

---

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ.  
ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

---

УДК 534.6.08

## ПОВЫШЕНИЕ ЧАСТОТНОГО РАЗРЕШЕНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ВИБРАЦИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ЛАЗЕРНОЙ ВИБРОМЕТРИИ С НЕПОДВИЖНЫМ ЛУЧОМ

© 2023 г. В. В. Артельный<sup>а</sup>, А. А. Родионов<sup>а</sup>, А. В. Стуленков<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603155 Россия

\*e-mail: stulenkova@ipfran.ru

Поступила в редакцию 22.04.2022 г.

После доработки 22.04.2022 г.

Принята к публикации 22.09.2022 г.

Техника лазерной доплеровской виброметрии активно применяется при выполнении экспериментальных исследований из-за бесконтактного принципа измерений. При использовании неподвижного лазера для измерений вибраций вращающихся тел и преобразования Фурье для обработки результатов таких измерений возникает проблема, связанная с понижением частотного разрешения спектров при увеличении частоты вращения тела. В результате при достаточно высоких скоростях вращения могут перестать разрешаться близко расположенные дискретные составляющие. В данной работе предложен способ решения такой проблемы, основанный на методе наименьших квадратов. Работоспособность такого метода обработки продемонстрирована на экспериментальных данных.

**Ключевые слова:** лазерная виброметрия, частотное разрешение, метод наименьших квадратов, измерение вращающихся тел

**DOI:** 10.31857/S0320791922600214, **EDN:** YJAAUJ

### ВВЕДЕНИЕ

Измерение вибраций тел, находящихся не в лабораторных, а в рабочих условиях всегда представляло большой интерес. В немалой степени это относится к измерению вибраций вращающихся объектов. Бесконтактный принцип измерений, лежащий в основе лазерной доплеровской виброметрии, позволяет выполнять исследования вибраций тел, не изменяя их динамических характеристик (резонансных частот, форм колебаний на резонансах, добротностей). В исследовании вибраций вращающихся объектов с помощью лазерных виброметров глобально можно выделить два подхода — с использованием систем, позволяющих лазерному лучу следить за конкретной точкой объекта [1–4], и без таких систем (луч неподвижен) [5–10]. Наиболее распространены отслеживающие системы двух типов. В системах первого типа слежение лазера за точкой обеспечивается посредством использования дополнительного прибора — деротатора, принцип работы которого основан на использовании вращающейся призмы Дове [1–3]. Оптические свойства призмы Дове заключаются в том, что за половину оборота вокруг своей оси, она поворачивает изображение объекта на 360 градусов. Если вращать призму с половинной скоростью вращения ис-

следуемого объекта, то его изображение для виброметра станет неподвижным и, таким образом, реализуется возможность непрерывного слежения за выбранной точкой. При этом деротатору необходим внешний канал связи с исследуемым телом, чтобы получать информацию о скорости вращения.

Системы второго типа основаны на совместном использовании лазерного виброметра и видеокамеры в совокупности с алгоритмом обработки изображения в режиме реального времени [4, 11]. В таких системах свет в камеру и виброметр попадает через общую систему зеркал. В процессе работы камера отслеживает положение некоторой цели (измерительной точки) на поверхности объекта. Алгоритмом обработки изображения оценивается мгновенная разница в положении цели и лазерного луча. Эта информация затем используется для корректировки положения луча лазера с помощью системы зеркал. Таким образом, обеспечивается непрерывное слежение за точкой. С помощью отслеживающих систем обоих типов можно последовательно осуществлять измерение вибраций в наборе точек, что позволит, в итоге, построить формы колебаний вращающегося тела.

Другой подход — это измерение без систем слежения за конкретной точкой. При этом вращающийся объект проходит через неподвижный луч лазерного виброметра. Такой подход хоть и является более примитивным, тем не менее, обладает рядом преимуществ. Во-первых, он применим в том случае, когда вращающаяся деталь (диск, винт, пропеллер) закрыта кожухом или направляющими, которые мешают непрерывному движению луча за точкой [5, 7–9]. В такой ситуации измерения выполняются неподвижным лазером, направленным в доступную для обзора точку. Во-вторых, измерительная система с неподвижным лучом является более простым и доступным инструментом. Это связано с высокой ценой следящих систем, а также со значительной трудностью их настройки [8–10]. Понятно, что расширение возможностей применения систем с неподвижным лазером является актуальной задачей.

