

## РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД С УЧЕТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

© 2023 г. Н. С. Григорьева<sup>а, \*</sup>, Ф. Ф. Легуша<sup>а, \*\*</sup>, К. С. Сафронов<sup>а, \*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
Лоцманская ул. 3, Санкт-Петербург, 190008 Россия

\*e-mail: nsgrig@natalie.spb.su

\*\*e-mail: legusha@smtu.ru

\*\*\*e-mail: safronov.kirill.pm@gmail.com

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.

После доработки 06.07.2022 г.

Принята к публикации 22.09.2022 г.

Моделируется рассеяние плоской звуковой волны на сферической границе раздела двух жидких или газообразных сред. Принимается во внимание влияние теплопроводности и вязкости; при этом используются результаты классической работы Г. Кирхгофа о распространении звука в вязкой и теплопроводящей среде. Сферическая поверхность может иметь любой волновой размер. Полученные результаты сравниваются с полем, рассеянным на твердой сфере, являющейся идеальным проводником тепла.

**Ключевые слова:** сферическая полость, вязкая теплопроводящая жидкость, тепловые волны, вязкие волны

**DOI:** 10.31857/S0320791922700022, **EDN:** YJDSSP

### АКУСТИЧЕСКИЕ, ВЯЗКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ ВО ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ

Задача о поглощении звука при распространении звуковых волн вблизи границ двух жидких или газообразных вязких и теплопроводящих сред представляет значительный интерес для различных областей физической акустики. В частности, в гидроакустике часто встречается ситуация, когда звуковая волна, распространяющаяся в морской среде, взаимодействует с неоднородностями, имеющими различную физическую природу, например, с пузырями, заполненными газом. Рассеяние на одиночном пузыре, имеющем малый волновой размер, рассмотрено, например, в работах [1–6].

В настоящей статье рассматривается рассеяние плоской волны на сферической границе раздела двух жидких или газообразных вязких и теплопроводящих сред. Сфера имеет произвольные волновые размеры.

Все расчеты, приводимые ниже, основываются на выводах классических работ Г. Кирхгофа [7] и Б.П. Константинова [8], в основе которых лежит система линеаризованных уравнений аэродинамики с учетом вязкости и теплопроводности. Рассматривая плоские волны в свободном про-

странстве, Кирхгоф сводит решение этой системы уравнений к решению системы трех скалярных и одного векторного уравнения. Общее решение задачи об акустическом поле с учетом вязкости и теплопроводности получается из решений такой системы, удовлетворяющей также и граничным условиям.

Рассеянные волны, а также поле внутри сферы ищутся в виде рядов сферических гармоник без каких-либо специальных предположений о геометрии возникающих волн.

Геометрия задачи представлена на рис. 1. Будем считать заданной падающую плоскую акустическую волну, бегущую в отрицательном направлении оси  $Oz$ . В работах [7, 8] показано, что при распространении звуковой волны в жидкой среде одновременно с ней возникает волна, представляющая акустическую добавку к статической температуре. Для приведенной температуры  $T' = T/\beta$  можно написать

$$T'_{\text{inc}} = \exp(-ik_1 z) = \exp(-ik_1 r \cos \theta). \quad (1)$$

Здесь  $k_1 = \omega/c$  — волновое число во внешней среде,  $c$  — адиабатическая скорость звука,  $\omega = 2\pi f$  — частота.

