

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.231.1

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК СДВИГОВЫХ SV-ВОЛН С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ В ТВЕРДОМ СЛОЕ

© 2023 г. А. Д. Лапин*

Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117209 Россия

*e-mail: lapin1932@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.

После доработки 25.11.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Найдено поле SV-источника поперечных волн в твердом однородном слое со свободными границами. На этих границах, помимо поперечных волн, возникают и продольные волны. Полное поле в слое характеризуется скалярным и векторным потенциалами. Вследствие осевой симметрии этого поля векторный потенциал имеет только угловую компоненту. Интегральное представление потенциалов получено методом Фурье–Бесселя. На основе теории вычетов поле в слое представлено в виде суперпозиции цилиндрических мод Лэмба. Рассчитаны амплитуды этих мод.

Ключевые слова: SV-источник поперечных волн, скалярный и векторный потенциал, метод Фурье–Бесселя, цилиндрические моды Лэмба

DOI: 10.31857/S0320791923600312, **EDN:** QSCGBS

ВВЕДЕНИЕ

Среди исследований полей в твердых телах можно выделить работы по расчетам полей различных точечных источников [1–8]. В работе [1] рассмотрено поле точечного источника силы в безграничной анизотропной среде. В [2] проанализировано поле SH-источника в слое. Поле вертикальной точечной, или линейной силы исследовано в [3]. Подробный анализ поля импульсного точечного силового источника в нестационарной постановке дан в [4]. Модовый анализ поля в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, при его возбуждении точечной силой проведен в [5]. Влияние ориентации точечной силы на поле в твердом полупространстве рассмотрено в [6]. В современном учебнике [7], рассматривающем асимптотические представления поля в безграничном твердом теле, перечислены, в частности, элементарные точечные источники: источник объемной скорости, источник силы и центр вращения. Наконец, в фундаментальной монографии [8] обсуждаются элементарные источники сейсмических полей. Предлагается компоновать их из точечных сил. Поля этих сил и их комбинаций содержат как потенциальную, так и вихревую компоненты. В книге пропагандируется теория двойной пары сил применительно к реальным процессам сейсмических процессов.

Настоящая работа посвящена расчету поля точечного источника сдвигового поля в твердом слое. Твердые тела отличаются от жидкостей тем,

что при деформациях в них возникают не только давления, но и сдвиговые упругие напряжения. Поэтому в твердых телах, помимо продольных волн того же типа, что и в жидкостях, могут распространяться и поперечные волны, в которых частицы колеблются перпендикулярно к направлению распространения. В сейсмологии сдвиговые волны с горизонтальной поляризацией называют SH-волнами, сдвиговые волны с вертикальной поляризацией называют SV-волнами. Элементарным точечным источником SH-волн является так называемый крутоль – сфера, замороженная в среду, совершающая колебания вокруг некоторой своей оси (рис. 1а). Элементарным точечным источником SV-волн является тор, замороженный в среду, поверхность которого совершает колебания вокруг направляющей тора (рис. 1б). Этот источник характерен тем, что его сила и момент равны нулю.

В работе *впервые* найдено поле точечного SV-источника волн в твердом однородном слое со свободными границами. Представим потенциальную часть смещения в виде градиента некоторого скаляра φ , а соленоидальную часть смещения в виде вихря векторного потенциала ψ [1, 2]:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\psi. \quad (1)$$

С учетом осевой симметрии остается только одна – угловая компонента векторного потенциала ψ и уравнение для нее также является скалярным. Источник на рис. 1а имеет как раз такую симмет-

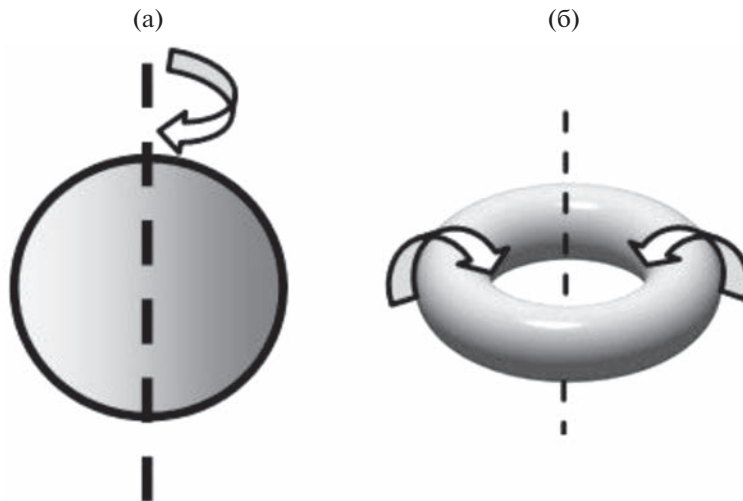


Рис. 1. (а) – Источник SH–волн, крутось, (б) – источник SV–волн, тор.