В работе [5] описана экспериментальная установка для измерений вибрации вращающихся тел неподвижным лазером. Была продемонстрирована возможность определения амплитуды и частоты колебаний с использованием данного подхода. Главным недостатком подобного метода измерений является понижение частотного разрешения с увеличением частоты вращения. В рамках данной работы будет описан метод, позволяющий преодолеть данный недостаток.

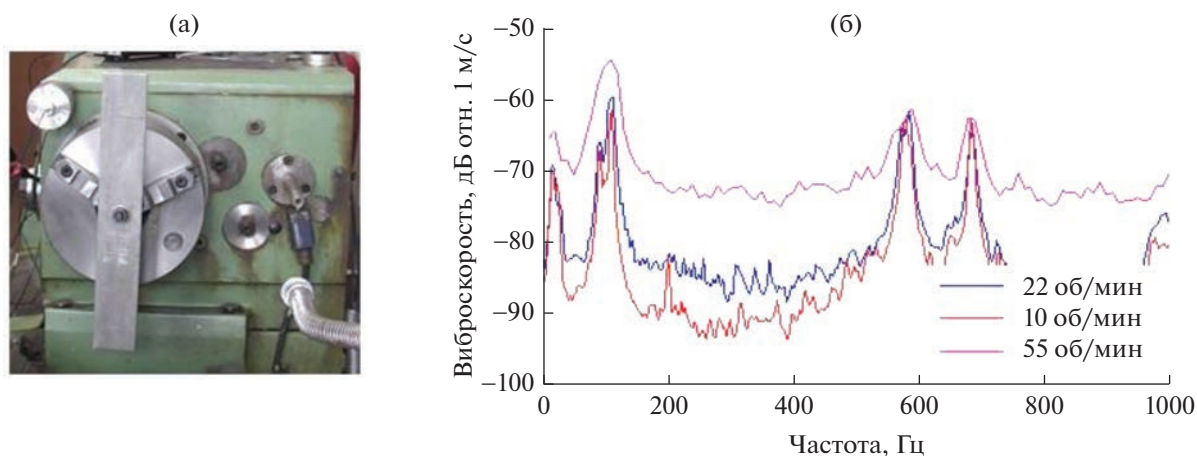
### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При измерении вибраций вращающегося объекта, например, лопастей винта время сканирования будет определяться временем пересечения луча лопастью. Это время определяется шириной лопасти и её линейной скоростью в точке сканирования. В результате измерений регистрируется временная реализация, состоящая из набора ко-

ротких импульсов с высокой скважностью. При использовании преобразования Фурье для оценки спектра вибраций подобного сигнала получается большое количество ложных дискретных составляющих (присутствующие составляющие размножаются в периодическом спектре). Для того чтобы избежать такого результата, можно обрабатывать один импульс. На рис. 1 представлен рассматриваемый в работе объект измерений — стальная пластина, вращение которой придавалось с помощью станка. Из результатов измерений с неподвижной пластиной известно о существовании двух близко расположенных дискретных составляющих, обусловленных ее изгибными колебаниями, — 91.3 и 110.8 Гц.

На рис. 1 также приведены спектры, полученные по экспериментальным данным (с использованием одного импульса) и построенные для трех скоростей вращения макета винта: красная кривая — 10 об/мин, синяя кривая — 22 об/мин, фиолетовая кривая — 55 об/мин. На всех кривых проявляются максимумы, связанные с изгибными колебаниями лопасти макета. В случае вращения со скоростью 55 об/мин заметно, что перестали разрешаться 1-я и 2-я дискретные составляющие. Это связано с уменьшением длительности времени наблюдения и соответствующим ухудшением частотного разрешения.

Стоит отметить, что преобразование Фурье является оптимальным методом обработки для задачи оценки частоты для единственной дискретной составляющей в белом гауссовом шуме. Для оценки двух близко расположенных составляющих используются так называемые “сверхразрешающие” методы. Наиболее известными из них являются методы на основе авторегрессионных моделей и метод MUSIC [12]. Отметим, однако, что при наличии двух синусоид оптимальным бу-



**Рис. 1.** (а) — Экспериментальная установка с закрепленной стальной пластиной и (б) — результаты измерений в виде спектров для разных скоростей вращения.

дет метод, основанный на методе наименьших квадратов (МНК), явно включающем в модель сигнала две синусоиды с неизвестными параметрами.

### МЕТОД ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Метод обработки результатов основан на представлении модели записанного сигнала в виде суммы нескольких (двух) детерминированных сигналов с неизвестными параметрами [13].