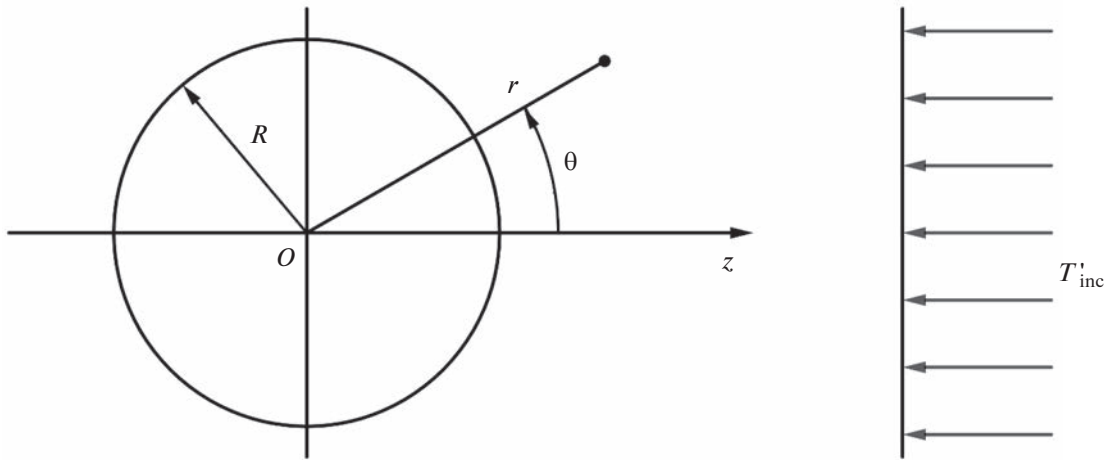


Рис. 1. Геометрия задачи.

Множитель  $\exp(i\omega t)$ , выражающий зависимость от времени, здесь и всюду ниже опускаем. В выражении для приведенной температуры  $\beta = \gamma - 1/\alpha$ , где  $\gamma$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент теплового объемного расширения.

В сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (2)$$

$T'_{\text{inc}}$  можно представить в виде (см., например, [9])

$$T'_{\text{inc}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), \quad (3)$$

где  $T_n = i^{-n} (2n+1)$ ,  $j_n(z)$  – сферическая функция Бесселя,  $P_n(\cos \theta)$  – полином Лежандра степени  $n$ .

Отраженную от поверхности сферы акустическую волну  $T'_1$  будем искать в виде ряда по сферическим функциям Ханкеля 1-го рода  $h_n^{(1)}(k_1 r)$ , удовлетворяющим условию излучения (условию Заммерфельда):

$$T'_1 = \sum_{n=0}^{\infty} t_{1,n} h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos \theta). \quad (4)$$

Здесь  $t_{1,n}$  – искомые коэффициенты.

В работах [7, 8] показано, что при распространении звуковой волны (1) во внешней вязкой теплопроводящей жидкости появится также тепловая волна  $T'_2$ , распространяющаяся от поверхности и удовлетворяющая уравнению

$$\Delta T'_2 + k_2^2 T'_2 = 0,$$

где  $k_2 = (1+i)/\delta'$  – волновое число тепловой волны,  $\delta' = \sqrt{2\nu'/\omega}$ ,  $\nu'$  – температуропроводность

внешней среды. Мы будем искать тепловую волну в виде

$$T'_2 = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2,n} h_n^{(1)}(k_2 r) P_n(\cos \theta), \quad (5)$$

где  $t_{2,n}$  – искомые коэффициенты.

Колебательная скорость частиц в звуковой волне  $\mathbf{u}$ , согласно [7, 8], может быть представлена в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \left( \mathbf{v}' + \frac{h}{k_1^2} \right) \text{grad} (T'_{\text{inc}} + T'_1) + \left( \mathbf{v}' + \frac{h}{k_2^2} \right) \text{grad} T'_2, \quad (6)$$

где  $h = i\omega$ ,  $\mathbf{v}$  – компонента скорости, обусловленная вязкими волнами и удовлетворяющая уравнениям

$$\Delta \mathbf{v} + k_3^2 \mathbf{v} = 0, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$k_3 = (1+i)/\delta$ ,  $\delta = \sqrt{2\eta_1/\omega}$ ,  $\eta_1 = \eta_1/\rho_0$  – кинематическая вязкость,  $\eta_1$  – динамическая вязкость,  $\rho_0$  – плотность среды в отсутствие колебаний,

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (8)$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  – орты координатных осей сферической системы координат.

