звука в трубах [16, 17]. Плоские решетки монопольных и дипольных резонаторов при достаточной плотности расположения образуют звукопоглощающую поверхность [18]. На рис. 1 приведены примеры устройства дипольных резонаторов. Простейшая физическая модель — это сфера на пружине (рис. 1а). Экспериментально исследована мембранная конструкция — трубка, короткая по сравнению с длиной волны, один конец которой затянут мембраной, а другой открыт (рис. 1б). На первой собственной частоте колебаний мембраны такой осциллятор имеет дипольную характеристику излучения. Если мембрана встроена в жесткий экран (рис. 1в), то второе собственное колебание является совокупностью двух противофазных монополей, центры которых находятся на расстоянии, равном половине размера мембраны. Другими

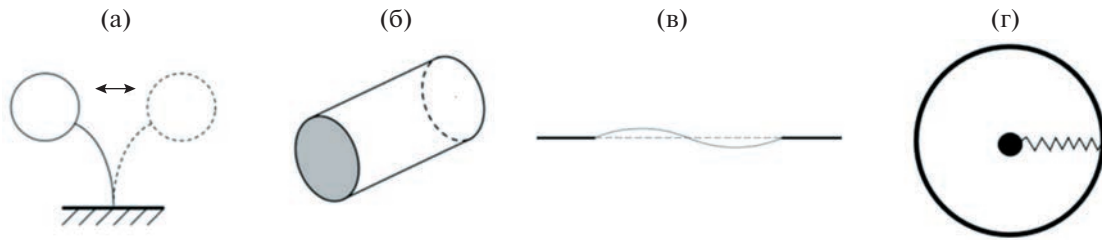


Рис. 1. Дипольные резонаторы.

словами, на второй моде мембрана является дипольным резонатором, момент которого направлен вдоль экрана. Метаатом типа “масса в массе” [19] также является дипольным резонатором (г).

В работе [20] исследовано распространение звука в узкой трубе, стенки которой покрыты дипольными резонаторами, и обнаружен эффект волноводной изоляции, но его параметры отличаются от аналогичного эффекта, полученного с помощью монопольных резонаторов [21]. Такие же отличия могут иметь место при использовании дипольных резонаторов в качестве метаатомов для метаповерхности. В развитие идеи, предложенной в [20], в настоящей работе рассмотрена плоская поверхность, покрытая дипольными резонаторами, и решена задача об отражении плоской гармонической волны от нее.

ПОВЕРХНОСТЬ С ДИПОЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

Традиционная физическая модель диполя — несжимаемая осциллирующая сфера [22]. Если на сферу действует сила, создаваемая, например, пружиной и возвращающая сферу к начальному положению, то такая система становится резонатором. Сфера, закрепленная к жесткой поверхности на стерженьке, совершающем изгибные колебания, является дипольным резонатором [14]. Далее рассмотрим два типа дипольных резонаторов.

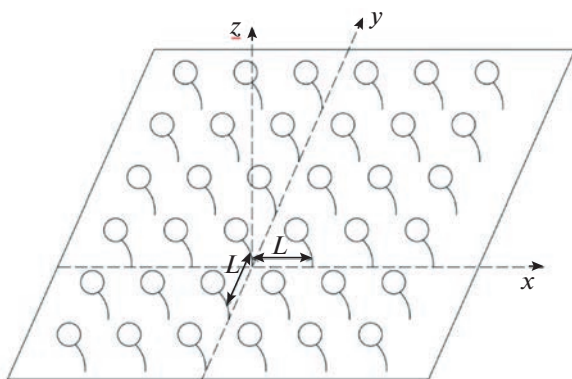


Рис. 2. Поверхность с дипольными резонаторами.

Резонаторы первого типа могут колебаться только вдоль одного направления. Если стерженек имеет поперечное сечение в виде вытянутого прямоугольника, то стерженек изгибается только вдоль короткой стороны; его колебаниями вдоль длинной стороны пренебрежем. Резонаторы второго типа могут осциллировать в любом направлении на некоторой плоскости. Очевидно, что это происходит, если стерженек имеет круглое поперечное сечение. Из физических соображений ясно, что резонаторы второго типа одинаково реагируют на акустические возмущения, пришедшие с разных направлений, а движение резонаторов первого типа зависит от направления распространения звуковой волны.