Рассмотрим следующую модель измеряемого временного сигнала:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  — векторы-столбцы размерностью  $J \times 1$ ,  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$  — полезный детерминированный сигнал,  $\boldsymbol{\theta}$  — вектор неизвестных параметров, подлежащих оценке,  $\boldsymbol{\xi}$  — белый гауссов шум с нулевым средним,  $J$  — количество временных отсчетов. Детерминированный сигнал может быть смоделирован как сумма  $K$  комплексных синусоид:

$$\mu_j(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{k=1}^K \theta_{0,k} e^{2\pi i \theta_{1,k} t_j}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\theta}_0$ ,  $\boldsymbol{\theta}_1$  — векторы-столбцы размерностью  $K \times 1$ ,  $\boldsymbol{\theta}_0$  — неизвестные комплексные амплитуды,  $\boldsymbol{\theta}_1$  — неизвестные частоты,  $t_j$  — момент времени, соответствующий отсчету номер  $j$ . Выражение (2) можно переписать в компактном матричном виде

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_1) \boldsymbol{\theta}_0, \quad (3)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  размерности  $N \times K$  образована из  $K$  столбцов —  $N \times 1$  векторов  $\mathbf{a}_k$ :  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_1) = [\mathbf{a}_1(\theta_{1,1}), \dots, \mathbf{a}_K(\theta_{1,K})]$ . Здесь  $\mathbf{a}_k = (e^{2\pi i \theta_{1,k} t_1}, \dots, e^{2\pi i \theta_{1,k} t_J})^T$ . Далее для поиска неизвестных параметров в соответствии с МНК будем минимизировать функцию

$$S(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x})^H (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x}) \quad (4)$$

по неизвестным параметрам. Для того чтобы найти минимум по неизвестным комплексным амплитудам (по вектору  $\boldsymbol{\theta}_0$ ), необходимо записать условие экстремума  $\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = 0$ . После дифференцирования по вектору  $\boldsymbol{\theta}_0$  получим уравнение  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \boldsymbol{\theta}_0 - \mathbf{A}^H \mathbf{x} = 0$ . Его решением будет оценка неизвестных комплексных амплитуд:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{x} \quad (5)$$

как функции неизвестных частот  $\boldsymbol{\theta}_1$ . Поскольку это единственное решение, а максимум бесконечен и недостижим, это может быть только минимум. Подставляя (5) в (4), получаем целевую

функцию, подлежащую максимизации и зависящую от  $\boldsymbol{\theta}_1$ :

$$F(\boldsymbol{\theta}_1) = \mathbf{x}^H \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{x}. \quad (6)$$

Для случая  $K = 2$  функция (6) зависит от двух неизвестных частот. Найти максимум по ним с помощью необходимого условия экстремума не получается, поскольку результирующее уравнение имеет сложную нелинейную форму. Помимо этого, такое уравнение имеет множество решений, соответствующих многим локальным максимумам. Единственным надежным способом поиска глобального максимума (6) является полный перебор. После определения частот синусоид  $\boldsymbol{\theta}_1$  можно оценить также их комплексные амплитуды с помощью подстановки  $\boldsymbol{\theta}_1$  в формулу (5).

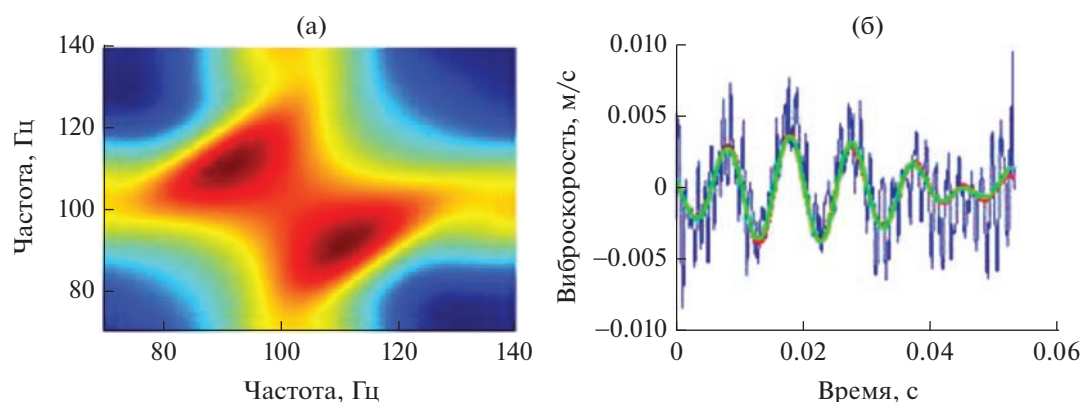
### РЕЗУЛЬТАТЫ АПРОБАЦИИ МЕТОДА НА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 представлены результаты использования метода для разрешения двух соседних частот при вращении образца со скоростью 55 об/мин (см. рис. 1). Метод применялся для одного из импульсов зарегистрированной временной реализации, который был предварительно обработан полосовым фильтром с частотами среза 70 и 140 Гц. После этого была посчитана зависимость целевой функции (6) от двух частот. Эта зависимость в яркостном виде представлена на рис. 2а.