Величина  $\mathbf{v}$  – скорость, входящая в уравнения (7), – есть не что иное, как решение системы уравнений для падающей волны, волны  $T'_2$  и уравнений (7), когда не происходит колебаний давления, температуры или плотности ( $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ).

Распространяющиеся колебания величины  $\mathbf{v}$  представляют собой вязкие волны. Они возника-

ют при распространении обычной акустической волны около неподвижной границы [8].

В сферической системе координат представим  $\mathbf{v}$  в форме

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (9)$$

Функции  $v_r$  и  $v_\theta$  будем искать в виде

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty} V_{r,n} h_n^{(1)}(k_3 r) P_n(\cos \theta), \quad (10)$$

$$v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} V_{\theta,n} h_n^{(1)}(k_3 r) dP_n(\cos \theta)/d\theta. \quad (11)$$

Здесь  $V_{r,n}$ ,  $V_{\theta,n}$  — искомые коэффициенты, связь между которыми находится из уравнения  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  при  $r = R$ :

$$V_{\theta,n} = V_{r,n} \frac{2h_n^{(1)}(k_3 R) + k_3 R h_n^{(1)'}(k_3 R)}{n(n+1)h_n^{(1)}(k_3 R)} \equiv V_{r,n} \Lambda_n; \quad (12)$$

$$n = 1, 2, \dots; V_{r,0} = 0.$$

Для того чтобы выразить давление  $p$  в звуковой волне, воспользуемся уравнением состояния и уравнением, выражающим закон сохранения энергии [8]:

$$\frac{p}{p_0} = S + \alpha T, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}' \Delta T, \quad (13)$$

где  $p_0$  — давление в среде в отсутствие колебаний,  $S$  — относительное уплотнение среды при колебаниях. В случае плоской падающей волны

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= S + \alpha \beta T' = \\ &= \left( \frac{\mathbf{v}' k_1^2}{h} + \alpha \gamma \right) (T'_{\text{inc}} + T'_1) + \left( \frac{\mathbf{v}' k_2^2}{h} + \alpha \gamma \right) T'_2. \end{aligned} \quad (14)$$

## АКУСТИЧЕСКИЕ, ВЯЗКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ ВО ВНУТРЕННЕЙ СРЕДЕ

Все параметры внутренней среды будем помещать волной. Внутри среды распространяются:

— вторичная звуковая волна  $\tilde{T}'_1$ ,

$$\tilde{T}'_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{t}_{1,n} j_n(\tilde{k}_1 r) P_n(\cos \theta), \quad (15)$$

— тепловая волна  $\tilde{T}'_2$ , распространяющаяся от поверхности сферы к ее центру,

$$\tilde{T}'_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{t}_{2,n} j_n(\tilde{k}_2 r) P_n(\cos \theta), \quad (16)$$

— вязкая волна  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_r \mathbf{e}_r + \tilde{v}_\theta \mathbf{e}_\theta$ ,

$$\tilde{v}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_{r,n} j_n(\tilde{k}_3 r) P_n(\cos \theta), \quad (17)$$

$$\tilde{v}_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_{\theta,n} j_n(\tilde{k}_3 r) dP_n(\cos \theta)/d\theta, \quad (18)$$

$$\tilde{V}_{\theta,n} = \tilde{V}_{r,n} \frac{2j_n(\tilde{k}_3 R) + \tilde{k}_3 R j_n'(\tilde{k}_3 R)}{n(n+1)j_n(\tilde{k}_3 R)} \equiv \tilde{V}_{r,n} \tilde{\Lambda}_n, \quad (19)$$

$n = 1, 2, \dots; \tilde{V}_{r,0} = 0$ . В (15)–(19)  $\tilde{t}_{1,n}$ ,  $\tilde{t}_{2,n}$ ,  $\tilde{V}_{r,n}$  — искомые коэффициенты, которые находятся из граничных условий задачи.