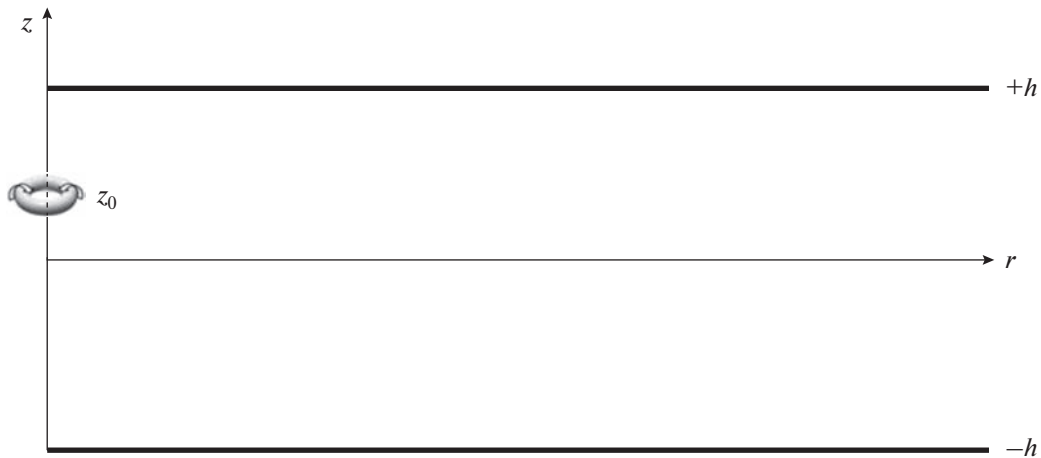


Рис. 2. Постановка задачи.

рию. При наличии свободных границ помимо поперечных волн возникнут и продольные волны.

ИЗЛУЧЕНИЕ SV-ИСТОЧНИКА ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ТВЕРДОМ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Геометрия задачи показана на рис.2. В цилиндрической системе координат (r, α, z) границы этого слоя совпадают с плоскостями $z = \pm h$. Точечный гармонический SV-источник, создающий поперечные волны с поляризацией в плоскости rz , расположен в точке $(r = 0, z = z_0)$, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Потенциал Ψ представим в виде производной $\psi \equiv \partial\phi/\partial r$. В работах [11, 12] показано, что граничные условия на свободных границах слоя просто записываются

через скалярные функции $\phi(r, z)$ и $\psi(r, z)$. Смещения в твердой среде получим по формулам

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений записываются через скаляры ϕ и ψ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \Delta\phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial\phi}{\partial z} + \Delta\phi - 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе. Условия обращения их в нуль при $z = \pm h$ дают с учетом волновых уравнений граничные условия:

$$z = \pm h, \quad k_t^2 \phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right), \quad (4)$$

$$-2 \frac{\partial \phi}{\partial z} = k_t^2 \phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right),$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_t = \omega/k_t$ — волновые числа продольной и поперечной волн.

Скалярные функции $\varphi(r, z)$ и $\phi(r, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \phi + k_t^2 \phi = F \delta(z - z_0) \delta_1(r), \quad (6)$$

где F — момент, направленный по угловому орту, вдоль образующей тора (рис. 1а). $\delta(z)$ — дельта-функция, а $\delta_1(r)$ равна нулю при $r \neq 0$ и обладает свойством

$$2\pi \int \delta_1(r) f(r) r dr = f(0). \quad (7)$$

Правая часть (6) является точечным источником поля SV-волн. Этот источник, в отличие от точечного источника силы, рассматриваемого в работах [1, 2, 4, 6], не излучает продольные Р-волны.

Используем преобразование Фурье—Бесселя

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad (8)$$

$$\phi(r, z) = \int_0^\infty \tilde{\phi}(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi,$$

$$\tilde{\varphi}(\xi, z) = \int_0^\infty \varphi(r, z) J_0(\xi r) r dr, \quad (9)$$

$$\tilde{\phi}(\xi, z) = \int_0^\infty \phi(r, z) J_0(\xi r) r dr,$$

где $J_0(\xi r)$ — функция Бесселя. Пользуясь формулами (5), (8)–(9), получим:

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} + (k_t^2 - \xi^2) \tilde{\phi} = 0. \quad (10)$$