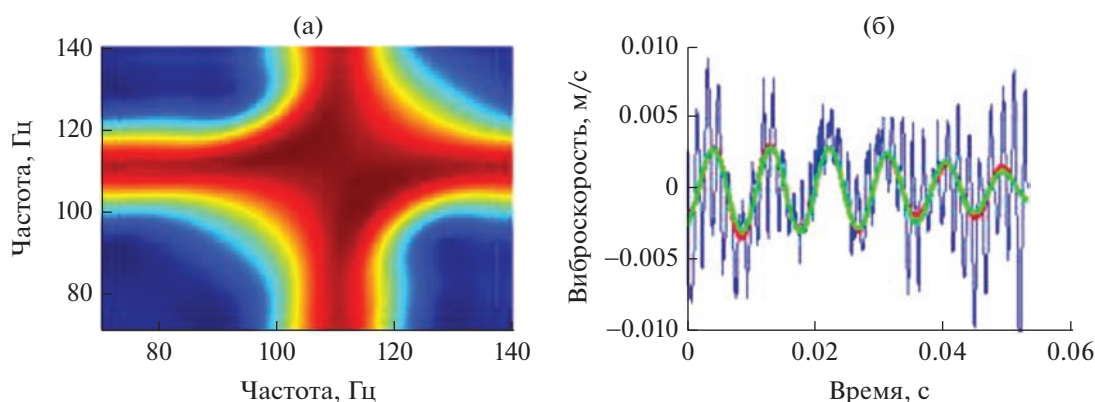
В силу симметричности этой зависимости, оценкой частоты можно считать значения аргументов любого максимума. Эти значения составили 91.7 и 110.8 Гц, что практически совпадает со значениями изгибных частот, определенных для неподвижной пластины. На рис. 2б также представлено сравнение временных реализаций исходного экспериментального сигнала (синяя линия), сигнала после фильтрации (красная линия), модельного сигнала, состоящего из суммы двух синусоид после аппроксимации, полученного с помощью описываемого в работе метода (зеленая линия). Заметно совпадение уровней исходного и модельного сигналов в рассматриваемом частотном диапазоне.

Стоит отметить, что для других импульсов результаты оценки частот могут отличаться от значений, полученных для неподвижной пластины. На рис. 3 представлены результаты обработки для такого импульса, который можно условно называть “плохим”.

Целевая функция для “плохого” импульса, изображенная на рис. 3, отличается от функции, изображенной на рис. 2, большей шириной максимума. Оценка значений частот — 104 и 114.8 Гц,



**Рис. 2.** (а) — Целевая функция, рассчитанная по формуле (6); (б) — сравнение временных реализаций измеренного, отфильтрованного и модельного сигнала после аппроксимации.



**Рис. 3.** (а) — Целевая функция, рассчитанная для “плохого” импульса, (б) — сравнение временных реализаций измеренного, отфильтрованного сигналов и модельного сигнала после аппроксимации.

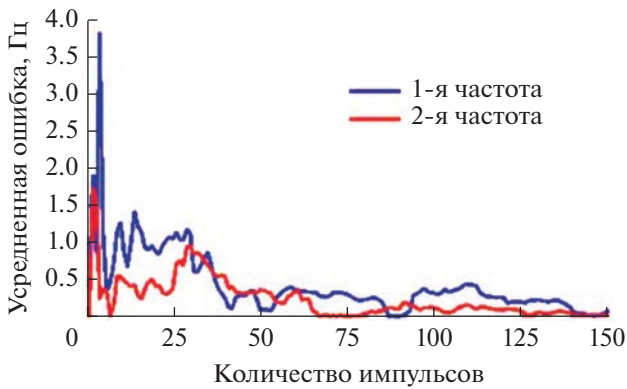
что существенно отличается от значений неподвижной пластины. Подобранный модельный сигнал все также неплохо соответствует экспериментальному сигналу, как и в случае с “хорошим” импульсом (рис. 3). Хорошее соответствие модельной и экспериментальной временных реализаций сохраняется даже при сознательном выборе значения целевой функции, немного не соответствующего найденному глобальному максимуму (в темно-красной области). Значения аргументов в таком случае могут существенно отличаться друг от друга даже при небольшом отклонении значения целевой функции от максимального.