Тепловая волна, распространяющаяся во внутренней среде, существует за счет энергии, отбираемой у основной волны (1). В свою очередь, возбуждение во внутренней среде, заполняющей полость, неоднородной тепловой волны приводит к генерации в ней вторичной звуковой волны. Возбуждение этой волны обусловлено термоакустическим эффектом [10]. Результаты экспериментальных исследований термоакустического эффекта приведены в статьях [11, 12].

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При падении звуковой волны на границу раздела жидких и газообразных сред (на поверхность сферы  $S$ ) должны выполняться следующие граничные условия (см. [13, 14]):

$$\begin{cases} p|_S = \tilde{p}|_S, \\ u_r|_S = \tilde{u}_r|_S, \\ u_\theta|_S = \tilde{u}_\theta|_S, \\ \beta T'|_S = \tilde{\beta} \tilde{T}'|_S, \\ v\beta \frac{\partial T'}{\partial r}|_S = \tilde{v}\tilde{\beta} \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial r}|_S, \\ \eta_l \frac{\partial u_\theta}{\partial r}|_S = \tilde{\eta}_l \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r}|_S. \end{cases} \quad (20)$$

Второе из граничных условий (20) отражает факт равенства нормальных составляющих колебательной скорости на поверхности, разделяющей две среды. Третье и четвертое граничные условия соответственно указывают на возможность возбуждения неоднородных вязких и тепловых волн. Пятое уравнение является законом сохранения для теплового потока, текущего через границу. Появление теплового потока обусловлено затуханием вязких и тепловых волн в акустическом пограничном слое поверхности раздела. Первое уравнение совместно с шестым выполняют требование обращения в нуль суммы всех сил, действующих с обеих сторон на любой элемент границы. В результате этого граница двух сред не разрушается взаимодействующей с ней звуковой волной.

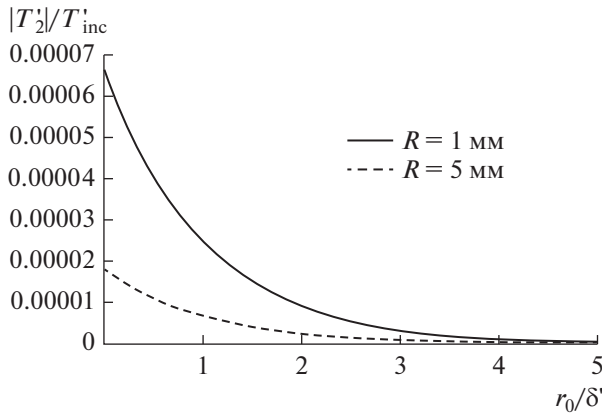


Рис. 2. Зависимость  $|T'_2|/T'_{inc}$  от безразмерного расстояния  $r_0/\delta'$ ,  $r = R + r_0$  для пузырька.

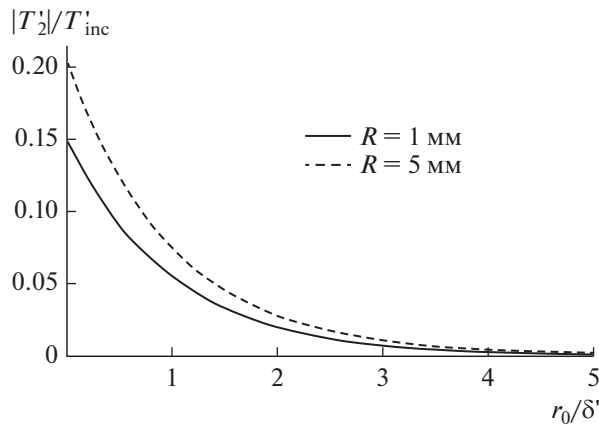


Рис. 3. Зависимость  $|T'_2|/T'_{inc}$  от безразмерного расстояния  $r_0/\delta'$ ,  $r = R + r_0$  для твердой сферической поверхности.

