

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ФРОНТОМ И СИНГУЛЯРНОСТЬЮ ПРОФИЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. В. А. Гусев<sup>а, с, \*</sup>, О. В. Руденко<sup>а, b, с, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

<sup>b</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

<sup>с</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

\*e-mail: vgusev@bk.ru

\*\*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 09.12.2022 г.

После доработки 09.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Описаны процессы взаимодействия короткого импульса с тремя типами волновых профилей в нелинейной диссипативной среде: стационарным ударным фронтом конечной ширины, нестационарным формирующимся фронтом, а также со “стационарной” волной, профиль которой содержит сингулярность. Используются точные решения уравнения Бюргерса, описывающие эти взаимодействия, а также свойства симметрии этого уравнения.

**Ключевые слова:** ударный фронт, профиль волны, сингулярность, импульсное возмущение, стационарная волна, взаимодействие

DOI: 10.31857/S032079192360004X, EDN: ITYQEZ

### ВВЕДЕНИЕ

Процессы взаимодействия возмущений с фронтом нелинейной волны в диссипативной среде, описываемые уравнениями типа Бюргерса, рассматривались в статьях [1–4].

В работе [1] рассчитано взаимодействие малых детерминированных и случайных возмущений с гладкими участками профиля пилообразной волны. Для неплоских волн в неоднородной среде в приближении нелинейной геометрической акустики справедлива модель обобщенного уравнения Бюргерса. Исходя из этой модели, получено эволюционное уравнение для регулярных возмущений и уравнение для трансформации корреляционной функции шумовых возмущений. Найдены аналитические решения при произвольной форме исходного сигнала или корреляционной функции. Примеры показывают устойчивость формы “пилы” при малом возмущении ее прямолинейного участка.

В работе [2] рассмотрены возмущения, локализованные на ударном фронте. Предложена простая математическая модель фронта переменной крутизны в диссипативной среде. Получены количественные характеристики процесса взаимодействия формирующегося ударного фронта с малыми возмущениями различного типа. По-

дробный обзор волновых взаимодействий приведен в статье [3].

В статье [4] изложены результаты детальных исследований в продолжение работ [1, 2]. Рассмотрены взаимодействия шумовых и регулярных сигналов с фронтом, крутизна которого растет или уменьшается из-за искажения профиля интенсивной волны накачки. На переднем фронте происходит увеличение амплитуды сигнала и уменьшение его временного масштаба. На заднем фронте — уменьшение амплитуды, увеличение масштаба и замедление темпа эволюции. Показано, что из-за конкуренции усиления на ударном фронте и высокочастотного затухания зависимость интенсивности шума от расстояния немонотонна; на больших расстояниях интенсивность стремится к нулю, а время корреляции — к конечному значению.

Однако взаимодействия возмущений с профилем нелинейной волны в целом (содержащей ударный фронт и гладкие участки) изучены не до конца. Наиболее интересно рассмотреть эти взаимодействия, не считая возмущения слабыми. Наличие точно решаемого уравнения Бюргерса открывает такую возможность.

# 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА С ФРОНТОМ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ

Мы будем анализировать процессы, основываясь на модели уравнения Бюргера, описывающего распространение нелинейных недиспергирующих волн в диссипативной среде:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

Уравнение записано в стандартных безразмерных обозначениях. Если иметь в виду распространение в среде акустических волн давления  $p$  конечной амплитуды  $p_0$ , физический смысл нормированных переменных и констант будет следующим:

$$V = \frac{p}{p_0}, \quad \theta = \omega \tau, \quad z = \frac{x}{l_{SH}}, \quad (2)$$

$$l_{SH} = \frac{c^3 \rho}{\varepsilon \omega p_0}, \quad l_{DIS} = \frac{2c^3 \rho}{b \omega^2}, \quad \Gamma = \frac{l_{SH}}{l_{DIS}}.$$

Здесь  $\omega$  — характерная частота волны или обратная длительность импульсного сигнала,  $\tau = t - x/c$  — время в системе координат, движущейся вместе с волной в направлении оси  $x$  со скоростью звука  $c$ . Параметры среды: плотность  $\rho$ , коэффициенты нелинейности и диссипации —  $\varepsilon$  и  $b$ . Посредством  $l_{SH}$ ,  $l_{DIS}$  обозначены характерные длины нелинейности (образования разрыва в исходном гладком профиле волны) и диссипации (линейного поглощения волны средой). Отношение  $\Gamma$  этих длин известно как обратное акустическое число Рейнольдса—Гольдберга [5].