Таким образом, в случае выбора “плохого” импульса можно получить большую ошибку в оценке значений частот. Для того чтобы избежать этого, можно попробовать усреднить результаты оценки по нескольким импульсам. В данном случае выполнялось усреднение самих оценок частот, ранжируемых по возрастанию. Другими словами, за оценку меньшей частоты принимался меньший

аргумент максимума целевой функции. Результаты такого усреднения приведены на рис. 4. Здесь синяя кривая соответствует первой (меньшей) частоте, красная кривая соответствует второй (большей) частоте.

Для временной реализации длительностью 80 с было зарегистрировано 150 импульсов, соответствующих проходу одной половины пластины. Из графиков, представленных на рис. 4, заметно, что при росте количества импульсов, используемых для усреднения, происходит снижение ошибки оценки частот. При максимально возможном количестве усреднений оценка частот составила 91.4 и 110.8 Гц, что практически точно соотносится с частотами, измеренными на неподвижной пластинке.

Длительность экспериментального сигнала (импульса) для частоты вращения 55 об/мин составляла  $T = 0.0536$  с, что соответствует классическому разрешению  $\Delta f = T^{-1} = 18.7$  Гц. Возникает вопрос, до каких оборотов можно увеличить скорость вращения, чтобы по-прежнему было



**Рис. 4.** Зависимость ошибки оценки частот (относительно значений, определенных для неподвижной пластинки) от числа импульсов, используемых для усреднения.

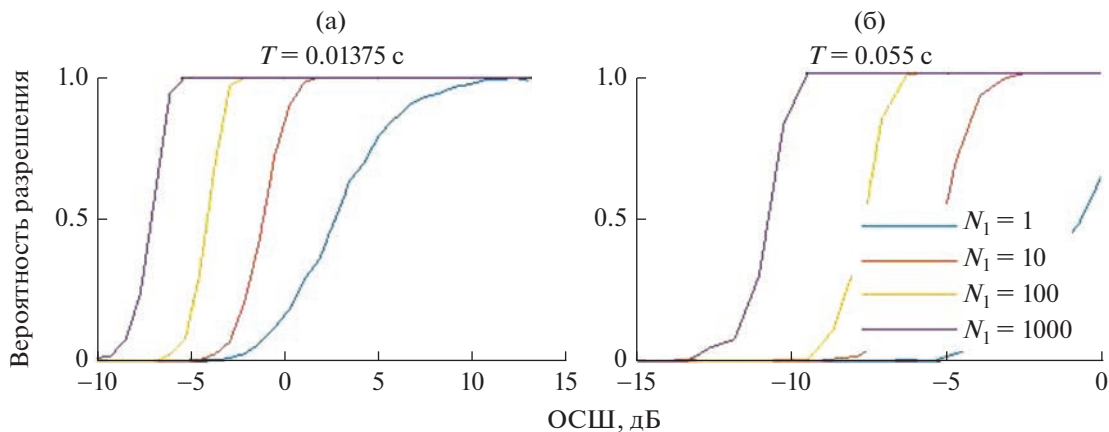
возможно разрешить две синусоиды? Для улучшения точности оценки частот и разрешения можно попробовать дополнительное некогерентное усреднение целевой функция (6) по импульсам. Такой способ обработки будет оптимальным в случае, когда каждый импульс имеет случайную амплитуду и начальную фазу. На практике это может быть не всегда верно, однако можно надеяться, что некогерентное усреднение все равно даст некоторый положительный эффект. Для выяснения возможностей такого метода было проведено численное моделирование. Генерировался набор импульсов, каждый из которых содержал две синусоиды с частотами 91.4 и 111 Гц и комплексными амплитудами  $-0.5511 + 0.7317i$  и  $0.9370 - 0.1947i$ . Эти амплитуды были получены из эксперимента для одного из импульсов по формуле (5). Каждый импульс умножался на гауссову случайную величину с нулевым средним и единичной дисперсией (для введения некоге-

рентности). Добавлялся также белый гауссов шум с нулевым средним и некоторой дисперсией. Для каждого числа генерируемых импульсов определялась вероятность ложной тревоги. По этой вероятности определялся порог для обнаружения/разрешения (по стратегии Неймана–Пирсона). Затем по сумме сигнала и шума определялась вероятность разрешения синусоид по превышению порога. На рис. 5 приведены полученные зависимости вероятностей разрешения спектральных компонент от отношения сигнал/шум (ОСШ) для различного числа импульсов, по которым ведется некогерентное усреднение. Приведены результаты для двух различных длительностей импульса  $T = 0.01375, 0.055$  с.