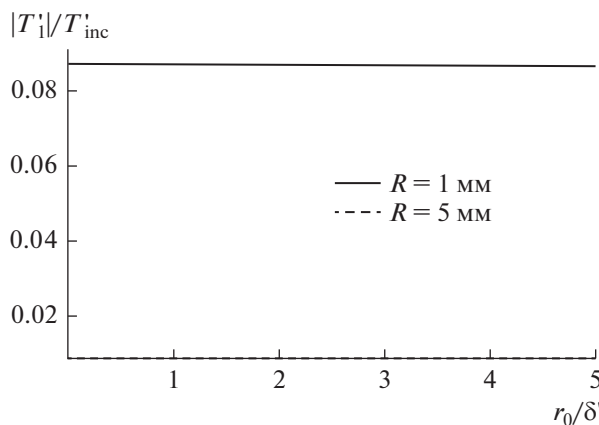


Рис. 4. Зависимость  $|T'_1|/T'_{inc}$  от безразмерного расстояния  $r_0/\delta'$ ,  $r = R + r_0$  для пузырька.

Подставляя в граничные условия (20) выражения для компонент поля в виде рядов и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях при полиномах Лежандра порядка  $n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получим систему 6 уравнений с 6 неизвестными  $t_{1,n}$ ,  $t_{2,n}$ ,  $V_{r,n}$ ,  $\tilde{t}_{1,n}$ ,  $\tilde{t}_{2,n}$ ,  $\tilde{V}_{r,n}$ .

### ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравним звуковое поле, рассеянное на газовом пузырьке радиуса  $R$  и твердой сферической поверхности того же радиуса. На твердой сфере, являющейся идеальным проводником тепла, должны удовлетворяться граничные условия [8]:

$$\begin{cases} T'|_{r=R} = 0, \\ u_r|_{r=R} = 0, \\ u_\theta|_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решение системы (21), где  $T' = T'_{inc} + T'_1 + T'_2$ , а дается формулой (6), сводится к решению алгебраической системы трех уравнений с тремя неизвестными:  $t_{1,n}$ ,  $t_{2,n}$ ,  $V_{r,n}$ .

Вычисления выполнены для  $f = 1$  кГц,  $R = 1$  и 5 мм. Для  $R = 1$  мм:  $k_1 R = 4.2 \times 10^{-3}$ ,  $2\tilde{\delta}'/R = 1.6 \times 10^{-1}$ . Для  $R = 5$  мм:  $k_1 R = 2.1 \times 10^{-2}$ ,  $2\tilde{\delta}'/R = 3.2 \times 10^{-2}$ .

На рис. 2 и 3 показана зависимость нормированной тепловой волны  $|T'_2|/T'_{inc}$ , распространяющейся в воде, от безразмерного расстояния  $r_0/\delta'$ ,  $r = R + r_0$  для пузырька и твердой сферической поверхности соответственно;  $\theta = \pi/4$ .

На рис. 4 и 5 показана зависимость нормированной отраженной волны  $|T'_1|/T'_{inc}$ , распространяющейся в воде, от безразмерного расстояния  $r_0/\delta'$ ,  $r = R + r_0$  для пузырька и твердой сферической поверхности соответственно.