Рассмотрим квадратную решетку с пространственным периодом L сфер радиуса a (рис. 2), закрепленных стерженьками к абсолютно жесткой поверхности, лежащей в плоскости $z = 0$. Считая высоту стерженька малой по сравнению с длиной звуковой волны, будем полагать, что резонаторы расположены в точках с координатами $(Ls, Lq, 0)$. Пара целых чисел s и q определяют резонатор в решетке. Пусть на поверхность падает плоская гармоническая волна с круговой частотой ω и амплитудой звукового давления A . Отраженная от жесткой поверхности волна имеет такую же амплитуду. Опуская временной множитель $e^{-i\omega t}$, t — время, запишем поле звукового давления в полупространстве $z \geq 0$ без учета резонаторов в виде

$$P_0 = Ae^{i(\xi_0 x + \zeta_0 y - \kappa_0 z)} + Ae^{i(\xi_0 x + \zeta_0 y + \kappa_0 z)}. \quad (1)$$

Падающую волну можно также задать волновым числом $k^2 = (\omega/c)^2 = \xi_0^2 + \zeta_0^2 + \kappa_0^2$, углом падения θ и углом φ , характеризующим направление распространения волны (1). Введенные величины связаны между собой следующими соотношениями: $\xi_0 = k \sin \theta \cos \varphi$, $\zeta_0 = k \sin \theta \sin \varphi$, $\kappa_0 = k \cos \theta$. Кроме этого, удобно использовать вектор единичной длины $\tau_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, направление которого совпадает с направлением проекции волнового вектора падающей волны на поверхность.

Возмущение (1) вызывает движение резонаторов, которое охарактеризуем дипольными мо-

ментами $\mathbf{D}_{sq}$. Согласно теореме Блоха запишем $\mathbf{D}_{sq} = \mathbf{D}e^{i(\xi_0 s L + \zeta_0 q L)}$, здесь $\mathbf{D}$, $D = |\mathbf{D}|$ — дипольный момент резонатора с номером $s = q = 0$. Дифференцируя известное выражение для поля решетки монополей [23, 24], найдем поле, излучаемое дипольными резонаторами,

$$P_1 = -\frac{\omega \rho}{L^2} \mathbf{D} \nabla \left(\sum_{n,m} \frac{e^{i(\xi_n x + \zeta_m y + \kappa_{nm} z)}}{\kappa_{nm}} \right), \quad (2)$$

где ρ — плотность среды, n, m — целые числа, $\xi_n = \xi_0 + 2\pi n/L$, $\zeta_m = \zeta_0 + 2\pi m/L$, $\kappa_{nm} = \sqrt{k^2 - \xi_n^2 - \zeta_m^2}$. Поле (2) является суперпозицией плоских волн. Если период решетки менее половины длины звуковой волны, то однородным является только нулевой спектр $n = m = 0$. Далее будем рассматривать решетки, в которых расстояние между соседними резонаторами не превышает половину длины волны.

Полное звуковое поле равно $P = P_0 + P_1$. Для его расчета необходимо найти дипольный момент. Сделаем это для резонаторов первого типа. Зададим направление, вдоль которого резонатор совершает колебания, вектором единичной длины $\mathbf{t}$. Уравнение движения резонатора запишем, следуя [20, 22],

$$M\dot{v} = -K \int v dt - \gamma v - \mu(\dot{v} - \dot{u}) + \rho \Omega \dot{u}, \quad (3)$$

где v — скорость резонатора, u — скорость среды в окрестности резонатора вдоль вектора $\mathbf{t}$, M , Ω — масса и объем сферы, K — жесткость пружины, γ — коэффициент трения, μ — присоединенная масса.

Дипольный момент связан со скоростью сферы соотношением $\mathbf{D} = 2\pi a^3 \mathbf{v}$. Из (3) при гармонической зависимости получаем

$$D = -i\omega \frac{a(\mu + \rho\Omega)}{2Z} u, \quad (4)$$

$$Z = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\gamma - i\omega \left(M + \mu - \frac{K}{\omega^2} \right) \right], \quad (5)$$

где Z — импеданс резонатора.