Видно, что некогерентное усреднение позволяет заметно снизить ОСШ, необходимое для разрешения двух синусоид. Получается, что даже при очень маленьких длительностях отдельного импульса для данной модели сигнала некогерентное усреднение многих импульсов позволяет разрешать близкие составляющие.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе приводится описание способа, с помощью которого можно преодолеть основной недостаток метода измерений вибраций вращающихся тел неподвижным лазером – понижение частотного разрешения с увеличением частоты вращения. Показано, что для случая двух расположенных рядом спектральных составляющих можно использовать метод наименьших квадратов с использованием модели сигнала, включающей в явном виде две синусоиды с неизвестными частотами. Работоспособность предложенного подхода продемонстрирована на экспериментальных данных. Для увеличения точности оценки частоты и вероятности разрешения частот



**Рис. 5.** Зависимости вероятностей разрешения спектральных компонент от ОСШ для различного числа импульсов, по которым ведется некогерентное усреднение.

предложено использовать некогерентное усреднение между импульсами. Эффективность такого способа продемонстрирована с помощью численного моделирования.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПФ РАН по темам 0030-2021-0017 и 0030-2022-0003.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johansmann M., Fritzsche M., Schell J.* A new method for measurement of rotating objects utilizing laser Doppler vibrometry combined with an optical derotator with focus on automotive applications // SAE Technical Paper Series. 2011.  
<https://doi.org/10.4271/2011-26-0043>
2. *Gasparoni A., Allen M.S., Yang S., Sracic M.W., Castellini P., Tomasini E.P.* Experimental Modal Analysis on a Rotating Fan Using Tracking-CSLDV // AIP Conference Proceedings. 2010. V. 1253. № 3.
3. *Abbas S.H., Jang J.-K., Kim D.-H., Lee J.-R.* Underwater vibration analysis method for rotating propeller blades using laser Doppler vibrometer // Optics and Lasers in Engineering. 2020. V. 132. P. 106133.
4. *Lutzmann P., Göhler B., Hill C.A., van Putten F.* Laser vibration sensing at Fraunhofer IOSB: review and applications // Opt. Eng. 2016. V. 56. № 3. P. 031215.
5. *Reinhardt A.K., Kadambi J.R., Quinn R.D.* Laser vibrometry measurements of rotating blade vibrations // J. Engineering for Gas Turbines and Power. 1995. V. 117. № 3. P. 484–488.
6. *Kulczyk W.K., Davis Q.V.* Laser Doppler instrument for measurement of vibration of moving turbine blades // Proc. of the Institution of Electrical Engineers. 1973. V. 120. № 9. P. 1017–1023.
7. *Cookson R.A., Bandyopadhyay P.* Fiber-optic laser-Doppler probe for vibration analysis of rotating machines // J. Engineering for Power. 1980. V. 102. № 3. P. 607–612.
8. *Oberholster A.J., Heyns P.S.* Online condition monitoring of axial-flow turbomachinery blades using rotor-axial Eulerian laser Doppler vibrometry // Mechanical Systems and Signal Processing. 2009. V. 23. № 5. P. 1634–1643.  
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2009.01.001>
9. *Oberholster A.J., Heyns P.S.* Eulerian laser Doppler vibrometry: Online blade damage identification on a multi-blade test rotor // Mechanical Systems and Signal Processing. 2011. V. 25. № 1. P. 344–359.  
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.03.007>
10. *Oberholster A.J., Heyns P.S.* A study of radial-flow turbomachinery blade vibration measurements using Eulerian laser Doppler vibrometry // AIP Conference Proceedings. 2014. V. 1600. № 1. P. 23–32.  
<https://doi.org/10.1063/1.4879565>
11. *Castellini P., Tomasini E.P.* Image-based tracking laser Doppler vibrometer // Review of Scientific Instruments. 2004. V. 75. № 1. P. 222–232.  
<https://doi.org/10.1063/1.1630859>
12. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
13. *Турчин В.И.* Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. 116 с.