Стационарное решение уравнения (1) для волны, бегущей со скоростью звука и не изменяющей своей формы при распространении, имеет вид:

$$V = \text{th} \left( \frac{\theta}{2\Gamma} \right). \quad (3)$$

Выпишем общее решение уравнения (1), описывающее профиль исходной волны произвольной формы:

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U, \quad U(z, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\theta') G(z, \theta - \theta') d\theta'. \quad (4)$$

Здесь функция Грина:

$$G(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Gamma z}} \exp \left( -\frac{\theta^2}{4\Gamma z} \right). \quad (5)$$

Условия на границе среды для вспомогательной функции  $U$  и искомой функции  $V$  обозначены так:

$$U_0 = \exp \left[ \frac{1}{2\Gamma} \int_{-\infty}^{\theta'} V_0(\theta'') d\theta'' \right], \quad V_0(\theta) = V(z=0, \theta). \quad (6)$$

“Наложим” на стационарную волну (3) короткий импульс в виде дельта-функции. Условия (6) на границе примут вид:

$$V_0 = \text{th} \left( \frac{\theta}{2\Gamma} \right) + \alpha \delta(\theta - \theta_1), \quad (7)$$

$$U_0 = \text{ch} \left( \frac{\theta}{2\Gamma} \right) \exp \left[ \frac{\alpha}{2\Gamma} H(\theta - \theta_1) \right].$$

Здесь  $H$  — единичная функция Хевисайда, равная нулю при отрицательных значениях аргумента и единице — при положительных значениях. Центр импульса смещен в положение  $\theta = \theta_1$ .

Заметим, что при отсутствии стационарной “ступеньки” изолированная  $\delta$ -функция эволюционирует в соответствии с автомодельным решением [6]

$$V = 4\Gamma \beta \frac{\exp(-\xi^2)}{\sqrt{4\pi\Gamma z}} [1 + \beta \text{erf}(\xi)]^{-1}, \quad (8)$$