Таким образом, в случае пузырька  $|T'_1|/T'_{inc}$  уменьшается примерно в 10 раз по сравнению с твердой поверхностью. При увеличении радиуса сферы  $R$  в 5 раз значение  $|T'_1|/T'_{inc}$  уменьшается как для пузырька, так и для твердой сферической поверхности. Для пузырька это уменьшение значительнее.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается задача о взаимодействии бегущей плоской гармонической волны со сферической границей раздела двух сред, характеризующихся произвольным набором акустических и термодинамических параметров. Полу-

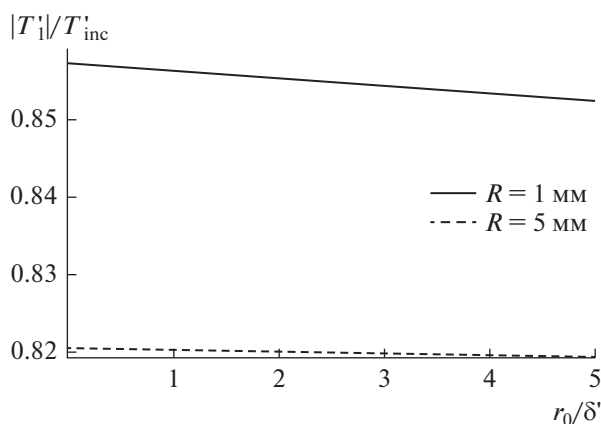


Рис. 5. Зависимость  $|T'_1|/T'_{inc}$  от безразмерного расстояния  $r_0/\delta'$ ,  $r = R + r_0$  для твердой сферической поверхности.

ченное решение справедливо при любых значениях  $k_1 R$ . Численное моделирование выполнено для случая воздушного сферического пузырька, взвешенного в сжимаемой и теплопроводящей жидкости. Показано, что в малой окрестности пузырька проникновение звуковой волны внутрь пузырька приводит к уменьшению значений  $|T'_1|/T'_{inc}$  примерно в 10 раз по сравнению с твердой сферической поверхностью.

Полученное решение позволяет также исследовать влияние воздушной или водной полости в ледовой среде.

При сведении системы линеаризованных уравнений гидродинамики с учетом вязкости и теплопроводности к системе трех скалярных и одного векторного уравнения Кирхгоф пренебрегает по сравнению с единицей всеми степенями малых безразмерных величин  $\eta_1 \omega / c^2$  и  $\nu \omega / c^2$ , кроме первой. Для рассмотренной в настоящей работе частоты  $f = 1$  кГц отброшенные слагаемые будут иметь порядок  $10^{-12}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Foldy L.L., Carstener E.L. Propagation of sound through a liquid containing bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1947. V. 19. P. 481–501.
2. Devin C. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31. P. 1654–1667.
3. Поздеев В.А. Взаимодействие акустической волны давления с пузырьком газа в жидкости // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 838–840.
4. Temkin S. Attenuation and dispersion of sound in dilute suspensions of spherical particles // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108. P. 126–146.
5. Буланов В.А. Введение в акустическую спектроскопию микронеоднородных жидкостей. Владивосток: Дальнаука, 2001. 203 с.
6. Temkin S. Suspension Acoustics: An Introduction to the Physics of Suspensions. Cambridge University Press, 2005. 418 p.
7. Kirchhoff G. Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Annalen der Physik. 1868. Bd. 210. № 6. P. 177–193.
8. Константинов Б.П. О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // Журн. техн. физ. 1939. Т. 9. № 3. С. 226–238.
9. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 427 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 345 с.
11. Легуша Ф.Ф., Невеселова К.В. Экспериментальные исследования современных термофонов // Морские интеллектуальные технологии. 2015. Т. 1. № 4 (30). С. 60–65.
12. Васильев Б.П., Горин С.В., Лебедев Г.А., Разрезова К.В., Сетин А.И. Термоакустические источники звука — термофоны: расчет, проектирование, перспективы применения // Морские интеллектуальные технологии. 2019. Т. 1. № 1 (43) С. 167–172.
13. Легуша Ф.Ф. Импеданс границы раздела жидких сред с учетом эффекта Константинова // Журн. техн. физ. 1984. Т. 54 №1. С. 181–183.
14. Легуша Ф.Ф. Поглощение Константинова на границе раздела жидких полупространств // Журн. техн. физ. 1984. Т. 54. № 4. С. 671–678.