Давление и скорость среды связаны соотношением $i\omega \rho \mathbf{u} = \nabla P$, скорость среды вдоль дипольного момента равна $u = \mathbf{t} \mathbf{u}$. Подставляя эти выражения в (4), находим дипольный момент резонатора, возникающий под воздействием поля (1),

$$D = -ika \frac{\mu + \rho\Omega}{\rho} \frac{2A}{Z + Z_r} \sin \theta \mathbf{t} \mathbf{t}_0, \quad (6)$$

$$Z_r = R + iX = \frac{a\omega(\mu + \rho\Omega)}{L^2} \times \left[\frac{k^2 \sin^2 \theta (\mathbf{t} \mathbf{t}_0)^2}{\kappa_0} - i \sum_{n,m \neq 0} \frac{(\xi_n \cos \varphi + \zeta_m \sin \varphi)^2}{\alpha_{nm}} \right], \quad (7)$$

где Z_r — импеданс излучения, $\alpha_{nm}^2 = -\kappa_{nm}^2$.

Подставляя (6) в (2), находим амплитуду нулевого спектра

$$P_1^{(0)} = -\frac{2R}{Z + Z_r} A. \quad (8)$$

Амплитуда отраженной волны равна $A + P_1^{(0)}$, что дает выражение для коэффициента отражения плоской волны от поверхности, покрытой резонаторами,

$$V = \frac{Z + iX - R}{Z + iX + R}. \quad (9)$$

Рассмотрим отражение звука на резонансной частоте, определяемой из уравнения $\text{Im}(Z + Z_r) = 0$. Введем безразмерный вещественный импеданс резонатора $Z' = \text{Re } ZL^2 / (ka\omega(\mu + \rho\Omega))$ и угол ψ между векторами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_0$. Тогда из (9) получаем зависимость коэффициента отражения от направления падающей волны

$$V = \frac{Z' \cos \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{Z' \cos \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \psi}. \quad (10)$$

Коэффициент отражения зависит, во-первых, от угла падения θ : при нормальном падении $V = 1$, поскольку движение диполей не возбуждается, и поверхность остается жесткой для падающей волны. Во-вторых, коэффициент отражения зависит от направления распространения волны относительно направления колебаний сфер. Если волна падает поперек дипольного момента, т.е. $\psi = \pi/2$, то $V = 1$ при любом угле падения θ .

Итак, рассмотренная поверхность реагирует на наклонное падение звуковой волны, при этом очевидно, что акустические свойства поверхности нельзя описать некоторым эквивалентным импедансом, определяемым как отношение давления около поверхности к ее нормальной скорости, поскольку такой импеданс дает зависимость коэффициента поглощения от угла падения, отличную от (10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ИМПЕДАНСА

Из практических соображений акустические свойства микроненормальных поверхностей описывают макроскопическими параметрами, например, некоторым эквивалентным импедансом [13]. Эквивалентность применения импеданса в каждом случае требует особых оговорок, в настоящей работе поверхности будем считать эквивалентными, если в дальнем поле они создают одинаковое поле, или, другими словами, они имеют одинаковый коэффициент отражения V .

Граничное условие на импедансной поверхности принято задавать в виде отношения

$$Z_{\perp} = -\frac{P}{v_z}, \quad (11)$$

где P — звуковое давление у поверхности, v_z — ее нормальная скорость. Знак “—” возникает в (11), поскольку волна, падающая из полупространства $z > 0$ на поверхность $z = 0$, оказывает воздействие на поверхность в отрицательном направлении оси z . Это воздействие приложено по нормали к поверхности и вызывает ее движение, поэтому естественно величине $Z_{\perp}$ дать уточненное название — нормальный импеданс.

Коэффициент отражения плоской волны, задаваемой первым слагаемым в правой части (1), от поверхности $z = 0$, на которой выполняется граничное условие (11), хорошо известен:

$$V = \frac{Z_{\perp} \cos \theta - \rho c}{Z_{\perp} \cos \theta + \rho c}. \quad (12)$$

Теперь зададим граничное условие на поверхности $z = 0$ в виде

$$Z_{\parallel} = -\frac{\Delta_{\tau} P}{v_z}, \quad (13)$$

где τ — некоторый известный вектор единичной длины, лежащий в плоскости xy , $\Delta_{\tau} = \tau_x^2 \partial^2 / \partial x^2 + \tau_y^2 \partial^2 / \partial y^2$.