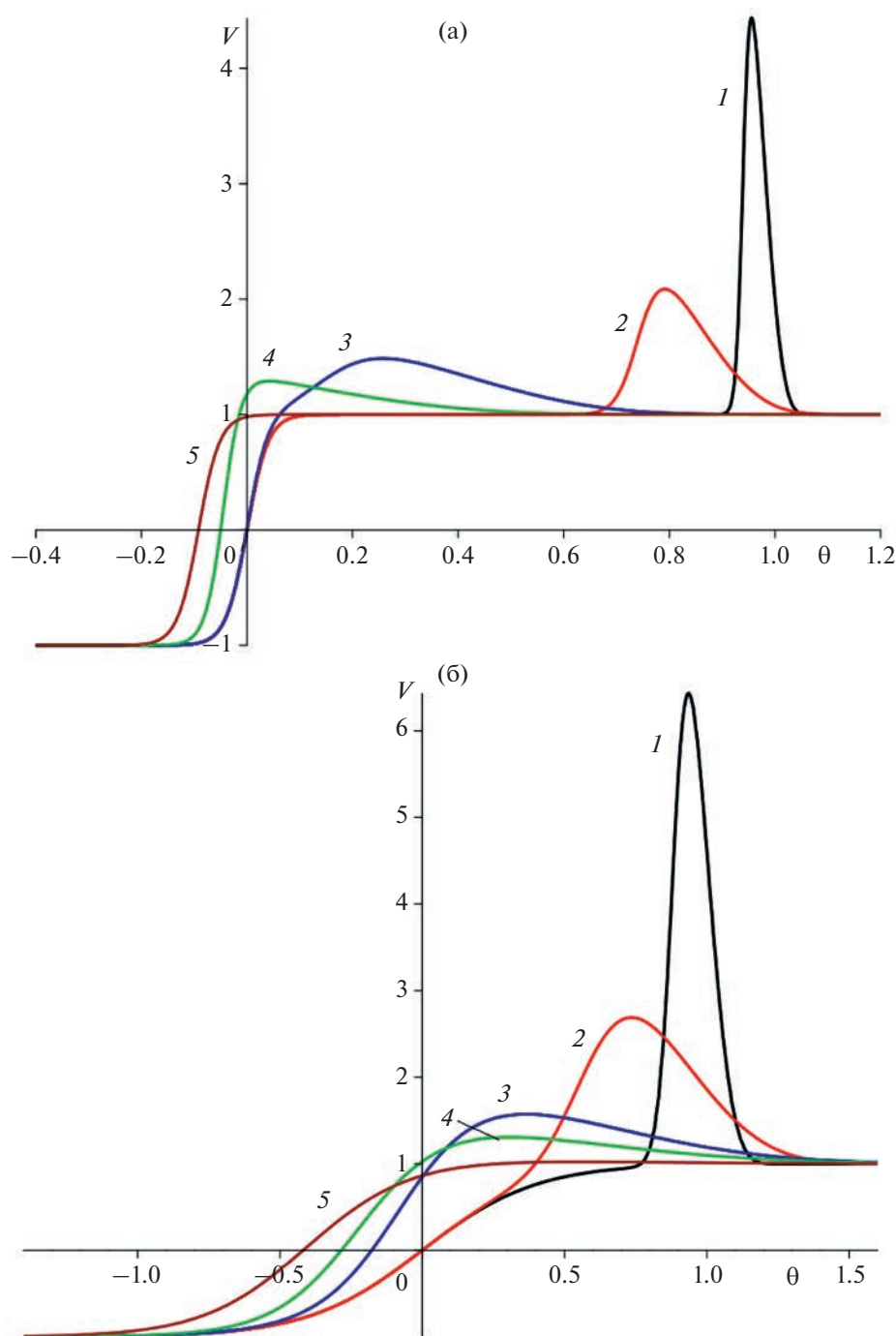
$$\xi = \frac{\theta}{\sqrt{4\Gamma z}}, \quad \beta = \text{th} \left( \frac{\alpha}{4\Gamma} \right).$$

Здесь  $\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-\xi'^2) d\xi'$  — функция ошибок. Уже на малых расстояниях  $\delta$ -импульс положительной полярности приобретает несимметричную колоколообразную форму. Его передний фронт круче заднего. Асимметрия сильнее выражена при значениях  $\beta = \text{th}(\alpha/4\Gamma)$ , близких к единице. С увеличением пройденного расстояния длительность импульса растет, а его пиковое значение уменьшается.

Взаимодействие короткого импульса и стационарной волны с граничным условием (7) описывается выражением

$$U = \text{ch} \left( \frac{\theta}{2\Gamma} \right) + \frac{\beta}{2} \left[ \exp \left( \frac{\theta}{2\Gamma} \right) \text{erf} \left( \frac{\theta - \theta_1 + z}{\sqrt{4\Gamma z}} \right) + \exp \left( -\frac{\theta}{2\Gamma} \right) \text{erf} \left( \frac{\theta - \theta_1 - z}{\sqrt{4\Gamma z}} \right) \right]. \quad (9)$$

Процесс изображен на рис. 1а, 1б. Для рис. 1а параметры выбраны такими:  $\beta = 0.98$ ,  $\Gamma = 0.02$ ,  $\theta_1 = 1$ . Расстояние принято равным  $z = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 2$  для кривых 1–5 соответственно. Кривая 1 близка по форме к исходному импульсному возмущению, расположенному на удалении от фронта. Это возмущение бежит со сверхзвуковой скоростью, быстрее стационарной волны, и на некотором расстоянии “догоняет” фронт. При этом импульс уширяется, уменьшается по величине и сливается с фронтом. Кривые 3 и 4 показывают, что в процессе слияния образуется ударный фронт со скачком давления, увеличенным по