Аналогично из формул (6)–(9) получим

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} + (k_t^2 - \xi^2) \tilde{\phi} = \frac{F}{2\pi} \delta(z - z_0). \quad (11)$$

Из граничных условий (4) при помощи преобразования Фурье—Бесселя (8), (9) получим для $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$ соотношения при $z = \pm h$:

$$(\xi^2 - k_t^2/2) \tilde{\phi} = \xi^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = (\xi^2 - k_t^2/2) \tilde{\phi}. \quad (12)$$

Рассчитаем скачок производной $\partial \tilde{\phi}/\partial z$ при $z = z_0$. Проинтегрируем уравнение (11) в пределах от $(z_0 - \varepsilon)$ до $(z_0 + \varepsilon)$, в результате получим

$$\{\partial \tilde{\phi}/\partial z\}_{z_0+0} - \{\partial \tilde{\phi}/\partial z\}_{z_0-0} = \frac{F}{2\pi}. \quad (13)$$

Сама же функция $\tilde{\phi}$ непрерывна:

$$\tilde{\phi}(\xi, z_0 + 0) = \tilde{\phi}(\xi, z_0 - 0). \quad (14)$$

Фурье-компоненты $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$ ищем в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi, z) = A(\xi) \cos(\varsigma_l z) + C(\xi) \sin(\varsigma_l z), \quad (15)$$

$$-h < z < h,$$

$$\tilde{\phi}(\xi, z) = M(\xi) \cos(\varsigma_l z) + N(\xi) \sin(\varsigma_l z), \quad (16)$$

$$-h < z < z_0,$$

$$\tilde{\phi}(\xi, z) = B(\xi) \sin(\varsigma_l z) + D(\xi) \cos(\varsigma_l z), \quad (17)$$

$$z_0 < z < h, \quad \varsigma_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}, \quad \varsigma_t = \sqrt{k_t^2 - \xi^2}.$$

Подставляя (15)–(17) в формулы (12)–(14), получим систему алгебраических уравнений для коэффициентов A, C, M, N, B, D :

$$(\xi^2 - k_t^2/2)[A \cos(\varsigma_l h) + C \sin(\varsigma_l h)] =$$

$$= \xi^2 \varsigma_l [B \cos(\varsigma_l h) - D \sin(\varsigma_l h)],$$

$$(\xi^2 - k_t^2/2)[A \cos(\varsigma_l h) - C \sin(\varsigma_l h)] =$$

$$= \xi^2 \varsigma_l [M \cos(\varsigma_l h) + N \sin(\varsigma_l h)],$$

$$\varsigma_l [A \sin(\varsigma_l h) + C \cos(\varsigma_l h)] =$$

$$= (\xi^2 - k_t^2/2)[N \sin(\varsigma_l h) + M \cos(\varsigma_l h)],$$

$$\varsigma_l [B \cos(\varsigma_l z_0) - D \sin(\varsigma_l z_0)] -$$

$$- \varsigma_l [M \cos(\varsigma_l z_0) - N \sin(\varsigma_l z_0)] = \frac{F}{2\pi},$$

$$[B \sin(\varsigma_l z_0) + D \cos(\varsigma_l z_0)] =$$

$$= [M \sin(\varsigma_l z_0) + N \cos(\varsigma_l z_0)].$$

Вычислив эти коэффициенты и подставив их в формулы (15)–(17), получим $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$. Формулы (8), где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$ определены указанным способом, являются интегральным представлением поля в твердом слое.

Волны в твердом слое можно разделить на две группы: в одной из них смещения симметричны относительно средней плоскости слоя, т.е. имеют место равенства $u_r(z) = u_r(-z)$, $u_z(z) = -u_z(-z)$, а в другой группе смещения антисимметричны, т.е. $u_r(z) = -u_r(-z)$, $u_z(z) = u_z(-z)$. Используя свойства цилиндрических функций, получим следующие формулы для потенциалов симметричных и антисимметричных волн:

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ \varphi^{(s)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \sin(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ \varphi^{(a)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \sin(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ \varphi^{(a)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) \cos(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi,\end{aligned}$$

где $H_0^{(1)}(\xi r)$ – функция Ханкеля.