Коэффициент отражения от такой поверхности равен

$$V = \frac{Z_{\parallel} \cos \theta - \rho c k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{Z_{\parallel} \cos \theta + \rho c k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi}, \quad (14)$$

где ψ — угол между векторами τ и τ_0 . Нетрудно заметить, что выражения (10) и (14) имеют одинаковую зависимость от углов θ и ψ и совпадают, если $Z_{\parallel} = \rho c k^2 Z'$. В оговоренном смысле граничное условие (13) является эквивалентной заменой поверхности с решеткой дипольных резонаторов.

Таким образом, мы можем охарактеризовать поверхность с достаточно сложной микроскопической структурой (рис. 2) простым граничным условием (13), которое в физическом смысле является отношением воздействия, касательного к плоскости, к ее нормальной скорости. Поэтому назовем величину $Z_{\parallel}$ тангенциальным импедансом, а поверхность с граничным условием (13) тангенциально реагирующей.

Проведем краткое сравнение выражений (12) и (14). При нормальном падении коэффициент отражения от тангенциально реагирующей поверхности всегда равен +1, а при отражении от нормально реагирующей поверхности его абсолютное значение меньше 1, если $\text{Re} Z_{\perp} \neq 0$. При

скользящем падении $\theta \rightarrow \pi/2$ коэффициент отражения от поверхностей обоих типов $V \rightarrow -1$, т.е. поверхности ведут себя как мягкая граница. Для полного поглощения падающей волны мнимые части импедансов $Z_{\perp}$ и $Z_{\parallel}$ должны быть равны нулю, при этом действительная часть нормального импеданса должна быть не менее ρc . Но для любого значения действительной части тангенциального импеданса существуют углы (за исключением $\theta = 0$ и $\psi = \pi/2$), при которых происходит полное поглощение падающей волны.

ПОЛЯРИЗОВАННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Для характеристики поверхности граничным условием (13) необходимо знать значение параметра $Z_{\parallel}$ и направление τ . В случае резонаторной поверхности (рис. 2) вектор τ задает направление дипольного момента резонаторов. Зафиксированная ориентация диполей создает выделенное направление, определяющее анизотропные отражающие свойства поверхности. По аналогии с электродинамикой, называющей среды, в которых электрический дипольный момент по разным причинам упорядочен, поляризованными, рассматриваемую поверхность можно назвать поляризованной, а τ — вектором поляризации. Поверхность тем лучше взаимодействует с падающей волной, чем ближе направление ее распространения к вектору поляризации.

Рассмотренная поверхность с резонаторами поляризована, поскольку устройство резонатора таково, что он может колебаться только в одном направлении. Резонаторы второго типа — с круглым сечением стерженька — одинаково реагируют на воздействие с любых направлений. В первом приближении можно считать, что векторы τ и τ_0 совпадают [23], поэтому $\psi = 0$, а коэффициент отражения от поверхности с учетом этого определяется формулой (10). У такой поверхности нет выделенного направления τ , ее назовем неполяризованной.

Граничное условие для неполяризованной тангенциально реагирующей поверхности легко получаем из (13):

$$Z_{\parallel} = -\frac{\Delta_{xy} P}{v_z}, \quad (15)$$

где $\Delta_{xy} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — касательный лапласиан.

Коэффициент отражения от неполяризованной поверхности определяется выражением (14), в котором $\psi = 0$. На рис. 3 приведен расчет зависимости коэффициента отражения от угла падения для нормально и тангенциально реагирующих поверхностей с вещественными импедансами $Z_{\perp} / (\rho c) = Z_{\parallel} / (\rho c k^2) = 2$.

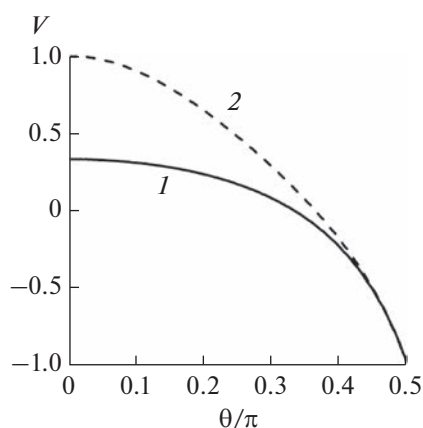


Рис. 3. Коэффициент отражения от нормально (1) и тангенциально (2) реагирующих поверхностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена граница — жесткая поверхность, покрытая дипольными резонаторами малого волнового размера, расположенными на малом волновом расстоянии друг от друга — макроскопические свойства которой не могут быть описаны нормальным импедансом, т.е. отношением давления у границы к ее нормальной скорости. Показано, что движение поверхности вызывает касательное воздействие. Для описания акустических свойств таких поверхностей предложено понятие тангенциального импеданса — отношение второй производной давления по направлению вдоль поверхности к ее нормальной скорости.