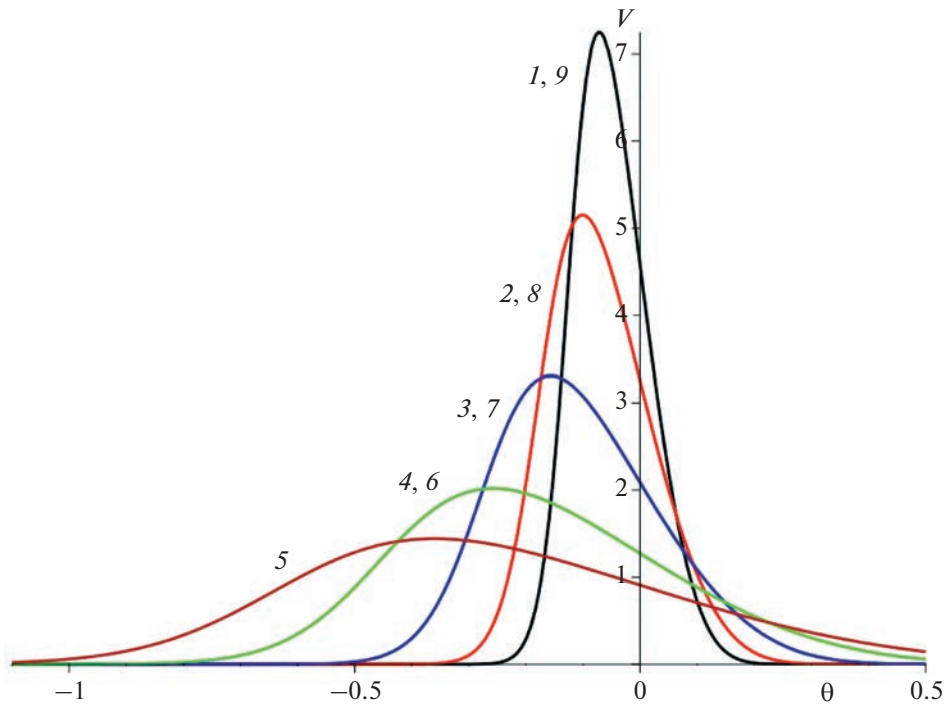


**Рис. 1.** Взаимодействие короткого импульса и стационарного фронта: (а) –  $\beta = 0.98$ ,  $\Gamma = 0.02$ , (б) –  $\beta = 0.8$ ,  $\Gamma = 0.2$ . Параметр  $\theta_1 = 1$ . Кривые 1–5 соответствуют расстояниям  $z = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 2$ .

сравнению со стационарным значением. Это приводит к смещению фронта вперед по сравнению с исходным положением. После полного поглощения импульса волна снова принимает форму стационарного решения (кривая 5), а фронт останавливается и не сдвигается при дальнейшем распространении. Для рис. 1б параметры выбраны такими:  $\beta = 0.8$ ,  $\Gamma = 0.2$ ,  $\theta_1 = 1$ . Расстояние

принято равным  $z = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 2$  для кривых 1–5. Здесь детали процесса слияния видны более четко. Итоговая кривая 5 также представляет собой стационарное решение со сдвинутым вперед в результате взаимодействия фронтом.

Отметим дополнительно следующие особенности поведения решения. При увеличении параметра  $\Gamma$ , соответствующего уширению фронта



**Рис. 2.** Взаимодействие короткого импульса и формирующегося фронта; трансформация профиля импульса (12) без учета линейного фронта. Кривые 1–9 соответствуют расстояниям  $z = 0.01; 0.02; 0.05; 0.15; 0.5; 0.85; 0.95; 0.98; 0.99$ . Параметры  $\beta = 0.98$ ,  $\Gamma = 0.02$ ,  $z_0 = 1$ .

стационарного решения, “амплитуда” импульса на малых расстояниях становится больше. Однако это сопровождается более быстрым процессом рассасывания импульса, и его полное поглощение происходит практически на одном и том же расстоянии при разных значениях  $\Gamma$ . Уменьшение параметра  $\beta$  приводит к уменьшению “амплитуды” импульса и, как следствие, уменьшению сдвига ударного фронта в итоговом профиле.