Рассчитаем эти потенциалы. Начнем с потенциала $\varphi^{(s)}$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(r, z) &= \frac{F}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q^{(s)}(\xi)}{\Delta^{(s)}(\xi)} \sin(\zeta_l z_0) + \cos(\zeta_l z_0) \right) \times \\ &\times \frac{\sin(\zeta_l z)}{\zeta_l} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}Q^{(s)}(\xi) &= (2k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) - 4\xi^2 \zeta_l \operatorname{tg}(\zeta_l h), \\ \Delta^{(s)}(\xi) &= (k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) + 4\xi^2 \zeta_l \operatorname{tg}(\zeta_l h).\end{aligned}$$

Замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости ξ . Поле $\varphi^{(s)}(r, z)$ получим в виде суммы вычетов в полюсах, лежащих в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(s)}(r, z), \\ \varphi_n^{(s)}(r, z) &= B_n \sin(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ B_n &= \frac{iF}{4} \left\{ \frac{\xi(k_l^2 - 2\xi^2)^2 \sin(\zeta_l z_0)}{\zeta_l \cos^2(\zeta_l h) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta^{(s)}(\xi)} \right\}_{\xi=\xi_n},\end{aligned} \quad (18)$$

где ξ_n – n -й корень уравнения $\Delta^{(s)}(\xi) = 0$.

Аналогично получим потенциал $\varphi^{(a)}$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(a)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(a)}(r, z), \\ \varphi_n^{(a)}(r, z) &= A_n \cos(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ A_n &= -B_n \left\{ \frac{2\xi^2 \zeta_l \cos(\zeta_l h)}{(k_l^2 - 2\xi^2) \cos(\zeta_l h)} \right\}_{\xi=\xi_n}.\end{aligned} \quad (19)$$

Потенциалы $\varphi_n^{(s)}, \varphi_n^{(a)}$ дают n -ю симметричную цилиндрическую моду Лэмба.

Потенциалы антисимметричного поля получим по формулам:

$$\begin{aligned}\varphi^{(a)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(a)}(r, z), \\ \varphi_n^{(a)}(r, z) &= D_n \cos(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ \varphi^{(a)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(a)}(r, z), \\ \varphi_n^{(a)}(r, z) &= C_n \sin(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ D_n &= -\frac{iF}{4} \left\{ \frac{\xi(k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) \cos(\zeta_l z_0)}{\zeta_l \sin(\zeta_l h) \cos(\zeta_l h) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta^{(a)}(\xi)} \right\}_{\xi=\xi_n}, \\ C_n &= D_n \left\{ \frac{2\xi^2 \zeta_l \sin(\zeta_l h)}{(k_l^2 - 2\xi^2) \sin(\zeta_l h)} \right\}_{\xi=\xi_n},\end{aligned}$$

$$\Delta^{(a)}(\xi) = (k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) + 4\xi^2 \zeta_l \operatorname{tg}(\zeta_l h),$$

где ξ_n – n -й корень уравнения $\Delta^{(a)}(\xi) = 0$. Потенциалы $\varphi_n^{(a)}, \varphi_n^{(a)}$ дают n -ю антисимметричную цилиндрическую моду Лэмба. Формулы для потенциалов $\varphi_n^{(s)}$ и $\varphi_n^{(a)}$ не изменяются при замене $z \leftrightarrow z_0$, и поэтому они справедливы во всем твердом слое $-h < z < h$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено поле точечного SV-источника в твердом однородном слое со свободными границами. Это поле характеризуется скалярным и векторным потенциалами. Вследствие осевой симметрии поля векторный потенциал имеет только угловую компоненту. Интегральное представление потенциалов получено методом Фурье–Бесселя. На основе теории вычетов поле этого источника представлено в виде суперпозиции цилиндрических мод Лэмба. Рассчитаны амплитуды этих мод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулин А.В., Тюриков Л.Г. Поле точечного источника в упругой однородной анизотропной среде // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 741–747.
2. Заславский Ю.М., Заславский В.Ю. Анализ акустического поля, возбуждаемого виброисточником в упругом слое и окружающей среде // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 845–852.
3. Кузнецов С.В., Терентьева Е.О. Плоская внутренняя задача Лэмба: волны в эпицентральной зоне от вертикального силового источника // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 387–399.
4. Киселев А.П., Тагирджанов А.М. Парадоксальные свойства нестационарных полей точечных источников в изотропной упругой среде // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 428–431.

5. *Nealy J.L., Collis J.M., Frank S.D.* Normal mode solutions for seismo-acoustic propagation resulting from shear and combined wave point sources // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. EL95.
6. *Yuxiang Dai, Shouguo Yan, Bixing Zhang.* Acoustic Field Excited by Single Force with Arbitrary Direction in Semi-Infinite Elastic Space // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. № 3. P. 235–245.
7. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.
8. *Аки К., Ричардс П.А.* Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 520 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
10. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
11. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
12. *Бреховских Л.М.* О волноводных явлениях в твердых слоистых средах с непрерывно изменяющимися параметрами // *Акуст. журн.* 1968. Т. 14. № 2. С. 194.