Отметим, что определения тангенциального импеданса (13) и (15) не являются универсальными. Выбор параметра, характеризующего воздействие среды на метаповерхность и задаваемого числителем в граничных условиях (13) и (15), зависит от структуры поверхности. Если, например, поверхность покрыта решеткой квадрупольных резонаторов, то воздействие на поверхность будет пропорционально четвертой производной давления по координатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li J., Wang W., Xie Y., Popa B.-I., Cummer S.A. A sound absorbing metasurface with coupled resonators // *Appl. Phys. Lett.* 2016. V. 109. P. 091098.
2. Dogra S., Gupta A. Design, manufacturing, and acoustical analysis of a Helmholtz resonator-based metamaterial plate // *Acoustics*. 2021. V. 3. P. 630–641.
3. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
4. Wang Y., Cheng Y., Liu X. Ultrathin acoustic cloaking by a conformal hybrid metasurface // *Scientific Reports*. 2019. V. 9. P. 12700.
5. Esfahlani H., Karkar S., Lissek H., Mosig J.R. Acoustic carpet cloak based on an ultrathin metasurface // *Phys. Rev. B*. 2016. V. 94. P. 014302.
6. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (Обзор) // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.
7. Li J., Wen X., Sheng P. Acoustic metamaterials // *J. Appl. Phys.* 2021. V. 129. 171103.
8. Du Y., Wu W., Chen W., Lin Y., Ghi Q. Control the structure to optimize the performance of sound absorption of acoustic metamaterial: A review // *AIP Advances*. 2021. V. 11. P. 060701.
9. Wang H., Mao Q. Development and investigation of fully ventilated deep subwavelength absorbers // *Symmetry*. 2021. V. 13. P. 1835.
10. Li Y., Liang B., Gu Z.M., Zou X.Y., Cheng J.C. Reflected wavefront manipulation based on ultrathin planar acoustic metasurfaces // *Sci. Rep.* 2013. V. 3. 02546.
11. Yang Z., Mei J., Yang M., Chan N.H., Sheng P. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. 204301.
12. Lu Z., Yu X., Lau S.-K., Khoo B.C., Cui F. Membrane-type acoustic metamaterial with eccentric masses for broadband sound isolation // *Appl. Acous.* 2020. V. 157. 107003.
13. Schwan L., Umnova O., Boutin C. Sound absorption and reflection from a resonant metasurface: Homogenisation model with experimental validation // *Wave Motion*. 2017. V. 72. P. 154–172.
14. Канев Н.Г., Миронов М.А. Дипольный резонансный рассеиватель звука // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 3. С. 372–375.
15. Канев Н.Г., Миронов М.А. Дипольный резонансный глушитель на выходе узкой трубы // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 3. С. 335–339.
16. Лапин А.Д. Резонатор монопольно-дипольного типа в узкой трубе // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 6. С. 855–857.
17. Канев Н.Г., Миронов М.А. Монопольно-дипольный резонансный поглотитель в узком волноводе // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. № 1. С. 111–116.
18. Лапин А.Д., Миронов М.А. Поглощение звука плоской решеткой монопольно-дипольных рассеивателей // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 4. С. 497–501.
19. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные волны в метаматериале, задаваемом как цепочка “масса-в-массе” // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 5. С. 475–478.
20. Mironov M. The dipole resonator and dipole waveguide insulator in dense liquid medium // *Acoustics*. 2022. V. 4. P. 469–478.
21. Исакович М.А. Теория волноводной изоляции волн в длинных линиях // *Труды Всесоюзной конференции “Распространение и дифракция волн”*, Ереван. 1973. Т. 60. № 2. С. 145–151.
22. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
23. Лапин А.Д., Миронов М.А. Изоляция звукового поля плоской решеткой малых рассеивателей // *Труды XI сессии РАО*. 2001. Т. 1. С. 192–194.
24. Канев Н.Г. Поглощение звука решеткой активных резонаторов вблизи импедансной поверхности // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 744–747.