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА С ФОРМИРУЮЩИМСЯ ФРОНТОМ

В процессе формирования ударного фронта импульс претерпевает более сложную эволюцию. Как известно, простейшее точное решение уравнения Бюргера описывает прямолинейный участок профиля с переменной крутизной. При формировании фронта крутизна увеличивается; решение в этом случае имеет вид:

$$V(z, \theta) = \frac{\theta}{z_0 - z}. \quad (10)$$

Исходный наклон прямой (10) определяется константой  $z_0$ . При распространении наклон увеличивается, и при  $z \rightarrow z_0$  прямая стремится принять “вертикальное” положение. Разумеется, диссипация должна ограничить крутизну фронта зна-

чением  $2\Gamma$  (см. (3)); это произойдет на расстояниях, меньших  $z_0$ .

Чтобы рассчитать взаимодействие импульса с таким фронтом, зададим вместо (7) граничное условие следующего вида:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\theta}{z_0} + \alpha \delta(\theta), \\ U_0 &= \exp\left(\frac{\theta^2}{4\Gamma}\right) \exp\left[\frac{\alpha}{2\Gamma z_0} H(\theta)\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

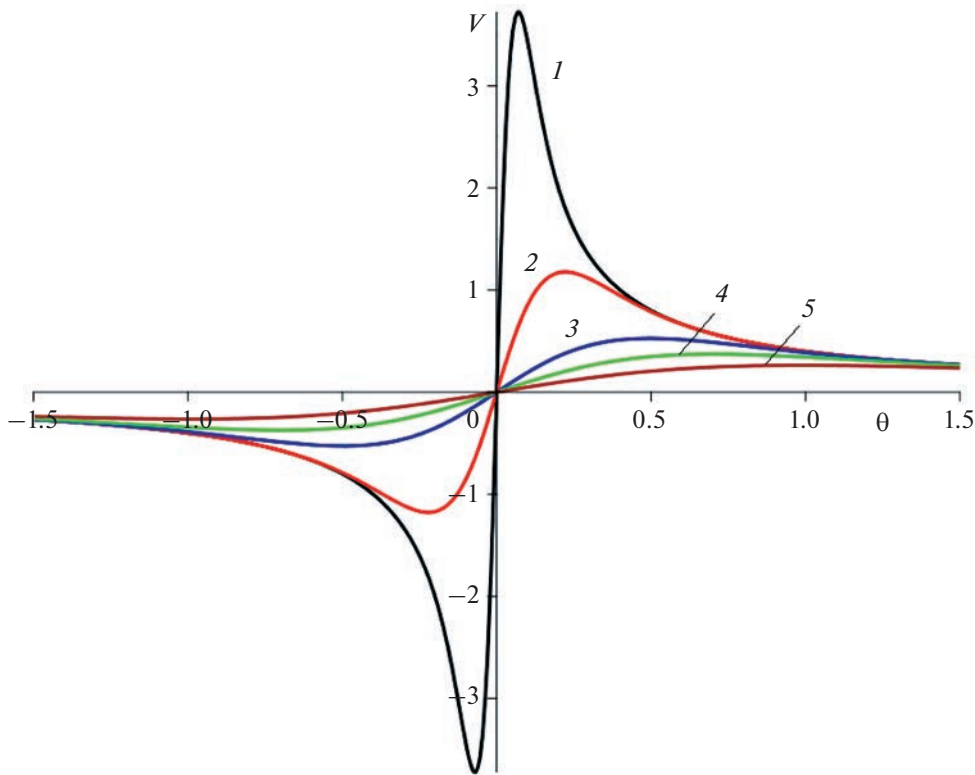
Решая уравнение для  $U$  и возвращаясь к  $V$ , получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\theta}{z_0 - z} + \\ &+ 4\Gamma\beta \frac{\exp\left(-\frac{\theta^2}{4\Gamma f(z)}\right)}{\sqrt{4\pi\Gamma f(z)}} \left[1 + \beta \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{\sqrt{4\Gamma f(z)}}\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$f(z) = z\left(1 - \frac{z}{z_0}\right). \quad (13)$$

Сравним второе слагаемое в формуле (12) с формулой (8), описывающей эволюцию отдельного, не взаимодействующего с фронтом,  $\delta$ -импульса. Видим, что различие состоит в том, что в



**Рис. 3.** Процесс разрушения стационарного решения с сингулярностью (при  $\gamma = 0$ ). Кривые 1–5 соответствуют расстояниям  $z = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 2$ . Параметр  $\Gamma = 0.2$ .

(12) вместо расстояния  $z$  присутствует приведенное расстояние (13), определяющее как длительность импульса во времени, так и его пиковое значение. Трансформация профиля импульса (12) без учета линейного фронта приведена на рис. 2 при следующих значениях параметров:  $\beta = 0.98$ ,  $\Gamma = 0.02$ ,  $z_0 = 1$ . Кривые 1–9 соответствуют расстояниям  $z = 0.01; 0.02; 0.05; 0.15; 0.5; 0.85; 0.95; 0.98; 0.99$ . Длительность при  $z = 0$  равнялась нулю (пиковое значение было бесконечным). Затем импульс уширялся, а пиковое значение уменьшалось из-за диссипативных эффектов (кривые 1–4). Максимальной длительности  $\theta_* = \sqrt{\Gamma z_0}$  (минимальной “амплитуды”) импульс достигает на расстоянии  $z = z_0/2$  (кривая 5). В области  $z_0/2 < z < z_0$  идет обратный процесс (кривые 6–9 повторяют соответствующие кривые 1–4, но уже для других расстояний). Импульс начинает сужаться из-за взаимодействия с формирующимся фронтом и при  $z \rightarrow z_0$  вновь превращается в дельта-функцию. Эта тенденция отмечалась в работах [1–4]. Очевидно, что на сглаживающемся фронте  $V(z, \theta) = -\theta/z$ , крутизна которого уменьшается, будет происходить монотонный процесс увеличения длительности импульса и уменьшения его “амплитуды”, поскольку взаимодействие

с фронтом и диссипация в этом случае действуют в одном направлении.

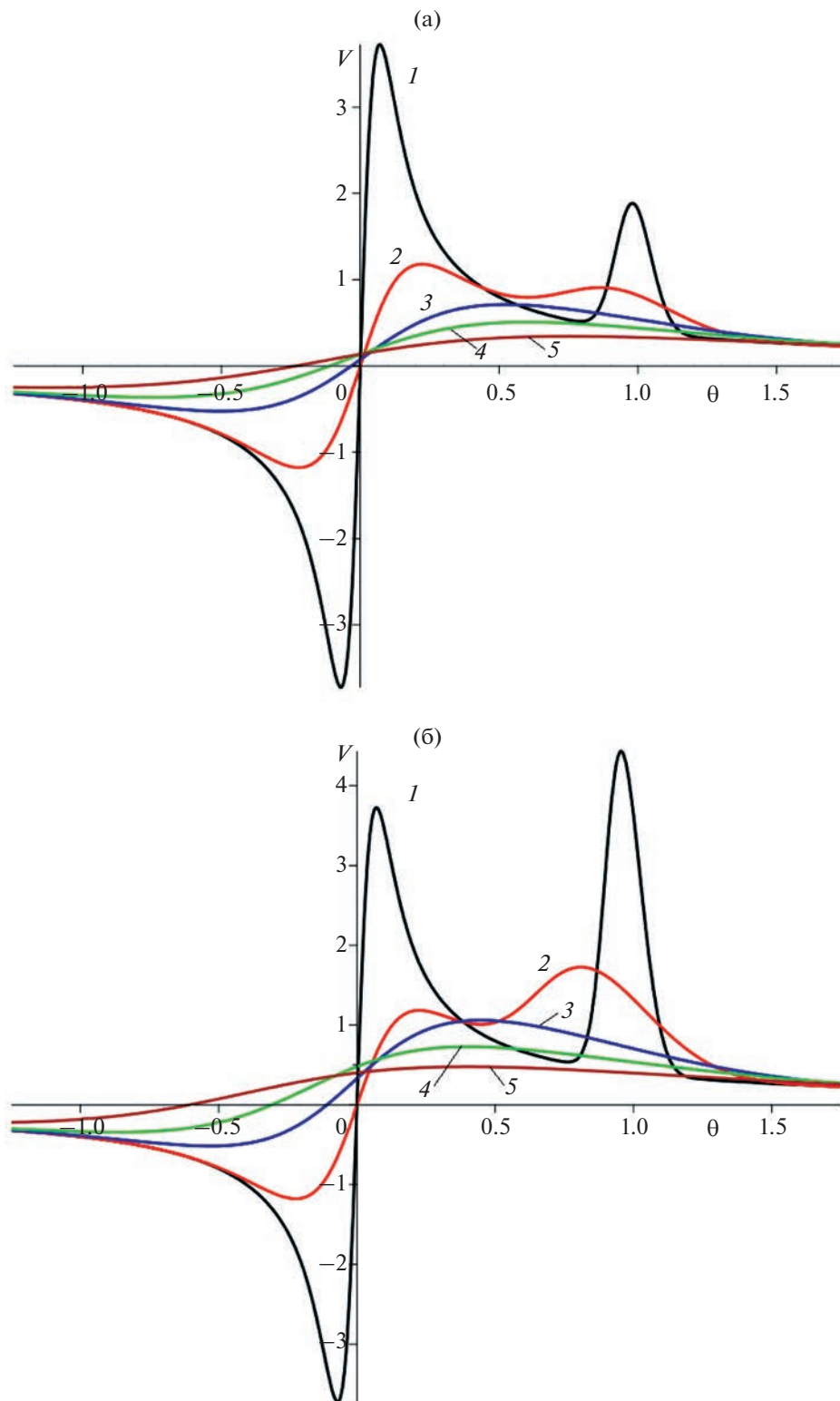
В заключение этого раздела обратим внимание на известное свойство решений уравнения Бюргера, основанное на его инвариантности относительно проективного преобразования [7]

$$V_2 = \frac{\theta}{z_0 - z} + \frac{1}{1 - z/z_0} V_1 \left( \frac{z}{1 - z/z_0}, \frac{\theta}{1 - z/z_0} \right). \quad (14)$$

Его смысл состоит в следующем: если функция  $V = V_1(z, \theta)$  есть точное решение уравнения Бюргера, то точным решением будет также функция  $V = V_2(z, \theta)$ , определяемая формулой (14). Используя (14) применительно к решению (8), получим сразу решение (12).

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСА С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ ПРОФИЛЯ ВОЛНЫ

Как известно, уравнение Бюргера имеет точные решения с особенностями. Такие решения, на первый взгляд, лишены физического смысла. Простейшим из них является функция  $V = 2\Gamma/\theta$ . Поскольку здесь нет зависимости от расстояния, это решение, казалось бы, должно описывать стационарную волну. Однако, как показано в работе [8], решение с особенностью стационарным быть



**Рис. 4.** Процесс взаимодействия импульса с сингулярностью при (а) —  $\gamma = 0.4$ , (б) —  $\gamma = 2$  и (в) —  $\gamma = 10^9$ . Параметры  $\Gamma = 0.2$ ,  $\theta_1 = 1$ .

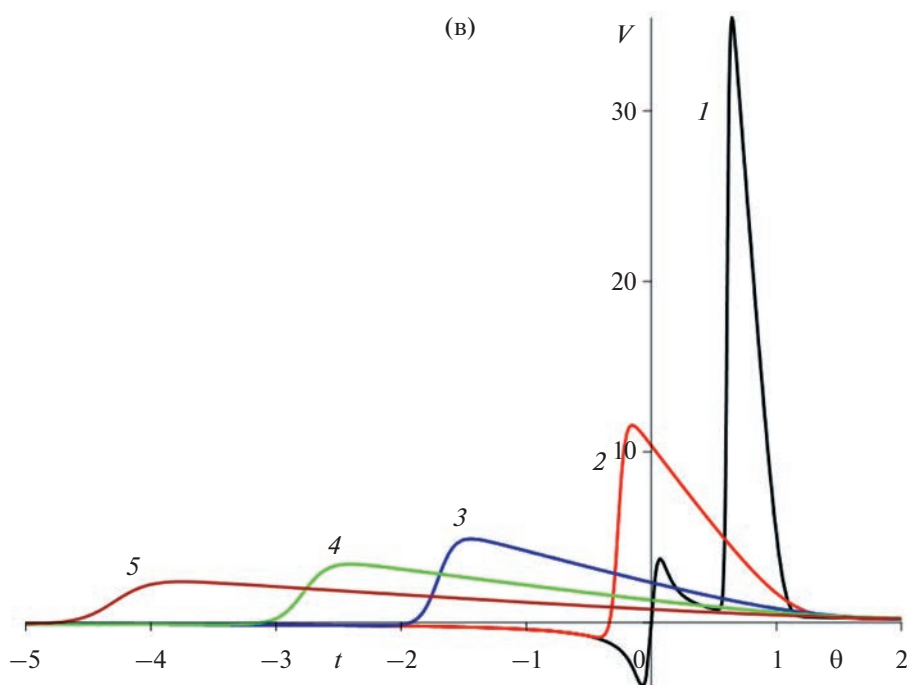


Рис. 4. Окончание.

не может, поскольку сингулярность разрушается (см. рис. 2).

Условия на границе типа (7), (11) примем для данной задачи в виде

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{2\Gamma}{\theta} + \alpha\delta(\theta - \theta_1), \\ U_0 &= |\theta| \exp\left[\frac{\alpha}{2\Gamma} H(\theta - \theta_1)\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения Бюргерса для (15) имеет вид:

$$\begin{aligned} U &= \exp(-\xi^2) + \gamma \exp(-(\xi - \xi_1)^2) + \\ &+ \sqrt{\pi}\xi[\gamma + \operatorname{erf}(\xi) + \gamma \operatorname{erf}(\xi - \xi_1)], \\ V &= \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{z}} \frac{1}{U} \{ \gamma[1 + \operatorname{erf}(\xi - \xi_1)] + \\ &+ \operatorname{erf}(\xi) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma \xi_1 \exp(-(\xi - \xi_1)^2) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь для краткости обозначено:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[ \exp\left(\frac{\alpha}{2\Gamma}\right) - 1 \right], \quad \xi = \frac{\theta}{\sqrt{4\Gamma z}}, \quad \xi_1 = \frac{\theta_1}{\sqrt{4\Gamma z}}. \quad (17)$$

Решение (16) для разрушения отдельной сингулярности при отсутствии возмущения  $\gamma = 0$  упрощается:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{z}} \frac{\operatorname{erf}(\xi)}{\exp(-\xi^2) + \sqrt{\pi}\xi \operatorname{erf}(\xi)}, \\ V|_{z \rightarrow 0} &= V|_{\xi \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{\Gamma}{z}} \frac{1}{\xi} = \frac{2\Gamma}{\theta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оно изображено на рис. 3 для параметра  $\Gamma = 0.2$  и расстояний  $z = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 2$  (кривые 1–5). Отметим, что это решение является нечетным.

На рис. 4 изображен процесс “падения” короткого импульса на сингулярность и поглощения его в окрестности особой точки, идущий одновременно с разрушением особенности вследствие нелинейных и диссипативных эффектов, действующих одновременно. На рис. 4а и 4б приведены графики для импульсов относительно небольшой “амплитуды”. В этом случае импульс достаточно быстро поглощается. Формирующийся на больших расстояниях профиль похож на случай отсутствия падающего импульса, однако он становится несимметричным: пиковые положительные значения превышают пиковые отрицательные. На рис. 4в приведен случай падения короткого импульса с большой “амплитудой”. В этом случае явно видно формирование ударной волны, которая распространяется со сверхзвуковой скоростью и приводит к смещению ударного фронта.

Во всех рассмотренных случаях короткий импульс исчезает в окрестности исходной сингулярности профиля и не препятствует процессу ее разрушения, хотя заметно видоизменяет этот процесс.

Работа поддержана грантом РФФИ 19-29-06048.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маков Ю.Н., Руденко О.В.* Динамика возмущений нелинейных пилообразных волн // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 824–828.
2. *Маков Ю.Н., Руденко О.В.* Возмущения формирующегося ударного фронта пилообразных волн в диссипативных средах // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 257–260.
3. *Руденко О.В.* Нелинейные пилообразные волны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
4. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Тюрина А.В.* Трансформация высокочастотного шума в поле ударной волны // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 554–561.
5. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008. 496 с. ISBN 978-5-9221-1042-6.
6. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
7. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 406–419.
8. *Руденко О.В.* Разрушение сингулярности профиля сильно нелинейной волны в диссипативной среде // Докл. Акад. наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 2. С. 61–65.